Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie na středních školách

Plzeň, 2020

Tereza Supíková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem „Tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie na středních školách“ vypracovala pod vedením vedoucí diplomové práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne ....

Tereza Supíková

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování vedoucí mé diplomové práce, paní RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D., především za její cenné rady a odborný dohled nad mou prací, ale také za vstřícnost, ochotu a oteřenost novým nápadům při konzultacích.

Dále bych chtěla poděkovat Mateji Supíkovi, díky němuž mohla vzniknout kapitola o 3D tisku. Poskytl 3D tiskárnu a zajistil přípravu modelů před tiskem. Děkuji za odborný dohled nad tiskem modelů a poskytnutí cenných informací.

Také bych chtěla poděkovat Zdeňku Bečvářovi za kamerový záznam tisku řezu na jehlanu, následný střih záznamu a vytvoření videa.

V neposlední řadě patří poděkování mojí rodině za velkou podporu při psaní diplomové práce.

Abstrakt

Prostorové vidění není samozřejmostí, a tak může být řešení stereometrických úloh pro některé žáky středních škol náročné. Diplomová práce s názvem „Tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie na středních školách“ se soustředí na jednu oblast stereometrie, a to na řezy těles rovinou. V práci byly vytyčeny rozmanité cíle, s jednou společnou ideou, vnést do výuky stereometrie něco nového - obohatit výuku o zajímavé modely řezů na tělese, propojit klasickou výuku řezů těles s moderními technologiemi, vytvořit soubor příkladů s detailním popisem postupu řešení, ukázat možnosti využití programu 3D GeoGebra při výuce stereometrie, připravit vhodné motivační příklady z praxe a v neposlední řadě ověřit vhodnost navržených pomůcek ve výuce.

Diplomová práce tedy může být inspirací pro žáky i učitele. Obsahuje soubor příkladů, který je určen primárně pro studenty středních škol, kteří v problematice řezů těles tápou. Postup řešení každého příkladu je vysvětlen, odůvodněn a doplněn obrázkem. Součástí práce jsou i pracovní listy se zadáním všech těchto příkladů. Každý příklad je navíc namodelován v programu 3D GeoGebra, kde lze odkrývat řešení krok po kroku. Příklady vytvořené v programu 3D GeoGebra mohou být vhodným podkladem pro učitele při výuce řezů těles. Práce dále přináší příklady pro zvídavé studenty, ať už se jedná o příklady s parametrem, jejichž řešení se opírá o dynamický software 3D GeoGebry, nebo o pseudo-reálné příklady, k jejichž vyřešení žáci využívají znalosti řezů těles.

V rámci práce bylo vyrobeno několik modelů, některé z nich byly vytištěny na 3D tiskárně. Proces vzniku těchto modelů je popsán v jedné z kapitol. Text je doplněn fotografiemi pořízenými během tisku. Součástí práce je i čtyřminutové video dokumentující průběh tisku řezu na jehlanu. Příklady spolu s modely i tímto videem byly představeny žákům třetího ročníku gymnázia během čtyř vyučovacích hodin. Reflexe studentů proběhla pomocí dotazníku, který je v práci vyhodnocen.

Abstract

Spatial vision is not obvious for everyone; thus, solving stereometric problems can be difficult for some secondary school students. This thesis on “Creation of Interactive Aids for Teaching Stereometry at Secondary Schools” focuses on one part of stereometry – sections of solids on a plane. Various aims were set in the thesis possessing one common idea: to bring something new to teaching stereometry – to enrich teaching of interesting models, connect classic teaching with modern technologies, create a set of examples with detailed description of the solution procedure, show possibilities of using 3D GeoGebra in stereometry teaching, prepare suitable motivational real-life examples and verify the suitability of the proposed teaching aids.

This thesis can be useful for both students and teachers. The thesis contains a set of examples which are intended for students of secondary schools who do not understand the issue properly. A solution procedure for each example is explained, justified and completed with a picture. All the examples are included in worksheets, which are also part of the work. Each example is also created in 3D GeoGebra and it is possible to uncover a step-by-step solution. Examples created in the 3D GeoGebra program can be suitable material for teachers. The thesis also contains examples for inquisitive students – there are examples with parameter (these examples use 3D GeoGebra as a dynamic software program) and pseudoreal examples.

In the context of this thesis, several models were created. Some of them were printed on a 3D printer. The process of creating these models is described in one of the chapters. The text is completed by photos taken while 3D printing. A four-minute-long video is also part of the thesis, documenting the process of model printing. All aforementioned examples, models and the model-printing video were presented to third-grade students during four teaching lessons. Reflections of students on the use of these methods were carried out using a questionnaire which is evaluated in the thesis.

Obsah

1 Přehled a porovnání výuky stereometrie na různých typech středních škol 7

1.1 Gymnázium Blovice . . . 7

1.1.1 RVP a ŠVP . . . 7

1.1.2 Konzultace s učiteli . . . 9

1.2 Střední průmyslová škola strojnická . . . 9

1.2.1 RVP a ŠVP . . . 9

1.2.2 Konzultace s učiteli . . . 10

1.3 Střední průmyslová škola elektrotechnická . . . 10

1.3.1 RVP a ŠVP . . . 11

1.3.2 Konzultace s učiteli . . . 11

1.4 Střední odborné učiliště stavební . . . 12

2 Přehled her a výukových programů pro podporu prostorové představivosti 13

3 Teoretický základ 20

3.1 Pravidla pro kreslení řezů těles . . . 22

3.2 Pomůcky pro řešení úloh . . . 24

4 Návrh a tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie 28

4.1 Soubor příkladů . . . 29

4.2 Dynamické příklady . . . 62

5 3D tisk 77

6 Využití a ověření navržených pomůcek a programů ve výuce 89

7 Sestavení souboru motivačních úloh a ukázek pro výuku stereometrie 93

7.1 Úloha 1: Trámy v podkrovní místnosti . . . 93

7.2 Úloha 2: Rohové schodiště . . . 97

7.3 Úloha 3: Architektura . . . 102

8 Závěr 109

9 Dodatky diplomové práce **111**
9.1 Dotazník 111
9.2 Pracovní listy 115

1 Přehled a porovnání výuky stereometrie na různých typech středních škol

V rámci této kapitoly budeme srovnávat výuku stereometrie na středních školách různého typu se zaměřením na obsah i formu výuky. Cílem tohoto srovnání je získat informace o tom, jak se aktuálně na školách stereometrie vyučuje - zda se učitelé přiklání ke klasické formě výuky (rýsování pomocí pravítka a kružítka) nebo zda využívají počítačové programy pro podporu prostorové představivosti. Co do obsahu nás bude zajímat, s jakými typy příkladů jsou žáci seznamováni, zda se dostanou k řezům na jehlanu či hranolu, nebo pracují pouze s krychlí. V neposlední řadě se budeme snažit zjistit, zda se žáci seznámí i s různými motivačními příklady nebo zda řeší příklady z praxe.

K tomuto srovnání bylo vybráno Gymnázium Blovice, Střední průmyslová škola strojnická v Plzni, Střední průmyslová škola elektrotechnická v Plzni a Střední odborné učiliště stavební v Plzni, a to z toho důvodu, aby byla pokryta celá škála středních škol. V rámci odborných středních škol byly vybrány právě tyto, neboť mohou být přínosné vzhledem k zaměření diplomové práce. Byli osloveni ředitelé daných škol a byli požádáni o povolení tohoto srovnání. Díky jejich vstřícnosti bylo možno konzultovat s tamními učiteli matematiky na téma výuky stereometrie na daných školách. Na základě těchto rozhovorů byly sepsány následující podkapitoly „Konzultace s učiteli“, jimž vždy předchází obsah rámcového vzdělávacího programu (dále jen RVP) a školního vzdělávacího programu (dále jen ŠVP) dané školy v oblasti stereometrie .

1.1 Gymnázium Blovice

Gymnázium Blovice [6] je jedinou školou poskytující gymnaziální vzdělání na okrese Plzeň-jih. Žákům nabízí jak osmiletý, tak čtyřletý obor zakončený maturitní zkouškou.

1.1.1 RVP a ŠVP

V rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia lze najít stereometrii v oblasti matematika a její aplikace. Obsah RVP, co se stereometrie týká, udává tabulka 1.

Můžeme si všimnout, že v RVP pro gymnázia je obsaženo téma řezů těles (konkrétně jehlanu a hranolu), a tedy toto téma musí zahrnovat i ŠVP, jak dokazuje následující tabulka 2 uvádějící část školního vzdělávacího programu Gymnázia Blovice týkající se stereometrie.

Výsledky vzdělávání	Učivo
- používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary - určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky - využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému - zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles - řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí	- geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání

Tabulka 1: RVP gymnázium - matematika a její aplikace; oblast stereometrie

Školní výstupy	Konkretizované učivo
- určuje vzájemnou polohu útvarů v prostoru - používá geometrické pojmy a matematickou symboliku - zásady volného rovnoběžného promítání využije při rýsování hranolů a jehlanů, sestrojí rovinný řez těchto těles - při řešení prostorového problému využívá náčrt - využívá vlastnosti geometrických útvarů v prostoru a na jejich základě útvary třídí - používá trigonometrii při řešení metrických úloh v prostoru - určuje objemy a povrchy těles a řeší úlohy motivované praxí	- základní pojmy geometrie v prostoru (bod, přímka, rovina, vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin) - volné rovnoběžné promítání jako metoda při názorném zobrazování těles a její využití při zobrazení hranolu a jehlanu - rovinné řezy hranolu a jehlanu - polohové vlastnosti útvarů v prostoru - metrické vlastnosti útvarů v prostoru - povrchy těles - objemy těles

Tabulka 2: ŠVP Gymnázium Blovice - matematika; oblast stereometrie

1.1.2 Konzultace s učiteli

Na gymnáziu v Blovicích se téma stereometrie vyučuje ve třetím ročníku a to klasickou formou bez použití počítačových programů. S GeoGebrou mají žáci možnost se seznámit pouze v předmětu Informatika a výpočetní technika. V rámci stereometrie se nejprve naučí kreslit tělesa ve volném rovnoběžném promítání, dále se učí základním vztahům mezi body, přímkami a rovinami, poté následují řezy těles a nakonec se probírají metrické úlohy. Nejvíce nás v rámci této diplomové práce zajímá téma řezů těles, kterému je na gymnáziu věnováno přibližně šest vyučovacích hodin. Nejčastěji se řezy provádí na krychli a pravidelném čtyřbokém jehlanu, žáci si ale vyzkouší řezy i na dalších tělesech, jako je třeba pravidelný šestiboký hranol, či pětiboký jehlan. Postupuje se od nejjednodušších řezů, až po ty složité.

Pro názornost se využívají při výuce drátěné modely krychlí, jehlanů a jiných těles. Motivační příklady z praxe do výuky zařazeny nejsou, především z časových důvodů.

1.2 Střední průmyslová škola strojnická

Střední průmyslová škola strojnická v Plzni [15] nabízí ke studiu jak čtyřleté obory zakončené maturitní zkouškou, tak tříleté obory zakončené závěrečnou zkouškou (výuční list). Mezi čtyřleté obory se řadí Strojírenství, Elektrotechnika-Mechatronika, Mechanik strojů a zařízení a Mechanik seřizovač. Jako tříletý obor je nabízený obor Zámečník a Obráběč kovů.

1.2.1 RVP a ŠVP

Obsah RVP-strojírenské práce oblast matematického vzdělání (část stereometrie) uvádí tabulka 3.

Výsledky vzdělávání	**Učivo**
- určí vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin - rozlišuje základní tělesa a určí povrch a objem krychle, kvádru a válce	- základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru - tělesa

Tabulka 3: RVP strojírenské práce - matematické vzdělání; oblast stereometrie

Všimněme si, že rámcový vzdělávací program vymezuje, co se stereometrie týká, pouze metrické a polohové úlohy, a dále výpočty povrchů a objemů základních těles.

Řezy těles jako takové se v RVP nenachází, což potvrdila i osobní konzultace s učiteli matematiky, která je popsána v následující podkapitole.

1.2.2 Konzultace s učiteli

Na Střední průmyslové škole strojnické bylo možno mluvit hned se dvěma učitelkami matematiky zároveň a obě se shodly, že výuku vedou spíše klasickým způsobem, tedy pomocí křídy a tabule. GeoGebru při výuce nepoužívají a upřednostňují náčrtky těles na tabuli z toho důvodu, že prý jsou studenti nuceni načrtnout si těleso dobře, aby v něm pak viděli daný problém (ať už se jedná o odchylky přímek, vzájemnou polohu dvou přímek a jiné). Pokud si prý žáci dobře těleso nenakreslí, nejsou schopni dále úlohu řešit. Učitelky kladly důraz na schopnost studentů tělesa správně nakreslit. Problémem mnohdy bývá načrtnout i krychli ve volném rovnoběžném promítání. V takovém případě prý není GeoGebra nutná a je spíše potřeba, aby žáci získali určitý cvik v kreslení těles.

Ohledně řezů těles, na které se tato práce specializuje, jsme se nesetkali příliš s úspěchem. V matematice se prý vyučují okrajově - jsou probírány jen nejjednodušší typy řezů a to pouze na krychli. Ohledně stereometrie se zaměřují především na metrické úlohy - tedy na určení vzdálenosti bodu od roviny, vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek, odchylky dvou přímek, odchylky přímky od roviny a jiné.

Naskytla se i příležitost mluvit s učitelkou technického kreslení, v němž je prostor pro řezy těles mnohem větší. Žáci v prvním ročníku absolvují tento předmět, kde se naučí kreslit různé typy součástek klasickým způsobem, tedy rýsováním na papír. Získají tím určitou dovednost a prostorovou představivost a osvojí si základní pravidla pro kreslení řezů různými tělesy. V druhém ročníku tyto zkušenosti rozvíjí v počítačovém softwaru AutoCAD a ve třetím ročníku se dále učí pracovat s programem Autodesk Inventor.

V rámci předmětu Technické kreslení pracují žáci s učebnicemi [7] a [16], s nimiž jsme byli seznámeni a které se tak mohou stát zdrojem některých motivačních příkladů pro výuku stereometrie uvedených v kapitole 7.

1.3 Střední průmyslová škola elektrotechnická

Střední průmyslová škola elektrotechnická v Plzni [14] nabízí studentům tři obory - Elektrotechnika, Informační technologie a Technické lyceum. Jedná se o čtyřleté obory zakončené maturitní zkouškou.

1.3.1 RVP a ŠVP

Všechny obory se řídí stejnojmennými rámcovými vzdělávacími programy, tedy RVP - Elektrotechnika, RVP - Informační technologie a RVP - Technické lyceum. Stereometrii najdeme v oblasti matematického vzdělání a pro všechny tři obory je náplň RVP (co se stereometrie týká) stejná. Požadavky na vzdělání ohledně stereometrie vymezuje tabulka 4.

Výsledky vzdělávání	**Učivo**
- určuje vzájemnou polohu dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, odchylku dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, vzdálenost bodu od roviny - určuje povrch a objem základních těles s využitím funkčních vztahů a trigonometrie	- základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru - tělesa

Tabulka 4: RVP - Elektrotechnika, Informační technologie a Technické lyceum - matematické vzdělání; oblast stereometrie

Opět si můžeme všimnout, že řezy těles jako takové se v předmětu matematika nevyučují. V rámci stereometrie jsou upřednostňovány polohové a metrické vlastnosti a určení povrchů a objemů těles. Nicméně vzhledem k zaměření školy se studenti s řezy těles v určité podobě přece jenom setkají - v oborech Elektrotechnika a Technické lyceum. V oboru Elektrotechnika v oblasti technického kreslení mají žáci zahrnuto zobrazování řezů a základy deskriptivní geometrie. V oboru Technické lyceum je oblast aplikovaná matematika, kde žáci zobrazují ve volném rovnoběžném promítání základní tělesa, sestrojí a zobrazí řezy těchto těles nebo jejich průnik s přímkou.

1.3.2 Konzultace s učiteli

Konzultace s učitelkou matematiky opět potvrdila, že na řezy těles není v hodinách matematiky vyhrazené místo. V rámci stereometrie se věnují polohovým a metrickým úlohám a výpočtu povrchů a objemů těles. Pro názornost řešení polohových úloh využívají v hodinách matematiky magnetickou stavebnici Geomag, viz kapitola 2. A tak kromě většího (například drátěného) modelu před tabulí mají žáci díky stavebnici možnost vidět model přímo před sebou, pohybovat si s ním a otáčet jej podle potřeby zadané úlohy. Pomocí magnetických tyčinek a kuliček si sestaví krychli nebo jehlan.

Tyto modely slouží pro zlepšení prostorové představivosti žáků a pomohou jim při řešení zadaného stereometrického problému.

Další konzultace proběhla s paní učitelkou technického zobrazování (technické dokumentace), které se vyučuje v rámci oboru Technické lyceum. Řezy jako takové se ovšem nevyučují ani v rámci těchto předmětů a to z toho důvodu, že je malá hodinová dotace. Žáci se sice s řezy těles rovinou setkají, ale pouze jako s vedlejším produktem výuky různých typů zobrazování těles.

1.4 Střední odborné učiliště stavební

V RVP-stavební práce v oblasti matematického vzdělání lze najít stereometrii tak, jak uvádí tabulka 4

Výsledky vzdělávání	**Učivo**
- určí vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin; - rozlišuje základní tělesa a určí povrch a objem krychle, kvádru a válce	- výpočet povrchů a objemů těles - základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru - tělesa

Tabulka 5: RVP stavební práce - matematické vzdělání; oblast stereometrie

Tedy oproti výše uvedeným středním odborných školám jsou požadavky na studenta v oblasti stereometrie nižší, řezy těles se nevyučují vůbec. Je zde kladen důraz především na určení povrchů a objemů základních těles. Konzultace s učiteli matematiky na Středním odborném učilišti stavebním v Plzni [13] ani neproběhla, neboť jsme byli upozorněni panem ředitelem, že stereometrie je pouze okrajově zmiňována ve třetím ročníku v rozsahu přibližně čtyř vyučovacích hodin.

Shrnutí

Měli jsme možnost konzultovat výuku stereometrie (se zaměřením na řezy těles) s několika učiteli matematiky na různých typech středních škol. Z výše popsaného vyplývá, že řezy těles jako takové se učí výhradně na gymnáziích. Na středních odborných školách se v rámci stereometrie vyučují především polohové a metrické úlohy a dále povrchy a objemy těles. S řezy těles se žáci středních odborných škol mají možnost seznámit pouze v odborných předmětech jako je například Technické kreslení. Na středních odborných učilištích je stereometrie pouze jako okrajové téma s velmi malou hodinovou dotací.

2 Přehled her a výukových programů pro podporu prostorové představivosti

V této kapitole se zaměříme na hry, ať už společenské nebo počítačové, různé hlavolamy či výukové programy, které slouží pro podporu prostorové představivosti. Uvedeme přehled několika her, díky nimž si mohou žáci ve svém volném čase mimo jiné zlepšovat prostorové vidění, kterého je pro řešení stereometrických úloh (včetně řezů těles rovinou) zapotřebí.

3D Piškvorky

- Typ: Společenská hra
- Věk: 3+
- Počet hráčů: 2
- Popis:

Obrázek 1: 3D Piškvorky

Hru piškvorky hrál na čtverečkovém papíře asi každý. Tentokráte ovšem máme jednu dimenzi navíc, což hru poněkud komplikuje. Způsobů, jak vytvořit řadu čtyř korálků jedné barvy je mnohem více. Hra je určena pro dva hráče. Jeden má bílé korálky, druhý hnědé. Hráč, který je na řadě, umístí právě jeden korálek své barvy do hracího pole, které tvoří 16 svislých tyček umístěných na dřevěné desce do čtverce 4 x 4. Hráči se střídají v umisťování korálků. Cílem je vytvořit řadu čtyř korálků své barvy dříve než protihráč. Na jednu tyčku se vejdou právě čtyři korálky. Hrací pole si tak můžeme představit jako krychli 4 x 4 x 4. Vítěznou řadou tak kromě vodorovné nebo svislé řady korálků mohou tvořit i korálky ležící na úhlopříčkách krychle, ať už stěnových nebo tělesových. Hra 3D piškvorky je uvedena na obrázku 1.

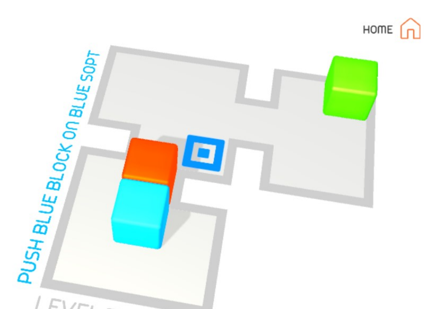
Rubikova kostka

Obrázek 2: Rubikova kostka

- Typ: Hlavolam
- Věk: 6+
- Počet hráčů: 1
- Popis:

Rubikova kostka, viz obrázek 2, je hlavolam tvaru krychle, nejčastěji 3 x 3 x 3, která je složena z 26 menších krychliček. Na místě krychličky, která by ležela uvnitř krychle uprostřed (na průsečíku tělesových úhlopříček) je umístěný mechanismus, díky němuž je možné s rovinami dílčích kostiček otáčet. Kostka má tři vodorovné a tři svislé roviny tvořené vždy devíti dílčími kostičkami. Stěny kostiček jsou obarveny šesti různými barvami, tolik je stěn velké krychle. Cílem je otáčet rovinami kostiček tak, aby každá stěna velké krychle byla obarvena jednou barvou.

Jelly Sokoban



Obrázek 3: PC hra: Jelly Sokoban

- Typ: PC hra - online
- Věk: neuveden
- Počet hráčů: 1
- Popis:

Počítačová online hra Jelly Sokoban v 608 kolech nabízí mnoho možností, jak ověřit svou prostorovou představivost a logické uvažování. Ve hře je vždy jedna oranžová a dvě modré krychle. Oranžovou krychli ovládá hráč pomocí šipek na klávesnici. Krychle se pohybuje dopředu, dozadu, doprava a doleva vždy o jedno místo tím, že se překlopí přes jednu hranu své dolní podstavy. Všechny krychle jsou umístěné na hracím poli, které se s každým kolem mění (princip bludiště). V poli jsou vždy čtvercem vyznačená dvě místa, kam je nutné umístit dvě modré krychle (pořadí i párování je libovolné).

Pohyby oranžové krychle se snaží hráč umístit dvě modré krychle na tyto vyznačené čtverce. Platí při tom určitá pravidla. Přirazíme-li modrou krychli pohybem oranžové krychle ke stěně, nepovede se nám ji od stěny dostat, můžeme ji pouze posouvat při této stěně. Umístíme-li modrou krychli do rohu, neexistuje způsob, jak s krychlí dále hýbat. Dále platí, že oranžová krychle dokáže vždy posouvat jenom jednu modrou krychli. Jsou-li modré krychle umístěné za sebou, pak je oranžovou krychlí nikam neposuneme. Pokud se dostaneme do „mrtvého bodu hry“, stačí kliknout na tlačítko „restart“ v levém horním rohu a hra začíná od znova - krychle jsou opět ve výchozím postavení. Umístíme-li modrou krychli na požadované místo označené modrým čtvercem, pak krychle změní barvu na zelenou, viz obrázek 3. Jsou-li obě modré krychle umístěny správně (jsou zelené), pak dané kolo úspěšně končí a otevírá se další.

Tetris

- Typ: PC hra - online
- Věk: neuveden
- Počet hráčů: 1
- Popis:

Obrázek 4: PC hra: Tetrix

Hra Tetris existuje v desítkách různých provedení. Na obrázku 4 je ukázka jedno z nich s názvem Tetrix. Hracím polem je obdélník, jehož šířka je zpravidla menší než výška. Shora padá 5 různých verzí hracích kostek složených vždy ze 4 malých čtverečků. Hráč ovládá tyto kostky pomocí šipek. Šipkou nahoru lze danou hrací kostku (dříve než dopadne) otáčet. Šipkami vlevo a vpravo umisťuje hráč kostky do hracího pole. Šipkou dolů může urychlit pád hrací kostky, pokud si je jistý jejím správným umístěním. Jakmile kostka dopadne, objeví se nahoře v hracím poli kostka nová. Při umisťování dané hrací kostky lze vedle hracího pole ve většině verzí hry Tetris sledovat, jaká hrací kostka bude po této následovat. Jakmile kostičky vyplní celý řádek, pak se tento řádek smaže a všechny kostičky umístěné nad ním se posunou o jeden řádek níž. Za každý vymazaný řádek se udělují body. Hráč staví zeď z kostiček a jeho cílem je získat co nejvíce bodů, tj. co nejdéle stavět zeď a umazávat řádky. Hra končí, pokud vystavěná zeď dosáhne horního okraje hrací plochy.

Mahjongg Dark Dimensions

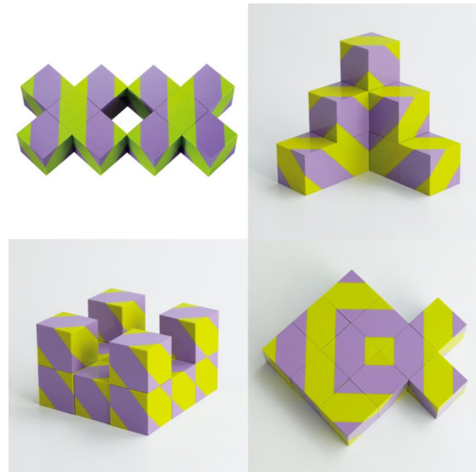
- Typ: PC hra - online
- Věk: neuveden
- Počet hráčů: 1
- Popis:

Obrázek 5: PC hra: Mahjongg Dark Dimensions

Mahjongg Dark Dimensions je zajímavá hra vyžadující především bystrost, rychlost, obratnost, dobrou paměť a samozřejmě prostorové vidění. V prvním kole se objeví krychle složená ze 4 x 4 x 4 malých krychliček, na nichž jsou různé symboly, které jsou ale uvedeny jen na bočních stěnách krychliček (horní a dolní podstavy dílčích krychliček jsou bílé, bez symbolu), viz obrázek 5. Každá boční stěna krychličky nese jeden symbol. S velkou krychlí je možné otáčet na levou a pravou stranu pomocí šipek na klávesnici nebo kliknutím na šipky v dolním okraji hrací plochy. Otáčení krychle je žádoucí, aby hráč mohl sledovat symboly na krychličkách. Hráč používá myš k označení krychliček. Cílem je najít krychličky se stejným symbolem a označit je do páru (obdoba pexesa). Pokud se tak stane, krychličky zmizí, čímž odkryjí další krychličky, které před tím vidět nebyly. Jsou ovšem stanoveny jisté podmínky. Do páru lze vybrat pouze krychličky se stejným symbolem a takové, aby ani jedna nebyla blokována zprava ani zleva jinými krychličkami (shora a zdola mohou být blokovány). Hraje se o čas. Hráč má celkový čas 2 minuty a 55 vteřin. Cílem je stihnout za tento čas co nejvíce kol. V každém kole je z krychliček seskládán jiný prostorový útvar, vše ostatní ale platí stejně. V každém kole jsou v daném útvaru obsaženy dvě fialové krychličky, na nichž místo symbolu běží čas. Čím dříve během daného kola hráč tuto dvojici vybere, tím více času je mu přidáno. Hra končí, jakmile vyprší čas. Hráč vždy začíná od prvního kola.

Vzorované kostky „Les“

- Typ: Hlavolam
- Věk: 3+
- Počet hráčů: 1 i více
- Popis:



Obrázek 6: Vzorované kostky „Les“, zdroj [18]

Pro nejmenší může být vhodná na podporu prostorové představivosti i hra „Vzorované kostky“ v různých barevných provedeních. Podle barevných kombinací jsou pak kostky pojmenovány např „Les“, viz obrázek 6 nebo „Oceán“. Jedná se o 16 kostek o rozměrech 5 x 5 x 5 cm, na jejichž stěnách jsou dvěma barvami vytvořené různé útvary. Součástí hry je i 6 vzorových karet, podle nichž mohou děti skládat kostky tak, aby vznikl požadovaný obrazec. Mimo vzorové karty však mohou děti skládat i obrazce vlastní. Hra podporuje prostorovou představivost a kreativitu.

Dřevěné hry na představivost a logické myšlení

- Typ: Hlavolamy
- Věk: 7+
- Počet hráčů: 1
- Popis:

Obrázek 7: Dřevěné hry na představivost a logické myšlení, zdroj [19]

Existuje mnoho hlavolamů, které slouží pro podporu prostorové představivosti a logického uvažování. V dřevěném provedení jsou uvedeny tři příklady takových hlavolamů na obrázku 7. Jedním z nich je tangram, čtverec rozdělený na 7 částí, s nimiž lze podle předlohy nebo podle vlastní kreativity sestavovat různé obrazce. Druhým je kuličková pyramida. Hlavolam obsahuje 6 částí - kuličky slepené v různé útvary. Cílem je poskládat z těchto segmentů trojhrannou pyramidu neboli čtyřstěn. Posledním hlavolamem na obrázku 7 je krychle, která je složena opět z různých segmentů - sedmi kostiček. Cílem je poskládat tyto kostičky tak, aby vytvořily krychli.

Minecraft

- Typ: PC hra
- Věk: 7+
- Počet hráčů: dva režimy - 1 hráč nebo více hráčů
- Popis:

Obrázek 8: Minecraft

Počítačová hra Minecraft je hra podporující logické myšlení, kreativitu a prostorovou představivost. Podle [8] lze hrát ve dvou režimech - jeden hráč nebo více hráčů. Herní svět se skládá ze samých kostek a hráč má téměř neomezené možnosti. Může z kostek tvořit, co se mu zlíbí, může stavět, budovat, farmařit či obchodovat, hra totiž nemá konkrétní cíl. Ten si každý hráč vytyčí sám. Ve hře se střídá den a noc. Minecraft má 5 herních módů - přežití, nemilosrdná hra, tvořivá hra, dobrodružná hra a divák. Výběr módu rozhoduje například o tom, zda je hráč nesmrtelný, nebo zda má pouze jeden život. Hru lze hrát ve čtyřech stupních obtížnosti - mírumilovná, lehká, normální nebo těžká hra. Obtížnost si může hráč měnit průběžně v nastavení hry. Náročnost hry má vliv například na to, zda hráč má hlad, jak velká zranění mu mohou způsobit nepřátelé, zda se ve tmě objevují příšery, které mohou na hráče zaútočit atd. Na obrázku 8 jsou ukázky toho, co lze například ve hře vybudovat.

Cubissimo

- Typ: Hlavolam
- Věk: 7+
- Počet hráčů: 1

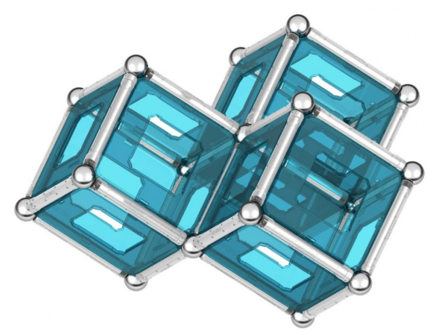
- Popis:

Hra Cubissimo je hlavolam, jehož cílem je sestavit krychli, viz obrázek 9. K dispozici je 7 různých barevně odlišených částí, které sestávají z různě uspořádaných malých krychliček. Součástí hry je 30 kartiček, na nichž je vždy nakreslena výchozí pozice, tedy rozestavěná krychle. Úkolem hráče je vyjít z této pozice a dostavět soustavu kostiček tak, aby vznikla krychle.

Obrázek 9: Cubissimo, zdroj [2]

Stavebnice Geomag

- Typ: Výukový materiál, hra
- Věk: 8+
- Počet hráčů: 1
- Popis:



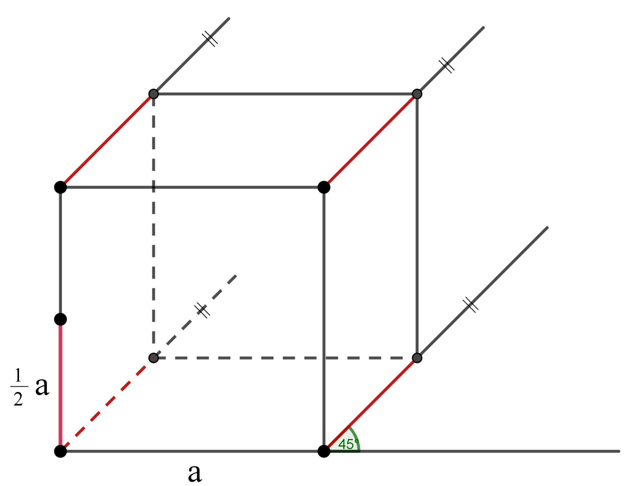
Obrázek 10: Geomag Pro-L 110, zdroj [5]

Stavebnice Geomag existuje v několika různých verzích. Všechny verze ale mají jedno společné. Jedná se o magnetickou stavebnici. Verze se liší například barevným provedením nebo počtem součástek ve stavebnici, podle čehož se odvíjí i cena. Na obrázku 10 je například stavebnice Geomag Pro-L 110. Číslo u dané verze názvu hry vždy určuje, kolik součástek je ve stavebnici obsaženo. Tato verze obsahuje 36 stříbrných magnetických tyčinek, 30 ocelových kuliček (potažených bronzem), 20 trojúhelníků, 18 čtverců a 6 pětiúhelníků, tedy celkem 110 součástek. Tyčinky lze spojovat pomocí kuliček a vytvářet tak různé obrazce, jejichž výplní mohou být právě plastové trojúhelníky, čtverce nebo pětiúhelníky. Čím více je součástek, tím více je možností pro vytváření útvarů. Stavebnice může posloužit jako zábava nebo odreagování, nicméně slouží i jako výukový materiál ve školách, viz kapitola 1.3.2. Žáci mohou mít jednu stavebnici do lavice. Pokud řeší metrické nebo polohové stereometrické úlohy, mohou si ze stavebnice postavit příslušný model, který může být nápomocný při řešení.

3 Teoretický základ

V této kapitole si vymezíme teoretický základ, o nějž se budeme opírat v následujících kapitolách při modelování konkrétních příkladů. Stereometrie, jako oblast středoškolského učiva obsahuje několik kapitol. V úvodu se žáci seznámí se základními tělesy, jakými jsou krychle, kvádr, hranol a jehlan. Poté se naučí kreslit tělesa v tzv. volném rovnoběžném promítání. Další kapitolou jsou polohové vlastnosti, kde se žáci naučí určovat základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami. Určí vzájemnou polohu dvou přímek, vzájemnou polohu přímky a roviny a vzájemnou polohu dvou rovin. Po polohových vlastnostech následují řezy těles rovinou. A právě tato kapitola je středem zájmu této diplomové práce. Na řezy těles rovnou navazují metrické vlastnosti, které zahrnují odchylku přímek, kolmost přímek a rovin, odchylky přímek a rovin, vzdálenost bodu od přímky a od roviny, vzdálenost přímek a rovin. Stereometrie se většinou uzavírá kapitolou povrchy a objemy těles.

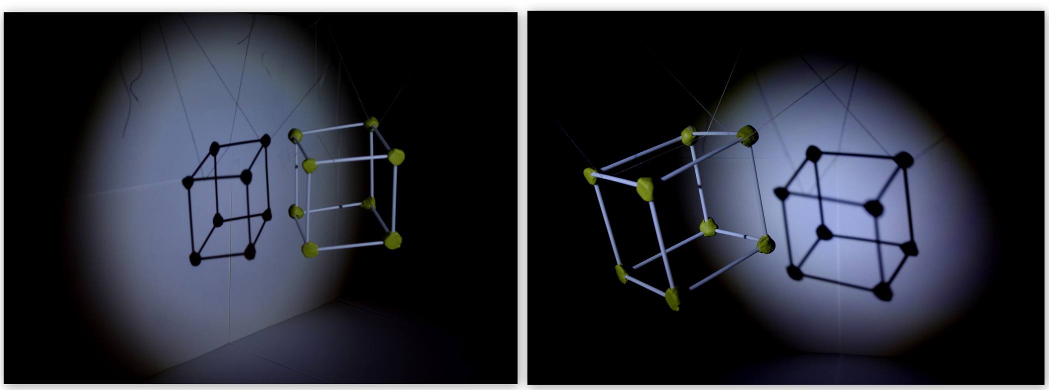
Jak již bylo zmíněno, tato práce se soustředí na kapitolu řezy těles rovinou. Pojďme se nyní podívat na některé základní pojmy a vlastnosti v této kapitole uplatňované.



Obrázek 11: Krychle o délce strany a ve volném rovnoběžném promítání

Ve stereometrii se zabýváme objekty Eukleidovského prostoru E_3, které ovšem potřebujeme přenést do prostoru E_2. Jinými slovy trojrozměrný objekt chceme zobrazit na dvojrozměrný papír. Způsob, kterým na středních školách zobrazujeme tělesa, nazýváme **volné rovnoběžné promítání**. Zvolíme si rovinu, na níž budeme body zobrazovat a kterou nazveme **průmětnou**. Nejčastěji volíme jako průmětnu svislou rovinu. Každá rovina rovnoběžná s průmětnou se nazývá **průčelná rovina**. Tělesa nejčastěji zobrazujeme tak, aby hrana nebo stěna ležela v průčelné rovině - tzv. průčelná poloha. Pak platí, že hrany (stěny) rovnoběžné s průmětnou se promítají ve skutečné velikosti a hrany kolmé k průmětně se promítají pod úhlem 45° a zkracují se na polovinu, jak ukazuje obrázek 11.

Obrázek 12 demonstruje experiment rovnoběžného promítání. Model krychle zavěšený na niti je umístěný asi 20 centimetrů před svislou stěnou, která slouží jako průmětna. Směr promítání si volíme natočením baterky, kterou používáme jako zdroj světla. Chceme-li demonstrovat rovnoběžné promítání, musíme zajistit, aby baterka byla dostatečně daleko od tělesa, tedy aby bylo možné považovat paprsky světla za rovnoběžné. Poznamenejme, že pokud bychom baterku nechali příliš blízko u tělesa, bude se jednat o promítání středové, kterým se nyní ale nezabýváme. Stín, který vzniká na průmětně, je vlastně obraz daného tělesa v rovnoběžném promítání. Volné rovnoběžné promítání je speciálním případem rovnoběžného promítání. Pro určité natočení baterky tak lze docílit i demonstrace volného rovnoběžného promítání.



Obrázek 12: Model rovnoběžného promítání krychle na svislou průmětnu

Pojem **incidence** vyjadřuje vztah mezi geometrickými útvary (body, přímky, roviny) a znamená „ležet na“. Je-li tedy přímka incidentní s rovinou, pak přímka v dané rovině leží.

