

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA STROJNÍ

Studijní program: B0715A270013 – Strojní inženýrství
Studijní specializace: Konstruování strojů a technických zařízení

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modelování lisovaného spoje

Autor: Martin ČÍŽEK
Vedoucí práce: Ing. Petr BERNARDIN, Ph.D.

Akademický rok 2022/2023

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta strojní

Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Martin ČÍŽEK**
Osobní číslo: **S20B0111P**
Studijní program: **B0715A270013 Strojní inženýrství**
Specializace: **Konstruování strojů a technických zařízení**
Téma práce: **Modelování lisovaného spoje**
Zadávací katedra: **Katedra konstruování strojů**

Zásady pro vypracování

Základní požadavky:

Provedte rešerši v oblasti modelování elasto-plastických materiálů. Dále je cílem sestavit několik MKP modelů lisovaných spojů, provést simulaci zalisování a vylisování spoje a výsledky porovnat s experimentálními daty. Výstupem bude postup a doporučení pro modelování lisovaných spojů.

Základní technické údaje:

Technické parametry jsou uvedeny v příloze zadání.

Osnova práce:

1. Rešerše
2. Provedení výpočtů
3. Porovnání s experimentem
4. Závěr.

Vedoucí: Ing. Petr Bernardin, Ph.D.

Konzultant – Ing. Jaromír Kašpar

Zadavatel – Mubea, spol. s.r.o.

Rozsah bakalářské práce: **30-40 stran**
Rozsah grafických prací: **podle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

[1] KRÁTKÝ, J., HOSNEDL, S. STROJNÍ ČÁSTI 2: Převodové mechanismy. Plzeň: Západočeská univerzita, 1998. ISBN 80-7082-452-2.

[2] KRÁTKÝ, J., KRÓNEROVÁ, E., HOSNEDL, S. OBECNÉ STROJNÍ ČÁSTI 2: Základní a složené převodové mechanismy. Plzeň: Západočeská univerzita, 2011. ISBN 978-80-261-0066-9.

Podkladové materiály, výkresy, prospekty, katalogy, apod. poskytnuté zadavatelem úkolu.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Petr Bernardin, Ph.D.**
Katedra konstruování strojů

Datum zadání bakalářské práce: **30. listopadu 2022**

Termín odevzdání bakalářské práce: **26. května 2023**

L.S.

Doc. Ing. Vladimír Duchek, Ph.D.
děkan

Prof. Ing. Václava Lašová, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení o autorství

Akademický rok: 2022/2023
Jméno a příjmení studenta: Martin Čížek
Název bakalářské práce: Modelování lisovaného spoje

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma „Modelování lisovaného spoje“ vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí bakalářské práce.

V Plzni dne:

.....
Podpis studenta

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat panu Ing. Petru Bernardinovi, Ph.D. za četné rady a připomínky ke zpracování bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat také panu Ing. Jaromíru Kašparovi za podnětné konzultace, rady a připomínky. Děkuji také společnosti Mubea, spol. s r. o. za poskytnutí zázemí pro tvorbu práce.

ANOTAČNÍ LIST BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

AUTOR	Příjmení Čížek	Jméno Martin	
STUDIJNÍ PROGRAM	B0715A270013 Strojní inženýrství		
VEDOUcí PRÁCE	Příjmení (včetně titulů) Ing. Bernardín, Ph.D.	Jméno Petr	
PRACOVÍŠTĚ	ZČU - FST – KKS		
DRUH PRÁCE	DIPLOMOVÁ	BAKALÁŘSKÁ	Nehodící se škrtněte
NÁZEV PRÁCE	Modelování lisovaného spoje		

FAKULTA	strojní	KATEDRA	KKS	ROK ODEVZD.	2023
----------------	---------	----------------	-----	--------------------	------

POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)