Často se budeme setkávat s pojmem **průsečnice** rovin. Jedná se o přímku, která je společná oběma rovinám, neboli leží v obou rovinách zároveň.

3.1 Pravidla pro kreslení řezů těles

Při kreslení řezů těles rovinou uplatňujeme tři pravidla. V následujících kapitolách při kreslení řezů a vytváření modelů se budeme často na tato pravidla odkazovat. Pojďme se s nimi nyní seznámit.

1. **Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.**

   První pravidlo jinými slovy říká, že leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Toto pravidlo bývá uplatňováno při kreslení těch nejjednodušších řezů na tělese.

2. **Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.**

   Druhé pravidlo říká, že jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, pak jsou průsečnice roviny řezu s rovinami stěn rovnoběžné.

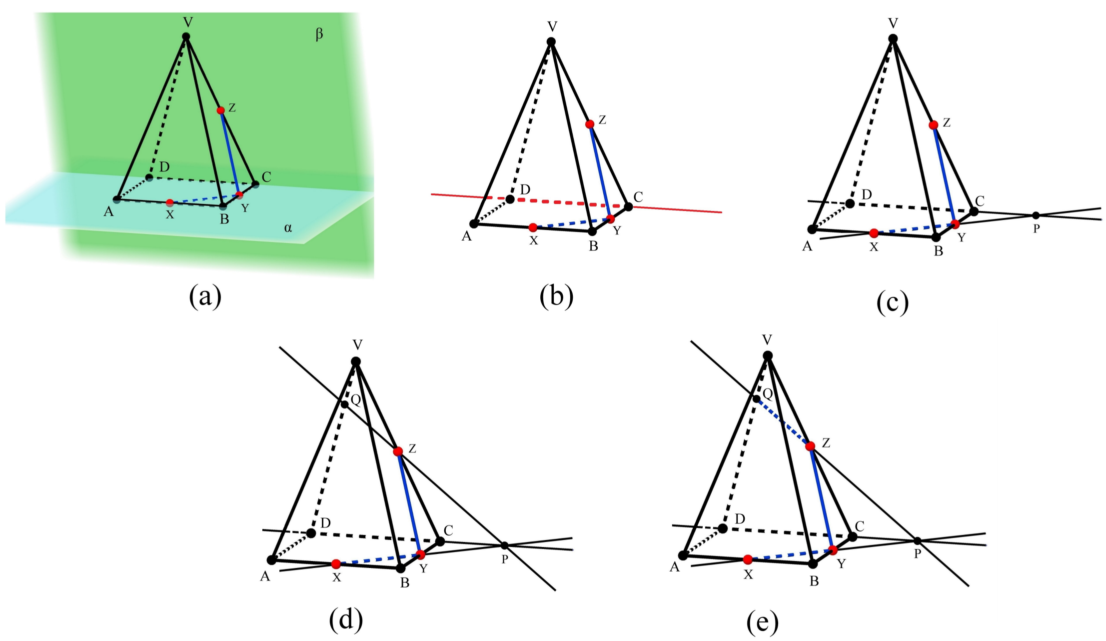
3. **Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.**

   Jinak lze toho pravidlo formulovat tak, že průsečnice rovin dvou sousedních stěn (to je stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

   Protože ani tato interpretace není pro žáky na vysvětlení problému příliš srozumitelná, máme zde radu, jak žáky naučit toto pravidlo užívat. Pokud se žáci při kreslení řezu tělesa rovinou dostanou do „mrtvého bodu“, v němž již nelze užít prvního ani druhého pravidla, poraďme jim, ať vždy hledají dvě sousední stěny tělesa, z nichž na jedné znají řez a na druhé znají bod řezu.

   Pro lepší názornost využijeme obrázek 13, v němž je naznačen postup, jak využívat třetí pravidlo při kreslení řezu na jehlanu. Naším úkolem je vést řez rovinou XYZ. Protože body X a Y leží v jedné stěně jehlanu (dolní podstava), na základě 1. pravidla víme, že i jejich spojnice v této stěně leží. Úsečka XY tedy tvoří řez na podstavě jehlanu. Body Y a Z leží v jedné stěně jehlanu (pravá boční stěna). Na základě 1. pravidla víme, že i jejich spojnice v této stěně leží. Úsečka YZ tedy tvoří řez na pravé boční stěně jehlanu, viz obrázek 13(a). Nyní si již 1. pravidlem nevystačíme, a tak přichází na řadu třetí pravidlo.

Hledáme dvě sousední stěny tělesa, v nichž na jedné známe řez a na druhé známe bod řezu. V našem případě se jedná o rovinu α a rovinu β, viz obrázek 13(a). Rovina, v níž známe řez (řez XY), je rovina podstavy - rovina α a rovina, v níž známe bod řezu (bod Z), je zadní stěna - rovina β. Nejprve vyznačíme průsečnici dvou sousedních stěn, neboli protáhneme jejich společnou hranu. V tomto případě se jedná o přímku CD, která je v obrázku 13(b) vyznačena červeně. Poté vyznačíme průsečnici stěny tělesa s rovinou řezu, neboli sestrojíme přímku XY protažením řezu XY, viz obrázek 13(c). Tyto průsečnice (přímka CD a přímka XY) se protínají v jednom bodě, který označíme P. Platí, že tímto bodem musí procházet i třetí průsečnice, tj. průsečnice roviny řezu a roviny zadní stěny jehlanu. Tato průsečnice je tedy určena body Z a P. Přímka PZ ležící v rovině zadní stěny jehlanu protne hranu jehlanu DV v bodě, který značíme Q, viz obrázek 13(d). Úsečka QZ tak tvoří řez na zadní stěně jehlanu, viz obrázek 13(e).



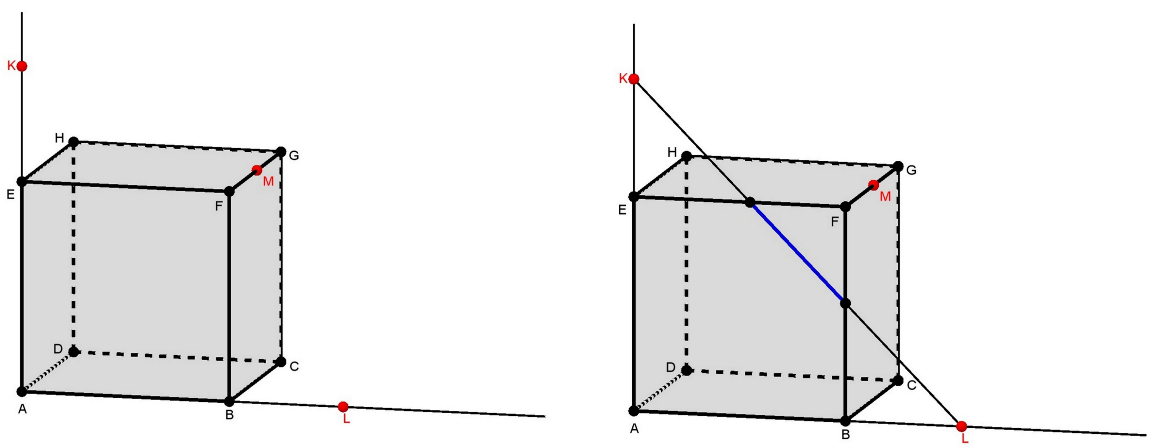
Obrázek 13: Užití třetího pravidla při kreslení řezu na jehlanu

3.2 Pomůcky pro řešení úloh

Níže uvádíme rady, které mohou studentům pomoci k snazšímu pochopení problematiky řezů těles. Jsou psány bez korektního matematického pozadí (to je uváděno jinde v textu), protože jsou adresovány studentům, kteří v této problematice tápou. Měly by sloužit jako návod, jak sestrojit řez na tělese.

- **Jak začít?**
  Spojím každé dva body, které leží ve stejné stěně tělesa. Úsečky, které jsou vidět, kreslím plně, ty, co nejsou vidět, čárkovaně.

- **Jak poznat, že dva body leží v rovině jedné stěny?**



(a) (b)

Obrázek 14: Ukázka příkladu řezu, kdy body udávající řez leží mimo těleso

Taková situace je např. na obrázku 14(a). Bod K leží na prodloužené hraně AE krychle. Hrana AE je společná přední stěně a levé boční stěně krychle. Bod K tedy leží v rovině přední stěny a zároveň v rovině levé boční stěny. Co bod L? Bod L leží na prodloužené hraně AB krychle. Hrana AB je společná přední stěně a dolní podstavě krychle. Bod L tedy leží v rovině přední stěny a zároveň v rovině dolní podstavy. Pak ale jistě oba body leží v rovině přední stěny. Když body K a L spojím, vytvořím řez na přední stěně, obrázek 14(b).

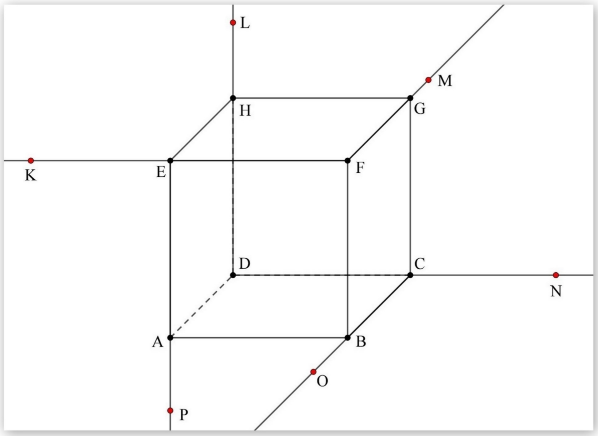
Vždy si tedy stačí uvědomit, na prodloužení které hrany tělesa daný bod leží. Hrana je společná vždy dvěma stěnám a bod tedy leží v rovinách obou těchto stěn. Stačí pak tyto dvě roviny pojmenovat. K procvičení může sloužit následující cvičení, viz obrázek 15.

- **Jak využít rovnoběžnosti?**
  Rovnoběžnost při kreslení řezů můžu využít hlavně na krychli a třeba pravidelném šestibokém hranolu. U jehlanu ovšem ne. Mám stěnu, na které znám řez (např. zadní stěna krychle). Hledám stěnu rovnoběžnou (např. přední stěna krychle), na níž znám bod řezu. Tímto bodem vedu přímku, která je rovnoběžná s řezem (na zadní stěně). Tedy platí, že řezy na rovnoběžných stěnách tělesa musí být také rovnoběžné. Např. na krychli můžeme využít rovnoběžnosti: horní a dolní podstavy, levé a pravé boční stěny nebo přední a zadní stěny.

- **Jak aplikovat třetí pravidlo?**
  Najdu na tělese dvě SOUSEDNÍ stěny, z nichž na jedné znám řez a na druhé znám bod řezu (zadní stěna a podstava, viz obrázek 13(a)). Protáhnu společnou hranu sousedních stěn (přímka CD, viz obrázek 13(b)). Pak protáhnu řez (přímka XY, viz obrázek 13(c)). Tyto přímky se protnou se v jediném bodě (bod P, viz obrázek 13(c)). Tímto bodem a známým bodem řezu vedu přímku, tj. vytvořím řez (bodem P a Z vedu přímku, která vytvoří řez na zadní stěně jehlanu, viz obrázek 13(d), (e)).

Poznamenejme ještě, že sousední stěny jsou stěny se společnou hranou, resp. se společným bodem - přední a zadní stěna jehlanu jsou sousední přes vrchol V.

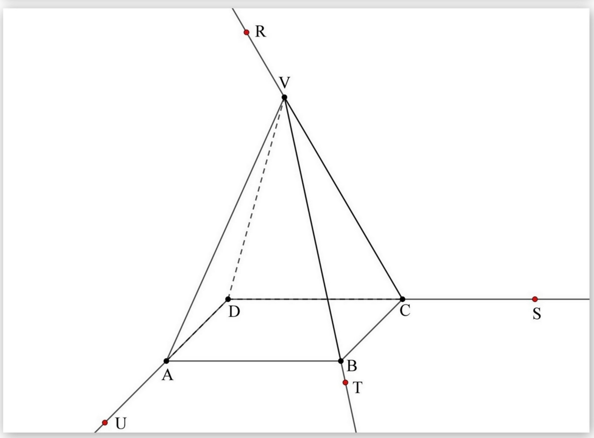
Cvičení: Rozhodněte, zda dvojice bodů leží v rovině jedné stěny.



1) Krychle

Leží dané body v rovině jedné stěny?
Odpovězte ano (✓) nebo ne (✗)
a své tvrzení zdůvodněte (uveďte,
v jakých rovinách oba body leží).

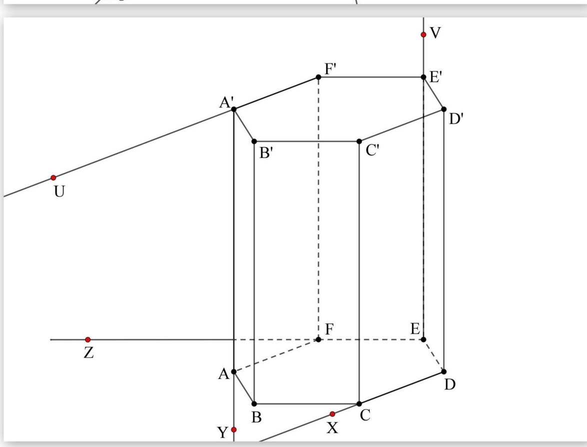
a) M a N ☐ ....
b) K a M ☐ ....
c) L a P ☐ ....
d) P a O ☐ ....



2) Jehlan

Leží dané body v rovině jedné stěny?
Odpovězte ano (✓) nebo ne (✗)
a své tvrzení zdůvodněte (uveďte,
v jakých rovinách oba body leží).

a) S a T ☐ ....
b) R a U ☐ ....
c) S a U ☐ ....
d) R a T ☐ ....



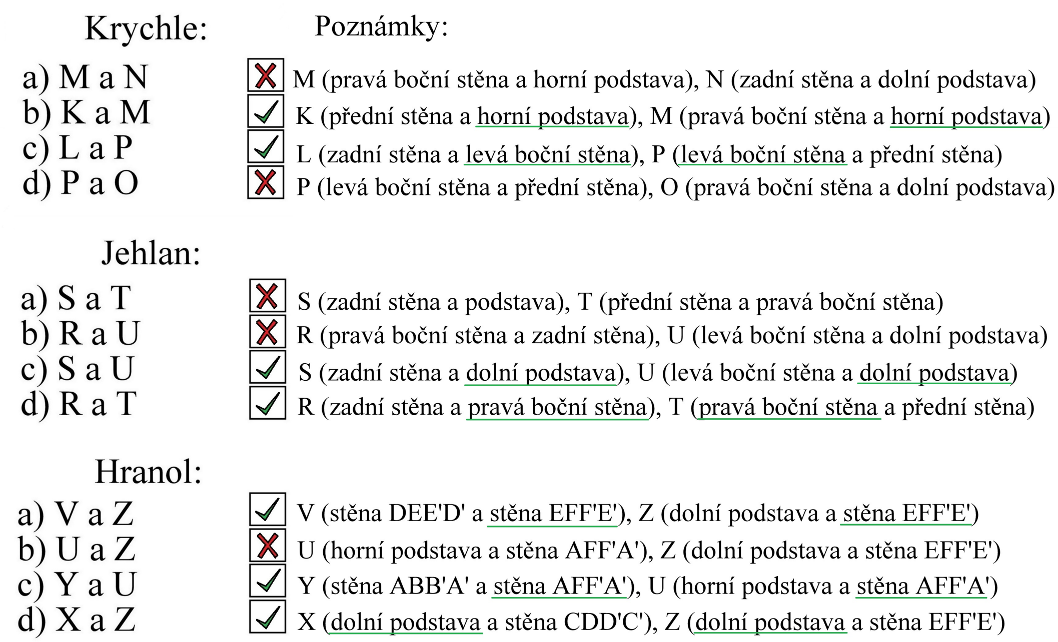
3) Hranol

Leží dané body v rovině jedné stěny?
Odpovězte ano (✓) nebo ne (✗)
a své tvrzení zdůvodněte (uveďte,
v jakých rovinách oba body leží).

a) V a Z ☐ ....
b) U a Z ☐ ....
c) Y a U ☐ ....
d) X a Z ☐ ....

Obrázek 15: Cvičení - poznejte, zda dva body leží v rovině jedné stěny

Řešení:



Krychle: Poznámky:

a) M a N ✗ M (pravá boční stěna a horní podstava), N (zadní stěna a dolní podstava)
b) K a M ✓ K (přední stěna a horní podstava), M (pravá boční stěna a horní podstava)
c) L a P ✓ L (zadní stěna a levá boční stěna), P (levá boční stěna a přední stěna)
d) P a O ✗ P (levá boční stěna a přední stěna), O (pravá boční stěna a dolní podstava)

Jehlan:

a) S a T ✗ S (zadní stěna a podstava), T (přední stěna a pravá boční stěna)
b) R a U ✗ R (pravá boční stěna a zadní stěna), U (levá boční stěna a dolní podstava)
c) S a U ✓ S (zadní stěna a dolní podstava), U (levá boční stěna a dolní podstava)
d) R a T ✓ R (zadní stěna a pravá boční stěna), T (pravá boční stěna a přední stěna)

Hranol:

a) V a Z ✓ V (stěna DEE'D' a stěna EFF'E'), Z (dolní podstava a stěna EFF'E')
b) U a Z ✗ U (horní podstava a stěna AFF'A'), Z (dolní podstava a stěna EFF'E')
c) Y a U ✓ Y (stěna ABB'A' a stěna AFF'A'), U (horní podstava a stěna AFF'A')
d) X a Z ✓ X (dolní podstava a stěna CDD'C'), Z (dolní podstava a stěna EFF'E')

Obrázek 16: Řešení

4 Návrh a tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie

Kapitola obsahuje středoškolské příklady na téma řezy těles rovinou. Je rozdělena na dvě části podle typu příkladů. Podkapitola 4.1 je souborem třinácti příkladů uspořádaných od jednodušších ke složitějším. Jsou zde příklady řezů na krychli, jehlanu i hranolu. Všechny příklady jsou doplněny obrázky a u každého je uvedeno řešení spolu s postupem. Je používáno standardní značení, tedy viditelné hrany jsou kresleny plně, neviditelné čárkovaně. Ke každému příkladu je vyroben model v programu 3D GeoGebra [4], který je nahrán na CD příloze diplomové práce. Tyto modely se tak mohou stát vhodným materiálem pro učitele, kteří v programu GeoGebra pracovat neumí, ale rádi by vnesli do výuky stereometrie něco nového. Program je výhodný v tom, že učitel může skrýt řešení a odkrývat postup krok po kroku pouhým kliknutím. Značně tím tedy ušetří čas oproti situaci, kdyby v hodině daný model v programu vytvářel. Využití těchto příkladů při výuce řezů těles jsme otestovali na žácích 3. ročníku Gymnázia Blovice, podrobněji o tom pojednává kapitola 6.

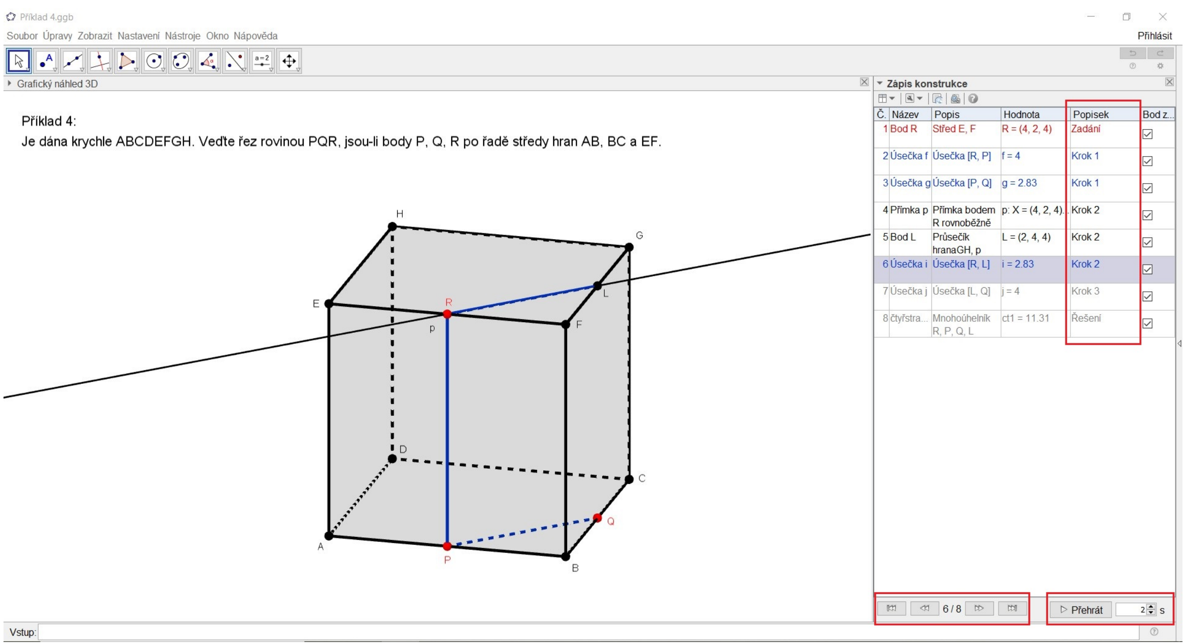
Příklady jsou doplněny vhodnými modely vyrobenými například ze špejlí a drátku. Za účelem propojení výuky stereometrie s nejnovějšími technologiemi byly některé modely vytištěny na 3D tiskárně. 3D tisk se v posledních letech stal fenoménem, a tak je vhodné, aby o něm měli ponětí také žáci na středních školách. Je mu tedy věnována kapitola 5, kde je popsáno, jak 3D tisk funguje. Text je obohacen o fotky pořízené při tisku třech modelů vytvořených v rámci této diplomové práce. Dostupné je také video dokumentující průběh tisku modelu řezu na jehlanu, které by mohlo sloužit učitelům jako vhodná ukázka toho, jak 3D model vzniká. Modely vytisknuté na 3D tiskárně by při výuce mohly sloužit jako názorná a interaktivní pomůcka pro zlepšení prostorové představivosti.

Následuje podkapitola 4.2 s názvem Dynamické příklady, kde je program GeoGebra využíván coby dynamický matematický software. Na několika příkladech je demonstrováno, jak je možné změnou parametru měnit zadání řezu na tělese. Součástí každého příkladu jsou otázky k zamyšlení včetně jejich řešení. Všechny příklady jsou namodelovány v programu 3D GeoGebra, kde lze s měnícím se parametrem sledovat změny řezu na tělese. Řešení těchto příkladů již předpokládá zvládnutou problematiku základních řezů na tělese. Příklady tak mohou sloužit jako výzva či bonusové úkoly rychlejším studentům.

4.1 Soubor příkladů

Cílem je vytvořit soubor příkladů, vhodných jak pro učitele, tak pro žáky. Učitelé mohou využít připravené modely v programu GeoGebra nebo pracovní listy ke své výuce. Žáci si naopak mohou procházet připravené příklady a díky detailnímu popisu postupu a řešení doplněného obrázky mohou lépe pochopit danou problematiku a tuto látku si snadno osvojit.

Tato kapitola obsahuje 13 příkladů seřazených podle obtížnosti, od nejsnadnějších až po složité. Nejčastěji se objeví řezy na krychli, vyzkoušíme si ale řez i na pravidelném čtyřbokém jehlanu a pravidelném šestibokém hranolu. Každý příklad je doplněn obrázkem zadání a dále obrázkem, který dokumentuje průběh vytváření řezu na tělese, tedy jednotlivé kroky vytváření řezu. Některé příklady jsou navíc doplněny o fotografie modelu takového řezu - ať už se jedná o model ze špejlí nebo model vytištěný na 3D tiskárně.



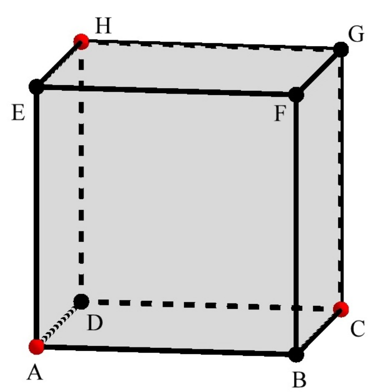
Obrázek 17: Ukázka příkladu v programu 3D GeoGebra

Každý příklad je pod příslušným číslem namodelován v programu GeoGebra a je součástí CD přílohy diplomové práce. U příkladů v GeoGebře je uvedeno i zadání, tedy mohou být používány i bez textu diplomové práce. Sestrojení řezu na tělese je strukturováno pro lepší orientaci v textu do několika kroků. Tyto kroky odpovídají jednotlivým krokům v programu GeoGebra, po nichž lze odkrývat řešení. Je tak možné při čtení textu sledovat vždy příslušný krok i v programu 3D GeoGebra. Kroky jsou očíslovány v kolonce „popisek“ (Zadání - Krok 1 - Krok 2 - ... - Řešení). Mezi jednotlivými kroky v programu se lze pohybovat pomocí šipek v pravém dolním rohu. Je zde také možnost přehrát kroky jako animaci kliknutím na tlačítko „Přehrát“. Vpravo od tohoto tlačítka je možné navolit i časovou prodlevu mezi jednotlivými kroky, viz obrázek 17.

Dále byly vytvořeny pracovní listy, které jsou uvedeny v dodatku diplomové práce - v kapitole 9.2 - jedná se o zadání všech příkladů z této kapitoly. Tělesa jsou nakreslena ve volném rovnoběžném promítání. Pracovní listy by tak měly sloužit jako podklad pro výuku. Žáci si je mohou vytisknout a přinést na hodinu. Řezy pak mohou kreslit přímo do těchto papírů a neztrácejí čas kreslením samotných těles.

Příklad 1

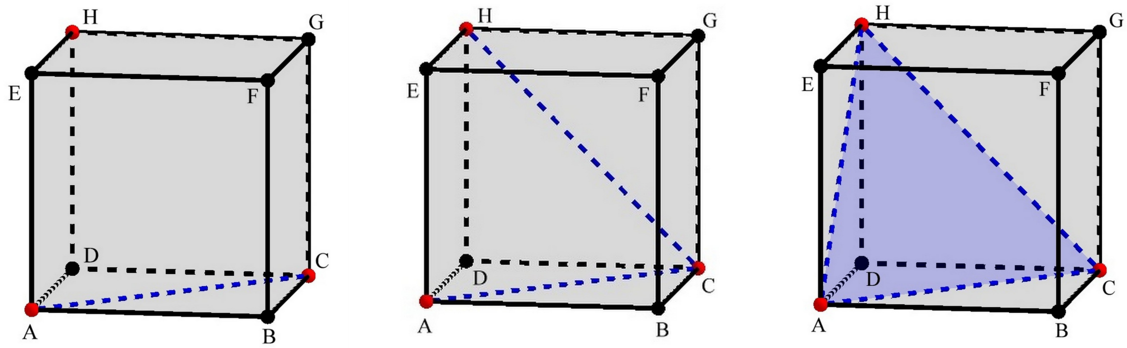
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Veďte řez rovinou ACH, jak je uvedeno na obrázku 18.



Obrázek 18: Př. 1 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte úsečku AC.**
   Body A a C leží v jedné stěně, konkrétně v dolní podstavě krychle. Na základě 1. pravidla bude i jejich spojnice (úsečka AC) ležet v této stěně, jak je vidět na obrázku 19(a).



(a) (b) (c)

Obrázek 19: Př. 1 - řešení

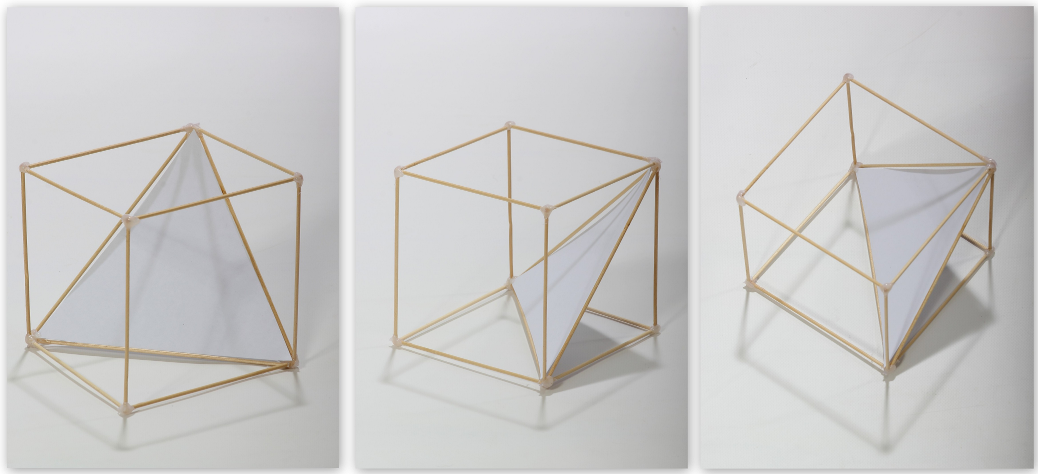
2. **Sestrojte úsečku** CH**.**
   Body C a H leží v jedné stěně - v zadní stěně krychle, tedy i jejich spojnice (úsečka CH) bude v této stěně ležet - viz obrázek 19(b).

3. **Sestrojte úsečku** AH**.**
   Pro dvojici bodů A a H bude postup analogický. Spojnice leží v jedné stěně krychle. Řezem je trojúhelník ACH, viz obrázek 19(c).

Komentář:

Jedná se o nejjednodušší typ řezu na krychli obvykle vykládaný jako úvodní příklad do problematiky řezů těles. K jeho nakreslení si plně vystačíme s 1. pravidlem.

Při vytváření takto jednoduchého řezu můžeme žákům například zadat úkol, aby si doma zkusili vyrobit model tohoto řezu pomocí špejlí a čtvrtky nebo papíru. Jeden takový model je na obrázku 20 - z různých úhlů pohledu. Při výrobě modelu na obrázku byla použita ke spojení špejlí ve vrcholech krychle tavná pistole. Doporučme žákům, ať si pravý úhel při spojování špejlí hlídají například pomocí trojúhelníku s ryskou. Je zřejmé, že takový model není přesný, nicméně může být velice názorný a samotné vyrábění tohoto modelu může žákům pomoci k pochopení problematiky řezů. Nejlépe si tak uvědomí, že každá strana řezu je vlastně stěnovou úhlopříčkou krychle, a tedy, když budou chtít vystřihnout ze čtvrtky řez, musí nakreslit rovnostranný trojúhelník délky stěnové úhlopříčky krychle.

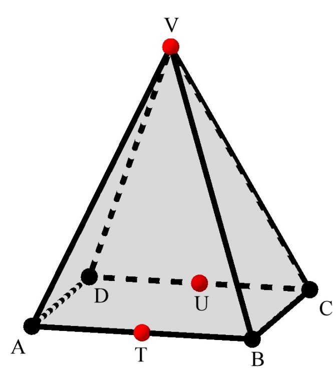


Obrázek 20: Př. 1 - model ze špejlí a čtvrtky

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 1*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 1*.

Příklad 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte řez rovinou TUV, jestliže bod T je střed úsečky AB a bod U je střed úsečky CD, jak je uvedeno na obrázku 21.



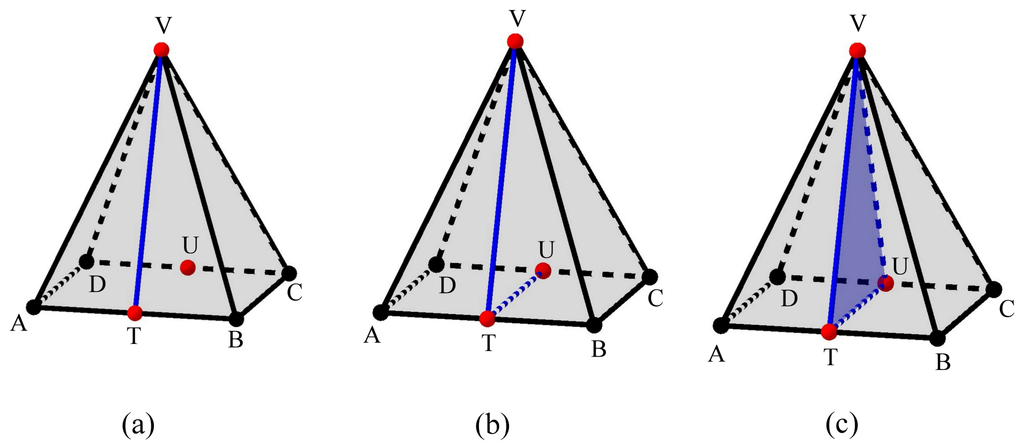
Obrázek 21: Př. 2 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte úsečku TV.**
   Body T a V leží v jedné stěně (přední stěna ABV jehlanu), tedy na základě 1. pravidla bude i jejich spojnice (úsečka TV) ležet v této stěně, viz obrázek 22(a).

2. **Sestrojte úsečku TU.**
   Body T a U leží v jedné stěně (podstava jehlanu), tedy i jejich spojnice bude ležet v dolní podstavě, viz obrázek 22(b).

3. **Sestrojte úsečku UV.**
   Analogicky jako v předchozích dvou krocích mohou být i body U a V spojeny úsečkou ležící v jedné stěně (zadní stěna CDV jehlanu). Řezem je trojúhelník TUV, viz obrázek 22(c).



Obrázek 22: Př. 2 - řešení

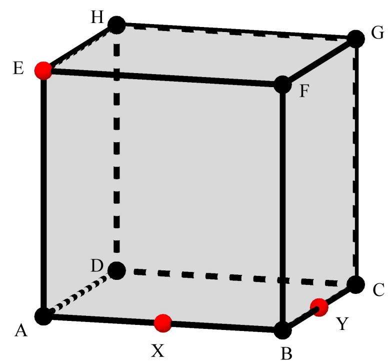
Komentář:

K sestrojení tohoto řezu stačí pouze znalost 1. pravidla.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 2*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 2*.

Příklad 3

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYE, je-li bod X střed hrany AB a bod Y střed hrany BC, jak je uvedeno na obrázku 23.

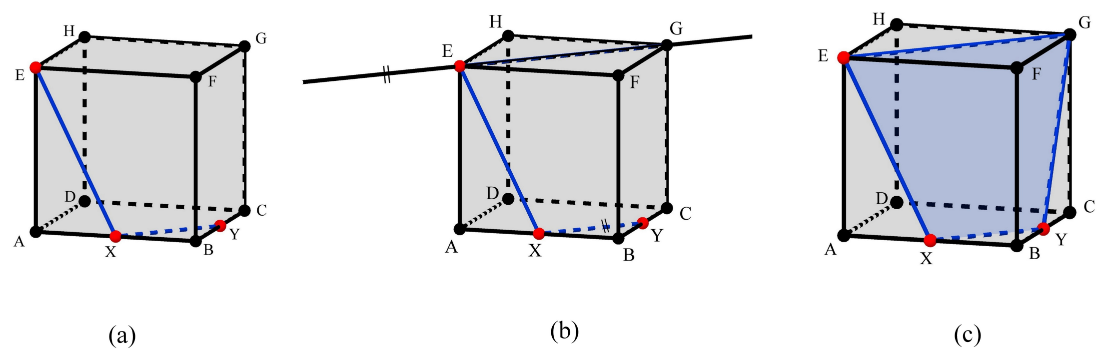


Obrázek 23: Př. 3 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte úsečku XY a XE.**
   Nejprve si uvědomíme, že body X a Y leží v jedné stěně (dolní podstava) a na základě 1. pravidla víme, že i jejich spojnice bude ležet v dolní podstavě. Analogicky budeme postupovat s body X a E, jakožto s body ležícími v rovině přední stěny krychle - viz obrázek 24(a).

2. **Veďte bodem E rovnoběžku s úsečkou XY a vyznačte řez na horní podstavě krychle.**
   Nyní musíme uplatnit 2. pravidlo, které říká, že každé dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách. Známe řez na dolní podstavě krychle a chceme udělat řez na podstavě horní. Uvědomíme-li si, že tyto dvě roviny jsou rovnoběžné, pak víme (na základě 2. pravidla), že rovina řezu musí tyto dvě roviny protnout ve dvou přímkách, které budou rovnoběžné. Víme tedy, že průsečnice roviny řezu s rovinou horní podstavy musí být rovnoběžná s průsečnicí roviny řezu a roviny dolní podstavy krychle. Jednoduše tedy stačí vést bodem E rovnoběžku s úsečkou XY, jak je vidět na obrázku 24(b). Zjistíme, že přímka prochází bodem G. Řez na horní podstavě tedy tvoří stěnová úhlopříčka EG.



Obrázek 24: Př. 3 - řešení

3. **Sestrojte úsečku GY.**
   Bod G a bod Y leží v jedné stěně (pravá boční stěna krychle), tedy na základě 1. pravidla dokončíme řez, viz obrázek 24(c). Řezem je čtyřúhelník $XYGE$.

Komentář:
V příkladu užíváme pro nakreslení řezu 1. a 2. pravidlo. Je důležité, aby si žáci uvědomili, že rovnoběžka, kterou vytváří v kroku 2 prochází bodem G a že není náhoda, že jim to takto vyšlo. Důvodem je rovnoběžnost úseček XY a EG daná tím, že body X a Y jsou ve stejné vzdálenosti od bodu B neboli, že jsou to středy hran krychle, s nimiž jsou incidentní.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 3*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 3*.

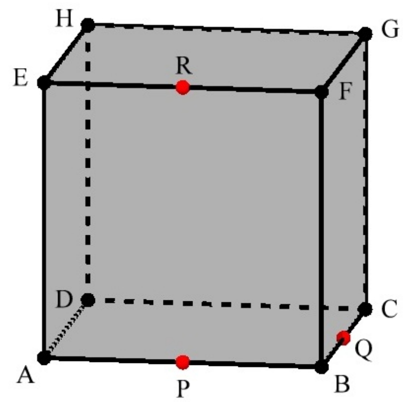
Příklad 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Veďte řez rovinou PQR, jsou-li body P, Q, R po řadě středy hran AB, BC a EF, jak je uvedeno na obrázku 25.

Postup:

1. **Sestrojte úsečku PR a úsečku PQ.**
   Body P a R leží v jedné stěně (přední stěna krychle), na základě 1. pravidla bude

i jejich spojnice ležet v této stěně. Body P a Q leží v jedné stěně (dolní podstava), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně, viz obrázek 26(a).