CELKEM	59	TEXTOVÁ ČÁST	39	GRAFICKÁ ČÁST	20
---------------	----	---------------------	----	----------------------	----

STRUČNÝ POPIS (MAX 10 ŘÁDEK) ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL POZNATKY A PŘÍNOSY	Bakalářská práce je zaměřena na modelování nalisovaného spoje pomocí metody konečných prvků (MKP). Práce obsahuje řešerši na nalisované spoje, MKP, nelineární úlohy a na materiálové modely (hlavně elasto-plastické) včetně teorie plasticity. V praktické části je vytvořeno osm různých modelů s různými zjednodušeními, jejichž výsledky zalisovací a vylisovací síly jsou porovnány s experimentálními daty a analyticky spočtenými daty. Cílem bylo najít nejvhodnější model z hlediska přesnosti dat a časové nenáročnosti. Dále byl vypracován praktický postup, jak modelovat nalisované spoje s ohledem na konvergenci řešení.
KLÍČOVÁ SLOVA ZPRAVIDLA JEDNOSLOVNÉ POJMY, KTERÉ VYSTIHUJÍ PODSTATU PRÁCE	Nalisovaný spoj, MKP, modelování, CAE, ANSYS, nelinearity, materiálové modely, plasticita, konvergence, elasto-plasticita, kontakt

SUMMARY OF BACHELOR SHEET

AUTHOR	Surname Čížek	Name Martin	
STUDY PROGRAMME	B0715A270013 Mechanical Engineering		
SUPERVISOR	Surname (Inclusive of Degrees) Ing. Bernardin, Ph.D.	Name Petr	
INSTITUTION	ZČU - FST - KKS		
TYPE OF WORK	DIPLOMA	BACHELOR	Delete when not applicable
TITLE OF THE WORK	Pressed joint modeling		

FACULTY	Mechanical Engineering	DEPARTMENT	KKS	SUBMITTED IN	2023
----------------	------------------------	-------------------	-----	---------------------	------

NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

TOTALLY	59	TEXT PART	39	GRAPHICAL PART	20
----------------	----	------------------	----	-----------------------	----

BRIEF DESCRIPTION TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS	The bachelor thesis is focused on modelling of press fit using finite element analysis (FEA). The thesis contains a research on press fit, FEM, nonlinear problems and material models (mainly elasto-plastic) including plasticity theory. In the practical part, 8 different models with different simplifications are developed and the results of the pressing and extrusion forces are compared with experimental data and analytically calculated data. The goal was to find the most suitable model in terms of data accuracy and time saving. Furthermore, a practical procedure was developed to model the press fit considering the convergence of the solution.
KEY WORDS	Press fit, interference fit, FEA, FEM modeling, CAE, ANSYS, nonlinearities, material models, plasticity, convergence, elasto-plasticity, contact

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Představení společnosti Mubea	2
3	Systémy napínání řemene.....	3
4	Nalisovaný spoj.....	4
4.1	Spoje obecně.....	4
4.1.1	Základní rozdělení.....	4
4.2	Spoj nalisováním	4
4.3	Analytické výpočty.....	5
4.3.1	Únosnost spoje	5
4.3.2	Potřebný přesah.....	6
4.3.3	Stanovení rozměrových tolerancí.....	7
4.3.4	Montáž.....	8
5	Metoda konečných prvků	10
5.1	Modelování.....	10
5.2	Chyby při modelování	11
5.3	Historie vývoje MKP.....	12
5.4	Princip MKP.....	13
5.5	CAE systémy používající MKP.....	13
5.6	Elastostatické úlohy	14
5.7	Základní vztahy matematické pružnosti pro MKP	14
5.8	Typy prvků	16
5.8.1	Třírozměrné prvky (prostorové) – 3D	16
5.8.2	Dvourozměrné prvky (plošné) – 2D.....	17
5.8.3	Jednorozměrné prvky – 1D	17
5.9	Nelineární úlohy	18
5.9.1	Geometrická nelinearita	18
5.9.2	Kontaktní úloha.....	18
6	Materiálové modely.....	20
6.1	Rozdělení materiálových modelů	20
6.2	Elastické materiálové modely.....	20
6.2.1	Lineární elastické modely	20
6.2.2	Nelineární elastické modely (hyperelastické)	20
6.2.3	Viskoelastické materiálové modely	21