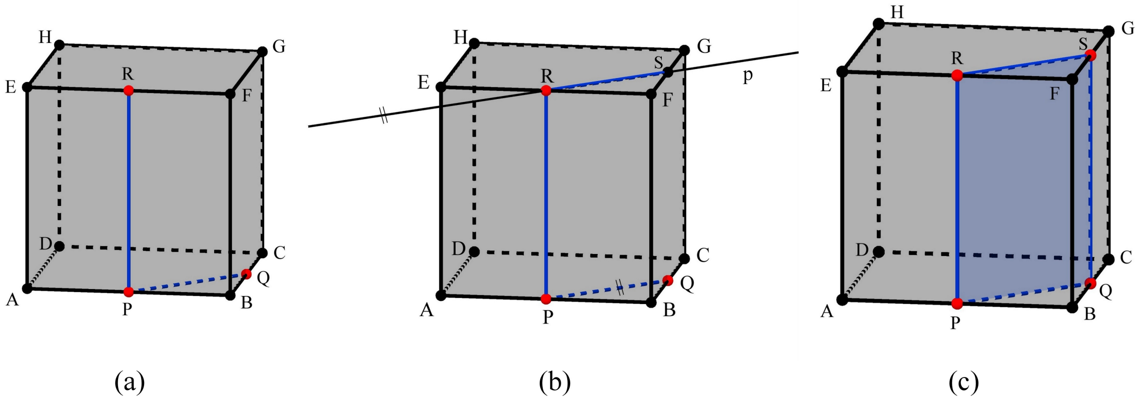
Obrázek 25: Př. 4 - zadání

2. **Veďte bodem R rovnoběžku p s úsečkou PQ, tj. vytvořte řez na horní podstavě krychle. Průsečík přímky p a hrany FG krychle označte S.** Roviny dolní a horní podstavy jsou rovnoběžné, tedy průsečnice roviny řezu s rovinou dolní podstavy musí být rovnoběžná s průsečnicí roviny řezu a horní podstavy. Vedeme tedy bodem R rovnoběžku s úsečkou PQ, označme ji p. Průsečík přímky p a hrany FG krychle označme S. Vyznačíme řez RS na horní podstavě, jak je vidět na obrázku 26(b).

3. **Sestrojte úsečku SQ.** Body S a Q leží na jedné stěně (pravá boční stěna krychle), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně na základě 1. pravidla. Řezem je čtyřúhelník (přesněji obdélník) $PQSR$, viz obrázek 26(c).

Komentář:

Pro tento řez byl vytvořen model ze špejlí, viz obrázek 29 - fialový řez (model byl využit pro ilustraci dvou různých řezů na krychli). Výroba tohoto modelu byla náročnější na čas, nicméně sestrojení nebylo těžké a žáci by to zvládli bez problémů. Na výrobu jsme potřebovali špejle, vázací drátek a barevnou vlnu. Špejle jsme omotali drátkem a spojili je do požadovaného tvaru krychle také pomocí drátku. Poté jsme připravili obdélník (sloužící jako řez v krychli) stejným způsobem a vypletli jsme jej barevnou vlnou. Řez jsme pak umístili do krychle a uvázali na hrany krychle pomocí vlny. Model má tu vlastnost, že je neustále snadno tvarovatelný. Je tedy citlivější na přenos *a manipulaci, ale zároveň se dá velice snadno upravit.*

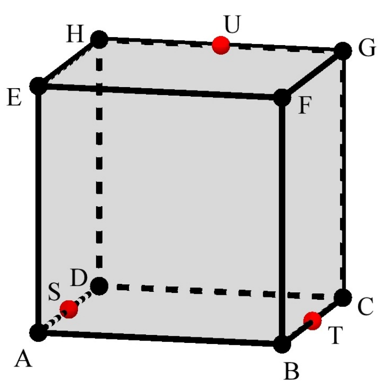


Obrázek 26: Př. 4 - řešení

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 4*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 4*.

Příklad 5

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou STU, kde body S, T, U jsou po řadě středy hran AD, BC a GH, jak je uvedeno na obrázku 27.

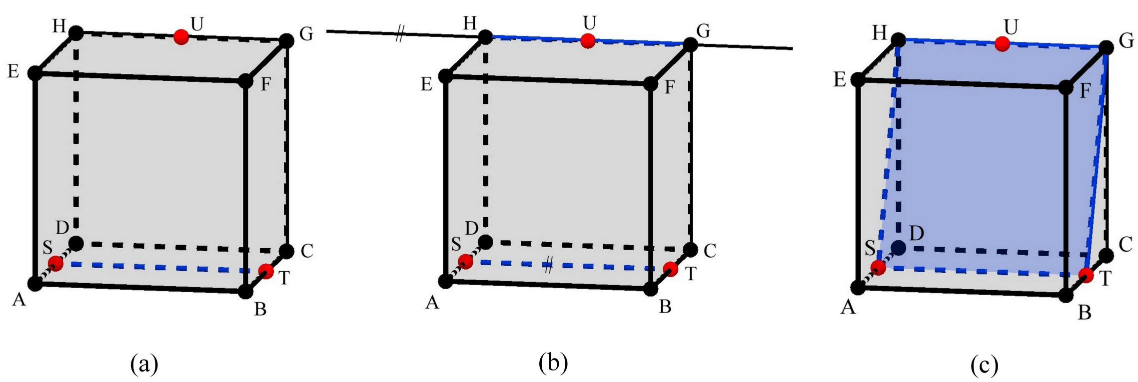


Obrázek 27: Př. 5 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte úsečku ST.**
   Body S a T leží v rovině jedné stěny (dolní podstava), tedy na základě 1. pravidla i jejich spojnice bude ležet v této stěně, viz obrázek 28(a).

2. **Veďte bodem U rovnoběžku s úsečkou ST, tj. vytvořte řez na horní podstavě krychle.**
   Na dolní podstavě krychle známe řez a na rovině s ní rovnoběžné (rovina horní podstavy) známe bod určující řez. Na základě 2. pravidla tedy vedeme bodem U rovnoběžku s úsečkou ST. Rovnoběžka vytíná na rovině horní podstavy krychle úsečku GH, tedy tato hrana krychle tvoří zároveň hranu řezu, viz obrázek 28(b).



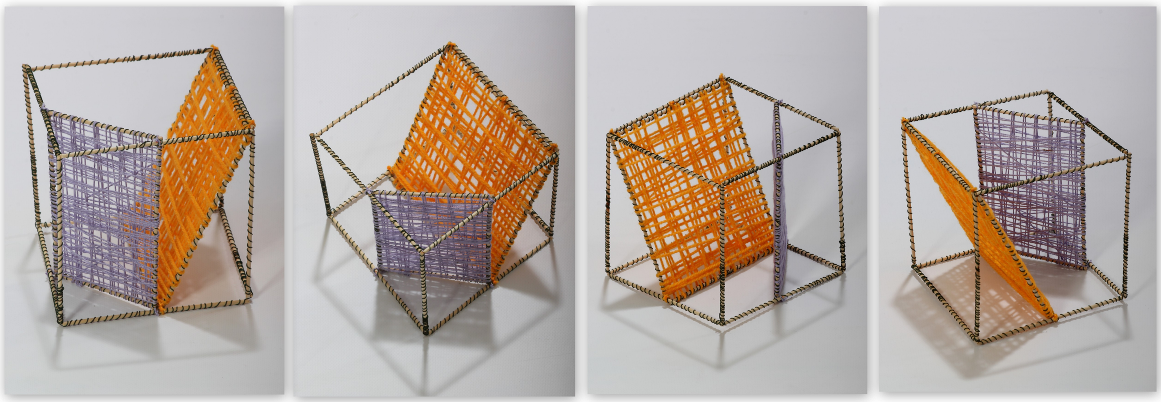
Obrázek 28: Př. 5 - řešení

3. **Sestrojte úsečku SH.**
   Body S a H leží v jedné stěně (levá boční stěna), tedy na základě 1. pravidla bude i jejich spojnice ležet v této stěně, viz obrázek 28(c).

4. **Sestrojte úsečku TG.**
   Body T a G leží v jedné stěně (pravá boční stěna), tedy na základě 1. pravidla bude i jejich spojnice ležet v této stěně. Řezem je čtyřúhelník (přesněji obdélník) $STGH$, viz obrázek 28(c).

Komentář:

Na obrázku 29 (oranžový řez) je tento příklad ilustrován pomocí modelu ze špejlí.

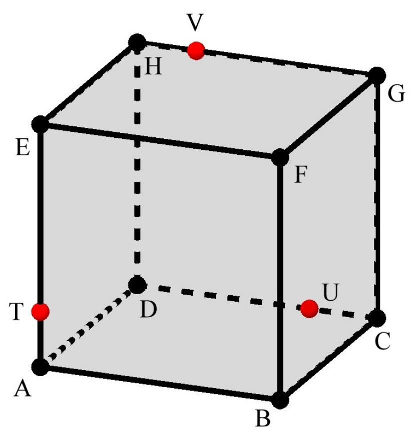


Obrázek 29: Př. 4 a Př. 5 - model ze špejlí, drátku a vlny - dva řezy na jedné krychli

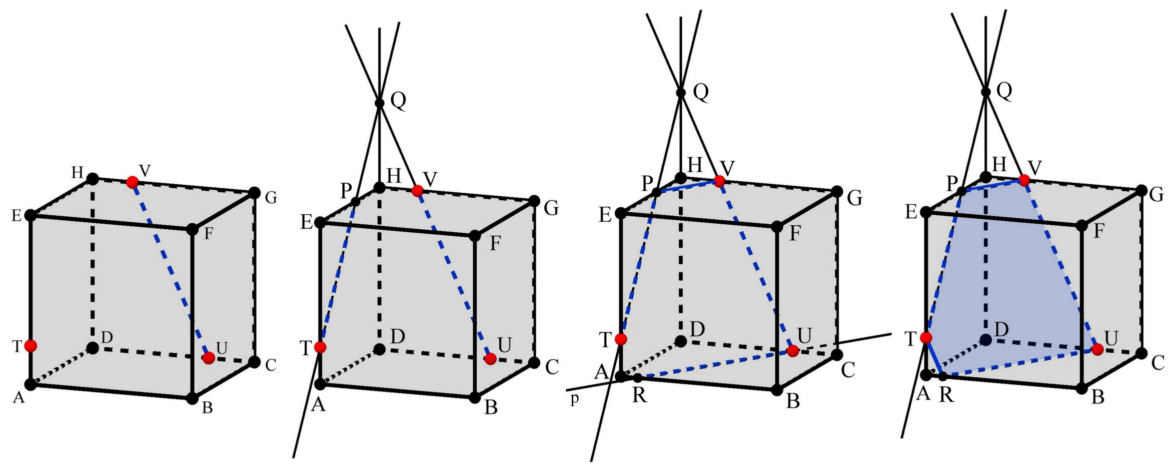
Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 5*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 5*.

Příklad 6

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou TUV. Bod T leží na hraně AE, bod U na hraně CD a bod V na hraně GH, jak je uvedeno na obrázku 30.



Obrázek 30: Př. 6 - zadání



(a) (b) (c) (d)

Obrázek 31: Př. 6 - řešení

Postup:

1. **Sestrojte úsečku UV.**
   Body U a V leží ve stejné stěně (zadní stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka UV tvoří řez na zadní stěně, viz obrázek 31(a).

2. **Vyznačte průsečnici zadní stěny a levé boční stěny krychle, tj. vyznačte přímku DH.**
   Využijeme 3. pravidlo k nakreslení řezu na levé boční stěně. Tato stěna sousedí se zadní stěnou a platí, že na zadní stěně známe řez (UV) a na levé boční stěně známe bod řezu (T). Vyznačíme průsečnici těchto dvou sousedních stěn (zadní stěna a levá boční stěna) neboli protáhneme úsečku DH, viz obrázek 31(b).

3. **Vyznačte průsečnici roviny řezu a roviny zadní stěny krychle, tj. vyznačte přímku UV.**
   Vytvoříme přímku UV protažením úsečky UV, viz obrázek 31(b).

4. **Označte Q průsečík přímky DH a přímky UV.**
   Přímky DH a UV se protínají v jediném bodě, označme jej Q, viz obrázek 31(b).

5. **Sestrojte přímku QT a vyznačte řez na levé boční stěně. Průsečík přímky QT a strany EH krychle označte P.**

Na základě 3. pravidla víme, že bodem Q musí procházet i průsečnice roviny řezu s rovinou levé boční stěny, tj. vedeme přímku procházející bodem Q a bodem T. Průsečík přímky QT a strany EH krychle označíme jako bod P. Úsečka TP tvoří řez na levé boční stěně, viz obrázek 31(b).

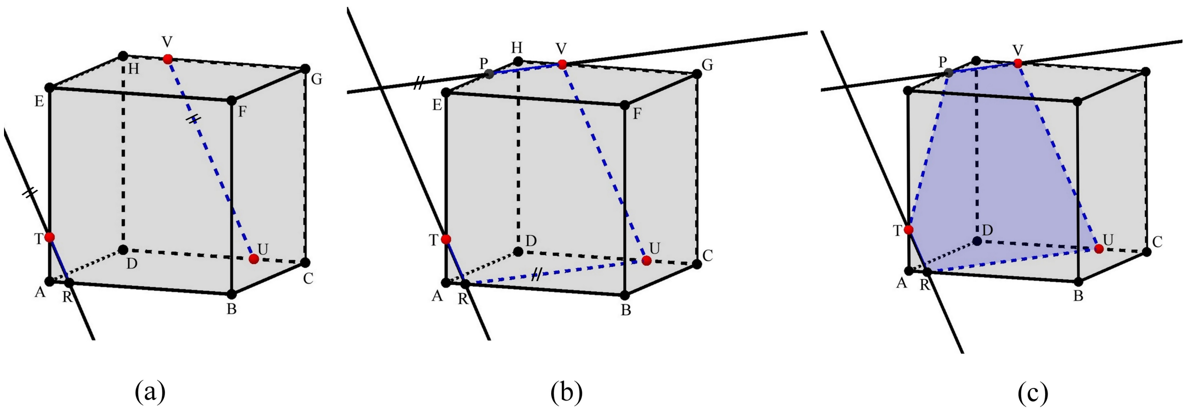
6. **Sestrojte úsečku PV.**
   Body P a V leží v jedné stěně (horní podstava), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka PV tvoří řez na horní podstavě krychle, viz obrázek 31(c).

7. **Veďte bodem U rovnoběžku p s úsečkou PV a vyznačte řez na dolní podstavě. Průsečík přímky p a hrany krychle AB označte R.**
   Využijeme 2. pravidlo k nakreslení řezu na dolní podstavě. Na horní podstavě známe řez (PV) a na rovině s ní rovnoběžné (rovina dolní podstavy) známe bod řezu (U). Vedeme tedy bodem U rovnoběžku p s úsečkou PV. Průsečík přímky p a hrany krychle AB označíme R. Úsečka UR tvoří řez na dolní podstavě, viz obrázek 31(c).

8. **Sestrojte úsečku RT.**
   Body R a T leží ve stejné stěně (přední stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Řezem tělesa je pětiúhelník $RUVPT$, viz obrázek 31(d).

Komentář:

Některá zadání úloh pro nakreslení řezů těles umožňují více způsobů řešení. Pojďme si nyní ukázat jiný způsob, jak nakreslit řez rovinou TUV a to bez použití 3. pravidla. Začátek postupu je stejný. Body U a V spojíme a tím vytvoříme řez na zadní stěně. Nyní si ovšem můžeme uvědomit, že známe řez na zadní stěně a na stěně s ní rovnoběžné (přední stěna) známe bod řezu. Za využití 2. pravidla tedy vedeme bodem T rovnoběžku s úsečkou UV, viz obrázek 32(a). Vytvořením řezu na přední stěně ale získáme zároveň bod řezu na rovině dolní podstavy - bod R. Protože i bod U je bodem ležícím v této stěně, můžeme je spojit úsečkou, čímž získáme řez RU na dolní podstavě krychle, viz obrázek 32(b). Dolní podstava, na níž tedy známe řez je rovnoběžná s rovinou horní podstavy, na níž známe bod řezu - bod V. Na základě 2. pravidla tedy vedeme bodem V rovnoběžku s úsečkou RU. Průsečík této přímky a hrany krychle EH označíme P, viz obrázek 32(b). Řezem na horní podstavě je úsečka PV. Body P a T leží na stejné stěně (levá boční stěna), tedy na základě 1. pravidla bude i jejich spojnice ležet v této stěně. Úsečka PT tvoří řez na levé boční stěně. Řezem je opět mnohoúhelník $RUVPT$, viz obrázek 32(c).

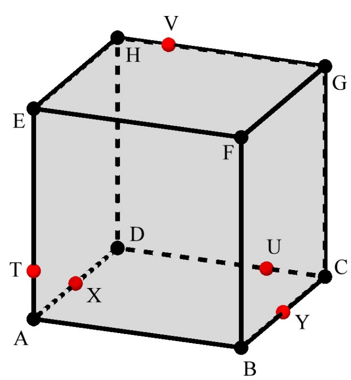


Obrázek 32: Př. 6 - jiná možnost řešení

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 6*. Je zde uveden první způsob řešení (tedy řešení s využitím 3. pravidla). Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 6*.

Příklad 7

Mějme krychli $ABCDEFGH$ a body T, U, V, X a Y umístěné na hranách krychle, jak je uvedeno na obrázku 33. Sestrojte řez krychle rovinou TUV a rovinou XYV. Dále sestrojte průsečnici těchto dvou řezů.

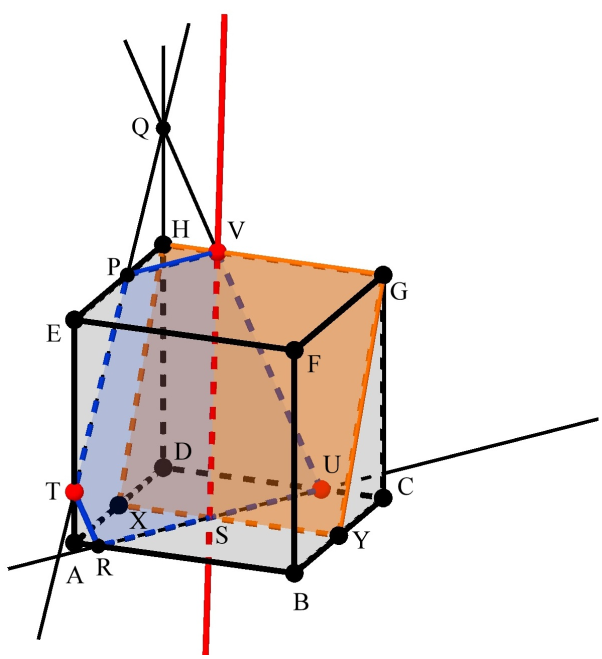


Obrázek 33: Př. 7 - zadání

1. **Sestrojte řez TUV.**
   Sestrojení řezu TUV na krychli je popsáno v předchozím příkladu - viz příklad 6, obrázek 31.

2. **Sestrojte řez XYV.**
   Sestrojení řezu XYV na krychli je popsáno v příkladu 5, obrázek 28. (Je zde pouze použito jiné značení bodů udávajících řez.)

3. **Sestrojte průsečnici řezu TUV a XYV.**
   Průsečnice těchto řezů je přímka, která leží v obou rovinách řezů zároveň. Hledáme tedy dva body tuto přímku určující, tj. body, v nichž se na jedné stěně krychle protnou dvě roviny řezu. Jedním takovým bodem je přímo bod V a druhý bod, označme jej S, najdeme na spodní podstavě krychle jako průnik úseček XY a RU. Průsečnicí řezů TUV a XYV je tedy přímka SV, viz obrázek 34. Při jejím kreslení dodržujeme zásadu, že viditelné části přímky jsou vyznačeny plnou čarou, neviditelné čárkovanou čarou. Poznamenejme ještě, že čárkovaně je značena ta část průsečnice, která je buď uvnitř tělesa, a tedy není vidět, nebo ta část, která je mimo těleso, ale stále není vidět díky natočení krychle ve volném rovnoběžném promítání.



Obrázek 34: Př. 7 - průsečnice řezu TUV a XYV

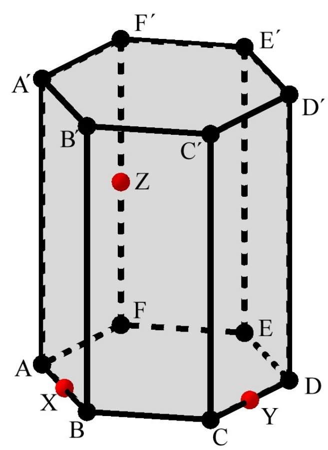
Komentář:

Skutečnost, že bod V je bod určující průsečnici byla zřejmá hned ze zadání. Máme-li určit průsečnici řezů TUV a XYV, pak jistě platí, že bod V je bod určující oba řezy. Jedná se o bod, který leží v obou řezech zároveň, což je přesně vlastnost, kterou musí splňovat všechny body průsečnice.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 7*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 7*.

Příklad 8

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Veďte řez rovinou XYZ. Body X, Y a Z jsou po řadě středy úseček AB, CD a FF', jak je uvedeno na obrázku 35.



Obrázek 35: Př. 8 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte úsečku XY.**
   Body X a Y leží v jedné stěně (dolní podstava), tedy i jejich spojnice leží v této stěně. Úsečka XY tedy tvoří řez na dolní podstavě hranolu, viz obrázek 36(a).

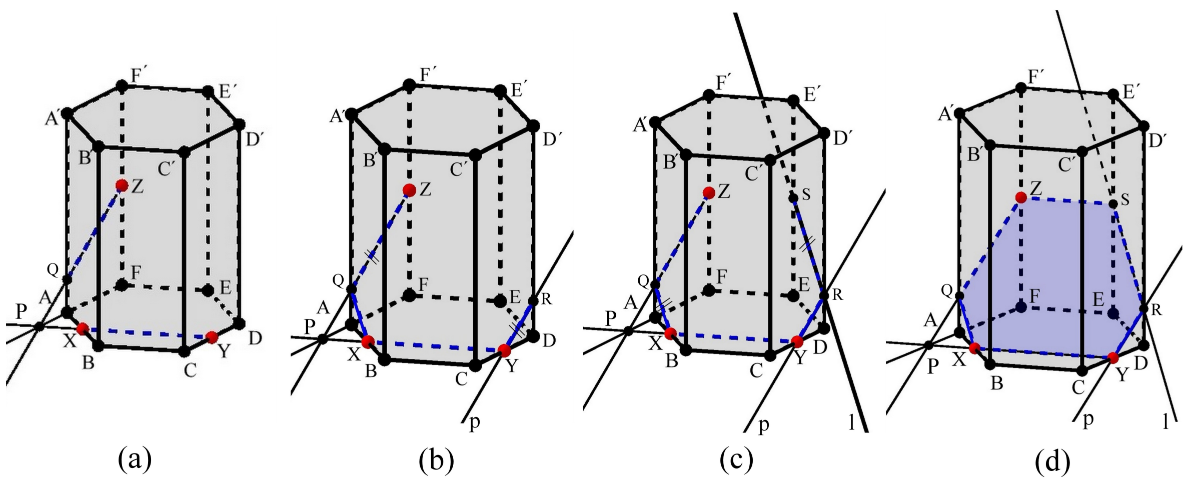
2. **Vyznačte průsečnici dolní podstavy hranolu a boční stěny $AFF'A'$, tj. vyznačte přímku AF.**

Pro aplikaci 3. pravidla hledáme dvě sousední stěny hranolu, z nichž na jedné známe bod řezu a na druhé známe řez. Tyto podmínky splňuje rovina dolní podstavy a boční stěna $AFF'A'$, protože na dolní podstavě známe řez (XY) a na stěně $AFF'A'$ známe bod řezu (Z). Vyznačíme tedy průsečnici těchto dvou stěn - přímka AF, viz obrázek 36(a).

3. **Vyznačte průsečnici roviny řezu a roviny dolní podstavy hranolu, tj. přímku XY.**
   Jinými slovy vytvoříme přímku XY protažením úsečky XY, viz obrázek 36(a).

4. **Označte P průsečík přímek AF a XY.**
   Přímky AF a XY se protínají v jediném bodě, který označíme P.

5. **Sestrojte přímku PZ a vyznačte řez na stěně $AFF'A'$ hranolu. Průsečík přímky PZ a hrany hranolu AA' označte Q.**
   Na základě 3. pravidla víme, že bodem P musí procházet i třetí z průsečnic (průsečnice řezu a stěny $AFF'A'$). Vedeme tedy přímku bodem P a Z. Průsečík přímky PZ a hrany hranolu AA' označíme Q. Úsečka QZ pak tvoří řez na boční stěně $AFF'A'$, viz obrázek 36(a).



Obrázek 36: Př. 8 - řešení

6. **Sestrojte úsečku QX.**
   Body Q a X leží ve stejné stěně (stěna $ABB'A'$), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Řez na stěně $ABB'A'$ tedy tvoří úsečka QX, viz obrázek 36(b).

7. **Veďte bodem Y rovnoběžku p s úsečkou QZ a vytvořte řez na boční stěně $CDD'C'$ hranolu. Průsečík přímky p a hrany DD' hranolu označte R.**
   Jedná se o pravidelný šestiboký hranol, stěny $AFF'A'$ a $CDD'C'$ jsou tedy rovnoběžné. Na první zmiňované již známe řez - QZ a na druhé zmiňované známe bod řezu - bod Y. S využitím 2. pravidla nakreslíme řez na boční stěně $CDD'C'$ - vedeme bodem Y rovnoběžku p s úsečkou QZ, viz obrázek 36(b). Průsečík přímky p a hrany DD' hranolu označíme R. Řezem na stěně $CDD'C'$ je tedy úsečka RY.

8. **Veďte bodem R rovnoběžku l s úsečkou QX a vytvořte řez na boční stěně $DEE'D'$. Průnik přímky l a hrany hranolu EE' označte S.**
   Analogickým způsobem jako v předchozím kroku provedeme řez na boční stěně $DEE'D'$. Je to stěna rovnoběžná se stěnou $ABB'A'$, na které již známe řez - úsečka QX. Využijeme 2. pravidla. Vedeme bodem R rovnoběžku l s úsečkou QX. Průnik přímky l a hrany hranolu EE' označíme S. Úsečka RS tak tvoří řez na boční stěně $DEE'D'$, viz obrázek 36(c).

9. **Sestrojte úsečku SZ ležící v zadní stěně $EFF'E'$ hranolu.**
   Body S a Z leží v jedné stěně (zadní stěna hranolu), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka SZ tak tvoří řez na zadní stěně hranolu. Řezem tělesa je šestiúhelník $XYRSZQ$, viz obrázek 36(d).

Komentář:

Poznamenejme ještě, že výše popsaný postup nakreslení tohoto řezu na hranolu není jediný možný. Řez by se dal nakreslit například s využitím vzájemné polohy tří, po dvou různoběžných rovin, které mají rovnoběžné průsečnice. Tento postup je ale náročnější a může být ponechán studentům jako výzva - bonusový úkol. Bez využití této skutečnosti (vzájemné polohy tří rovin s rovnoběžnými průsečnicemi) se ale již neobejdeme při kreslení řezu v příkladu 12. Tam bude postup podrobně vysvětlen.

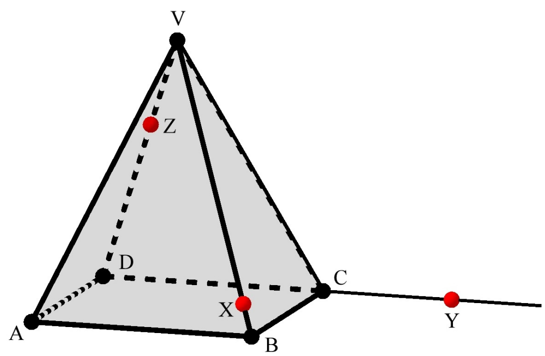
Model tohoto řezu byl vytištěn na 3D tiskárně. Na obrázku 37 můžete vidět fotografie tohoto modelu. Model je široký 8 cm a jeho vytištění trvalo 6 hodin a 17 minut. Více informací o 3D tisku je uvedeno v kapitole 5.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 8*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 8*.

Obrázek 37: Př. 8 - model vytištěný na 3D tiskárně

Příklad 9

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou XYZ. Bod X leží na hraně BV, bod Z na hraně DV a bod Y na polopřímce DC, jak je uvedeno na obrázku 38.



Obrázek 38: Př. 9 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte přímku YZ a vyznačte řez na zadní stěně CDV jehlanu. Průsečík přímky YZ a hrany CV jehlanu označte P.**
   Body Y a Z leží v rovině jedné stěny (zadní stěna CDV jehlanu). Přímka, na níž bod Y leží, je průsečnice roviny zadní stěny CDV a roviny podstavy. Potom platí, že tato přímka jistě leží v rovině zadní stěny CDV a tedy jistě i bod Y na přímce ležící, je bodem zadní stěny CDV jehlanu. Na základě 1. pravidla můžeme body Y a Z spojit přímkou ležící také v rovině zadní stěny CDV jehlanu, viz obrázek 39(a).
   Pomůcku pro řešení situace, kdy body udávající řez leží mimo těleso, najdete v kapitole 3.2.

   Průsečík přímky YZ a hrany CV jehlanu označme P. Úsečka PZ tvoří řez na zadní stěně CDV jehlanu, viz obrázek 39(a).

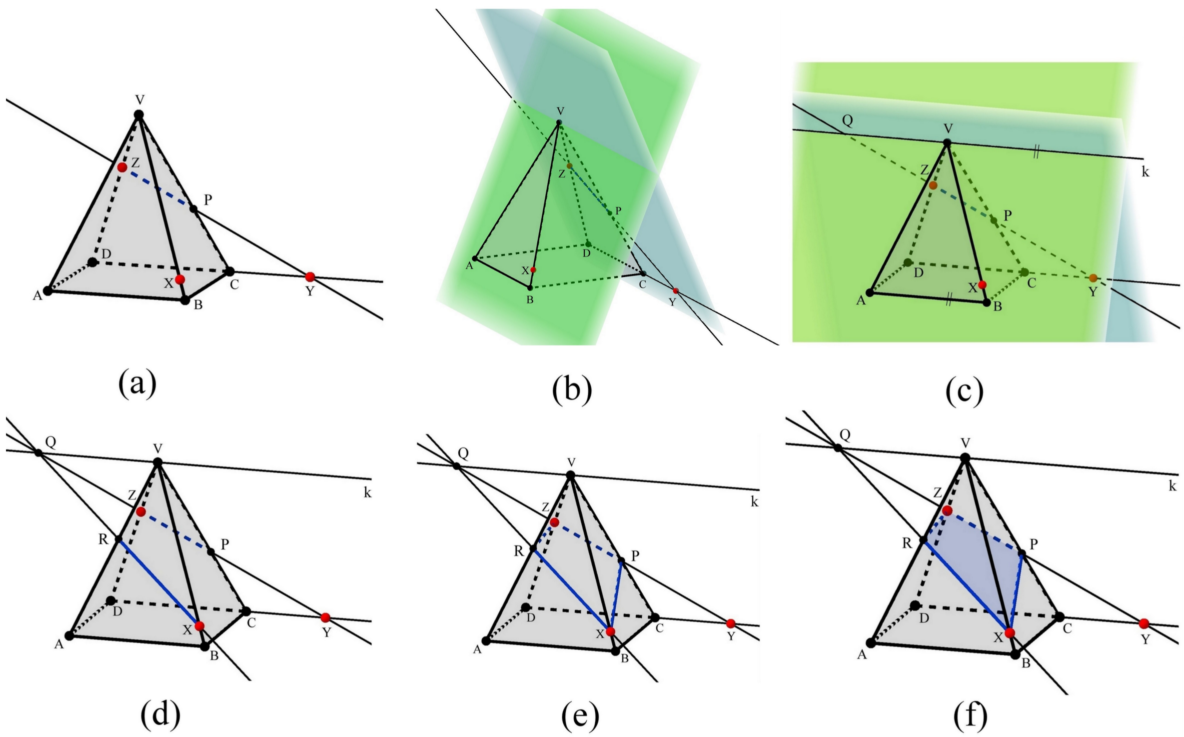
2. **Veďte bodem V rovnoběžku k s úsečkou AB.**
   Další krok nakreslení řezu vyžaduje použití 3. pravidla. Hledáme na tělese situaci, kdy na jedné stěně jehlanu známe řez a na sousední stěně známe bod řezu. Stěny, které hledáme jsou přední stěna ABV a zadní stěna CDV jehlanu. Jsou sousední, ovšem nemají společnou hranu, ale bod a to konkrétně bod V. Potřebujeme tedy najít průsečnici roviny přední stěny ABV a roviny zadní stěny CDV jehlanu. Obrázek 39(b) ukazuje zeleně rovinu přední stěny a modře rovinu zadní stěny. Hledáme přímku, která leží v obou rovinách zároveň. Z obrázku 39(c) je patrné, že se jedná o přímku, označme ji k, která je rovnoběžná s hranou AB jehlanu.

3. **Průsečík přímky k a přímky YZ označte Q.**
   Přímka k a přímka YZ se protnou v jediném bodě, který označíme Q, viz obrázek 39(c).

4. **Sestrojte přímku QX a vyznačte řez na přední stěně ABV jehlanu. Průsečík přímky QX a hrany AV jehlanu označte R.**
   Bodem Q (viz 3. pravidlo) jistě musí procházet i průsečnice přední stěny ABV jehlanu a roviny řezu. Sestrojíme tedy přímku QX. Přímka QX a hrana jehlanu AV se protnou v bodě R. Úsečka RX tvoří řez na přední stěně ABV jehlanu, viz obrázek 39(d).

5. **Sestrojte úsečku RZ.**
   Body R a Z leží v jedné stěně (levá boční stěna), tedy i jejich spojnice leží v této stěně. Úsečka RZ tvoří řez na levé boční stěně, viz obrázek 39(e).

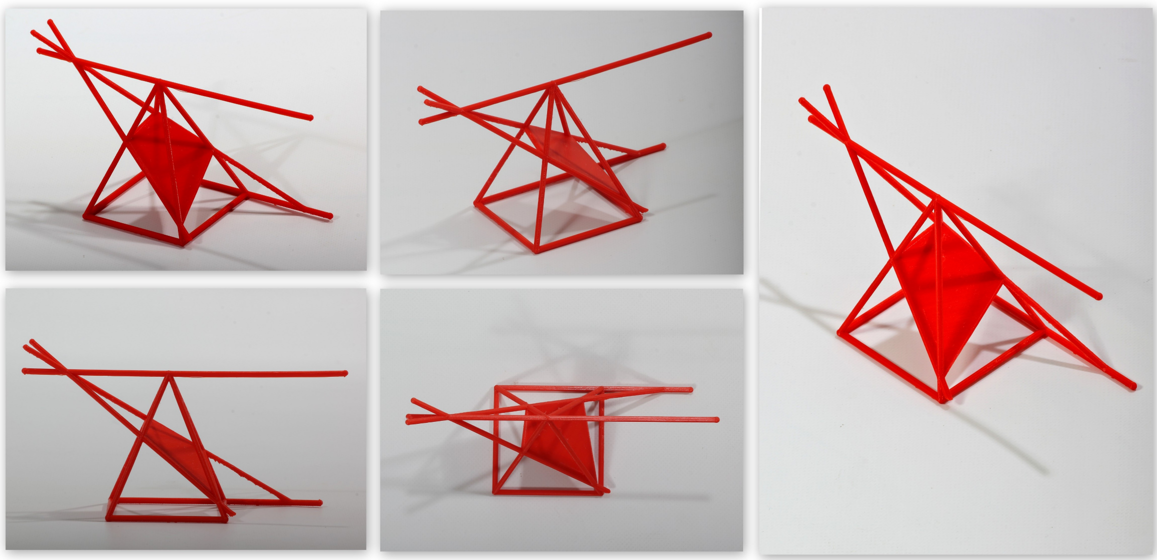
6. **Sestrojte úsečku PX.**
   Body P a X leží v jedné stěně (pravá boční stěna), tedy i jejich spojnice leží v této stěně. Úsečka PX tvoří řez na pravé boční stěně, viz obrázek 39(e). Řezem tělesa je čtyřúhelník $RXPZ$, viz obrázek 39(f).



Obrázek 39: Př. 9 - řešení

Komentář:
Poprvé se v tomto příkladu setkáváme s tím, že bod určující řez tělesa leží mimo těleso. Příklad je ovšem zajímavý především problematikou průsečnice roviny přední a zadní stěny jehlanu, která může být pro žáky obtížná a hůře představitelná. I z tohoto důvodu byl právě tento model řezu vybrán k vytištění na 3D tiskárně. Na obrázku 40 můžete vidět fotografie. Model je široký přibližně 19 cm a jeho vytištění trvalo více než 12 hodin. V porovnání s ostatními modely tisknutými v rámci diplomové práce se tak jedná o časově nejnáročnější model. Tisk tohoto modelu byl zdokumentován a následně bylo vyrobeno čtyřminutové video jako informativní materiál pro studenty. Toto video je

součástí CD přílohy diplomové práce. Více informací o 3D tisku je uvedeno v kapitole 5.



Obrázek 40: Př. 9 - model vytištěný na 3D tiskárně

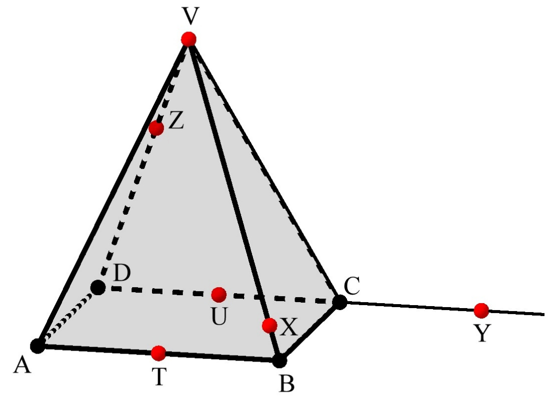
Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 9*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 9*.

Příklad 10

Mějme pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a body X, Y, Z, T, U a V umístěné tak, jak je uvedeno na obrázku 41. Sestrojte řez jehlanu rovinou TUV a rovinou XYZ. Dále sestrojte průsečnici těchto dvou řezů.

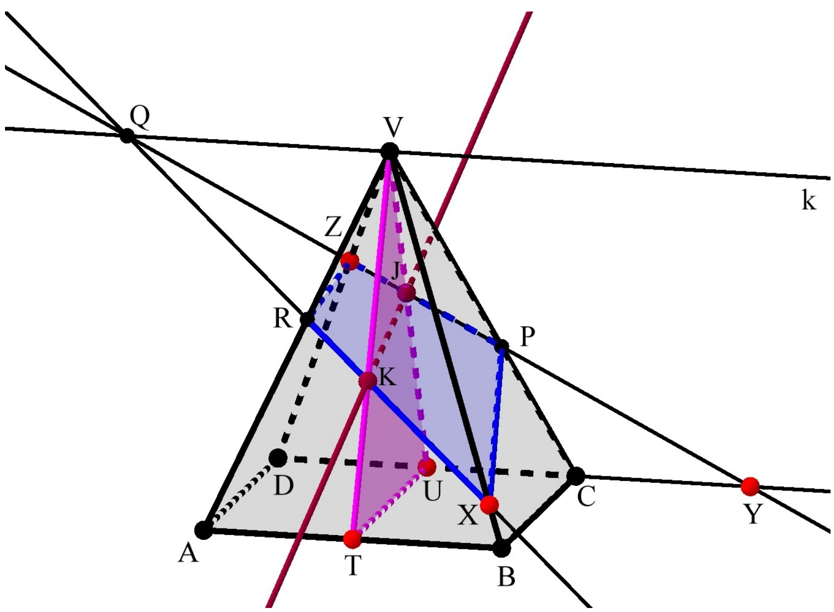
Postup:

1. **Sestrojte řez XYZ.**
   Postup sestrojení řezu XYZ je vysvětlen v příkladu 9.
2. **Sestrojte řez TUV.**
   Postup sestrojení řezu TUV je vysvětlen v příkladu 2.



Obrázek 41: Př. 10 - zadání

3. **Sestrojte průsečnici řezu XYZ a TUV.**
   Pro nalezení průsečnice dvou řezů potřebujeme najít dva body, v nichž se na jedné stěně jehlanu protínají dvě roviny řezu. Jeden takový bod vzniká jako průsečík úseček PZ a UV, označme jej J, druhý takový bod vzniká jako průsečík úseček RX a TV, označme jej K, viz obrázek 42. Průsečnice řezů XYZ a TUV je tedy přímka JK, viz obrázek 42.



Obrázek 42: Př. 10 - průsečnice řezů XYZ a TUV

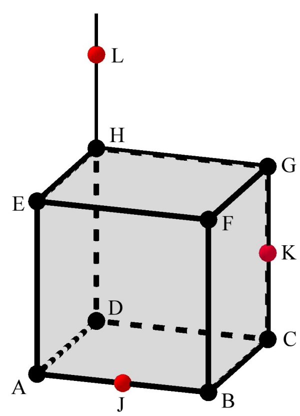
Komentář:

Při kreslení průsečnice věnujme pozornost viditelnosti přímky - viditelné části průsečnice (část přímky před tělesem a ta část přímky za tělesem, která je vidět) značíme plně, neviditelné (část přímky uvnitř tělesa a část za tělesem, která není vidět) značíme čárkovaně.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 10*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 10*.

Příklad 11

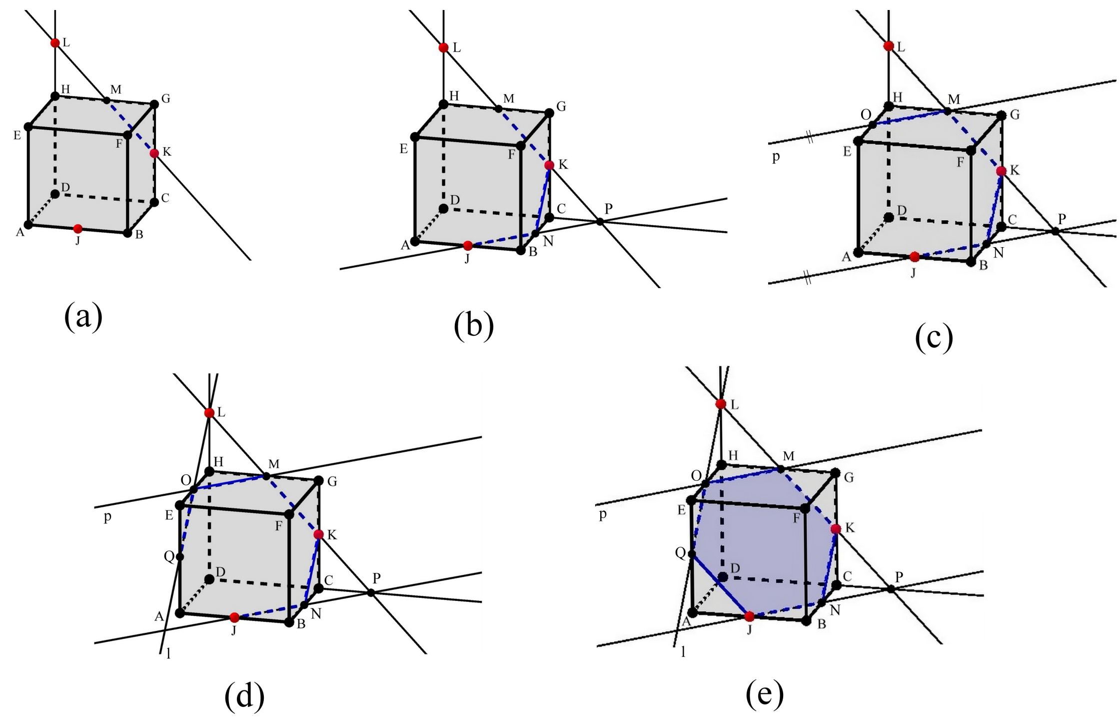
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou JKL. Bod J je střed úsečky AB, bod K je střed úsečky CG a bod L leží na polopřímce DH, jak je uvedeno na obrázku 43.



Obrázek 43: Př. 11 - zadání

Postup:

1. **Sestrojte přímku KL a vyznačte řez na zadní stěně krychle. Průsečík přímky KL a hrany GH krychle označte M.**
   Bod L leží na přímce, která je průsečnicí zadní stěny a levé boční stěny. Z toho je patrné, že tato přímka leží v zadní stěně krychle a tudíž i bod L leží v zadní stěně krychle. Pak ale platí, že body K a L leží v jedné stěně a tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Průsečík přímky KL a hrany GH krychle označíme M. Úsečka KM pak tvoří řez na zadní stěně krychle, viz obrázek 44(a).



Obrázek 44: Př. 11 - řešení

2. **Vyznačte průsečnici zadní stěny krychle a dolní podstavy, tj. vyznačte přímku CD.**
   Využijeme 3. pravidlo, tedy hledáme dvě sousední stěny krychle, z nichž na jedné známe řez a na druhé bod řezu. Jedná se o zadní stěnu a dolní podstavu. Na zadní stěně máme právě vytvořený řez (řez KM) a na dolní podstavě známe bod J, který určuje rovinu řezu podle zadání. Vyznačíme tedy průsečnici zadní stěny a dolní podstavy, tj. přímku CD, viz obrázek 44(b).

3. **Průsečík přímky CD s přímkou KL označte P.**
   Přímky CD a KL se protínají v jediném bodě, označme jej P, viz obrázek 44(b).

4. **Sestrojte přímku JP a vyznačte řez na dolní podstavě krychle. Průsečík přímky JP a hrany BC krychle označte N.**
   Na základě 3. pravidla víme, že bodem P musí procházet i průsečnice řezu s rovinou dolní podstavy. Sestrojíme tedy přímku JP, která protne hranu BC krychle v bodě, který označíme jako N. Úsečka JN tvoří řez na dolní podstavě krychle, viz obrázek 44(b).

5. **Sestrojte úsečku KN, tj. vytvořte řez na pravé boční stěně.**
   Body K a N leží na stejné stěně (pravá boční stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka KN tak tvoří řez na pravé boční stěně, viz obrázek 44(b).

6. **Veďte bodem M rovnoběžku p s úsečkou JN a vyznačte řez na horní podstavě. Průsečík přímky p a hrany EH krychle označte O.**
   Využijeme 2. pravidlo k nakreslení řezu na horní podstavě. Známe řez na dolní podstavě, která je s rovinou horní podstavy rovnoběžná. Vedeme tedy bodem M rovnoběžku p s úsečkou JN. Průsečík přímky p s hranou EH krychle označme O. Úsečka MO tvoří řez na horní podstavě, viz obrázek 44(c).

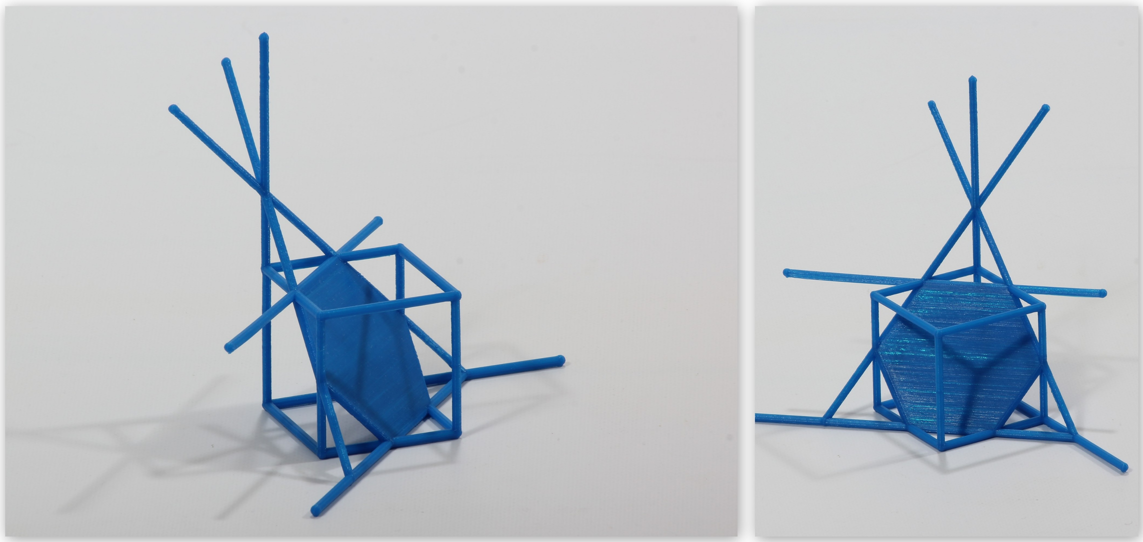
7. **Veďte bodem O rovnoběžku l s úsečkou KN a vyznačte řez na levé boční stěně. Průsečík přímky l a hrany AE krychle označte Q.**
   Na pravé boční stěně známe řez a na levé boční stěně, která je s ní rovnoběžná, známe bod řezu - bod O. Vedeme bodem O rovnoběžku s úsečkou KN. Průsečík přímky l a hrany AE krychle označíme Q. Úsečka OQ tvoří řez na levé boční stěně, viz obrázek 44(d).

8. **Sestrojte úsečku JQ.**
   Body J a Q leží ve stejné stěně (přední stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka JQ tvoří řez na přední stěně krychle. Řezem tělesa je šestiúhelník $JNKMOQ$, viz obrázek 44(e).

Komentář:

Řez na levé boční stěně krychle mohl vzniknout ještě jiným způsobem, než jak je uvedeno v kroku 7. Druhou možností by bylo využít k nakreslení řezu na levé boční stěně 3. pravidlo, pro nějž máme vše potřebné již připravené. Uvědomíme-li si, že na zadní stěně známe řez MK a na levé boční stěně známe bod řezu - bod O, dále, že průsečnici těchto sousedních stěn (přímku DH) již máme nakreslenou stejně tak jako průsečnici zadní stěny a roviny řezu (přímka KM) a že průsečíkem přímek DH a KM je právě bod L. Pak stačí pouze sestrojit přímku LO. Tím dostaneme řez na levé boční stěně, jak je vidět na obrázku 44(d). Můžeme tedy postupovat různě, ovšem dojdeme vždy ke stejnému výsledku.

Model tohoto řezu na krychli byl vytištěn na 3D tiskárně. Výsledek můžete vidět na obrázku 45. Jednalo se o poměrně složitý objekt k tisku. Jak dlouho například trvalo vytisknout tento model, co vše je zapotřebí připravit před tiskem a proč je vůbec tento *objekt pro tiskárnu tak složitý vysvětlíme a ukážeme v kapitole 5.*



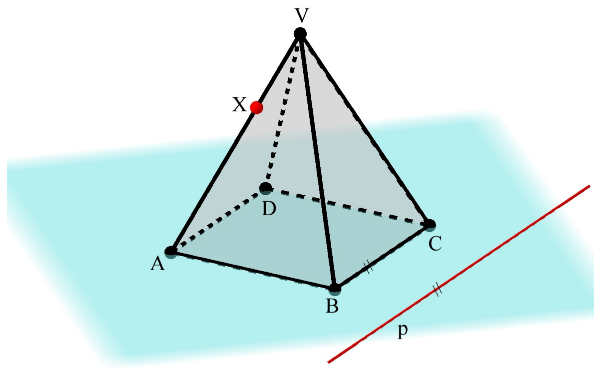
Obrázek 45: Př. 11 - model vytištěný na 3D tiskárně

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 11*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 11*.

Příklad 12

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte řez určený bodem X a přímkou p, jak je uvedeno na obrázku 46. Přímka p leží v rovině dolní podstavy jehlanu a je rovnoběžná s hranou BC jehlanu.

Zadání tohoto příkladu se liší od ostatních - namísto tří bodů určujících řez je zadán jeden bod a přímka. Pojďme se nyní zamyslet, zda je zadání v pořádku a zda máme dostatek informací k nakreslení řezu. Víme, že přímka je určena dvěma body. Můžeme si tedy vybrat libovolné dva body na přímce a spolu s bodem X tak máme trojici bodů, která určuje rovinu řezu. Zadání je tedy úplné.



Obrázek 46: Př. 12 - zadání

Postup:

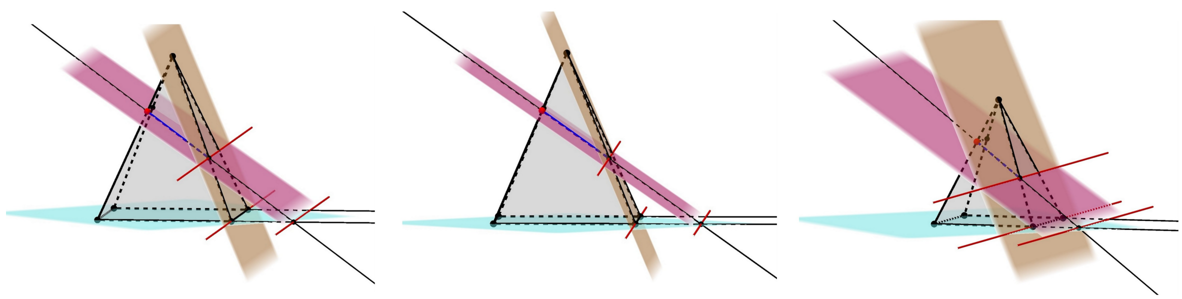
1. **Vyznačte průsečnici přední stěny ABV a podstavy jehlanu, tj. vyznačte přímku AB. Průsečík přímky AB a přímky p označte P.**
   Rovina dolní podstavy, v níž přímka p leží, je na obrázku 46 vyznačena modře pro lepší ilustraci problému. Uvědomíme-li si, že na rovině dolní podstavy známe řez (přímka p) a na přední stěně ABV známe bod X řezu a tyto stěny jsou navíc sousední, pak aplikujeme 3. pravidlo, jak ukazuje obrázek 48(a). Vyznačíme průsečnici rovin těchto sousedních stěn, tj. sestrojíme přímku AB protažením hrany AB jehlanu. Průsečík přímky AB a přímky p označíme P.

2. **Sestrojte přímku PX. Průsečík přímky PX a hrany BV jehlanu označte Y.**
   Přímka AB protne přímku p (což je průsečnice řezu s rovinou dolní podstavy) v jediném bodě, jímž tedy jistě musí procházet i průsečnice řezu s rovinou přední stěny ABV. Vedeme tedy bodem P a bodem X přímku, která protne hranu BV v bodě, který označíme Y. Úsečka XY pak tvoří řez na rovině přední stěny ABV, viz obrázek 48(a).

3. **Veďte bodem Y rovnoběžku l s přímkou p a vyznačte řez na pravé boční stěně jehlanu. Průsečík přímky l a hrany CV jehlanu označte Z.**
   Nyní se neobejdeme bez znalosti vzájemné polohy tří rovin. Situace je naznačena na obrázku 47 (různé úhly pohledu). Budeme pracovat se třemi rovinami - rovina podstavy, rovina pravé boční stěny a rovina řezu. Průsečnice roviny podstavy a roviny pravé boční stěny je přímka určená body BC. Průsečnice roviny dolní

podstavy a roviny řezu je přímo přímka p. Již ze zadání plyne, že tyto přímky jsou rovnoběžné. Z toho ale vyplývá, že průsečnice roviny pravé boční stěny a roviny řezu, neboli přímka l, musí být s těmito dvěma také rovnoběžná. Jedná se tedy o vzájemnou polohu tří po dvou různoběžných rovin, pro něž platí, že průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné.

Pro nás to tedy znamená, že vedeme bodem Y rovnoběžku l s přímkou p. Průnik přímky l a hrany CV jehlanu označíme jako Z. Úsečka YZ tedy tvoří řez na pravé boční stěně, viz obrázek 48(b).

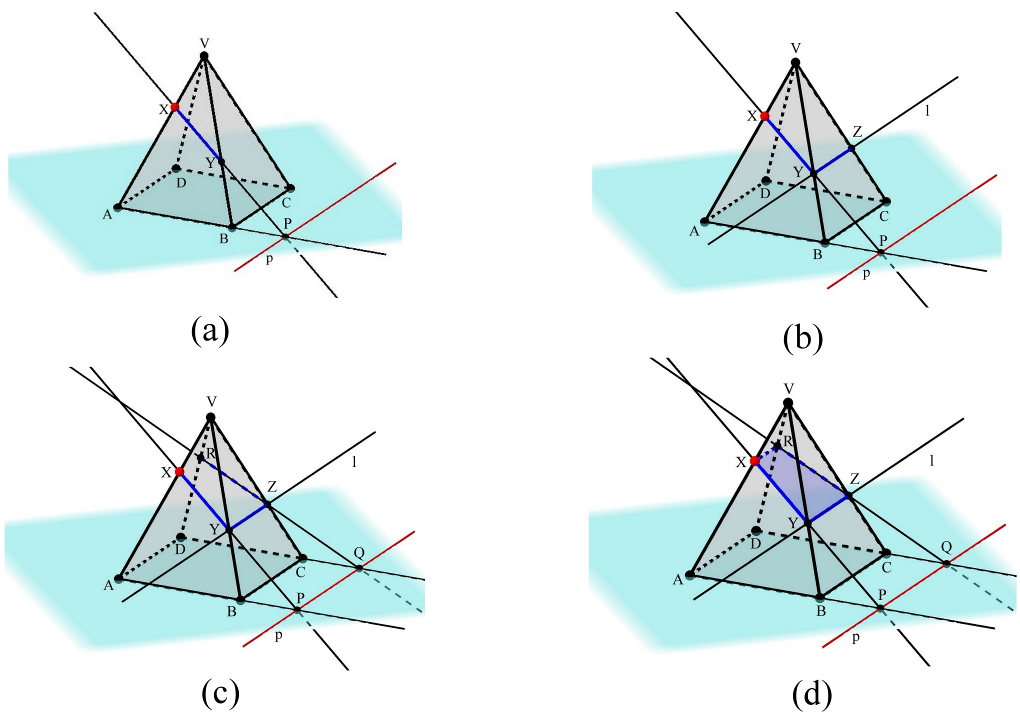


Obrázek 47: Př. 12 - vzájemná poloha tří rovin, mají-li tři rovnoběžné průsečnice - různé úhly pohledu

4. **Vyznačte průsečnici zadní stěny CDV a dolní podstavy, tj. vyznačte přímku CD. Průsečík přímky CD a přímky p označte Q.**
   K nakreslení řezu na zadní stěně CDV využijeme 3. pravidlo. Máme podstavu, na níž známe řez (přímka p) a s ní sousedící zadní stěnu CDV jehlanu, na níž známe bod řezu - nově vytvořený bod Z. Vyznačíme tedy průsečnici roviny zadní stěny CDV a roviny podstavy - přímku CD. Přímka CD a přímka p se protínají v jediném bodě, označme jej Q, viz obrázek 48(c).

5. **Sestrojte přímku QZ a vyznačte řez na zadní stěně CDV jehlanu. Průsečík přímky QZ a hrany DV jehlanu označte R.**
   Bodem Q musí procházet i třetí průsečnice (průsečnice roviny řezu a zadní stěny CDV jehlanu). Sestrojíme tedy přímku QZ a její průsečík s hranou DV jehlanu označíme jako R. Úsečka RZ tvoří řez na zadní stěně CDV jehlanu, viz obrázek 48(c).

6. **Sestrojte úsečku RX.**
   Body R a X leží v jedné stěně (levá boční stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka RX tvoří řez na levé boční stěně. Řezem tělesa je čtyřúhelník $XYZR$, viz obrázek 48(d).



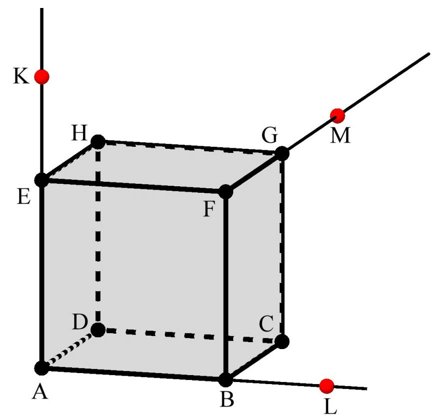
Obrázek 48: Př. 12 - řešení

Komentář:
Jedná se o komplikovanější příklad, který je pro studenty hůře pochopitelný. Je vhodné vyhradit si na něj v hodině dostatek času.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 12*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 12*.

Příklad 13

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM. Bod K leží na polopřímce AE, bod L na polopřímce AB a bod M na polopřímce FG, viz obrázek 49.



Obrázek 49: Př. 13 - zadání

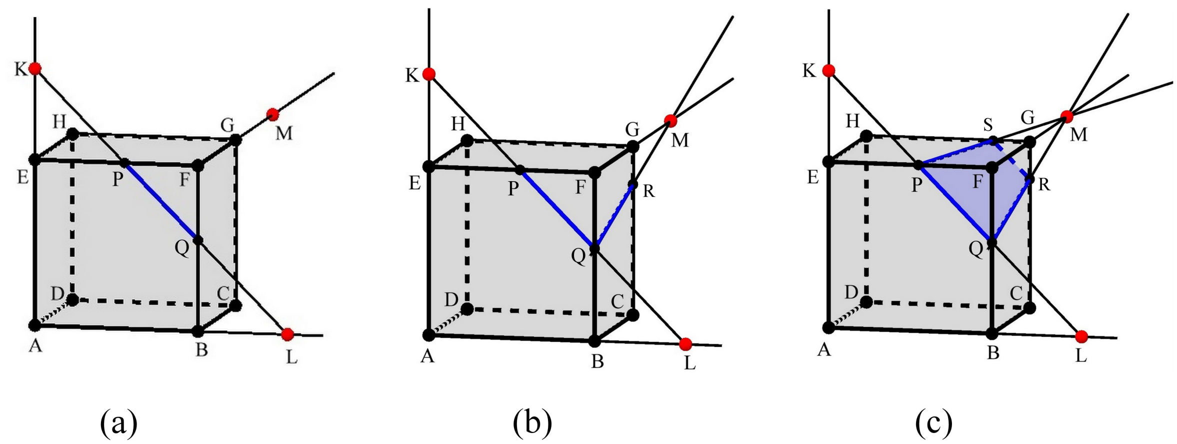
Postup:

1. **Sestrojte přímku KL a vyznačte řez na přední stěně krychle. Průsečík úsečky KL a strany EF krychle označte P. Průsečík úsečky KL a hrany BF krychle označte Q.**
   Body K a L leží v rovině přední stěny krychle, viz kapitola 3.2, tedy i jejich spojnice bude ležet v této rovině. Průsečík úsečky KL a strany EF krychle označme P a průsečík úsečky KL s hranou BF krychle označme Q. Úsečka PQ tvoří řez na přední stěně krychle, viz obrázek 50(a).

2. **Sestrojte přímku MQ a vyznačte řez na pravé boční stěně krychle. Průsečík přímky MQ a hrany CG krychle označte R.**
   Bod M leží na průsečnici roviny horní podstavy krychle a roviny pravé boční stěny krychle. Z toho vyplývá, že body M a Q leží v jedné stěně (pravá boční stěna), a tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Průsečík přímky MQ a hrany CG krychle označíme R. Úsečka QR tvoří řez na pravé boční stěně krychle, viz obrázek 50(b).

3. **Sestrojte přímku MP a vyznačte řez na horní podstavě krychle. Průsečík přímky MP a hrany GH krychle označte S.**

Bod M leží na průsečnici roviny horní podstavy krychle a roviny pravé boční stěny krychle. Z toho vyplývá, že body M a P leží v rovině jedné stěny (horní podstava) a tedy i jejich spojnice leží v rovině této stěny. Průsečík přímky MP a hrany GH krychle označíme S. Úsečka PS tvoří řez na horní podstavě krychle, viz obrázek 50(c).



Obrázek 50: Př. 13 - řešení

4. **Sestrojte úsečku** RS**.**
   Body R a S leží ve stejné stěně (zadní stěna), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně na základě 1. pravidla. Úsečka RS tvoří řez na zadní stěně krychle. Řezem tělesa je čtyřúhelník $PQRS$, viz obrázek 50(c).

Komentář:

Příklad může být obtížnější z toho důvodu, že všechny tři body udávající rovinu řezu jsou umístěny mimo krychli, což může být pro žáky matoucí. Stačí si ovšem rozklíčovat, v jakých rovinách tyto body leží, viz kapitola 3.2.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Příklad 13*. Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Příklad 13*.

Poznámka závěrem

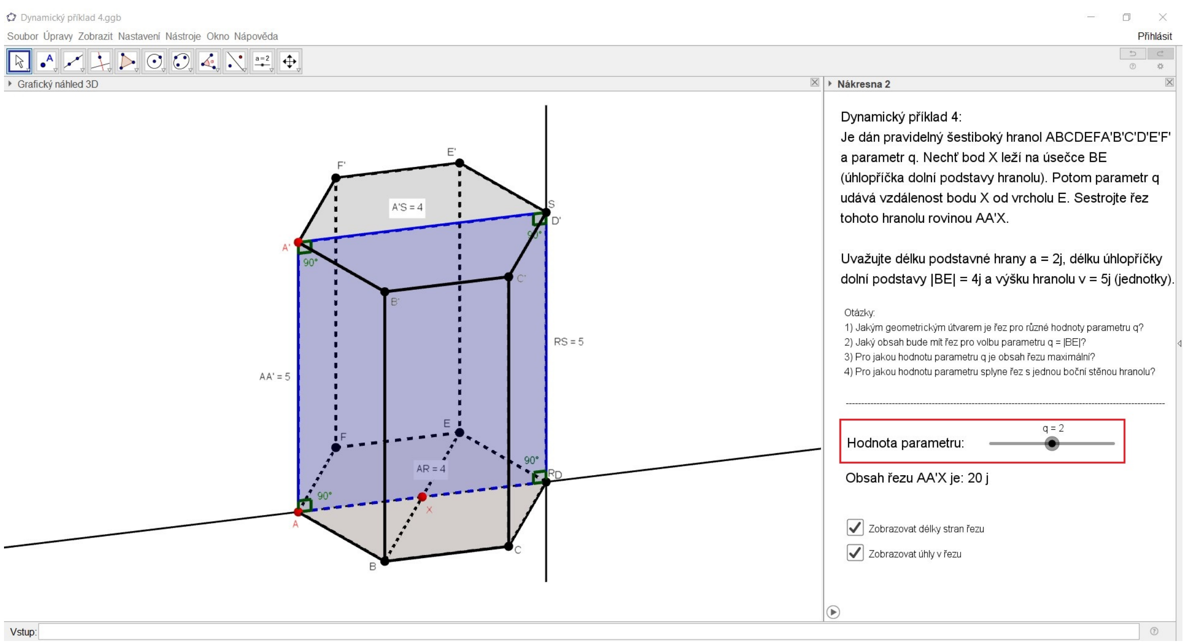
V této kapitole bylo uvedeno třináct příkladů spolu s detailním popisem jednoho možného způsobu řešení. Nikoliv však jediného. Jsme si vědomi existence jiných možných postupů při řešení příkladů. U některých příkladů je v komentáři uveden jiný možný postup při řešení, ne však u všech. Jiné způsoby řešení téhož příkladu mohou být vhodným bonusovým úkolem pro rychlejší žáky.

Poznamenejme ještě, že v textu byla leckdy uvedena přímka, zatímco na obrázku byla vyznačena jen její část, polopřímka. Je to pouze z toho důvodu, aby byl obrázek přehlednější, tedy byla nakreslena jenom ta část přímky, která byla následně potřebná v dalším postupu.

4.2 Dynamické příklady

V rámci této podkapitoly si ukážeme čtyři příklady, v nichž budeme využívat GeoGebru jako dynamický software. Jinými slovy, jeden příklad bude vlastně souborem mnoha příkladů řezů těles rovinou a konkrétní zadání bude záviset na daném parametru. Jedná se o složitější typy úloh, které se opírají o již zvládnutou a osvojenou látku řezů základních. Rozvíjí ještě více prostorovou představivost a nutí žáky uvažovat nad tím, jak bude řez vypadat, popřípadě, jak se změní v závislosti na parametru.

Všechny příklady byly namodelovány v programu 3D GeoGebra a jsou součástí CD přílohy diplomové práce. Pomocí nástroje posuvník, viz obrázek 51, lze měnit hodnotu parametru a sledovat změny řezu na tělese. Těleso je možné i otáčet a měnit tak úhly pohledu. U každého příkladu je uvedeno několik otázek k zamyšlení spolu s jejich řešením. Na otázky je vhodné odpovídat právě s pomocí dynamického modelu v GeoGebře, nicméně k zodpovězení otázek není GeoGebra nezbytná. Naopak součástí příkladů vytvořených v Geogebře je i zadání a otázky k zamyšlení, tedy tyto příklady mohou být použity i bez textu diplomové práce, viz obrázek 51.



Obrázek 51: Ukázka dynamického příkladu v programu 3D GeoGebra

Ke všem níže uvedeným dynamickým příkladům byly zhotoveny pracovní listy, které jsou součástí kapitoly 9.2. U každého příkladu jsou připraveny vždy tři modely tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Žáci si tak mohou nakreslit řez tělesa pro tři různé hodnoty parametru a zodpovědět otázky pomocí těchto náčrtků i bez použití GeoGebry. Z toho důvodu je forma otázek v pracovních listech mírně odlišná; obsahově jsou však totožné s otázkami v textu diplomové práce i v programu GeoGebra.

Dynamický příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a parametr n. Nechť bod X leží na hraně DH krychle. Parametr n udává vzdálenost bodu X od vrcholu D. Sestrojte řez krychle rovinou AGX.

Otázky k zamyšlení:

1. Jak bude vypadat řez krychle pro volbu parametru $n = 0$?
2. Jak bude vypadat řez krychle pro volbu parametru $n = |DH|$?
3. Jak bude vypadat řez krychle pro volbu parametru $n = \frac{1}{2}|DH|$?
4. Jak se budou lišit obsahy řezů krychle pro volbu parametru $n = 0$ a $n = |DH|$?
5. Jak bude vypadat průsečnice všech řezů, které vzniknou volbou všech hodnot parametru n?

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Dynamický příklad 1*. V programu je vytvořený posuvník pro parametr n, na němž lze měnit hodnoty parametru a současně sledovat změny řezu na tělese. Udává-li parametr n vzdálenost bodu X od vrcholu D krychle, pak nabývá hodnot od nuly do hodnoty velikosti úsečky DH. Uvažujme délku strany krychle $a = 4$j (jednotky). Pak platí, že parametr n nabývá hodnot od nuly do čtyř, tj. $n \in \langle 0, 4 \rangle$. V závislosti na parametru se pohybuje bod X po hraně DH krychle a postupně přechází v hraniční případy $n = 0$ a $n = 4$.

Poznamenejme ještě, že s objekty v GeoGebře je možné otáčet, a dívat se tak na daný problém z různých úhlů pohledu, jež mohou být nápomocné při řešení úkolu.

Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání pro tři různé volby parametru je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Dynamický příklad 1*.

....

Řešení:

Otázka 1

Udává-li parametr n vzdálenost bodu X od vrcholu D krychle a je-li tato vzdálenost nulová, pak jistě bod X splývá s bodem D, jedná se o hraniční případ. V takovém případě řešíme řez krychle rovinou ADG, viz obrázek 52(a).

Otázka 2

Druhá hraniční hodnota parametru je pro $n = |DH|$, tj. $n = 4$j. V tomto případě splývá bod X s bodem H a tedy řešíme řez krychle rovinou AGH, viz obrázek 52(c).

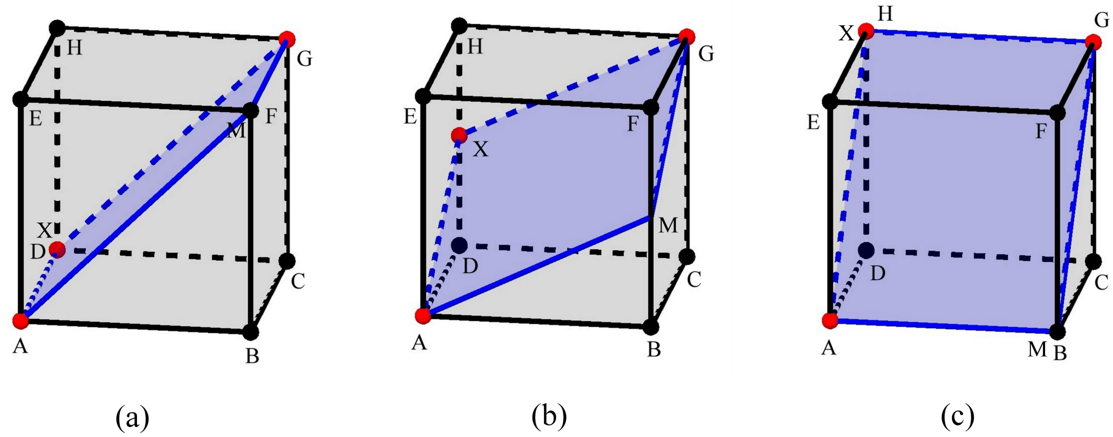
Otázka 3

V ostatních případech (vyjma těch hraničních) sestrojíme řez rovinou AGX, kdy bod X leží libovolně na hraně DH. Pro jednoduchost můžeme uvažovat hodnotu parametru $n = \frac{1}{2}|DH| = 2$j, tj. bod X leží ve středu úsečky DH. Takový řez je uveden na obrázku 52(b). K jeho nakreslení použijeme 2. pravidlo - pravidlo rovnoběžnosti.

Otázka 4

Ke správné odpovědi pomůže obrázek. Porovnáváme obsahy modře vyznačených čtyřúhelníků na obrázku 52(a) a 52(c). Odvození provedeme nejprve obecně. Zabýváme se tedy prvním případem, řezem ADG. Uvědomíme si, že řezem je obdélník. Délka jedné jeho strany je délkou hrany krychle, kterou značíme a. Druhou stranu obdélníka tvoří stěnová úhlopříčka krychle, jejíž délka je tedy $a \cdot \sqrt{2}$. Pak je obsah řezu jistě $a^2 \cdot \sqrt{2}$. Nyní potřebujeme tuto hodnotu srovnat s obsahem řezu AGH. Opět shledáme, že řezem je obdélník s délkou stran a a $a \cdot \sqrt{2}$, tedy obsahy těchto dvou řezů jsou totožné. Pro případ $a = 4$ je tedy délka úhlopříčky $4 \cdot \sqrt{2} \doteq 5,66$j a obsah obou řezů je $16 \cdot \sqrt{2} \doteq 22,63$.

V programu GeoGebra lze pod posuvníkem číst hodnotu obsahu řezu rovinou AGX v závislosti na měnícím se parametru n. Můžeme si tak ověřit, že pro $n = 0$ a $n = 4$ je obsah řezu stejný a je přibližně roven právě hodnotě $22,63$j. V programu jsou také uvedeny délky stran čtyřúhelníku tvořící řez a úhly v tomto čtyřúhelníku. Tyto hodnoty pak dokládají, že pro $n = 0$ a $n = 4$ je řezem obdélník (protilehlé strany jsou stejně dlouhé a všechny úhly jsou pravé). Při řešení dalších úloh jsou však tyto hodnoty zbytečné a mohou tvořit model nepřehledným, z toho důvodu lze v zaškrtávacím políčku volit jejich viditelnost.



Obrázek 52: Dynamický příklad 1 - řešení

Otázka 5

Rovina (řezu) je určena třemi body. V našem případě ale zůstávají dva z nich pevně ukotveny (body A a G) a mění se pouze třetí bod určující řez - bod X. Tato myšlenka je klíčová pro zodpovězení poslední otázky. Zopakujme, že průsečnice dvou rovin je přímka, která leží v obou těchto rovinách. Hledáme tedy přímku, která je průnikem všech řezů, které mohou vzniknout volbou parametru n. Přímka je určena dvěma body, hledáme tedy dva body, které leží ve všech rovinách, které mohou vzniknout volbou parametru n. Ze zadání ale plyne, že body A a G určují každou z těchto rovin. Průsečnicí, na kterou se ptáme, je tedy přímka AG.

Dynamický příklad 2

Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$ a parametr p. Nechť bod X leží na hraně BE krychle. Potom parametr p udává vzdálenost bodu X od vrcholu B. Sestrojte řez tohoto hranolu rovinou AFX.

Otázky k zamyšlení:

1. Jak bude vypadat řez hranolem pro volbu parametru $p = 0$?

2. Jak bude vypadat řez hranolem pro volbu parametru $p = |BE|$?

3. Jak bude vypadat řez hranolem pro volbu parametru $p = \frac{1}{2}|BE|$?

4. Řezem bude vždy trojúhelník. Rozhodněte a odůvodněte, které tvrzení o trojúhelnících vzniklých pro tři výše zmíněné hodnoty parametru p je pravdivé.

   (a) Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé.

   (b) Všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné.

   (c) Všechny trojúhelníky jsou rovnostranné.

   (d) Ani jedno z předešlých tvrzení není správné.

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Dynamický příklad 2*. V programu je vytvořený posuvník pro parametr p, na němž lze měnit hodnoty parametru a současně sledovat změny řezu na tělese. Udává-li parametr p vzdálenost bodu X od vrcholu B hranolu, pak nabývá hodnot od nuly do hodnoty velikosti úsečky BE. Uvažujme délku podstavné hrany $a = 2$j a výšku hranolu $v = 3$j, neboli $|BE| = 3$j (jednotky). Pak platí, že parametr p nabývá hodnot od nuly do tří, tj. $n \in \langle 0, 3\rangle$. V závislosti na parametru se pohybuje bod X po hraně BE hranolu a postupně přechází v hraniční případy $n = 0$ a $n = 3$.