6.3	Teorie plasticity	21
6.3.1	Aditivní zákon	21
6.3.2	Podmínka plasticity	22
6.3.3	Pravidlo zpevnění	23
6.3.4	Pravidlo plasticity	25
6.4	Elasto-plastické materiálové modely	25
6.4.1	Časově nezávislé elasto-plastické modely	26
6.4.2	Časově závislé elasto-plastické modely	27
7	Praktická část.....	28
7.1	Zadání	28
7.2	Metodika praktické části.....	29
7.3	Postup tvorby modelů.....	30
7.4	Zpracování výsledků z modelů.....	38
7.5	Zpracování experimentálně naměřených dat	40
7.6	Analytický výpočet.....	43
7.7	Porovnání.....	45
7.7.1	Porovnání modelů z hlediska geometrie	48
7.7.2	Porovnání modelů z hlediska tvorby spoje	49
7.7.3	Porovnání modelů z hlediska materiálového modelu	51
7.7.4	Porovnání z hlediska výpočetního času	51
7.7.5	Celkové vyhodnocení	53
8	Postup modelování nalisovaného spoje.....	53
8.1	Geometrie	53
8.2	Materiálový model.....	53
8.3	Síť	54
8.4	Kontakty	54
8.5	Krokování úlohy	54
8.6	Problémy s konvergencí	55
9	Závěr.....	56

Přehled použitých zkratk a symbolů

APDL	Ansys Parametric Design Language
b	Vektor objemových sil
C_1, C_2 [-]	Rozměrové charakteristiky spoje
CAD	Computer-Aided Design
CAE	Computer-Aided Engineering
DAT	Dual Arm Tensioner
d_0 [m]	Vnitřní průměr hřídele
d_1 [m]	Jmenovitý vnější průměr hřídele
d_2 [m]	Vnější průměr náboje
$d\lambda$ [-]	Plastický multiplikátor
E [Pa]	Modul pružnosti v tahu (Youngův modul)
E_1 [Pa]	Modul pružnosti v tahu hřídele
E_2 [Pa]	Modul pružnosti v tahu náboje
e_i [m]	Dolní úchylka hřídele
EI [m]	Dolní úchylka díry (náboje)
e_s [m]	Horní úchylka hřídele
ES [m]	Horní úchylka díry (náboje)
f [-]	Součinitel tření
f	Podmínka plasticity
f_L [-]	Třecí součinitel při lisování
$\bar{f}(\sigma)$	Funkce plasticity
F_a [N]	Axiální síla
F_L [N]	Lisovací síla
F_n [N]	Normálová síla
F_o [N]	Obvodová síla
F_a [N]	Axiální síla
F_V [N]	Vylisovací síla
FEM	Finite element method
FEA	Finite element analysis
G [Pa]	Modul pružnosti ve smyku (Coulombův modul)
HMH	Huber-Mises-Hencky
L [m]	Délka spoje
MKP	Metoda konečných prvků

MHP	Metoda hraničních prvků
MKD	Metoda konečných diferencí
MKO	Metoda konečných objemů
M_t [Nm]	Točivý moment
N [N]	Normálová síla
o_x, o_y, o_z [N]	Objemové síly ve směrech x, y, z
ODR	Obyčejné diferenciální rovnice
PDR	Parciální diferenciální rovnice
p [MPa]	Kontaktní tlak
p_{max} [Pa]	Maximální kontaktní tlak ve spoji
$p_{potř}$ [Pa]	Potřebný kontaktní tlak
Q	Plastický potenciál
R_a [μm]	Průměrná aritmetická odchylka profilu
R_e [Pa]	Pevnost materiálu v kluzu
R_z [μm]	Největší výška profilu drsnosti
s_f [N]	Bezpečnost
S [m^2]	Plocha
T [N]	Třecí síla
\mathbf{u}	Vektor složek posunutí
v [m]	Montážní vůle
Y	Skalární izotropní proměnná
α [K^{-1}]	Součinitel teplotní roztažnosti
$\boldsymbol{\alpha}$	Kinematický tenzor napětí
γ	Zkos
Δd_1 [m]	Přesah
$\Delta d_{1potř}$ [m]	Potřebný přesah
Δd_{1min} [m]	Minimální přesah
Δd_{1max} [m]	Maximální přesah
Δt [–]	Teplota ohřátí/ochlazení
ε [–]	Poměrná deformace (přetvoření)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vektor složek přetvoření
ε_e [–]	Elastická poměrná deformace (přetvoření)
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	Tenzor elastické deformace
ε_p [–]	Plastická poměrná deformace (přetvoření)