Poznamenejme ještě, že s objekty v GeoGebře je možné otáčet, a dívat se tak na daný problém z různých úhlů pohledu, jež mohou být nápomocné při řešení úkolu.

Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání pro tři různé volby parametru je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Dynamický příklad 2*.

....

Řešení:

Otázka 1

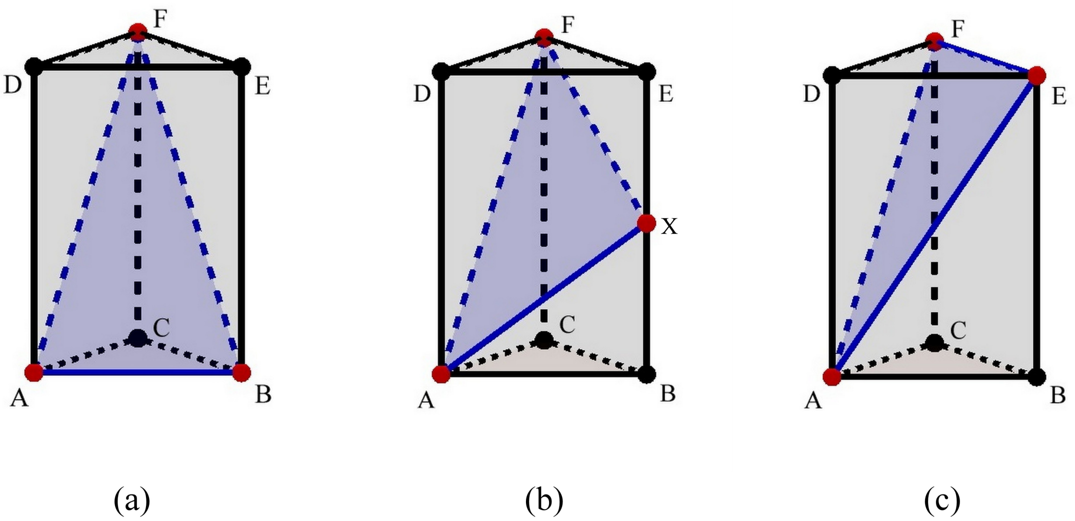
Pro hraniční hodnotu parametru $p = 0$ splývá bod X s bodem B (vzdálenost bodu X od bodu B je nulová). V takovém případě se jedná o řez rovinou ABF, viz obrázek 53(a). Při kreslení řezu si vystačíme s 1. pravidlem.

Otázka 2

Hodnota parametru $p = |BE|$, tj. $p = 3$j je hraniční a platí, že pro tuto hodnotu parametru splývá bod X s bodem E. V takovém případě tedy konstruujeme řez AEF, viz obrázek 53(c). Při kreslení řezu si vystačíme s 1. pravidlem.

Otázka 3

V ostatních případech (tj. mimo hraniční případy) se jedná o řez rovinou AFX, kde bod X leží libovolně na hraně BE. Pro jednoduchost zvolme $p = \frac{1}{2}|BE| = 1.5$j, tedy bod X je středem úsečky BE, jak je uvedeno na obrázku 53(b).Při kreslení řezu si vystačíme s 1. pravidlem.



Obrázek 53: Dynamický příklad 2 - řešení

Otázka 4

K zodpovězení otázky pomůže obrázek 53. Porovnáváme tedy tři trojúhelníky - ABF, AFX a AEF. Začněme trojúhelníkem ABF. Jeho strana AF je stěnovou úhlopříčkou hranolu, stejně jako strana BF. Protože se ale jedná o pravidelný trojboký hranol (podstavou je rovnostranný trojúhelník), pak všechny tři stěny tohoto hranolu jsou, co do velikosti, totožné; tím pádem i jejich úhlopříčky budou, co do velikosti, stejné. Je-li podle zadání délka podstavné hrany $a = 2$j a výška hranolu $v = 3j$, pak úhlopříčku vypočítáme podle Pythagorovy věty a platí, že $|BF| = |AF| = \sqrt{13} \doteq 3,61$j. Třetí strana trojúhelníku je vlastně podstavnou hranou hranolu, tedy $|AB| = 2$j. Protože tedy platí: $|AF| = |BF| > |AB|$, pak se jistě jedná o rovnoramenný trojúhelník, jehož délka ramene je rovna délce stěnové úhlopříčky hranolu.

Pojďme tedy ověřit, zda i trojúhelníky AFX a AEF jsou rovnoramenné. Pro trojúhelník AEF je odpověď nasnadě - jistě se jedná o rovnoramenný trojúhelník, neboť dvě jeho strany jsou opět stěnovými úhlopříčkami hranolu a třetí je podstavnou hranou hranolu. Zbývá tedy ověřit, že i trojúhelník AFX je rovnoramenný. Jeho stranu AX si můžeme také představit jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku ABX s pravým úhlem při vrcholu B. Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníku je vlastně hrana AB pravidelného trojbokého hranolu a druhá odvěsna je polovina výšky tohoto hranolu. Nyní si stačí uvědomit, že stranu FX trojúhelníku AFX si můžeme opět představit jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku EFX s pravým úhlem při vrcholu E. Jedna odvěsna tohoto trojúhelníku je délka hrany EF trojbokého hranolu a druhá odvěsna je opět polovina výšky hranolu. A protože se jedná o pravidelný trojboký hranol, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník, pak jistě jeho hrany AB a EF mají stejnou velikost. Z toho plyne, že pravoúhlé trojúhelníky ABX a EFX jsou shodné a tedy velikost úsečky AX je totožná s velikostí úsečky FX. Tyto úsečky tvoří dvě strany trojúhelníku AFX, tedy jsme prokázali, že se také jedná o rovnoramenný trojúhelník. Správnou odpovědí je tedy odpověď (b).

Pojďme nyní ještě ověřit, že se jedná o jedinou správnou odpověď. Odpověď (a) říká, že všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé. Chceme-li ukázat, že je tato odpověď nesprávná, pak stačí dokázat, že alespoň jeden trojúhelník (z výše uvedených) není pravoúhlý. Vyberme si například trojúhelník ABF, vzniklý pro hodnotu parametru $p = 0$, viz obrázek 53(a). Z předchozích výpočtů známe strany tohoto trojúhelníku - $|AB| = 2$j, $|AF| = \sqrt{13}$j, $|BF| = \sqrt{13}$j. Je zřejmé, že existuje-li v tomto trojúhelníku pravý úhel, pak musí ležet proti základně, tedy u vrcholu F. Zda je tento úhel, označme jej ϕ, pravý, ověříme například výpočtem podle cosinové věty.

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\phi$$

$$cos\phi = \frac{f^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot ab}$$

$$\phi = 32^\circ 13'$$

Úhel $\phi \neq 90^\circ$, tedy rovnoramenný trojúhelník ABF jistě není pravoúhlý.

Poznamenejme ještě, že jinou možností, jak ukázat, že tento trojúhelník není pravoúhlý, by bylo ověření neplatnosti Pythagorovy věty. Do vzorečku $c^2 = a^2 + b^2$ však potřebujeme za c dosadit nejdelší stranu trojúhelníku - přeponu. Jak již bylo řečeno, existuje-li pravý úhel v rovnoramenném trojúhelníku ABF, pak jistě musí ležet u vrcholu F. Proti pravému úhlu v pravoúhlém trojúhelníku leží přepona - tedy strana AB.

Vzhledem ke znalosti délek stran trojúhelníku ($|AB| = 2$j, $|AF| \doteq 3{,}61$j, $|BF| \doteq 3{,}61$j) je ale strana AB stranou nejkratší a tedy nemůže být přeponou. Rovnoramenný trojúhelník ABF tedy není pravoúhlý.

Nyní chceme ještě ukázat, že i odpověď (c) není správná, tedy potřebujeme ukázat, že alespoň jeden trojúhelník (z výše zmíněných) není rovnostranný. Vyberme opět trojúhelník ABF, vzniklý pro hodnotu parametru $p = 0$, viz obrázek 53(a). Z dřívějších výpočtů víme, že $|AB| = 2$j, $|AF| = \sqrt{13}$j, $|BF| = \sqrt{13}$j. Pak jistě platí, že $|AF| = |BF| > |AB|$, tedy trojúhelník ABF není rovnostranný.

V programu GeoGebra jsou uvedeny velikosti stran i úhlů trojúhelníků vzniklých jako řezy pro měnící se parametr p. Tyto hodnoty by měly pouze dokládat správnost našich úvah a výpočtů. Při řešení ostatních otázek jsou však tyto hodnoty zbytečné a mohou tvořit model nepřehledným, z toho důvodu lze v zaškrtávacím políčku volit jejich viditelnost.

Dynamický příklad 3

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a parametr m. Nechť bod Z leží na hraně DV jehlanu. Potom parametr m udává vzdálenost bodu Z od vrcholu D. Bod X leží na hraně BV jehlanu a bod Y leží na polopřímce DC, která vznikla prodloužením hrany CD jehlanu, jak ukazuje obrázek 54(a). Sestrojte řez tohoto jehlanu rovinou XYZ.

Otázky k zamyšlení:

1. Jaký geometrický útvar bude řezem pro volbu parametru $m = 0$?
2. Co bude průsečnicí roviny řezu a roviny dolní podstavy jehlanu pro volbu parametru $m = 0$?
3. Jaký geometrický útvar bude řezem pro volbu parametru $m = |DV|$?

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Dynamický příklad 3*. V programu je vytvořený posuvník pro parametr m, na němž lze měnit hodnoty parametru a současně sledovat změny řezu na tělese. Udává-li parametr m vzdálenost bodu Z od vrcholu D jehlanu, pak nabývá hodnot od nuly do hodnoty velikosti úsečky DV. Uvažujme délku boční hrany $s = 6$j neboli $|DV| = 6$j (jednotky).

Pak platí, že parametr m nabývá hodnot od nuly do šesti, tj. $m \in \langle 0, 6 \rangle$. V závislosti na parametru se pohybuje bod Z po hraně DV jehlanu a postupně přechází v hraniční případy $m = 0$ a $m = 6$.

Poznamenejme ještě, že s objekty v GeoGebře je možné otáčet, a dívat se tak na daný problém z různých úhlů pohledu, jež mohou být nápomocné při řešení úkolu.

Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání pro tři různé volby parametru je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Dynamický příklad 3*.

....

Řešení:

Udává-li parametr m vzdálenost, musí být nezáporný, tedy nejmenší možná hodnota parametru je nula. Pro tuto hodnotu parametru tedy bod Z splývá s bodem D (nulová vzdálenost bodu Z od vrcholu D). Aby bod Z stále ležel na úsečce DV, pak největší možná vzdálenost bodu Z od bodu D, tj. maximální hodnota parametru, musí být právě velikost úsečky DV neboli 6j. V takovém případě bod Z splývá s vrcholem V. Parametr se tedy může pohybovat mezi hodnotami 0 a 6.

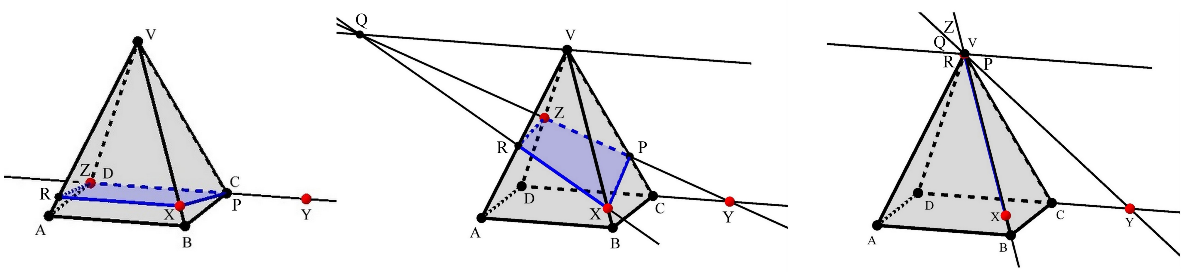
Pojďme si nyní nakreslit řezy pro hraniční hodnoty parametru. Pro $m = 0$ je řez nakreslen na obrázku 54(a) a pro $m = |DV| = 6$j je řez vidět na obrázku 54(c). Pokud si ještě nakreslíme nějakou hodnotu parametru ležící mezi těmito hodnotami, např. pro $m = \frac{1}{2}|DV| = 3$j, jak je uvedeno na obrázku 54(b), je již zřejmé, jak se bude měnit řez spolu s parametrem.

Otázka 1

Řez jehlanu rovinou XYZ pro hodnotu parametru $m = 0$ je uveden na obrázku 54(a). V tomto případě bod Z splývá s vrcholem D jehlanu. Řezem je tak čtyřúhelník $RXCD$, jehož strany RX a CD jsou rovnoběžné. Rovnoběžnost vyplývá ze vzájemné polohy tří rovin - roviny řezu $RXCD$, roviny podstavy $ABCD$ a roviny přední stěny jehlanu ABV. Průsečnice dvojic těchto rovin jsou rovnoběžné přímky ($AB \| CD \| RX$). Řezem je tedy jistě lichoběžník. Zabývejme se ještě rameny tohoto lichoběžníku, abychom zjistili, zda se jedná o lichoběžník rovnoramenný, pravoúhlý nebo obecný.

Pro pravidelný čtyřboký jehlan platí, že jeho stěny jsou čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky. Je-li navíc přímka RX rovnoběžná s hranou AB, pak jistě platí, že $|RA| = |XB|$. Tedy trojúhelníky XBC a RAD jsou shodné. Protože strany XC a RD těchto trojúhelníků mají stejnou velikost a tvoří zároveň ramena lichoběžníku $RXCD$, pak se jistě jedná o rovnoramenný lichoběžník. Řezem XYZ jehlanu pro hodnotu parametru $m = 0$ je tedy rovnoramenný lichoběžník $RXCD$.

V programu jsou také uvedeny vybrané délky stran čtyřúhelníku tvořícího řez a úhly v tomto čtyřúhelníku. Tyto hodnoty pak dokládají, že pro $m = 0$ je řezem rovnoramenný lichoběžník (délky ramen jsou stejné, popřípadě úhly při základně jsou stejné). Při řešení dalších úloh jsou však tyto hodnoty zbytečné a mohou tvořit model nepřehledným, z toho důvodu lze v zaškrtávacím políčku volit jejich viditelnost.



(a) (b) (c)

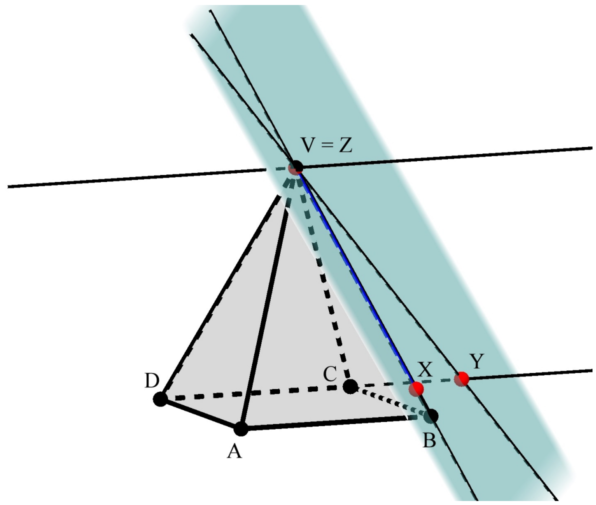
Obrázek 54: Dynamický příklad 3 - řešení

Otázka 2

Hledáme tedy průsečnici roviny řezu $ZRXP$, respektive $DRXC$ (protože dvojice bodů Z, D a P, C splývají v jeden), a roviny podstavy $ABCD$ jehlanu. Pro body C a D jistě platí, že náleží jak rovině dolní podstavy, tak rovině řezu, viz obrázek 54(a). Průsečnice tedy bude určena těmito body, tj. průsečnicí je přímka CD.

Otázka 3

K zodpovězení poslední otázky pomůže obrázek 54(c). Pokud totiž bod Z určující řez splývá s vrcholem jehlanu V, nastává zvláštní situace, kdy rovina řezu se pouze dotýká daného tělesa a k tzv. „řezu“ vůbec nedojde. Lépe to zobrazuje obrázek 55. Řezem na tělese (tedy to, co má společného rovina řezu s tělesem) je tedy hrana jehlanu BV, tj. úsečka BV.



Obrázek 55: Dynamický příklad 3 - pro volbu parametru $m = |DV| = 6j$

Dynamický příklad 4

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a parametr q. Nechť bod X leží na úsečce BE (úhlopříčka dolní podstavy hranolu). Potom parametr q udává vzdálenost bodu X od vrcholu E. Sestrojte řez tohoto hranolu rovinou $AA'X$.

Otázky k zamyšlení:

1. Jakým geometrickým útvarem je řez pro různé hodnoty parametru q?
2. Jaký obsah bude mít řez pro volbu parametru $q = |BE|$?
3. Pro jakou hodnotu parametru q je obsah řezu maximální?
4. Pro jakou hodnotu parametru splyne řez s jednou boční stěnou hranolu?

Příklad vytvořený v GeoGebře lze najít v příloze na CD pod názvem *Dynamický příklad 4*. V programu je vytvořený posuvník pro parametr q, na němž lze měnit hodnoty parametru a současně sledovat změny řezu na tělese. Udává-li parametr q vzdálenost bodu X od vrcholu E hranolu, pak nabývá hodnot od nuly do hodnoty velikosti úsečky BE. Uvažujme délku podstavné hrany $a = 2$j (jednotky), délku úhlopříčky dolní podstavy $|BE| = 4$j (jednotky) a výšku hranolu $v = 5$j (jednotky). Pak platí, že parametr q nabývá hodnot od nuly do čtyř, tj. $q \in \langle 0, 4 \rangle$. V závislosti na parametru se pohybuje bod X po úhlopříčce BE hranolu a postupně přechází v hraniční případy $q = 0$ a $q = 4$.

Poznamenejme ještě, že s objekty v GeoGebře je možné otáčet, a dívat se tak na daný problém z různých úhlů pohledu, jež mohou být nápomocné při řešení úkolu.

Zadání tohoto příkladu ve volném rovnoběžném promítání pro tři různé volby parametru je uvedeno v dodatku diplomové práce - kapitola 9.2, pod názvem *Dynamický příklad 4*.

....

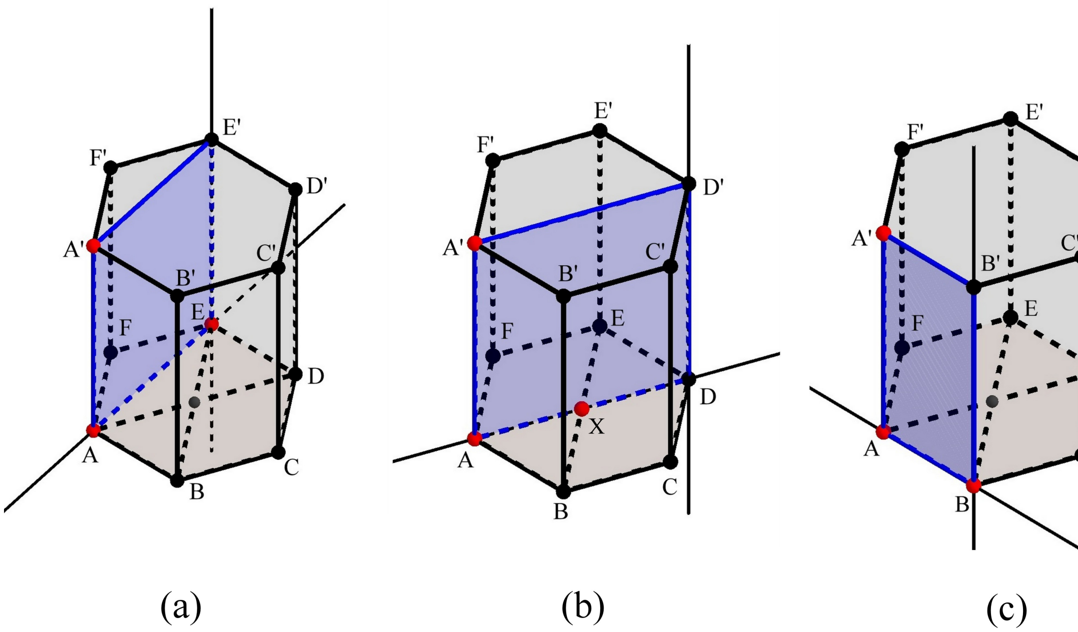
Řešení:

Podstavou pravidelného šestibokého hranolu je pravidelný šestiúhelník. Na jeho úhlopříčce, úsečce BE, se v závislosti na parametru pohybuje bod X, jenž spolu s body A a A' určuje rovinu řezu. Určuje-li parametr q vzdálenost bodu X od bodu E, pak jistě nabývá hodnot od nuly do velikosti úsečky $BE = 4$j. Pro volbu parametru $q = 0$ bod X splývá s bodem E a jedná se tedy o řez rovinou $AA'E$, jak je vidět na obrázku 56(a). Pro $q = |BE| = 4$ splývá bod X s bodem B a jedná se tedy o řez rovinou $AA'B$, jak ukazuje obrázek 56(c). Nakresleme si řez ještě pro jinou volbu parametru, někde mezi těmito hraničními hodnotami. Pro jednoduchost zvolme $q = \frac{1}{2}|BE| = 2$, tedy bod X je středem úhlopříčky BE. Jedná se pak o řez rovinou $AA'X$, jak ukazuje obrázek 56(b).

Otázka 1

Pro zodpovězení otázky je vhodné nakreslit si řezy hranolu pro alespoň tři různé hodnoty parametru. Můžeme zvolit například řez pro $q = 0, q = 2$ a $q = 4$, viz obrázek 56(a), (b) a (c). Řezy uvedené na obrázku 56 jsou obdélníky. Jistě to však bude platit pro všechny řezy vzniklé pro každou hodnotu parametru q, neboť rovina řezu je vždy kolmá k podstavě (díky určujícím bodům A a A') a tedy řez na horní postavě bude totožný s řezem na dolní podstavě. Řez na hodní a dolní podstavě tedy tvoří dvě protilehlé strany obdélníka. Třetí stranu obdélníku vždy tvoří hrana AA', která má velikost výšky hranolu a je kolmá k podstavám. Čtvrtá strana obdélníku je určena konkrétní volbou parametru - vždy se však bude jednat o úsečku kolmou k podstavě ležící v plášti hranolu, která je, co do velikosti, stejná jako výška hranolu. Tedy řezem pro libovolnou hodnotu parametru q bude opravdu obdélník.

V programu jsou uvedeny délky stran čtyřúhelníku tvořící řez a úhly v tomto čtyřúhelníku. Tyto hodnoty pak dokládají, že pro všechny hodnoty parametru q je řezem obdélník (protilehlé strany jsou stejně dlouhé a všechny úhly jsou pravé). Při řešení dalších úloh mohou být tyto hodnoty zbytečné a mohou tvořit model nepřehledným, z toho důvodu lze v zaškrtávacím políčku volit jejich viditelnost.



Obrázek 56: Dynamický příklad 4 - řešení

Otázka 2

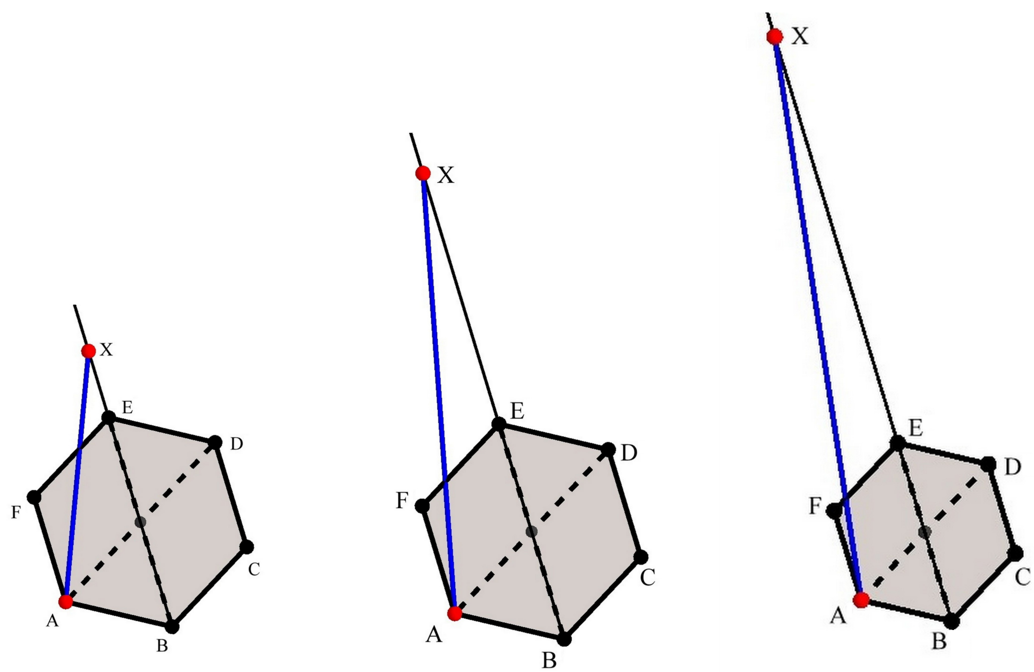
Pro volbu parametru $q = |BE| = 4$j získáváme řez $AA'B$, viz obrázek 56(c). Řez nyní tvoří právě boční stěna hranolu $AA'B$. Máme-li tedy zjistit obsah řezu, stačí vypočítat obsah boční stěny tohoto hranolu. Je-li velikost podstavné hrany a a výška hranolu v, pak obsah řezu bude jistě $S = a \cdot v$, pro konkrétní hodnoty $a = 2$j a $v = 5$j pak $S = 10$j.

V programu GeoGebra je pod posuvníkem automaticky počítán obsah řezu pro danou hodnotu parametru q. Díky tomu lze také ověřit správnost výpočtů. Program potvrzuje, že pro $q = 4$ je $S_{AA'X} = 10$j.

Otázka 3

Již jsme ukázali, že řezem je vždy obdélník, jehož dvě protilehlé strany jsou dány řezy na horní a dolní podstavě a druhé dvě protilehlé strany výškou hranolu. Výška hranolu se s parametrem nezmění, ovšem délka řezu na horní a dolní podstavě jistě ano. Snaha o maximální obsah řezu tedy přechází ve snahu najít takovou hodnotu parametru q, pro níž bude úsečka určující řez na dolní, resp. horní podstavě nejdelší možná. Problém se tedy přesouvá do pravidelného šestiúhelníku, v němž jistě platí, že nejdelší úhlopříčka je úhlopříčka spojující dva protilehlé vrcholy šestiúhelníku. V našem případě (máme-li určený bod A, resp. A') se jedná o úhlopříčku AD, resp. $A'D'$. V tomto případě jsou strany obdélníku (řezu) ležící v dolní, resp. horní podstavě maximální, tj. i obsah obdélníka (řezu) je maximální. Maximální obsah má tedy řez $ADD'A'$, který vznikne pro volbu parametru $q = \frac{1}{2}|BE| = 2$j, viz obrázek 56(b).

V programu GeoGebra lze pod posuvníkem číst hodnotu obsahu řezu rovinou $AA'X$ v závislosti na měnícím se parametru q. Můžeme si tak ověřit, že pro $q \in (0, 2)$ obsah řezu roste a pro $q \in (2, 4)$ naopak klesá. Z toho plyne, že pro hodnotu $q = 2$, je obsah řezu maximální možný.



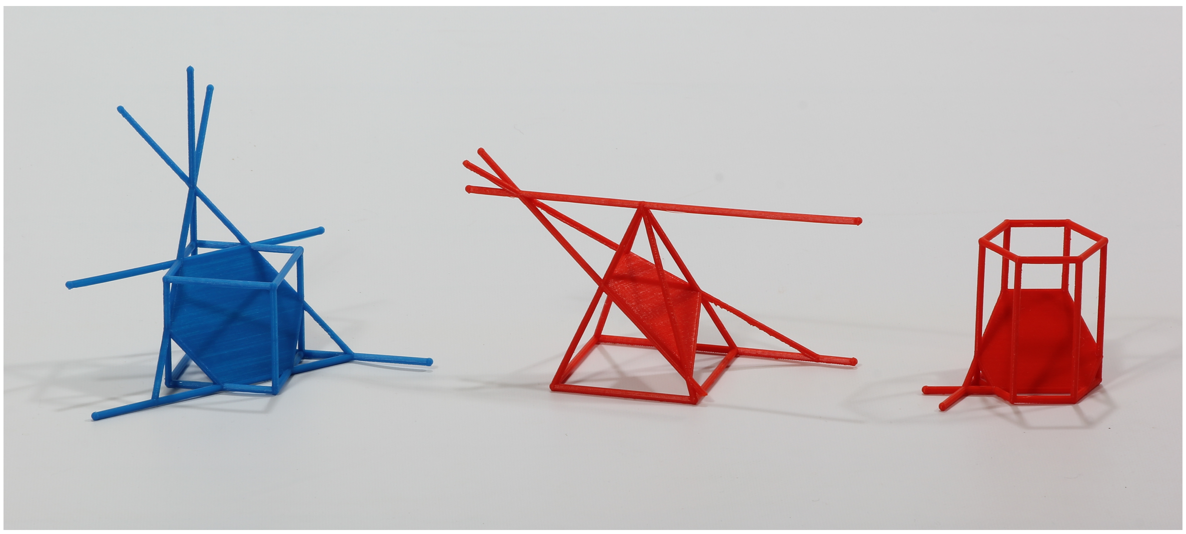
Obrázek 57: Dynamický příklad 4, modifikace - pohled zdola

Otázka 4

Na poslední otázku jsme vlastně odpověděli již při řešení otázky druhé. Pro $q = |BE| = 4$j konstruujeme řez $AA'B$, který splývá s boční stěnou hranolu $AA'BB'$, viz obrázek 56(c). Pojďme se nyní ale jen krátce zamyslet, zda bychom změnou parametru nedocílili také splynutí řezu s boční stěnou $AA'FF'$. Při našem zadání jistě ne. Maximálně lze dosáhnout řezu $AA'EE'$. Co kdybychom ale povolili bodu X (určujícímu řez) pohybovat se po polopřímce BE (nikoliv úsečce - změna oproti původnímu zadání). Bylo by pak možné dosáhnout toho, že by řez splynul s boční stěnou $AA'FF'$ hranolu? Představme si tedy, že posouváme bod X po polopřímce BE do velmi velké vzdálenosti. K lepšímu pochopení by měl napomoci obrázek 57. Pak se jistě bude řez stále více přibližovat boční stěně $AA'FF'$. K rozklíčování problému si musíme uvědomit, že přímky AF a BE jsou přímky rovnoběžné. Pak je zřejmé, že rovina řezu s boční stěnou $AA'FF'$ nikdy splynout nemůže. Rovnoběžné přímky totiž v Eukleidovské geometrii nemají žádný společný bod. Kdyby se jednalo o různoběžky, pak by jejich společným bodem byl právě bod X a splynutí řezu s boční stěnou by bylo možné.

5 3D tisk

V kapitole 4 jsme se seznámili s několika příklady řezů, které byly následně vytištěny na 3D tiskárně jako názorná pomůcka do hodiny při výkladu řezů těles rovinou. Jednalo se o vytištění řezu na krychli, pravidelném čtyřbokém jehlanu a pravidelném šestibokém hranolu. Všechny tyto modely jsou zachyceny na obrázku 58.



Obrázek 58: Modely řezů na krychli, pravidelném čtyřbokém jehlanu a pravidelném šestibokém hranolu vytištěné na 3D tiskárně Original Prusa i3 MK3

V této kapitole se budeme krátce věnovat samotnému tisku těchto modelů. K modelům tak, jak jsou uvedeny na obrázku vede dlouhá cesta a my se pokusíme jednoduše přiblížit, co tisku předchází, jak samotný tisk probíhá a co následuje po něm. Objasníme, v jakém programu byly modely vyrobeny, jak dlouho se model tiskne a jaké jsou zákonitosti tisku. Vysvětlíme, proč některé přímky potřebují tzv. podpěry a jiné ne, jak probíhá odstraňování podpěr a kolik vytištění takového modelu vlastně stojí. Tato kapitola rozhodně nemá sloužit jako návod, jak správně tisknout, ani nemá podávat detailní informace o možnostech tisku. Takové příručky existují a píší je profesionálové. My bychom pouze rádi popsali průběh tisku našich modelů a přiblížili problematiku 3D tisku takovým způsobem, jakým by mohla být podávána žákům na středních školách, aby o tisku získali jisté povědomí. Kapitola tedy vznikla na základě vlastních zkušeností nabytých při tisku modelů doplněných o informace z ebooku *Základy 3D tisku s Josefem Průšou*, která je volně dostupná z [12].

Tisk modelu jehlanu a hranolu byl zdokumentován, a tak je text doplněn o zajímavé fotografie. Fotografie mohou sloužit opět jako názorná pomůcka učitelům, pokud by chtěli zařadit malou přednášku o 3D tisku do své hodiny. Průběh tisku řezu jehlanem byl od začátku do konce snímán dvěma kamerami a následně byl videozáznam sestříhán do krátkého čtyřminutového videa, které by mohlo sloužit jak učitelům pro zpestření hodiny, tak zvídavým žákům. Video je součástí diplomové práce v rámci CD přílohy pod názvem *Záznam 3D tisku řezu na jehlanu*.

Všechny modely byly vytištěny na tiskárně Original Prusa i3 MK3 [10], jejímž autorem je Josef Průša, český vývojář 3D tiskáren, jehož tiskárny se již vyvážejí do celého světa.

Pojďme se nyní podívat na vznik modelů od jejich namodelování v programu GeoGebra až po konečné odstraňování podpěr.

Návrh modelu v programu GeoGebra

Obrovskou výhodou je, že modely do 3D tiskárny můžeme připravit i v programu GeoGebra. Jedná se o velice intuitivní program, v němž se učí pracovat už žáci na středních školách.

Pro 3D modelování existuje však několik programů, které jsou k tomuto primárně určené. Jako příklad můžeme uvést Tinkercad [17], OpenSCAD [9] nebo Autodesk Fusion 360 [1].

Převod na STL formát

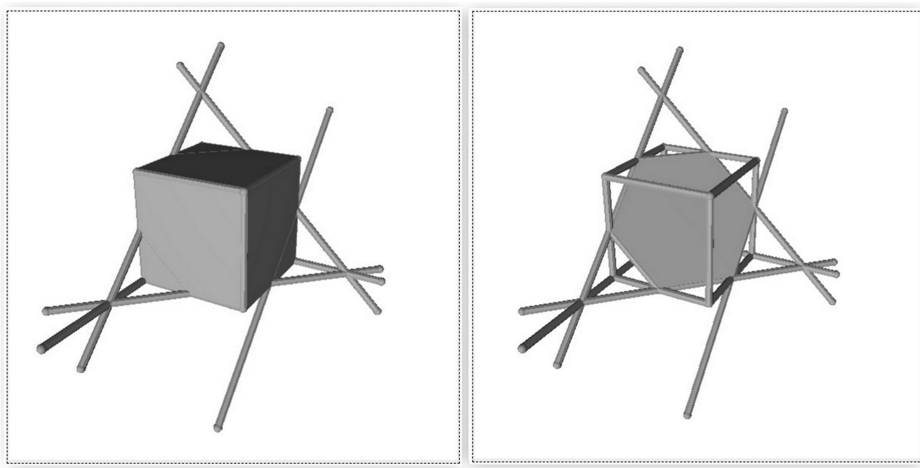
Takto vytvořený model poté musíme otevřít v online verzi GeoGebry, v níž lze uložit model ve formátu STL. Před uložením jsme nuceni vyplnit do tabulky informace ohledně tisku. V tomto okamžiku tedy rozhodujeme o velikosti vytištěného modelu (šířce, výšce, délce) a tloušťce tisku. Pokud nastavíme jeden parametr, např. šířku, ostatní se automaticky dopočítají, aby byl zachován poměr.

U krychle jsme nastavili šířku modelu 15 cm, stejně tak u jehlanu. Šířka hranolu byla nastavena na 8 cm. Co se týče tloušťky tisku, zachovali jsme automatický návrh, tedy 3,5 mm.

Formát STL popisuje triangulovaný povrch. Nenese tedy informaci o barvě nebo textuře, ale pouze prezentuje geometrii 3D objektů. Z tohoto formátu se nedá tisknout. Slouží pouze jako vstupní formát do programů Slicer (viz níže).

Kontrola vzhledu modelu před tiskem

Než se rozhodneme „poslat“ model do 3D tiskárny, můžeme si ještě zkontrolovat jeho vzhled a ujistit se, že vše bude tisknuto tak, jak být má. Po zadání pojmu „STL viewer“ do vyhledávače, se nám nabízí několik stránek, které lze k tomuto využít. Uveďme například stránku - Free online STL viewer [3], kam lze volně vložit model a odhalit případné chyby před tiskem. Na obrázku 59(a) například vidíme chybně vytvořený model řezu na krychli - v GeoGebře nebyly odstraněny stěny krychle. Řez by tedy vůbec nebyl vidět. Na obrázku 59(b) je chyba opravena.

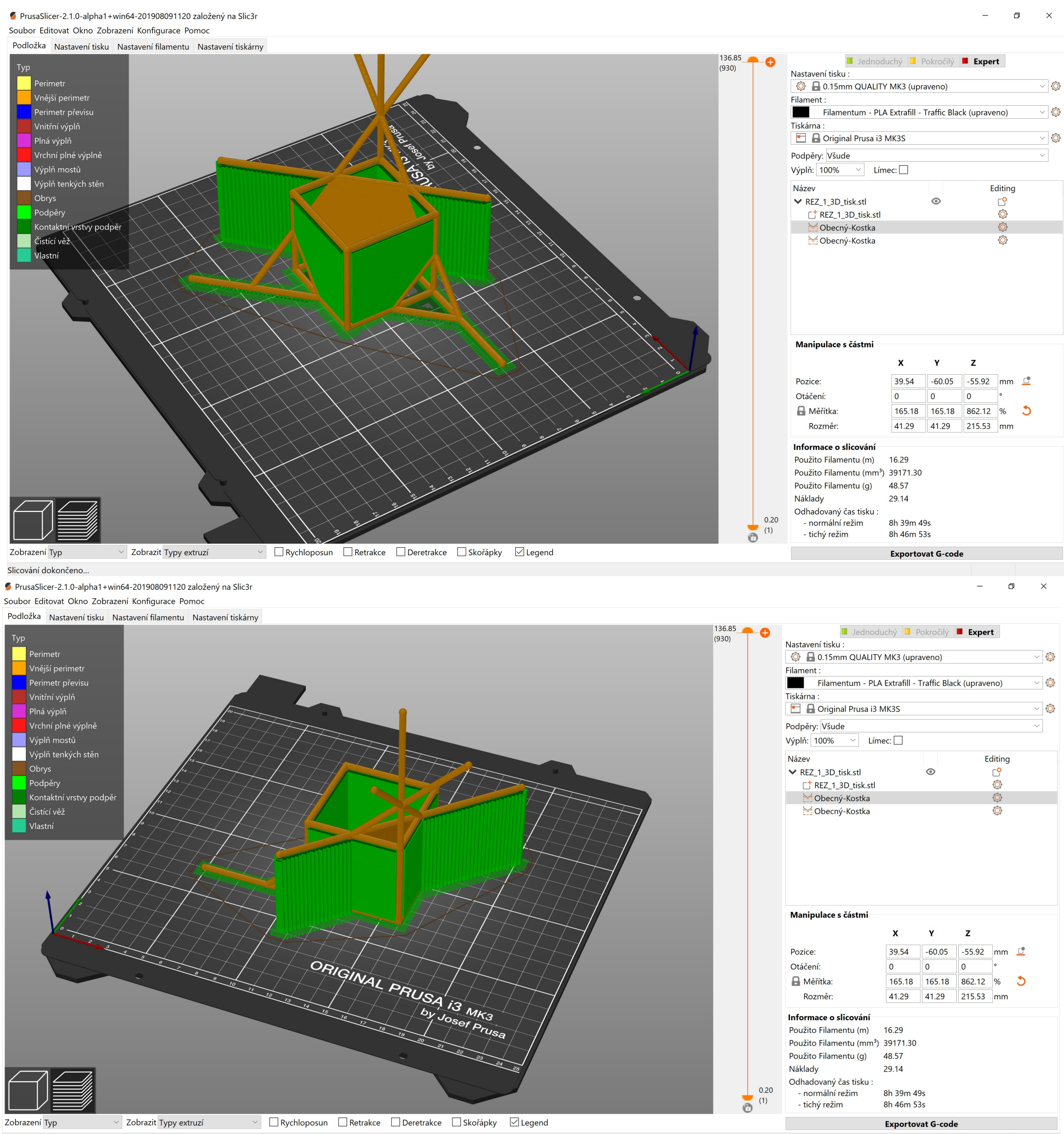


(a) (b)

Obrázek 59: Free online STL viewer - využití náhledu modelu před tiskem

Zákonitosti tisku

3D tiskárna pracuje na principu nanášení vrstev na sebe. Můžeme si tedy představit, že model, který do tiskárny posíláme, je „rozsekán“ v horizontálním směru na velice tenké plátky, které pak tiskárna kreslí a doslova tak „staví“ model vrstvu po vrstvě. Materiál, který vstupuje do tiskárny, je plastová struna navinutá na kotouči (odborně nazýváno filament) zavěšeném nad tiskárnou. Struna je zavedena do hlavy tiskárny, která ji zahřívá na vysokou teplotu a pomocí trysky vytlačuje na podložku, resp. předchozí vrstvu modelu. Tiskárna, kterou jsme pro tisk využili je tzv. kartézská, což znamená, že je založena na principu pohybu po třech lineárních ortogonálních osách - x, y, z. Hlava tiskárny se pohybuje ve směru dvou os - x a z (jinými slovy se pohybuje nahoru/dolu, doprava/doleva) a podložka se pohybuje ve směru osy y (tedy dopředu/dozadu). Pohyby tiskárny můžeme sledovat na videu *Záznam 3D tisku řezu na jehlanu*, které bylo pořízeno při tisku řezu na jehlanu a které je součástí CD přílohy diplomové práce.



Obrázek 60: Ukázka programu PrusaSlicer - vytváření podpěr pro model krychle

Výroba podpěr

Na základě těchto poznatků je nutné si uvědomit, že tiskárna nemůže tisknout tzv. do vzduchu. To byl důvod, proč všechny modely, které jsme nechali tisknout, byly velice náročné. Modely totiž obsahovaly přímky rovnoběžné s podložkou, umístěné v určité výšce. Zde opět pomůže vize „nasekaného modelu" - představme si, jak na sebe skládáme vrstvy a po určité době potřebujeme položit v další vrstvě přímku přesahující dosud tištěný objekt. Přímka by se tiskla do vzduchoprázdna, což není možné. Tento problém řeší tzv. podpěry. K vytvoření podpěr slouží např. program PrusaSlicer [11], v němž lze podpěry k danému modelu automaticky vygenerovat. To ovšem nestačí. Při generování může dojít k nepřesnostem a je nutné, aby uživatel model překontroloval a podpěry ještě individuálně upravil na základě vlastních zkušeností. Na obrázku 60 je ukázka vytváření podpěr na modelu řezu na krychli ze dvou různých pohledů. Zeleně vyznačené části jsou podpěry.

Problém s tiskem „do vzduchu" není jen u vodorovných přímek, ale i u přímek, které svírají s přímkou kolmou k podložce více než 30°. Takové přímky nejsou schopny se vytisknout pouhým posunutím nové vrstvy oproti předchozí, ale jsou závislé na podpěře.

Podpěry nejsou žádoucí z toho důvodu, že po ukončení tisku je nutné všechny vylámat a nepoškodit tím model. Podpěry se tisknou vzhledem ke své funkci podpůrného opatření jiným vzorem s jinou hustotou (nikoliv plnou čarou), aby po ukončení tisku bylo jejich odstranění snazší. Cílem každého uživatele je minimalizovat množství podpěr z důvodu šetření materiálem a zkrácení tiskového času.

Příprava tiskárny před tiskem

Než začneme tisknout, musíme vždy zkontrolovat, že podložka je správně zasazená a musíme zajistit její odmaštění např. isopropyl alkoholem (IPA), který obsahuje minimálně 90% alkoholu. Tím zabezpečíme přilnutí první vrstvy k podložce. Pokud bychom podložku neodmastili, mohlo by během tisku dojít k odlepení modelu od podložky a další vrstvy by se pak již tiskly mimo model. Model by tím byl znehodnocen a tisk by se musel celý opakovat.

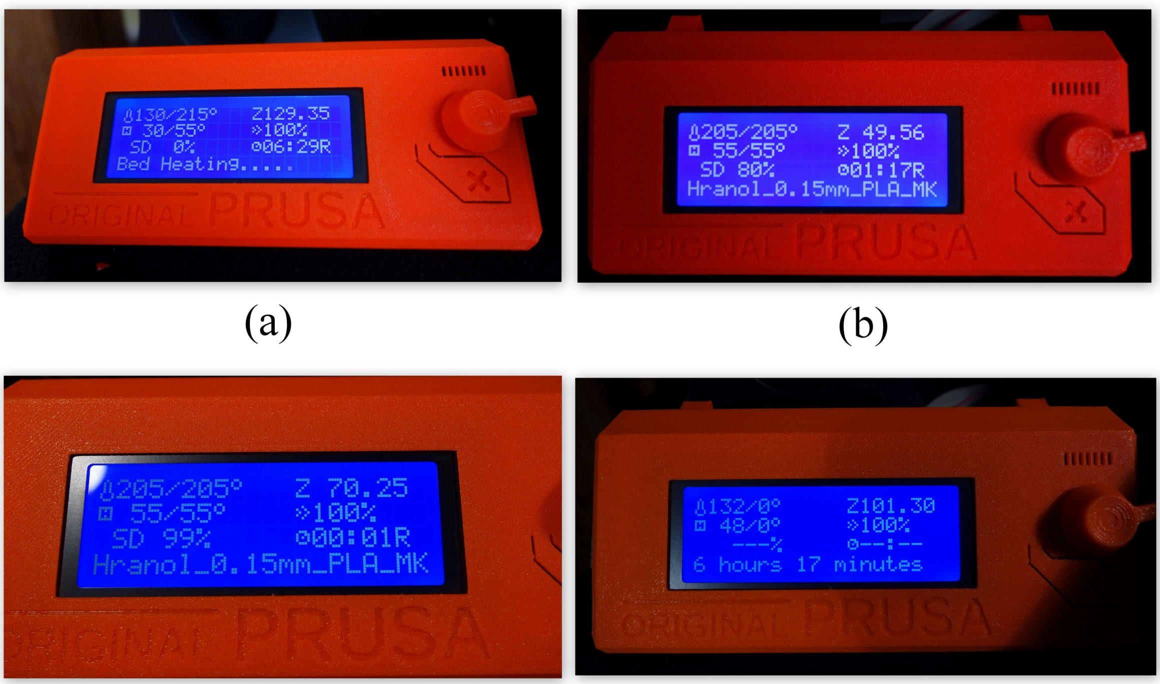
Zadání tisku, kalibrace

Připravený model vložíme na SD kartě do ovladače tiskárny a zvolíme soubor, který chceme vytisknout. Od této chvíle již tiskárna naši pozornost nevyžaduje až do skončení tisku. Je nutné pouze v určitém časovém intervalu kontrolovat, zda při tisku nedošlo k chybě. V takovém případě je dobré tisk ihned ukončit. Po spuštění tisku se začne nahřívat hlavice tiskárny a podložka na správnou teplotu. Při tisku našich modelů byla teplota podložky 55° a teplota tiskové hlavice 205°.

Než začne tiskárna tisknout samotný model, provede kalibraci. Označí si na podložce několik bodů, které je dobré pak rychle z podložky odstranit. Poté si tiskárna vyznačí hranice tisku křivkou, uvnitř které se bude nadále pohybovat. Pak začíná tisk samotného modelu.

Ovládací panel tiskárny, průběh tisku

Tiskárna se dá ovládat malým ovládacím panelem, na němž lze zvolit ukončení tisku i jeho zastavení. Zastavit tisk a pak v něm opět pokračovat není problém, ale nedoporučuje se to z toho důvodu, že zastavení zanechá na tisknutém objektu určitou viditelnou stopu.



(a) (b) (c) (d)

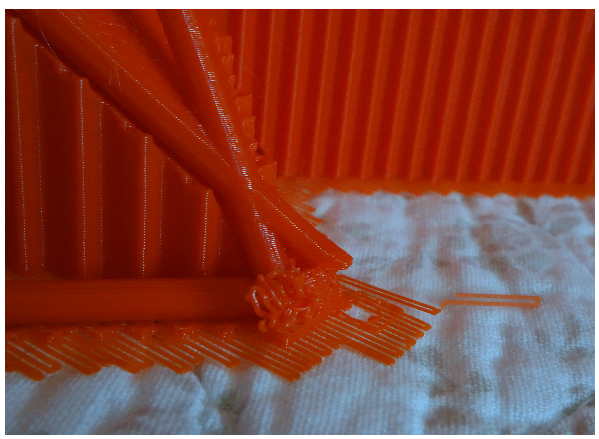
Obrázek 61: Ovládací panel 3D tiskárny podávající informace o tisku

Ovládací panel během tisknu nese aktuální informace o tisknutém objektu. Na obrázku 61(a) můžeme číst z displeje, že právě dochází k zahřívání podložky. Ta je zahřáta na 30° z 55°. Hlava tiskárny je zahřáta na 130° z 215°. Předpokládaný čas tisku je 6 hodin a 29 minut. Na obrázku 61(b) můžeme číst, že je vytištěno již 80% a do konce tisku zbývá hodina a 17 minut. Obrázek 61(c) byl pořízen v době, kdy bylo již vytištěno 99% a do konce tisku zbývala jedna minuta. Poslední obrázek - 61(d) byl vyfocen po skončení tisku. Nese informaci o celkové době tisku - 6 hodin a 17 minut. Můžeme si tedy všimnout, že doba tisku se oproti předpokládané době zkrátila o 12 minut.

Průběh tisku řezu na pravidelném čtyřbokém jehlanu je vidět na obrázku 63 a obrázek 64 zase ukazuje průběh tisku řezu na pravidelném šestibokém hranolu.

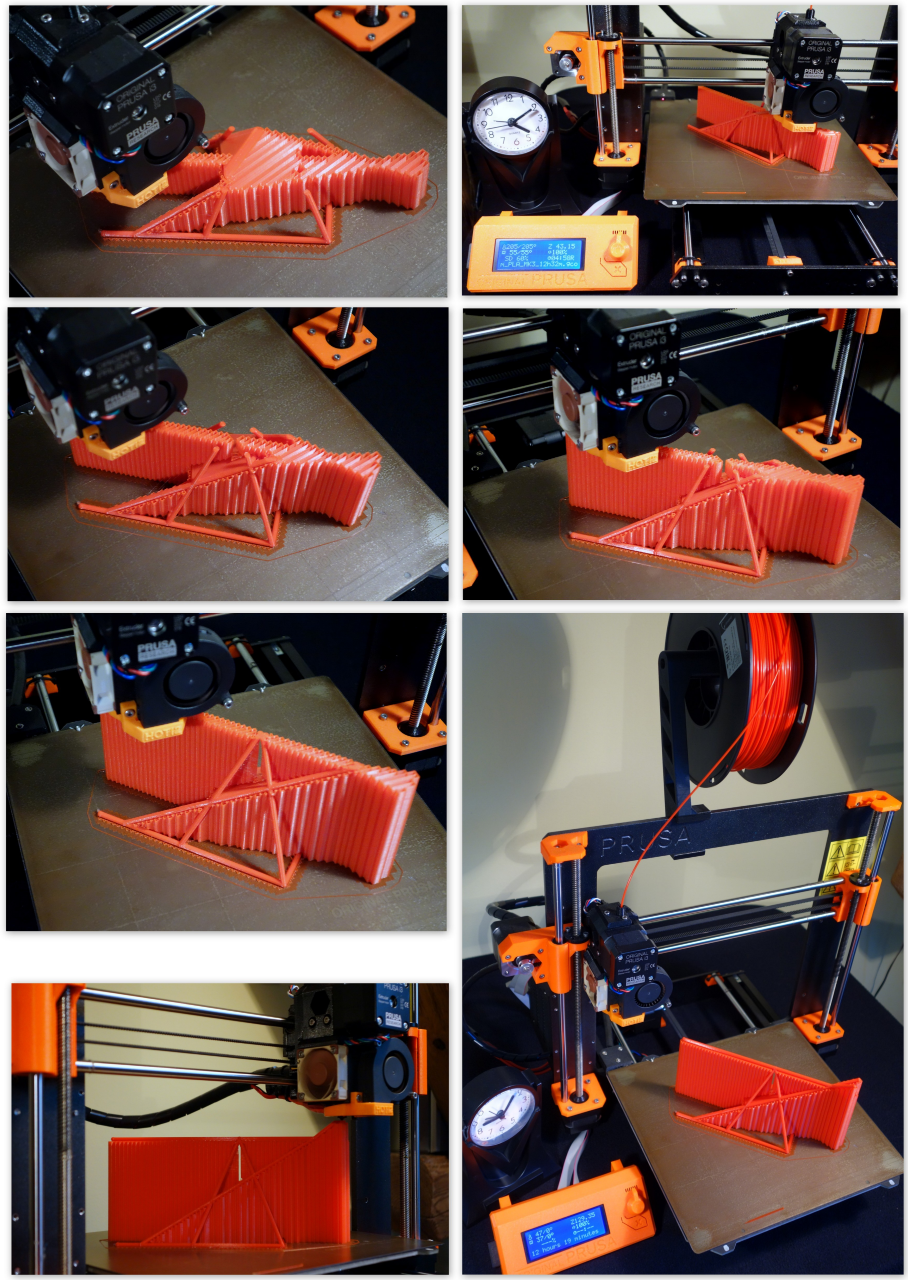
Chyba tisku

Při tisku modelu řezu na jehlanu došlo k drobné chybě, která naštěstí neměla žádný vliv na model jako celek. Chyba je vidět na obrázku 62. Na podložce je připraveno místo pro tisk přímky (malý obdélníček bez výplně), ale pravděpodobně nedošlo k přichycení první vrstvy na podložku. Místo toho se začal materiál několika dalších vrstev hromadit vedle a vznikl „chuchvalec“, který je vidět na obrázku vlevo od zamýšleného umístění přímky.



Obrázek 62: Chyba tisku

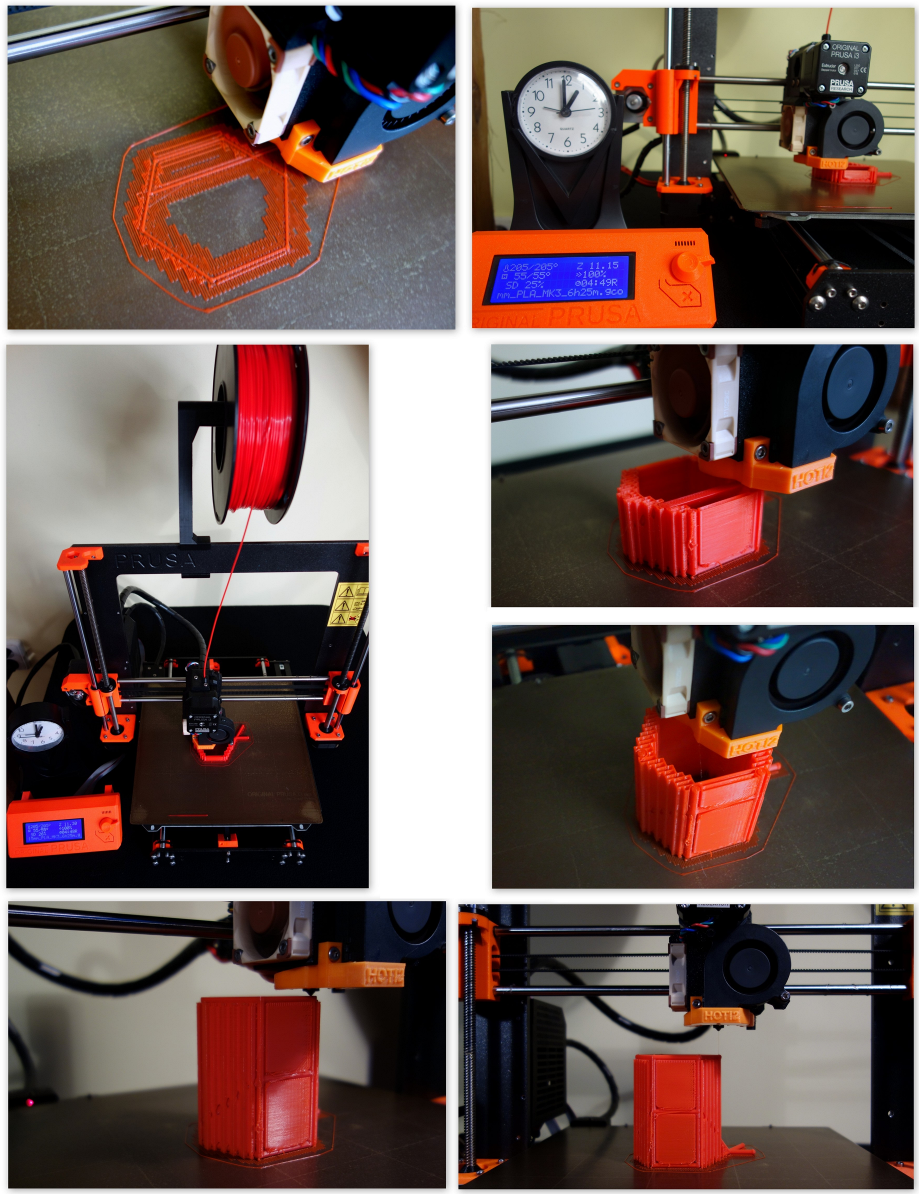
Ve výšce přibližně 5 mm nad podložkou se podařilo tiskárně napojit na onen „chuchvalec“ materiálu a dále již pokračovala v tisku bez závad. Na výsledném modelu je chyba pozorovatelná. Vrstvy se neměly rovnoměrně o co opírat, skládali se tedy na sebe s různými nerovnostmi. Po několika dalších vrstvách se povedlo objekt srovnat a vytvořila se pomyslná ploška požadovaná pro správný tisk další vrstvy.



Obrázek 63: Průběh tisku modelu pravidelného čtyřbokého jehlanu

Konec tisku, odejmutí modelu z podložky

Jakmile tiskárna dokončí model, vyjede hlavice s tryskou do výchozí pozice (vlevo

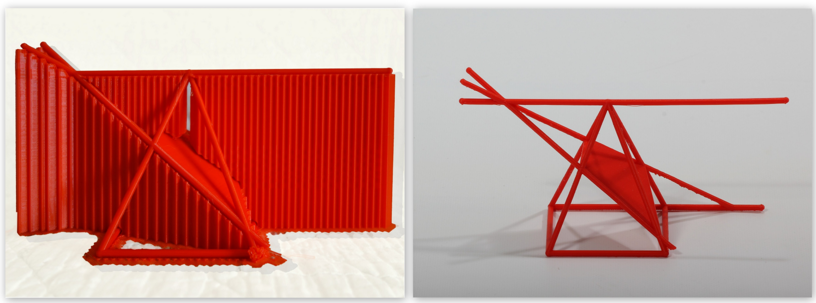


Obrázek 64: Průběh tisku modelu pravidelného šestibokého hranolu

nahoře), odkud je pak zase volána pro další tisk. Podložka s hotovým modelem vyjede dopředu a na ovládacím panelu můžeme číst celkovou dobu tisku a informaci o tom, že je vytištěno 100%. Tisk je tímto hotov. Zbývá sejmout model z podložky tak, abychom jej nepoškodili. Nejprve podložku i s modelem odpojíme od tiskárny a posléze začneme podložku prohýbat tak, že model od podložky sám „odskočí“. Podložka má tvar čtverce. Při prohýbání tedy vždy dodržujeme zásadu, že držíme protilehlé strany nebo protilehlé vrcholy.

Podpěry

Pořád však v ruce nedržíme takový model, jaký bychom chtěli. Na obrázku 65 je srovnání modelu s podpěrami a modelu po jejich odstranění.



Obrázek 65: Model bez vylámaných podpěr (vlevo) a s vylámanými podpěrami (vpravo)

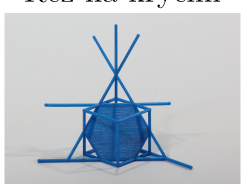
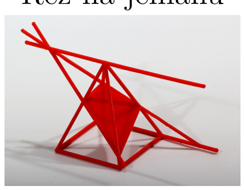
Obrázek 66: Odstranění podpěr z modelu jehlanu

Přestože jsou podpěry tisknuté jiným vzorem, aby jejich vylomení bylo snazší, nejedná se rozhodně o jednoduchou a rychlou práci. Vylámání podpěr na jehlanu je zachyceno na obrázku 66 a trvalo přibližně hodinu a čtvrt. K jednoduššímu odstranění podpěr můžeme použít kleště nebo štípací kleště.

Cílem je odstranit podpěry tak, aby nedošlo k poškození modelu a aby byl zachován co možná nejlepší povrch modelu tam, kde se s podpěrou dotýkaly.

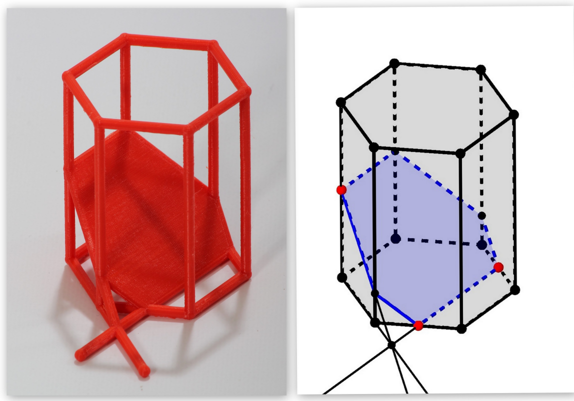
Celková doba tisku, cena modelu

Ještě pro informaci uvedeme, jakou cenu má takový model. Tisková hodina (bez započítání práce profesionála, který by nám model pro tisk připravil - výroba podpěr aj.) vychází na 40 - 80 Kč. Tabulka 6 udává přehled o délce tisku každého modelu a jeho ceně.

Model	**Doba tisku**	**Cena modelu**
Řez na krychli 	8 h 30 min	$\doteq$ 340 Kč až 680 Kč
Řez na jehlanu 	12 h 19 min	$\doteq$ 493 Kč až 986 Kč
Řez na hranolu 	6 h 17 min	$\doteq$ 252 Kč až 503 Kč

Tabulka 6: Přehled časové náročnosti tisku a ceny modelů

Na závěr této kapitoly o 3D tisku uvádíme obrázek 67, který ukazuje srovnání modelu vytištěného na 3D tiskárně (a) a jeho předlohu v programu GeoGebra (b).



(a) (b)

Obrázek 67: Srovnání modelu z 3D tiskárny a jeho předlohy vytvořené v programu GeoGebra

6 Využití a ověření navržených pomůcek a programů ve výuce

V rámci kapitoly 4.1 bylo vyrobeno několik modelů řezů těles a byl zpracován soubor příkladů v programu 3D GeoGebra s cílem podpořit výuku stereometrie na středních školách. Pro ověření těchto pomůcek ve výuce bylo kontaktováno Gymnázium Blovice a s paní magistrou Janou Průchovou bylo domluveno převzetí třídy na čtyři vyučovací hodiny matematiky. Jako třída byl vybrán 3. ročník čtyřletého gymnázia. Výuka probíhala ve dnech 29. listopadu, 3. a 4. prosince roku 2019. Žákům byly s předstihem poskytnuty pracovní listy (viz kapitola 9.2) k vytištění.

Během čtyř vyučovacích hodin byly žákům představeny příklady 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13 ze souboru příkladů uvedeného v kapitole 4.1. Příklady 2, 7 a 10 byly do souboru dodány až po zkušenostech z praxe. Do výuky byly zapojeny modely vytištěné na 3D tiskárně i modely ze špejlí. Všechny příklady byly v programu GeoGebra promítány přes projektor na interaktivní tabuli.

Pro reflexi této formy výuky provedenou žáky byl použit dotazník, jehož znění je uvedeno v dodatcích diplomové práce, viz kapitola 9.1.

Výsledky dotazníku

Dotazník obsahoval dvě části - část A (otázky s posuzovací škálou) a část B (otevřené otázky). Dotazník celkem vyplnilo 26 respondentů. Otázky s posuzovací škálou byly vyhodnoceny graficky s využitím sloupcových grafů. Graf spolu s uvedenými četnostmi jednotlivých odpovědí ke každé otázce udávají tabulky 7 a 8. Poznamenejme ještě, že odpověď 1 znamená naprostý souhlas, odpověď 5 naopak naprostý nesouhlas s daným tvrzením, viz tabulka 9. Plné znění dotazníku je uvedeno v kapitole 9.1.

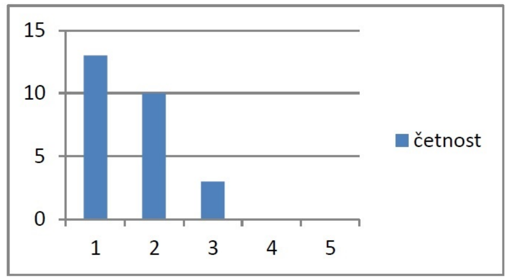
Otevřené otázky již nelze vyhodnocovat statistickým způsobem. Pojďme tedy jen uvést několik příkladů, co žáci na dané otázky nejčastěji odpovídali. Nejvíce se jim na výuce líbilo například to, že se nejednalo pouze o výklad, že hodina byla zajímavá, že byla látka pochopena přímo na hodině díky názorným ukázkám. Líbily se jim modely i představení příkladů v GeoGebře, srozumitelnost a názornost výkladu, využití interaktivních pomůcek při hodině a v neposlední řadě 3D tisk.

Negativně žáci hodnotili například rychlost probíraného učiva. To je oprávněná výhrada způsobená především časovým omezením a velkým množstvím látky, která měla být s žáky probrána. V kolonce pro připomínky a výhrady k hodině žáci nejčastěji uváděli rychlost mluveného projevu. Co se obsahu, formy výuky nebo didaktických pomůcek týká, nebyla zde uvedena žádná výhrada.

Otázka 1.

Vysvětlovanou novou látku jsem pochopil/a.

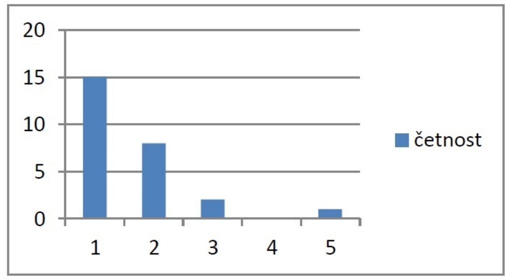
odpověď	*četnost*
1	13
2	10
3	3
4	0
5	0
celkem	26



Otázka 2.

Hodiny mě bavily, pracoval/a jsem v hodině.

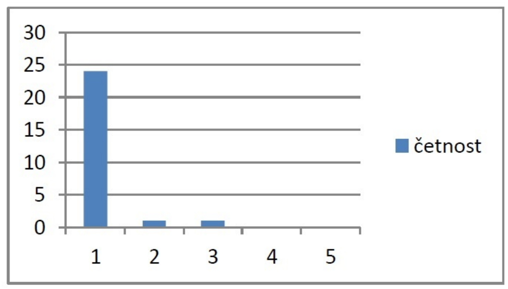
odpověď	*četnost*
1	15
2	8
3	2
4	0
5	1
celkem	26



Otázka 3.

Ocenil/a jsem různorodost (příklady kreslené na tabuli, promítané v GeoGebře na projektoru, modely ze špejlí, 3D tisk).

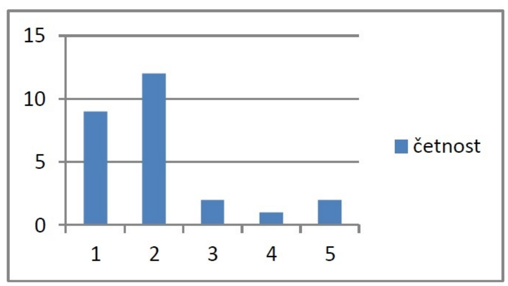
odpověď	*četnost*
1	24
2	1
3	1
4	0
5	0
celkem	26



Otázka 4.

Líbilo se mi, že jsme chodili kreslit řezy na tabuli. Hodnotím to jako přínosné.

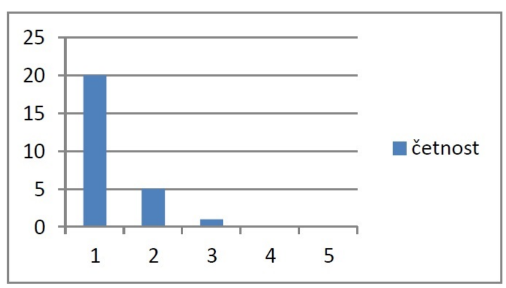
odpověď	*četnost*
1	9
2	12
3	2
4	1
5	2
celkem	26



Otázka 5.

Příklady promítané v GeoGebře byly názorné - GeoGebra mi pomohla při řešení příkladů.

odpověď	*četnost*
1	20
2	5
3	1
4	0
5	0
celkem	26

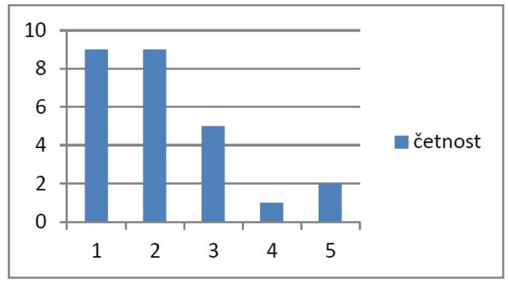


Tabulka 7: Vyhodnocení dotazníku - otázky 1 až 5

Otázka 6.

Rád/a bych se v programu 3D GeoGebra naučil/a tyto příklady modelovat.

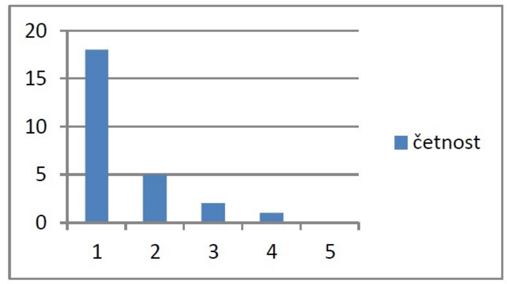
odpověď	četnost
1	9
2	9
3	5
4	1
5	2
celkem	26



Otázka 7.

Využití modelů (ze špejlí, z 3D tiskárny) při výkladu mi přišlo užitečné a vhodné. Přispělo k lepšímu pochopení daného příkladu.

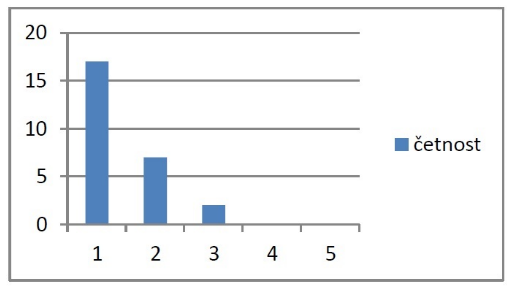
odpověď	četnost
1	18
2	5
3	2
4	1
5	0
celkem	26



Otázka 8.

S 3D tiskárnou jsem se již někdy dříve setkal/a. Měl/a jsem ponětí, co je 3D tisk.

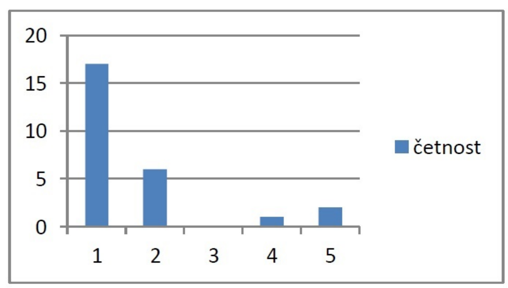
odpověď	četnost
1	17
2	7
3	2
4	0
5	0
celkem	26



Otázka 9.

Informace o 3D tisku (fotky, video) při hodině mě zaujaly. Jsem rád/a, že jsem se mohl/a o tomto problému něco dozvědět.

odpověď	četnost
1	17
2	6
3	0
4	1
5	2
celkem	26

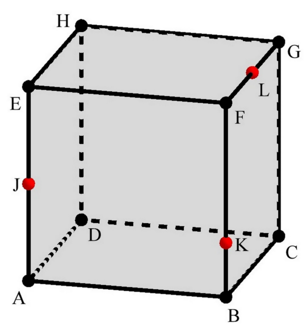


Tabulka 8: Vyhodnocení dotazníku - otázky 6 až 9

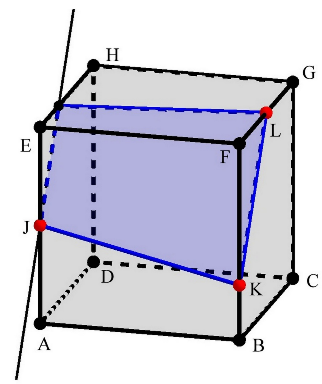
Jednou z věcí, která žáky nejvíce překvapila, byla GeoGebra - co vše se v tomto programu dá vytvořit. Překvapila je interaktivnost v hodině a styl výuky s využitím moderních technologií. Mile je překvapily modely a velmi často byl zmiňován 3D tisk a video pořízené z tisku řezu na jehlanu. Ohledně 3D tisku byla pro několik studentů největším překvapením doba tisku modelů nebo nutnost podpěr (zákonitosti tisku, neschopnost tiskárny tisknout do vzduchu).

Přínos pro diplomovou práci

Při výuce bylo zjištěno, že příklady řezů na krychli, k jejichž nakreslení mělo být užito 2. pravidlo, využívaly vždy jen rovnoběžnost horní a dolní podstavy. V příkladech nebyla nikdy použita rovnoběžnost levé a pravé boční stěny nebo přední a zadní stěny. To je z didaktického hlediska nesprávné. Místo příkladu 4 by tedy mohl být použit tento příklad. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a body JKL. Sestrojte řez rovinou JKL, viz obrázek 68(a). Řešení je uvedeno na obrázku 68(b).



(a)



(b)

Obrázek 68: Možnost záměny za příklad 4, využití rovnoběžnosti bočních stěn

Na základě odučených hodin byl soubor příkladů doplněn o příklady 2, 7 a 10. Hlavním důvodem byla skutečnost, že téma „průsečnice rovin" se učí současně s látkou řezy těles. Nejčastější postup je vytvoření jednoho a posléze druhého řezu na tělese do jednoho obrázku a sestrojení průsečnice těchto řezů. Stejně jsme tedy postupovali při konstrukci příkladů v kapitole 4.1, mezi původní příklady byly přidány nové na sestrojení průsečnice dvou řezů.

Příklady byly přečíslovány a nově seřazeny, aby platilo, že jsou řazeny od nejjednodušších až po náročné. Po zkušenosti z gymnázia byly dále změněny pracovní listy, především jejich grafická podoba. Ke každému příkladu bylo dopsáno zadání v plném znění a byl zde vytvořen prostor pro poznámky žáků.

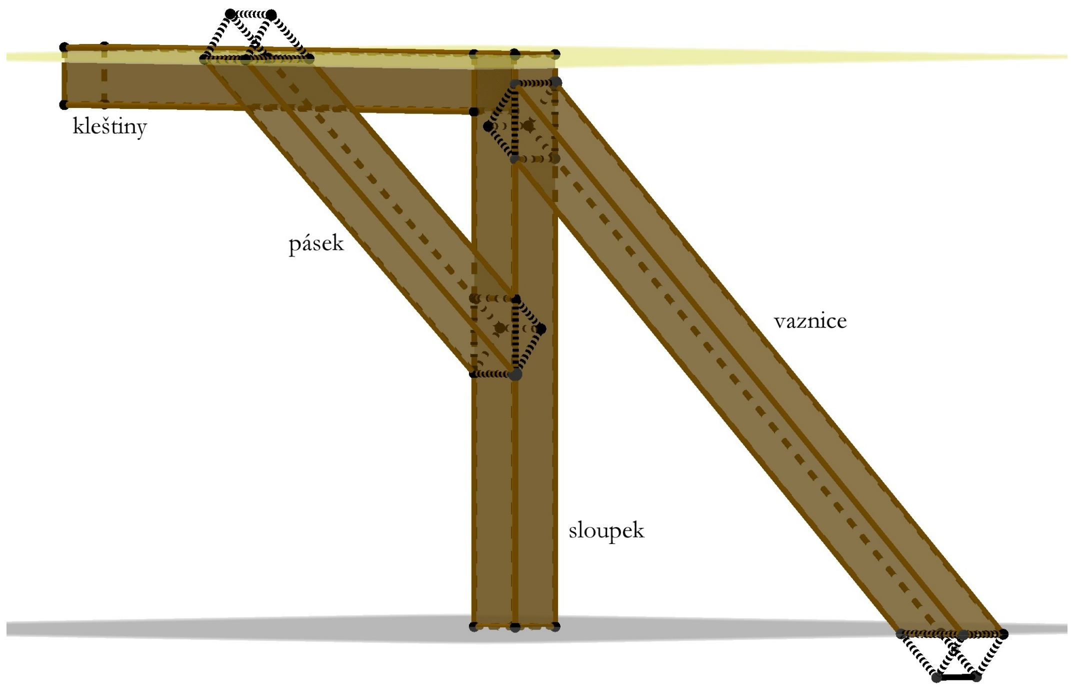
7 Sestavení souboru motivačních úloh a ukázek pro výuku stereometrie

S geometrickými útvary a jejich řezy se setkáváme denně, jsou všude kolem nás, jen si to často neuvědomujeme. Tato kapitola by měla sloužit jako motivace všem žákům, kteří mají zájem dozvědět se, „proč se řezy těles ve škole učí“ nebo učitelům jako inspirace pro zpestření výuky. Kapitola obsahuje tři motivační příklady. Každý příklad je opatřen úvodní fotografií představující využití řezů těles v praxi. Tato situace je pak převedena do podoby modelu, zjednodušené formy, kterou lze popsat jazykem středoškolské matematiky. Model je realizován v programu 3D GeoGebra. Každý příklad má na závěr sekci „pro zvídavé“ s konkrétním pseudo-reálným úkolem, k jehož vyřešení je potřeba znalosti řezů těles.

7.1 Úloha 1: Trámy v podkrovní místnosti

Obrázek 69: Využití řezů těles v praxi - trámy v podkrovní místnosti

Obrázek 69 představuje případ využití řezů těles - trámy v podkrovní místnosti. Stejnou situaci jsme namodelovali v 3D GeoGebře a popsali pro snazší orientaci v dalším textu, viz obrázek 70. Trámy byly nahrazeny kvádry a jejich vhodnými řezy. Šedá rovina představuje podlahu, žlutá strop místnosti. V obrázku jsou plně (popřípadě čárkovaně pro neviditelné hrany) vyznačeny ty části kvádru, které tvoří krov. Tečkovaně je vyznačena ta část trámu, jež byla odříznuta. Toto zobrazování slouží k lepší vizualizaci, aby bylo patrné, že cílový produkt (vaznice, pásek) vznikl právě řezem kvádru.



Obrázek 70: Model trámů v podkrovní místnosti

Pro zvídavé

Pojďme se nyní podívat pouze na část krovu, konkrétně na pásek. Ten vznikl řezem trámu, který má tvar kvádru. A právě sestrojení tohoto řezu na jedné straně kvádru bude nyní naším úkolem. Máme trám požadované délky a víme, že pásek má svírat se sloupkem úhel $50°$. Jak bude vypadat řez tohoto trámu, abychom jej mohli využít na pásek jako součást krovu?

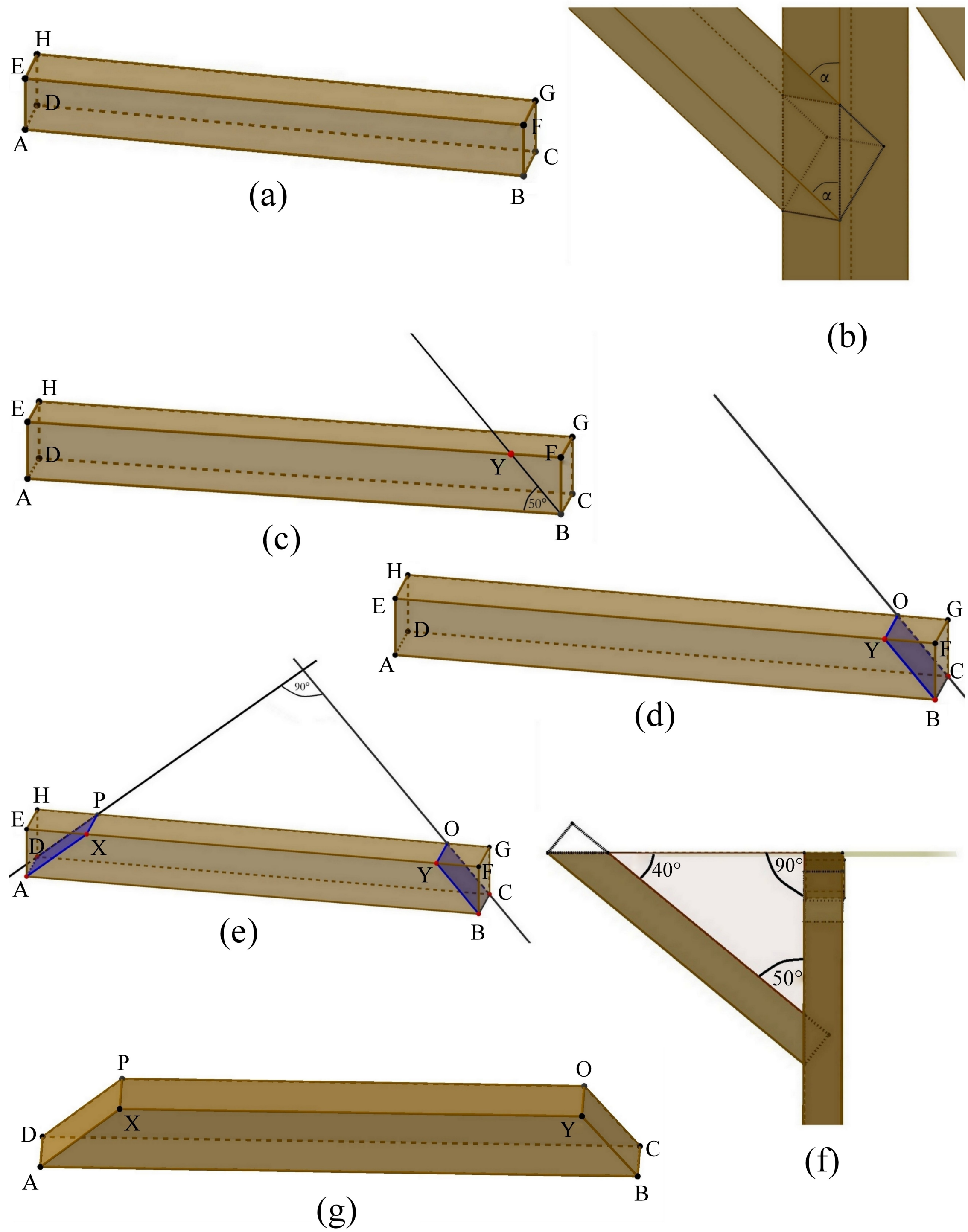
....

Řešení

Představíme si trám jako kvádr, který označíme $ABCDEFGH$, viz obrázek 71(a). Konstruujeme řez na té části trámu, která se bude dotýkat sloupku. Abychom šetřili materiál, povedeme řez tak, aby procházel body B a C. Pro určení roviny nám stále chybí jeden bod, který určí sklon roviny řezu. Víme, že pásek má svírat se sloupkem úhel $50\,^\circ$, to ale znamená, že rovina řezu tedy musí svírat s hranou AB kvádru také úhel $50\,^\circ$, neboť se jedná o úhly souhlasné, viz obrázek 71(b). Třetí bod určující řez označíme Y a umístíme na hranu EF kvádru tak, aby platilo $|\angle ABY| = 50\,^\circ$, viz obrázek 71(c).

Nyní sestrojíme řez kvádru rovinou BCY. Body B a C leží ve stejné stěně (dolní podstava), tedy i jejich spojnice bude ležet v této stěně. Úsečka BC tvoří řez na dolní podstavě kvádru. Bodem Y vedeme rovnoběžku s úsečkou BC. Průnik této rovnoběžky a hrany GH krychle označíme O. Úsečka OY tvoří řez na horní podstavě kvádru. Body C a O leží v jedné stěně (zadní stěna) a body B a Y leží v jedné stěně (přední stěna), na základě 1. pravidla bude úsečka CO tvořit řez na zadní stěně a úsečka BY bude tvořit řez na přední stěně kvádru. Řezem kvádru je obdélník $BCOY$, viz obrázek 71(d).

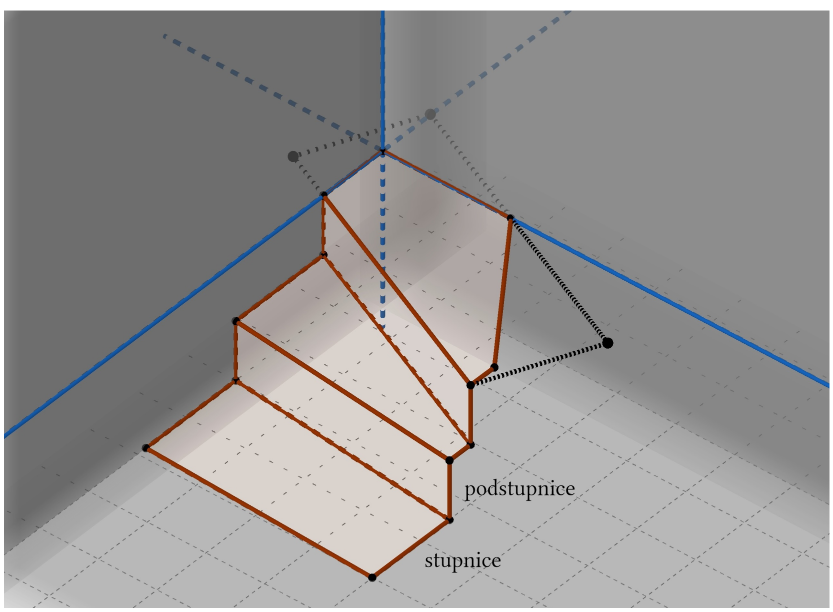
Poznamenejme ještě, že pro vytvoření druhého řezu na tomto trámu, v místech, kde proniká do stropu, již nemůže být sklon roviny řezu s rovinou podstavy $50\,^\circ$, neboť sloupek spolu se stropem musí svírat pravý úhel. Z toho plyne, že pásek bude s rovinou stropu svírat úhel $40\,^\circ$, viz obrázek 71(e), (f). Na obrázku 71(g) je uveden seříznutý trám, který může sloužit jako pásek v krovu.



Obrázek 71: Řešení 1. úlohy pro zvídavé, trámy v podkrovní místnosti

7.2 Úloha 2: Rohové schodiště

Obrázek 72: Využití řezů těles v praxi - rohové schodiště

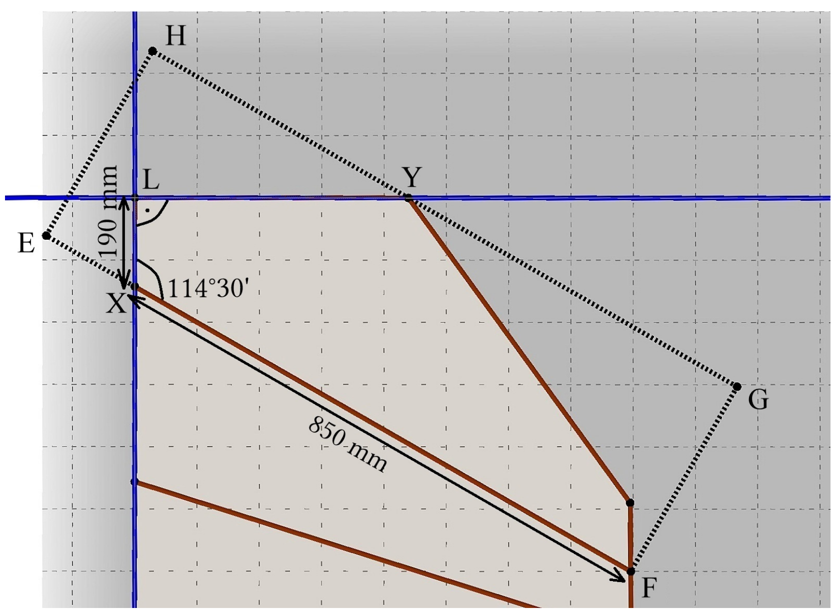


Obrázek 73: Model rohového schodiště

Obrázek 72 představuje další případ využití řezů těles v praxi - rohové schody. Schody na obrázku jsou tvořeny vhodně seříznutými prkny, což lépe dokládá obrázek 73, kde je daná situace namodelována v programu 3D GeoGebra. Jsou zde pro ilustraci namodelovány pouze tři schody. Schodiště se skládá ze stupnice (horizontálně pokládaná prkna) a podstupnice (vertikálně pokládaná prkna).

Pro zvídavé

Zabývejme se nyní posledním nakresleným schodem na obrázku 73, tedy tím, který zasahuje do rohu chodby. Konkrétně se zabývejme prknem, které tvoří stupnici tohoto schodu. Představme si, že jsme koupili stupnici o rozměrech 300 x 1000 x 40 mm a potřebujeme ji seříznout tak, aby pasovala na připravené místo. Údaje, které známe, jsou vyznačeny v obrázku 74 a naším úkolem je seříznout stupnici na levé části tak, aby pasovala do rohu chodby.



Obrázek 74: Model rohového schodiště, pohled shora

....

Řešení

Stupnici si představíme jako kvádr, který označíme $ABCDEFGH$, viz obrázek 75(a). Ze zadání známe rozměry kvádru, tedy $|AB| = 1000$ mm, $|BC| = 300$ mm a $|BF| = 40$ mm. Abychom docílili správného tvaru levé části stupnice, je nutné seříznout ji dvěma rovinami - v obrázku 74 vyznačeno modře. Víme že $|FX| = 850$ mm. Tedy první rovina řezu bude rovina kolmá k podstavě $ABCD$ kvádru, která prochází bodem X a svírá s rovinou přední stěny ($ABFE$) úhel $114°30'$.

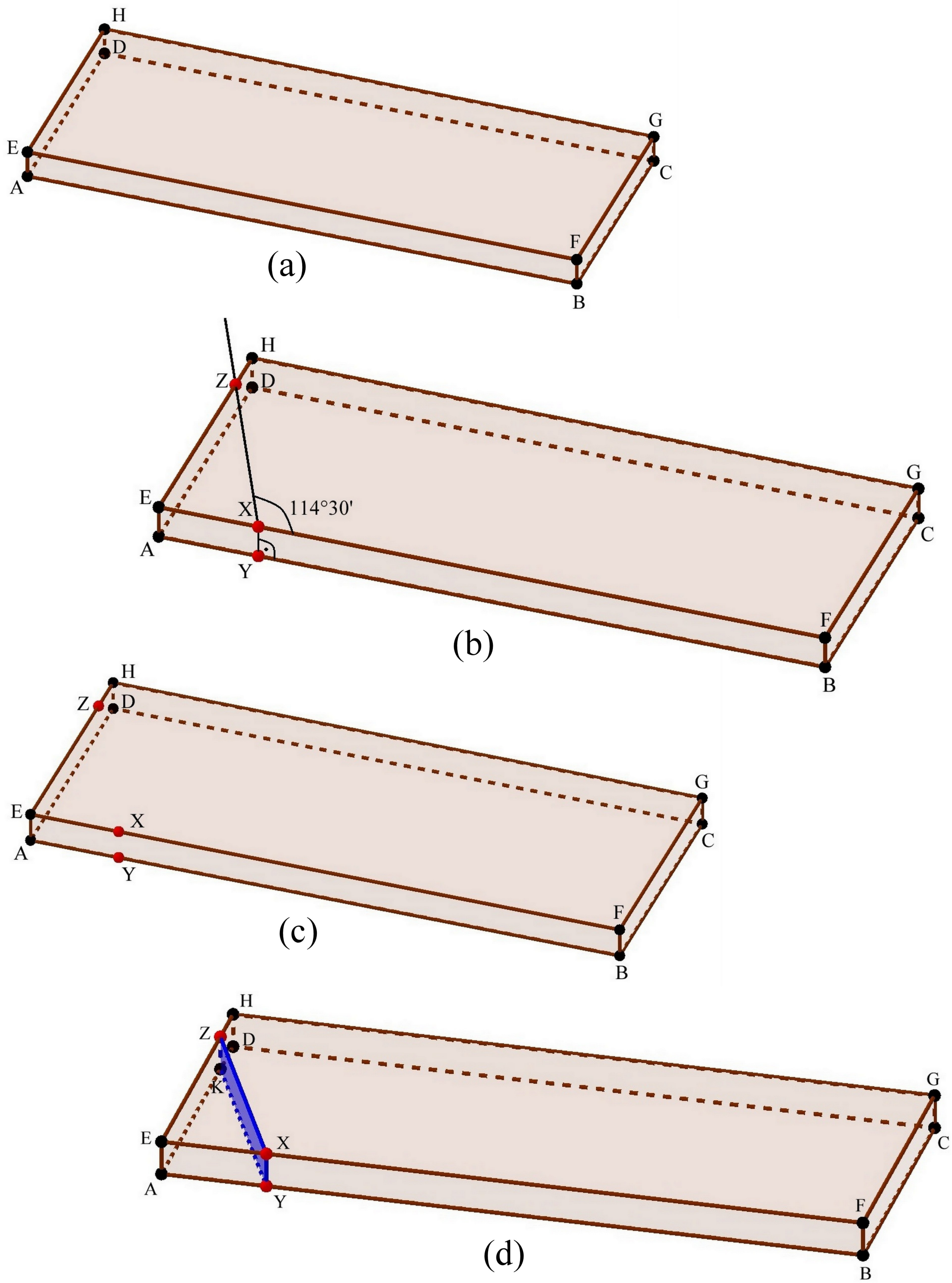
Pojďme si to vysvětlit podrobněji. Abychom určili rovinu, potřebujeme znát tři body. Ze zadání plyne, že rovina musí jistě procházet bodem X. Víme, že $X \in EF$ a platí, že $|FX| = 850$ mm. První bod udávající řez je tedy bod X. Dále víme, že rovina řezu musí být kolmá k rovině podstavy, tedy druhý bod řezu, označme jej Y, musí splňovat, že $Y \in AB; XY \perp AB$, viz obrázek 75(b). Poslední bod udávající řez označíme Z. Bod Z leží v horní podstavě kvádru a platí, že $|\angle FXZ| = 114°30'$, viz obrázek 75(b). Tím jsme určili tři body X, Y, Z udávající první řez na stupnici, viz obrázek 75(c).

Nyní sestrojíme řez kvádru rovinou XYZ. Body X a Y leží v jedné stěně, stejně tak body X a Z leží v jedné stěně. Úsečka XY tak tvoří řez na přední stěně kvádru a úsečka XZ tvoří řez na horní podstavě kvádru na základě 1. pravidla. Na horní podstavě známe řez (XZ) a na dolní podstavě máme bod řezu (Y). Na základě 2. pravidla tedy vedeme bodem Y rovnoběžku s úsečkou XZ, průsečík této rovnoběžky a hrany AD kvádru označíme K. Úsečka KY tvoří řez na dolní podstavě kvádru. Body K a Z leží v levé boční stěně kvádru, tedy na základě 1. pravidla bude úsečka KZ tvořit řez na této stěně. Řezem kvádru je obdélník $XYZK$, viz obrázek 75(d).

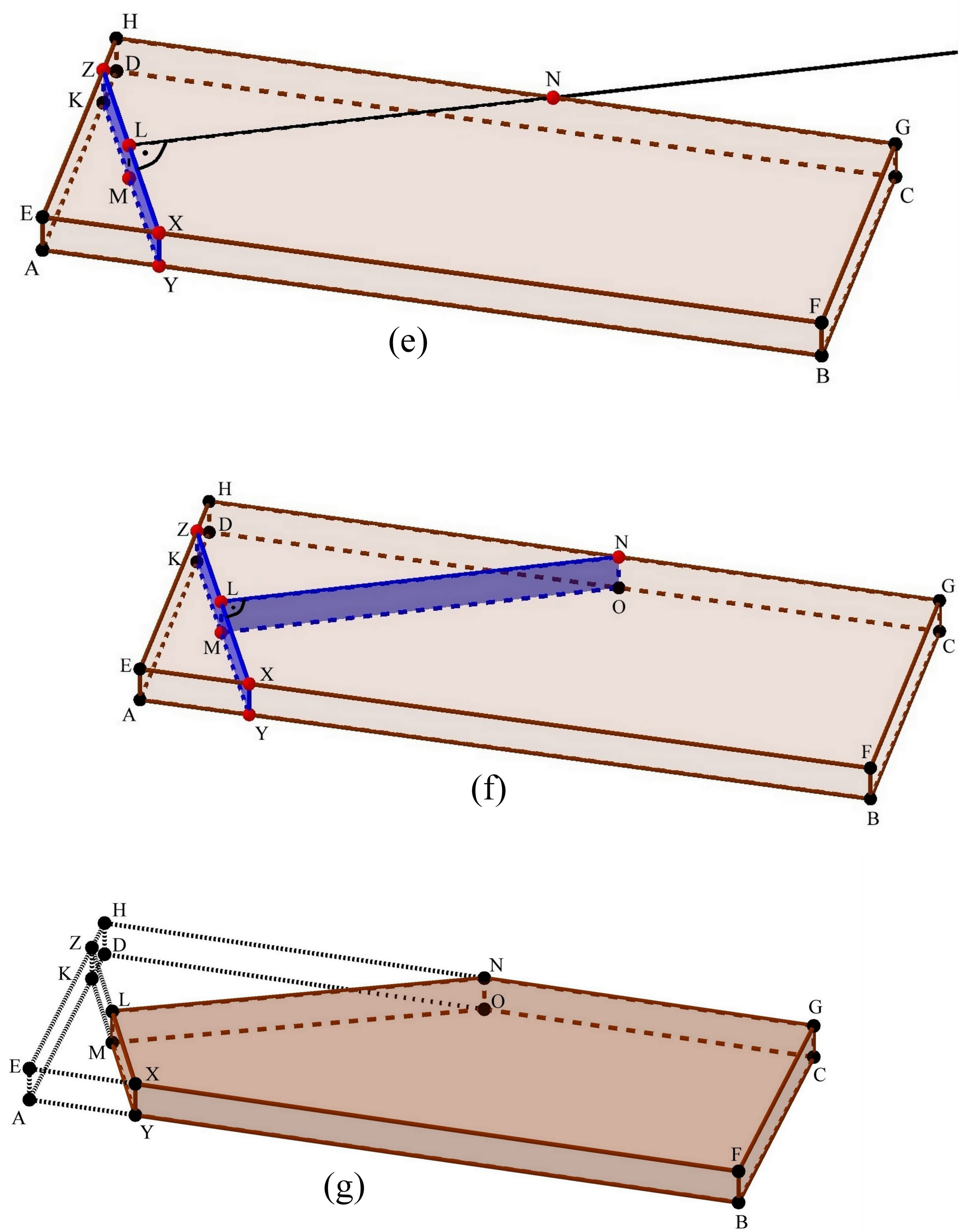
Nyní se budeme věnovat druhému řezu stupnice. Budeme vycházet z podstaty, že v rohu chodby jsou na sebe stěny kolmé, tedy druhý řez musí být kolmý na řez XYZ, viz obrázek 76(e). Ze zadání víme, že $|LX| = 190$ mm, kde bod L představuje roh chodby. Pro bod L tedy platí, že $L \in XZ; |LX| = 190$ mm. Rovina druhého řezu stupnice tedy bude rovina procházející bodem L, která je kolmá k rovině podstavy kvádru a zároveň kolmá na rovinu řezu XYZ.

Pojďme opět najít konkrétní tři body určující rovinu druhého řezu stupnice. Prvním bodem je jistě bod L. Pro druhý bod, označme jej M, musí platit, že $M \in KY$; $LM \perp KY$, jinými slovy $|MY| = |LX| = 190$ mm, viz obrázek 76(e). Třetí bod ležící v rovině horní podstavy označíme N a musí platit, že $|\angle XLN| = 90°$, viz obrázek 76(e). Body LMN jsou body určující druhý řez stupnice.

Poznamenejme ještě, že nyní již nebudeme hovořit o kvádru, ale o hranolu, který vznikl seříznutím původního kvádru $ABCDEFGH$ rovinou XYZ.



Obrázek 75: Řešení 2. úlohy pro zvídavé, rohové schodiště



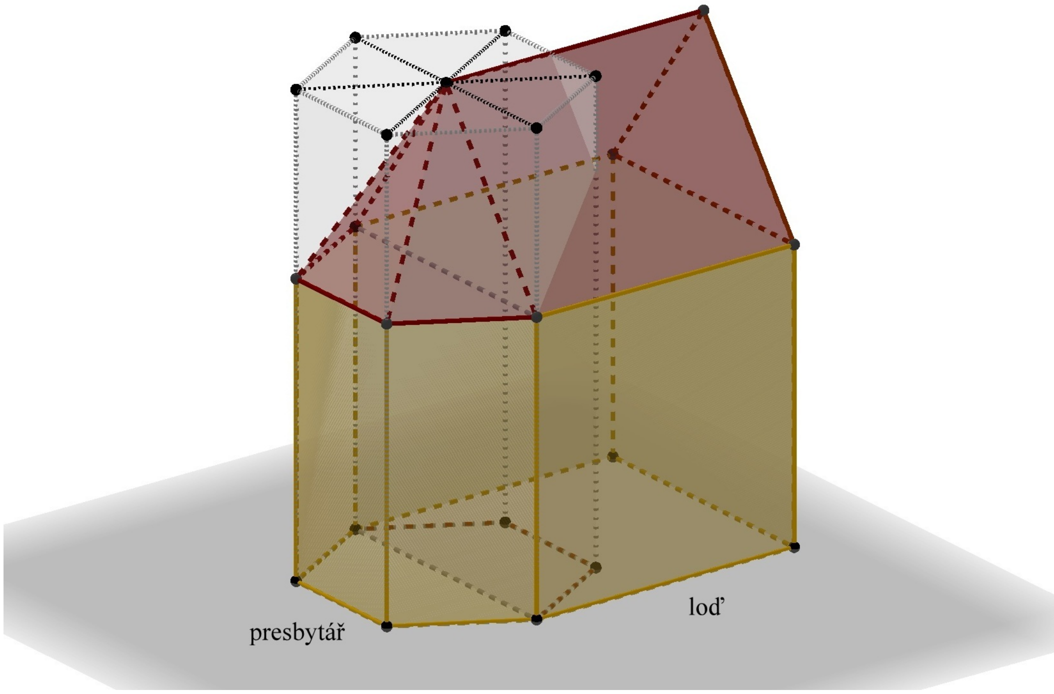
Obrázek 76: Řešení 2. úlohy pro zvídavé, rohové schodiště

Analogicky, jako při sestrojování prvního řezu stupnice, budeme postupovat i nyní. Na základě 1. pravidla sestrojíme úsečku LN, která tvoří řez na horní podstavě hranolu. Body L a M můžeme opět spojit, protože oba body leží v jedné rovině - v rovině prvního řezu XYZ stupnice. Na základě 2. pravidla vedeme bodem M rovnoběžku s řezem LN na horní podstavě. Průsečík této rovnoběžky a hrany CD hranolu označíme O. Úsečka MO tvoří řez na dolní podstavě hranolu. Body N a O leží v jedné stěně - zadní stěna hranolu, tedy je můžeme spojit na základě 1. pravidla. Řezem hranolu je obdélník $LMON$, viz obrázek 76(f).

Na obrázku 76(g) je zobrazena stupnice po seříznutí její levé části tak, aby pasovala do rohu chodby. Plně je nakreslen výsledný produkt a tečkovaně je pro názornost dokreslen kvádr, jehož řezem produkt vznikl.

7.3 Úloha 3: Architektura

Obrázek 77: Využití řezů těles v praxi - architektura, kostel Nanebevzetí Panny Marie v Seči (Plzeň-jih); GPS: $49.5881942N, 13.5064961E$



Obrázek 78: Model presbytáře kostela Nanebevzetí Panny Marie v Seči, pohled zprava

V architektuře se s geometrickými útvary, jejich řezy nebo průniky setkáváme často. Na obrázku 77 je jedna ukázka. Jedná se o kostel Nanebevzetí Panny Marie v Seči - konkrétně zadní část kostela, tzv. presbytář neboli kněžiště. Presbytář je tvaru pravidelného šestibokého hranolu, respektive jeho poloviny, což lépe dokládá model této části kostela, obrázek 78. Stěny presbytáře lze považovat za tři stěny pravidelného šestibokého hranolu. Střechu nad presbytářem lze namodelovat třemi vhodnými řezy tohoto hranolu tak, že každá rovina řezu prochází středem horní podstavy hranolu.

Poznamenejme ještě, že jinou možností, jak namodelovat presbytář a jeho střechu, by bylo modelování průniku pravidelného šestibokého hranolu a pravidelného šestibokého jehlanu stejné podstavy. Vzhledem k zaměření této diplomové práce se ale budeme dále věnovat první variantě.

Pro zvídavé

Představme si například, že vyrábíme malý dřevěný model tohoto kostela jako rekvizitu do hry mašinky (modelová železnice), viz ilustrativní obrázek 79. Předpokládejme, že budeme kostel vyrábět po částech (loď kostela, zvonice, sakristie...), které nakonec slepíme k sobě. Máme k dispozici dřevěný pravidelný šestiboký hranol potřebné velikosti a naším úkolem je upravit jej tak, aby po obarvení mohl sloužit jako presbytář modelu kostela.

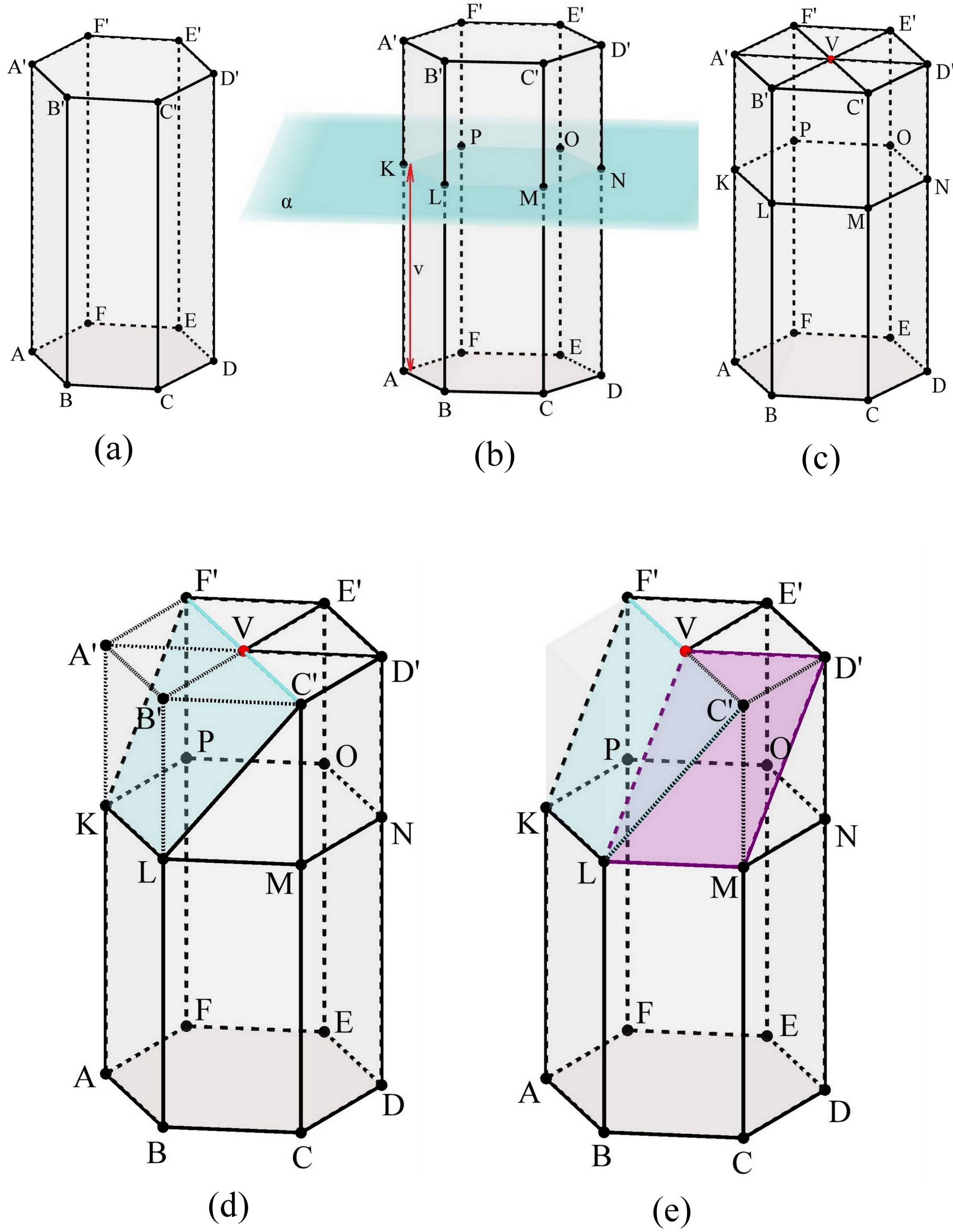
Obrázek 79: Modelová železnice

....

Řešení

Pravidelný šestiboký hranol označíme $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, viz obrázek 80(a). Výšku zdiva modelu kostela označíme v a ve výšce v vedeme rovinu α rovnoběžnou s podstavou hranolu. Průnik roviny α a svislých hran hranolu označíme po řadě K, L, M, N, O, P, jak je uvedeno na obrázku 80(b). Rovina α tak odděluje zdivo presbytáře od jeho střechy. Naším úkolem je nyní provést řez pravidelného šestibokého hranolu $KLMNOPA'B'C'D'E'F'$ tak, aby tvořil vhodnou střechu modelu. Vrchol střechy vznikne jako průsečík úhlopříček horní podstavy (pravidelný šestiúhelník) a označíme jej V, viz obrázek 80(c). Předpokládejme, že stěny $ABLK, BCML$ a $CDNM$ hranolu budou tvořit stěny presbytáře. To znamená, že hrany KL, LM, MN budou tvořit základ střechy nad presbytářem. Střecha vznikne třemi řezy hranolu $KLMNOPA'B'C'D'E'F'$, z nichž každý musí procházet bodem V.

Pojďme si nyní jednotlivé řezy objasnit. První řez je určen hranou KL (neboli body K a L) a bodem V, viz obrázek 80(d), řez vyznačen modře. Horní a dolní podstava hranolu $KLMNOPA'B'C'D'E'F'$ jsou rovnoběžné. Na dolní podstavě známe řez (KL) a na horní podstavě známe bod (V). Tedy na základě 2. pravidla vedeme bodem V rovnoběžku s úsečkou KL. Tato rovnoběžka bude jistě procházet body C' a F' na horní podstavě neboli úsečka $C'F'$ bude tvořit řez na horní podstavě. Body K a F' leží v jedné stěně hranolu, tedy jejich spojnice bude tvořit řez na této stěně. Body L a C' leží v jedné stěně hranolu, tedy jejich spojnice bude tvořit řez na této stěně. Prvním řezem je tedy čtyřúhelník $KLC'F'$.

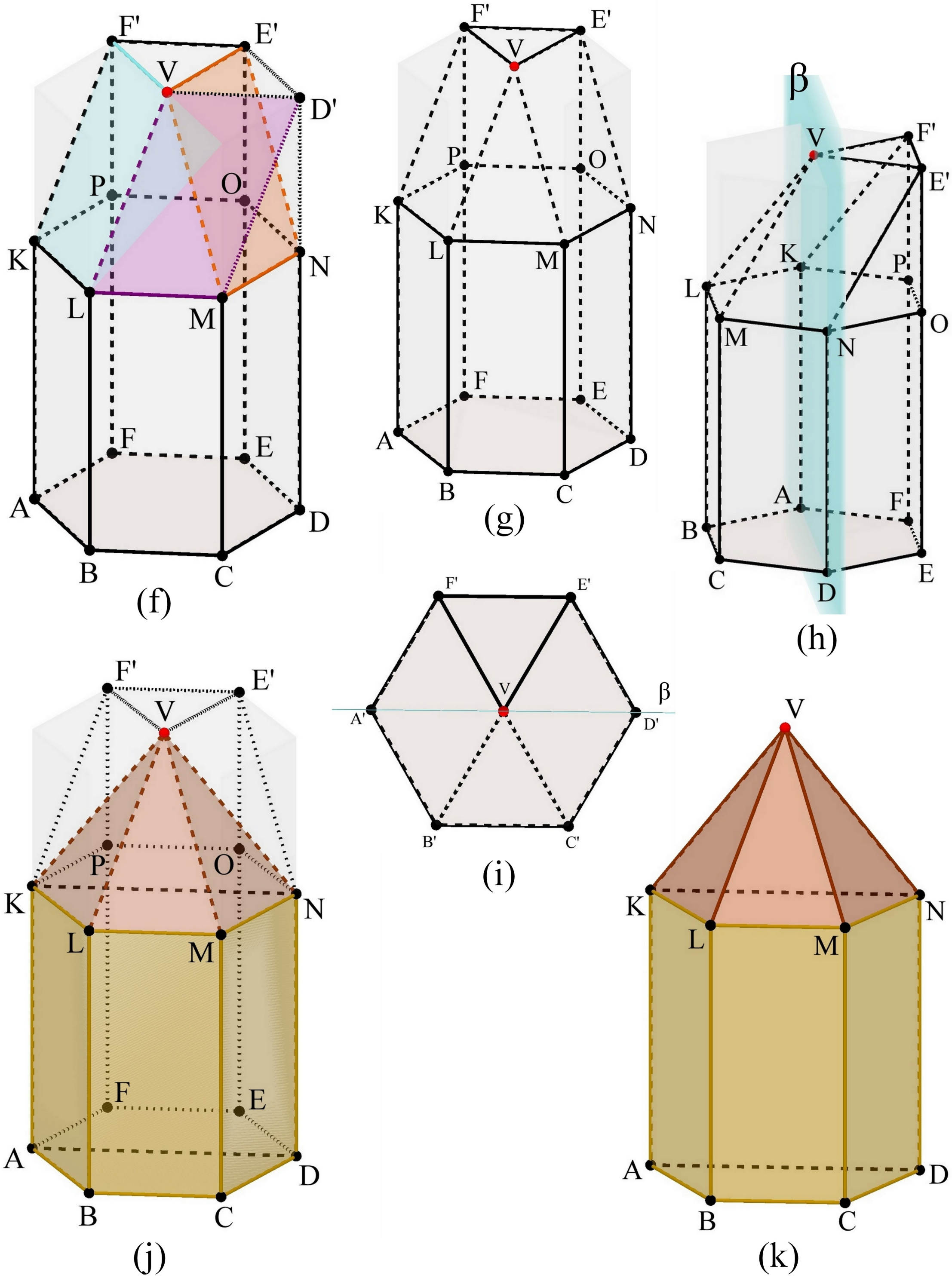


Obrázek 80: Řešení 3. úlohy pro zvídavé, model části kostela

Nyní, viz obrázek 80(e), chceme sestrojit druhý řez, ovšem za předpokladu, že první řez jsme na hranolu již uskutečnili a část hranolu, v obrázku 80(d) vyznačenou tečkovaně, jsme odstranili. Druhý řez je určen hranou LM (neboli body L a M) a bodem V. Body L a V leží v rovině jedné stěny tělesa - konkrétně v rovině prvního řezu $KLC'F'$, tedy jejich spojnice bude tvořit řez na této stěně. Rovina dolní podstavy, na níž známe řez LM je rovnoběžná s rovinou horní podstavy, na níž známe bod V, tedy na základě 2. pravidla vedeme bodem V rovnoběžku s úsečkou LM. Ta jistě prochází bodem D'. Úsečka VD' tedy tvoří řez na horní podstavě. Body D' a M leží v jedné stěně tělesa, tedy jejich spojnice leží také v této stěně a tvoří řez. Druhým řezem tělesa je tedy čtyřúhelník $LMD'V$, v obrázku 80(e) vyznačen fialově. Tečkovaně jsou opět vyznačeny ty hrany, které budou řezem z tělesa odstraněny.

Třetí, poslední, řez je určen hranou MN (neboli body M a N) a bodem V. Předpokládáme, že tento řez konstruujeme na základě již vytvořených prvních dvou řezů. Konstrukce tohoto řezu bude analogická řezu druhému. Body M a V leží v rovině jedné stěny tělesa - v rovině druhého řezu $LMD'V$, tedy jejich spojnice tvoří řez na této stěně. Dolní podstava, na níž známe řez MN, je rovnoběžná s horní podstavou, na níž známe bod řezu, bod V. Bodem V tedy vedeme rovnoběžku s úsečkou MN, která jistě prochází bodem E'. Úsečka VE' tak tvoří řez na horní podstavě. Body N a E' leží v jedné stěně tělesa, tedy jejich spojnice tvoří řez na této stěně. Čtyřúhelník $MNE'V$ je třetím řezem hranolu, jehož bylo potřeba k vytvoření střechy modelu, viz obrázek 81(f), kde je řez vyznačen oranžově. Část tělesa, která bude řezem odstraněna, je v obrázku opět vyznačena tečkovaně. Obrázek 81(g) pak ukazuje výsledný produkt tří řezů na hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Poznamenejme ještě, že přímka LV je vlastně průsečnice prvního (modrého) a druhého (fialového) řezu a přímka MV je průsečnice druhého (fialového) a třetího (oranžového) řezu.

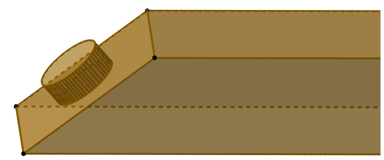
Na začátku bylo řečeno, že presbytář je tvořen polovinou pravidelného šestibokého hranolu. Pro snadnější vytváření řezů jsme ale celou dobu pracovali s celým tělesem. Nyní již stačí pouze provést řez rovinou, označme ji β, kolmou k podstavě hranolu, která prochází bodem V, viz obrázek 81(h), rovina je vyznačena modře. Na obrázku 81(i) je pak stejná situace pohledem shora, rovina β je vyznačena modrou přímkou. Hrany hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, které budou tímto řezem odstraněny, jsou v obrázku 81(j) vyznačeny tečkovaně. Toto byl poslední krok pro vytvoření požadované části modelu kostela. Model presbytáře je uveden na obrázku 81(k).



Obrázek 81: Řešení 3. úlohy pro zvídavé, model části kostela

Poznámka

Závěrem této kapitoly bychom ještě rádi uvedli, že si nečiníme nárok na technickou korektnost řešených úloh. Jsme si plně vědomi toho, že se jednalo o zjednodušené příklady, které mohly být leckdy v rozporu s technickou praxí. Například v úloze 7.1 (trámy v podkrovní místnosti) se jistě neseřízne celý trám, jak je v úloze uvedeno. Pro správné spojení se sloupkem se například nechává na pásku oválný výčnělek, viz ilustrativní obrázek 82, a na sloupku je dutinka stejného tvaru. Pro jednoduchost jsme v úloze toto nezohledňovali a provedli řez na celé ploše pásku (bez ponechání výčnělku). Všechny tři příklady mají sloužit žákům střední školy jen jako motivační úlohy, které by měly představovat různé užití řezů těles v praxi.



Obrázek 82: Pásek s výčnělkem pro vhodné spojení se sloupkem

8 Závěr

Diplomová práce s názvem „Tvorba interaktivních pomůcek pro výuku stereometrie na středních školách“ se zaměřila na jednu z oblastí stereometrie, a to na řezy těles rovinou s cílem vytvořit interaktivní pomůcky, materiály a motivační příklady vhodné jak pro zvídavé žáky, tak pro žáky, kteří v této problematice tápou. Pro učitele může být zdrojem materiálů na zpestření výuky. Práce je rozdělena do sedmi kapitol, z nichž každá přináší jiný pohled na problematiku řezů těles rovinou.

V kapitole 1 jsme porovnali výuku stereometrie, speciálně výuku řezů těles rovinou, na různých typech středních škol se zaměřením na obsah i formu výuky. Konzultovali jsme výuku s učiteli a porovnávali rámcové vzdělávací programy. Výsledkem bylo zjištění, že řezy těles rovinou se, jako takové, učí výhradně na gymnáziích. Na středních odborných školách se žáci s řezy těles setkají, ovšem ne v matematice, ale v některých odborných předmětech, jako je například technické kreslení. Na středních odborných učilištích je toto téma bráno spíše okrajově.

V kapitole 2 byl vytvořen přehled her, ať už společenských nebo počítačových a různých hlavolamů, které podporují prostorovou představivost, jež je pro osvojení problematiky řezů těles zásadní. Teoretický základ, o který se práce opírala a na nějž se odkazovala byl shrnut v kapitole 3. Byly zde nadefinovány základní pojmy stereometrie nezbytné pro další výklad.

Kapitola 4 obsahuje příklady různého druhu, proto byla rozdělena na dvě podkapitoly. Podkapitola 4.1 obsahuje soubor třinácti příkladů různých obtížností určených především pro žáky, kteří v látce tápou. Těm může tato podkapitola sloužit jako pomocný text. Sestrojení řezu je zde detailně popsáno, vysvětleno krok po kroku a doplněno obrázky. Každý z těchto příkladů byl navíc namodelován v programu 3D GeoGebra, kde lze odkrývat řešení krok po kroku. Kroky postupu popisované v textu diplomové práce odpovídají krokům v programu GeoGebra. Podkapitola 4.2 je naopak věnována zvídavým studentům, pro něž mohou být tyto příklady výzvou. Nejedná se o typické příklady na sestrojení řezu těles rovinou. Podkapitola obsahuje čtyři příklady, jež využívají 3D GeoGebru jako dynamický matematický software. Zadání řezu je závislé na parametru. Spolu s měnícím se parametrem se tedy mění i řez na tělese. Příklady jsou doplněné zajímavými otázkami a úkoly, k jejichž zodpovězení pomáhá právě dynamický model v 3D GeoGebře.

V rámci kapitoly 4.1 bylo zhotoveno několik modelů řezů těles. Některé byly vyrobené z drátku a špejlí, jiné byly vytištěné na 3D tiskárně. Průběh tisku takového modelu byl popsán v kapitole 5 a byl doplněn obrázky pořízenými při tisku. Bylo také zhotoveno čtyřminutové video s názvem *Záznam 3D tisku řezu na jehlanu*, které je součástí CD přílohy diplomové práce. Celkem byly vytištěny tři modely.

Pro ověření navržených pomůcek zhotovených v rámci diplomové práce jsme kontaktovali Gymnázium Blovice. Žákům třetího ročníku byly představeny příklady z kapitoly 4.1 a byly jim poskytnuty pracovní listy. Při výuce jim byly promítány na interaktivní tabuli příklady v programu 3D GeoGebra. Výklad byl doplněn o ukázky modelů a na závěr jim byla podána krátká přednáška o 3D tisku a bylo jim přehráno video *Záznam 3D tisku řezu na jehlanu*. Tato forma výuky probíhala čtyři vyučovací hodiny. Na závěr bylo provedeno dotazníkové šetření, v němž mohli studenti reflektovat užitečnost pomůcek vytvořených v rámci diplomové práce. V kapitole 6 jsou uvedeny výsledky, na základě nichž můžeme považovat vytvořené pomůcky za vhodné. Zapojení didaktických pomůcek do teoretické výuky shledáváme velmi přínosným.

Kapitola 7 je ukázkou toho, kde všude se mohou žáci s řezy těles v praxi setkat. Obsahuje tři pseudo-reálné úkoly, k jejichž vyřešení žáci využívají znalost řezů těles rovinou.

Práce by se dala rozšířit například tím, že by zahrnovala i úlohy polohové a metrické, které s látkou řezy těles poměrně úzce souvisí.

9 Dodatky diplomové práce

9.1 Dotazník

Dotazník je anonymní a slouží jako reflexe odučených hodin, v nichž bylo cílem zapojit do výuky stereometrie interaktivní pomůcky, které vznikly v rámci diplomové práce. Pro vyplnění části A dotazníku použijte následující tabulku 9.

Souhlasím		**Nevím**	**Nesouhlasím**	
naprosto	spíše	těžko rozhodnout	spíše	určitě
1	2	3	4	5

Tabulka 9: Pravidla pro vyplňování dotazníku - uzavřené otázky

Ohodnoťte pravdivost následujících tvrzení podle Vašeho názoru čísly od jedné do pěti. Jednička znamená, že s tvrzením naprosto souhlasíte, pětka, že se s tvrzením absolutně neztotožňujete. Neutrální odpověď (číslo 3) se snažte příliš často neužívat.

Část A - Otázky s posuzovací škálou

Otázka 1. *Vysvětlovanou novou látku jsem pochopil/a.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 2. *Hodiny mě bavily, pracoval/a jsem v hodině.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 3. *Ocenil/a jsem různorodost (příklady kreslené na tabuli, promítané v GeoGebře na projektoru, modely ze špejlí, 3D tisk).*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 4. *Líbilo se mi, že jsme chodili kreslit řezy na tabuli. Hodnotím to jako přínosné.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 5. *Příklady promítané v GeoGebře byly názorné - GeoGebra mi pomohla při řešení příkladů.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 6. *Rád/a bych se v programu 3D GeoGebra naučil/a tyto příklady modelovat.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 7. *Využití modelů (ze špejlí, z 3D tiskárny) při výkladu mi přišlo užitečné a vhodné. Přispělo k lepšímu pochopení daného příkladu.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Otázka 8. *S 3D tiskárnou jsem se již někdy dříve setkal/a. Měl/a jsem ponětí, co je 3D tisk.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Pokud ano, uveďte zdroj - jak jste se o 3D tisku dozvěděl/a:

....

....

Otázka 9. *Informace o 3D tisku (fotky, video) při hodině mě zaujaly. Jsem rád/a, že jsem se mohl/a o tomto problému něco dozvědět.*

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Část B - otevřené otázky

Otázka 10. *Co se mi na výuce líbilo?*

....

....

Otázka 11. *Co se mi na výuce nelíbilo?*

....
....

Otázka 12. *Návrhy, rady, komentáře, připomínky, výhrady k hodině.*

....
....

Otázka 13. *Co mě nejvíce překvapilo?*

....
....

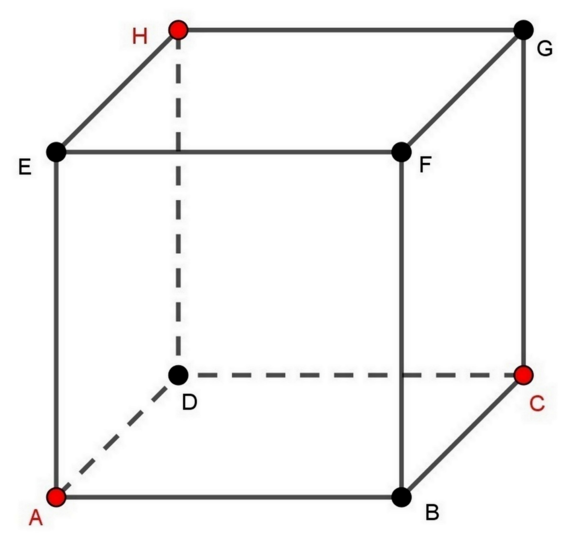
Děkuji Vám za vyplnění dotazníku.

9.2 Pracovní listy

Příklad 1

Je dána krychle ABCDEFGH. Veďte řez rovinou ACH, jak je uvedeno na obrázku.

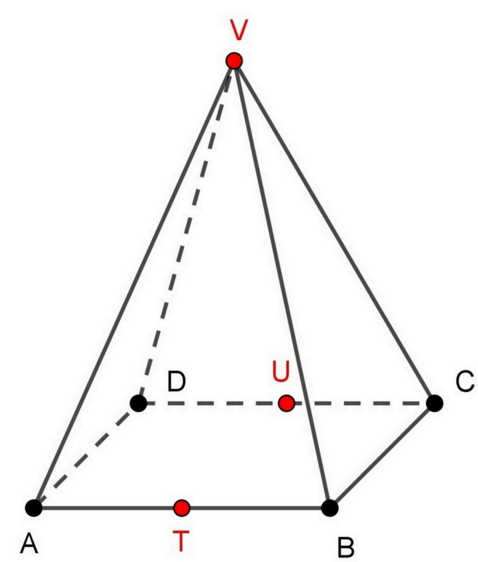
Vlastní poznámky:



Příklad 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Sestrojte řez rovinou TUV, je-li bod T střed hrany AB a bod U střed hrany CD, jak je uvedeno na obrázku.

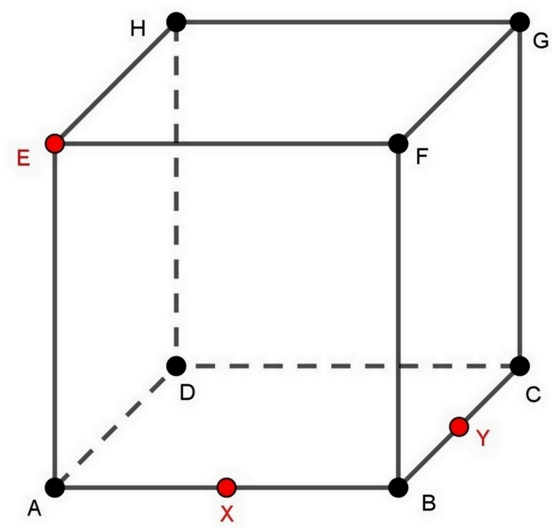
Vlastní poznámky:



Příklad 3

Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XYE, je-li bod X střed hrany AB a bod Y střed hrany BC, jak je uvedeno na obrázku.

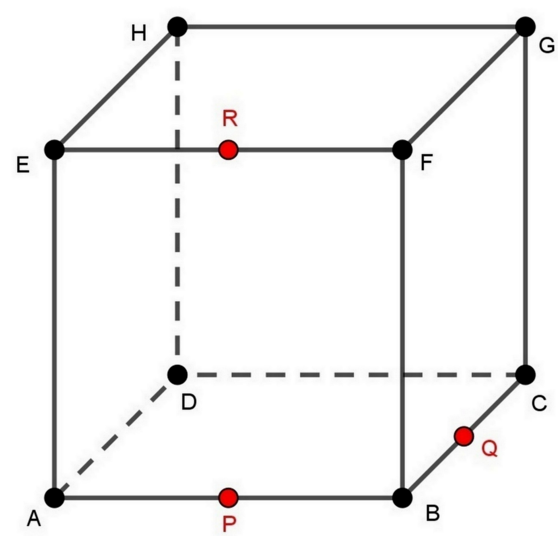
Vlastní poznámky:



Příklad 4

Je dána krychle ABCDEFGH
Veďte řez rovinou PQR, jsou-li body P, Q, R po řadě středy hran AB, BC a EF, jak je uvedeno na obrázku.

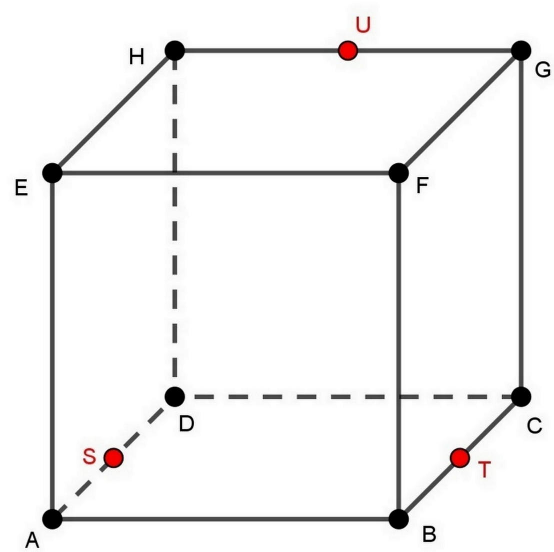
Vlastní poznámky:



Příklad 5

Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou STU, jsou-li body S, T, U po řadě středy hran AD, BC a GH, jak je uvedeno na obrázku.

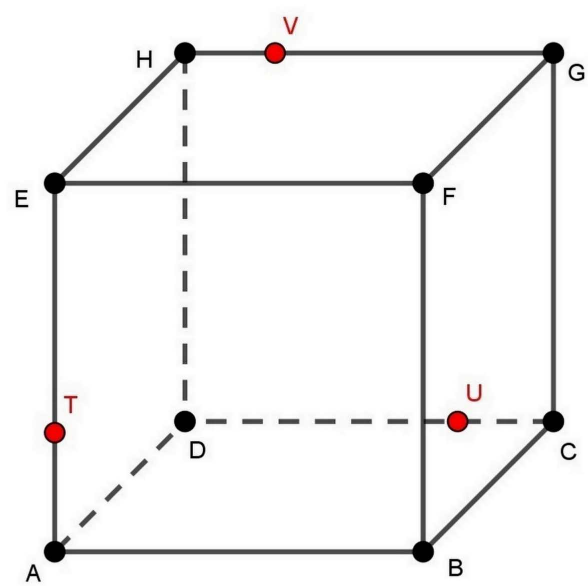
Vlastní poznámky:



Příklad 6

Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou TUV, leží-li bod T na hraně AE, bod U na hraně CD a bod V na hraně GH, jak je uvedeno na obrázku.

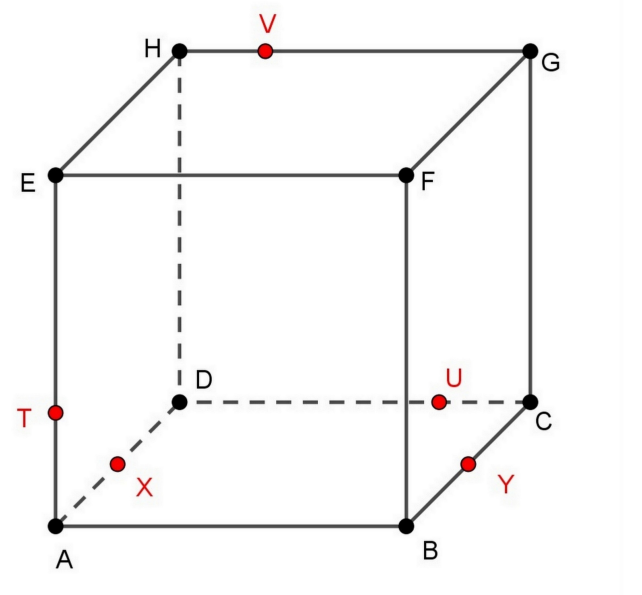
Vlastní poznámky:



Příklad 7

Mějme krychli ABCDEFGH a body T, U, V, X a Y umístěné na hranách krychle tak, jak je uvedeno na obrázku.
Sestrojte průsečnici roviny TUV a roviny XYV.

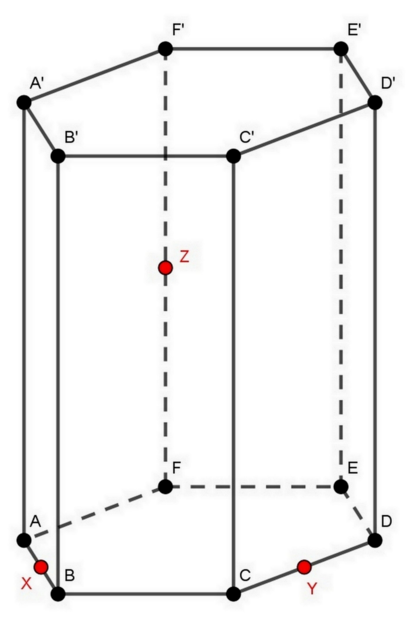
Vlastní poznámky:



Příklad 8

Je dán pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA'B'C'D'E'F'. Veďte řez rovinou XYZ. Body X, Y a Z jsou po řadě středy hran AB, CD a FF', jak je uvedeno na obrázku.

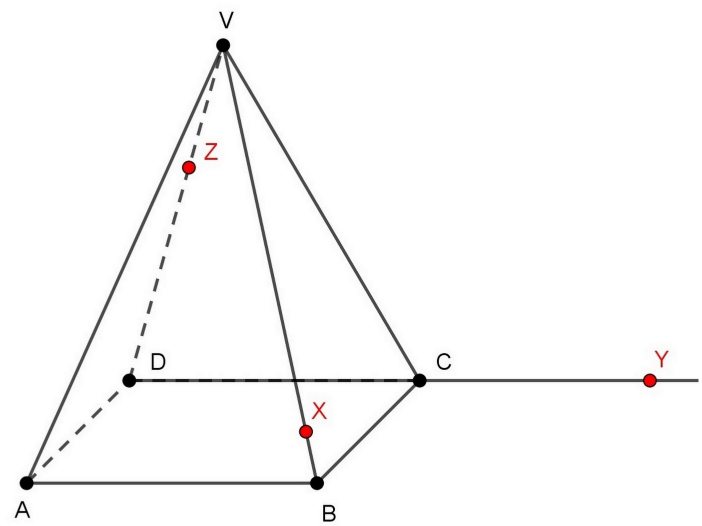
Vlastní poznámky:



Příklad 9

Sestrojte řez pravidelného čytřbokého jehlanu ABCDV rovinou XYZ, leží-li bod X na hraně BV, bod Y na prodloužené hraně DC a bod Z na hraně DV jehlanu tak, jak je uvedeno na obrázku.

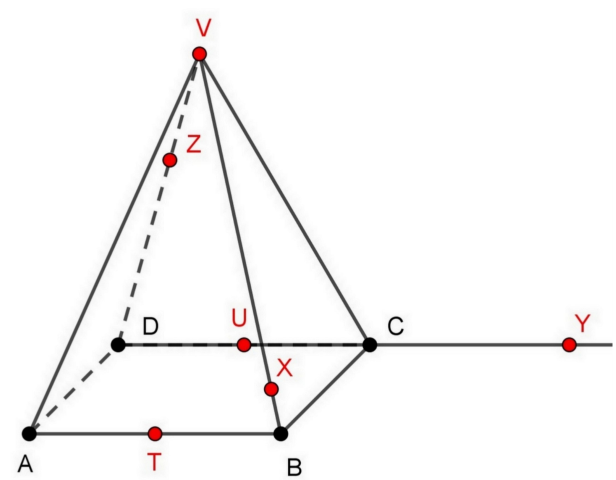
Vlastní poznámky:



Příklad 10

Mějme pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV a body X,Y,Z,T,U a V umístěné tak, jak je uvedeno na obrázku. Sestrojte průsečnici roviny XYZ a roviny TUV.

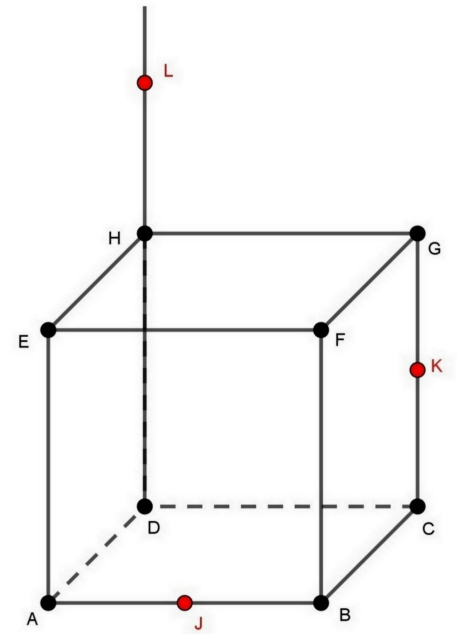
Vlastní poznámky:



Příklad 11

Veďte řez rovinou JKL na krychli ABCDEFGH, je-li bod J střed hrany AB, bod K střed hrany CG a bod L leží na prodloužené hraně DH, jak je uvedeno na obrázku.

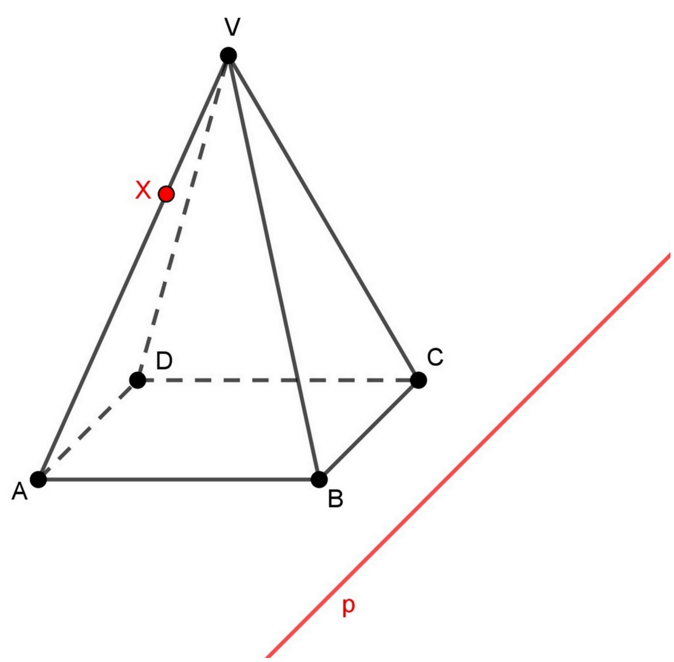
Vlastní poznámky:



Příklad 12

Sestrojte řez určený bodem X a přímkou p na pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV, jak je uvedeno na obrázku. Přímka p leží v rovině dolní podstavy jehlanu a je rovnoběžná s hranou BC.

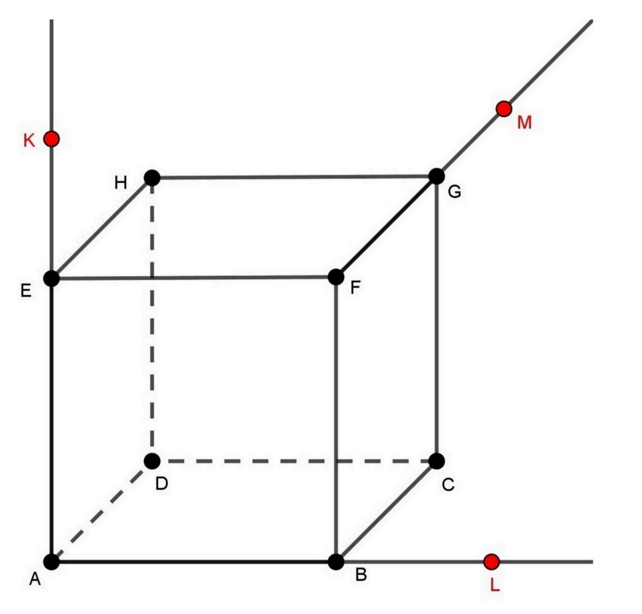
Vlastní poznámky:



Příklad 13

Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, leží-li bod K na prodloužené hraně AE, bod L na prodloužené hraně AB a bod M na prodloužené hraně FG, jak je uvedeno na obrázku.

Vlastní poznámky:

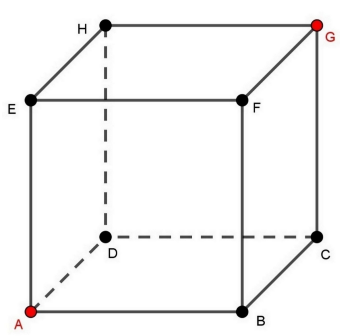


Dynamický příklad 1

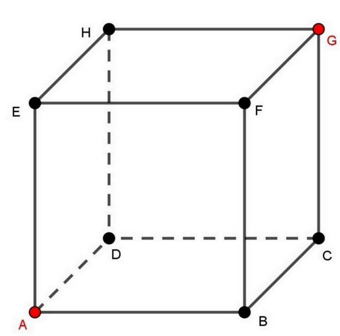
Je dána krychle ABCDEFGH a parametr n. Bod X je incidentní s hranou krychle DH. Parametr n udává vzdálenost bodu X od vrcholu D.

Úkoly:
1) Do obrázku (a) načrtněte řez rovinou AGX pro volbu parametru n = 0.
2) Do obrázku (b) načrtněte řez rovinou AGX pro volbu parametru n = (1/2)*|DH|.
3) Do obrázku (c) načrtněte řez rovinou AGX pro volbu parametru n = |DH|.

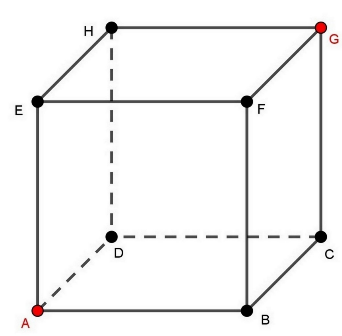
S pomocí těchto náčrtků zodpovězte následující otázky.
1) Jak se budou lišit obsahy řezů krychle pro volbu parametru n = 0 a n = |DH|?
2) Jak bude vypadat průsečnice všech řezů, které vzniknou volbou všech hodnot parametru n?



(a)



(b)



(c)

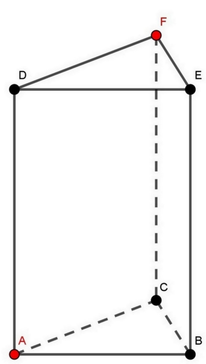
Vlastní poznámky:

Dynamický příklad 2

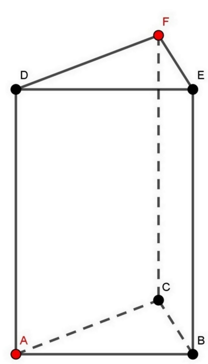
Je dán pravidelný trojboký hranol ABCDEF a parametr p. Bod X je incidentní s hranou BE. Parametr p udává vzdálenost bodu X od vrcholu B.

Úkoly:
1) Do obrázku (a) načrtněte řez rovinou AFX pro hodnotu parametru p = 0.
2) Do obrázku (b) načrtněte řez rovinou AFX pro hodnotu parametru p = (1/2)*|BE|.
3) Do obrázku (c) načrtněte řez rovinou AFX pro hodnotu paramteru p = |BE|.

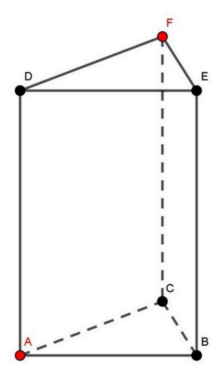
S pomocí těchto náčrtků odpovězte na následující otázky.
1) Řezem bude vždy trojúhelník. Rozhodněte a odůvodněte, které tvrzení o trojúhelnících vzniklých pro hodnoty parametru p = 0, p = (1/2)*|BE| a p = |BE| je pravdivé:
a) Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé.
b) Všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné.
c) Všechny trojúhelníky jsou rovnostranné.



(a)



(b)



(c)

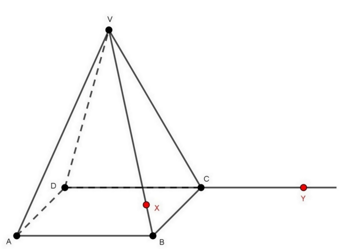
Vlastní poznámky:

Dynamický příklad 3

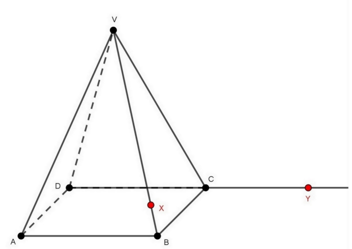
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV a parametr m. Bod Z je incidentní s hranou jehlanu DV. Parametr m udává vzdálenost bodu Z od vrcholu D.

Úkoly:
1) Do obrázku (a) načrtněte řez rovinou XYZ pro volbu parametru m = 0.
2) Do obrázku (b) načrtněte řez rovinou XYZ pro volbu parametru m = (1/2)*|DV|.
3) Do obrázku (c) načrtněte řez rovinou XYZ pro volbu parametru m = |DV|.

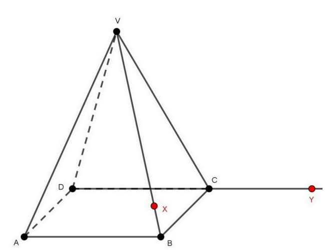
S pomocí těchto náčrtků zodpovězte následující otázky.
1) Jaký geometrický útvar bude řezem pro volbu parametru m = 0? (Popiš co nejpřesněji.)
2) Co bude průsečnicí roviny řezu a roviny dolní podstavy jehlanu pro volbu parametru m = 0?
3) Jaký geometrický útvar bude řezem pro volbu parametru m = |DV|?



(a)



(b)



(c)

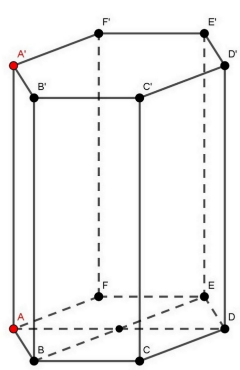
Vlastní poznámky:

Dynamický příklad 4

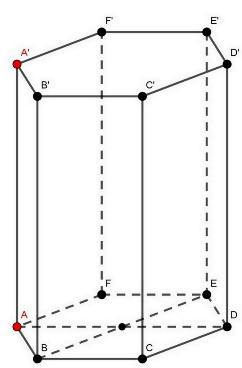
Je dán pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA'B'C'D'E'F' a parametr q. Bod X je incidentní s úsečkou BE (úhlopříčka dolní podstavy hranolu). Parametr q udává vzdálenost bodu X od vrcholu E.

Úkoly:
1) Do obrázku (a) načrtněte řez rovinou AA'X pro volbu parametru q = 0.
2) Do obrázku (b) načrtněte řez rovinou AA'X pro volbu parametru q = (1/2)* |BE|.
3) Do obrázku (c) načrtněte řez rovinou AA'X pro volbu paramateru q = |BE|.

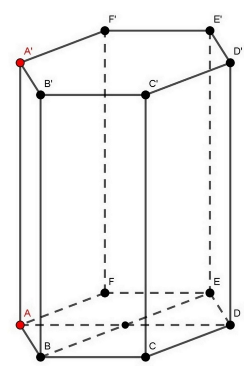
Na základě těchto náčrtků zodpovězte následující otázky.
1) Jakým geometrickým útvarem je řez pro různé hodnoty parametru q?
2) Jaký obsah bude mít řez pro volbu parametru q = |BE|?
3) Pro jakou hodnotu parametru q je obsah řezu maximální?
4) Pro jakou hodnotu parametru q splyne řez s jednou boční stěnou hranolu?



(a)



(b)



(c)

Vlastní poznámky:

Reference

[1] Autodesk Fusion 360. Www.autodesk.com/products/fusion-360/overview [online]. c2020 [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://www.autodesk.com/products/fusion-360/overview

[2] Cubissimo. In: Www.agatinsvet.cz [online]. Praha: K+L NET [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: https://www.agatinsvet.cz/cubissimo/

[3] Free online STL viewer. Www.viewstl.com [online]. [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://www.viewstl.com/

[4] GeoGebra. Www.geogebra.org [online]. c2020 [cit. 2020-04-24]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/download?fbclid=IwAR0FAHSW-gKmqZ2eXzsKMTwA8UfKJlN-wArTyzLm-WVzVy-ETAXAxVCd9Kk

[5] Geomag Pro-L 110. In: Www.svet-stavebnice.cz [online]. Dobrá, okres Frýdek-Místek: The LEGO Group [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: https://www.svet-stavebnice.cz/geomag-pro-l/3039-geomag-pro-l-110.html

[6] Gymnázium Blovice. Www.gblovice.cz/ [online]. c2014-2019 [cit. 2020-05-04]. Dostupné z: https://www.gblovice.cz/

[7] Leinveber, J.; Švercl, J. (2003). Technické kreslení a technická dokumentace pro studijní a učební obory SOU. Úvaly: Nakladatelství ALBRA.

[8] Minecraft. Www.cs.wikipedie.org [online]. [29.2.2020] [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Minecraft

[9] OpenSCAD: The Programmers Solid 3D CAD Modeller. Www.openscad.org/ [online]. [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://www.openscad.org/

[10] PRUSA RESEARCH by JOSEF PRUSA. Www.prusa3d.cz/ [online]. c2020 [cit. 2020-05-01]. Dostupné z: https://www.prusa3d.cz/

[11] PrusaSlicer. Www.prusa3d.cz/prusaslicer/ [online]. c2020 [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://www.prusa3d.cz/prusaslicer/

[12] Průša, J. (2019). Základy 3D tisku s Josefem Průšou [online]. Praha: Prusa Research s.r.o.. Dostupné z: https://www.prusa3d.cz/kniha-zaklady-3d-tisku-josefa-prusi/.

[13] Střední odborné učiliště stavební, Plzeň. Www.souplzen.cz/ [online]. [cit. 2020-05-04]. Dostupné z: https://www.souplzen.cz/

[14] Střední průmyslová škola elektrotechnická, Plzeň. Www.spseplzen.cz/ [online]. c2018 [cit. 2020-05-04]. Dostupné z: https://www.spseplzen.cz/

[15] Střední průmyslová škola strojnická, Plzeň. Www.spstrplz.cz/ [online]. c2020 [cit. 2020-05-04]. Dostupné z: https://www.spstrplz.cz/

[16] Švercl, J. (2003). Technické kreslení a deskriptivní geometrie pro školu a praxi. Praha: Scientia, spol. s r. r., pedagogické nakladatelství.

[17] Tinkercad. Www.tinkercad.com/ [online]. c2019 [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://www.tinkercad.com/

[18] Vzorované kostky "Les"- prostorová představivost. In: Www.spravnahracka.cz/ [online]. Plzeň: FIT-EDU [cit. 2020-03-08].
Dostupné z: https://www.spravnahracka.cz/vzorovane-kostky-les

[19] 4 v 1 - hry na představivost a logické myšlení. In: Www.spravnahracka.cz/ [online]. Plzeň: FIT-EDU [cit. 2020-03-08]. Dostupné z: https://www.spravnahracka.cz/4-v-1-soubor-her-na-prostorovou-predstavivost-a-logicke-mysleni