$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	Tenzor plastické deformace
μ [–]	Poissonovo číslo
μ_1 [–]	Poissonovo číslo materiálu hřídele
μ_2 [–]	Poissonovo číslo materiálu náboje
$\boldsymbol{\sigma}$	Vektor složek napětí
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ [Pa]	Hlavní napětí
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [Pa]	Normálová napětí ve směrech x, y, z
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ [Pa]	Tečná napětí v rovinách xy, yz, xz
τ_D [Pa]	Dovolené napětí v krutu
ϕ	Matice diferenciálních operátorů

Seznam obrázků

Obr. 1 - Logo skupiny Mubea [2]	2
Obr. 2 – Mubea v Žebráku [4].....	2
Obr. 3 - Lineární (vlevo) a rotační (vpravo) napínáky [5]	3
Obr. 4 - Schéma nalisovaného spoje s jeho charakteristickými rozměry [7]	5
Obr. 5 - Stanovení tolerancí	8
Obr. 6 - Montáž za tepla [6]	9
Obr. 7 - Diskretizace oblasti do konečného počtu prvků [18]	10
Obr. 8 - Konvergence numerického řešení [13]	11
Obr. 9 - Ukázka aplikace MKP v systému ANSYS Mechanical [22].....	12
Obr. 10 - Algoritmus výpočtu pomocí MKP [23]	13
Obr. 11 - Tvary prostorových prvků [18].....	16
Obr. 12 - Příklad kontaktní úlohy řešené pomocí MKP [14]	19
Obr. 13 - Rozložení celkové deformace na elastickou a plastickou část	21
Obr. 14 - Ideální elasto-plastický materiál	22
Obr. 15 - Plocha plasticity u podmínky plasticity HMM.....	22
Obr. 16 - Lineární izotropní zpevnění	23
Obr. 17 - Lineární kinematické zpevnění	24
Obr. 18 - Kombinované zpevnění	25
Obr. 19 - Rozdíl chování v tahu a tlaku u modelu Cast Iron [31]	26
Obr. 20 - Složená plocha plasticity modelu Cast Iron [31]	27
Obr. 21 - Základní rozměry hřídele.....	28
Obr. 22 - Základní rozměry náboje	28
Obr. 23 - Princip dělení modelů	30
Obr. 24 - Multilineární izotropní zpevnění	31
Obr. 25 - APDL kód pro zadání Cast Iron modelu	32
Obr. 26 - Model Cast Iron	33
Obr. 27 - Detail na zaoblení hrany	33
Obr. 28 - 2D geometrie	34
Obr. 29 - 3D geometrie	34
Obr. 30 - 2D síť	35
Obr. 31 - 3D síť	35
Obr. 32 - Detail na 2D síť v oblasti kontaktu.....	35
Obr. 33 - Detail na 3D síť v oblasti kontaktu.....	35

Obr. 34 - Kontakty se třením v 2D modelu.....	37
Obr. 35 - Kontakty bez tření v 2D modelu.....	37
Obr. 36 - Okrajové podmínky v 2D modelu	37
Obr. 37 - Lineární interpolace mezi dvěma naměřenými body z experimentálního měření....	40
Obr. 38 - Tlakový diagram závislosti síly na dráze pro přesah 0,3 mm.....	42
Obr. 39 - Průběh velikosti síly při modelování zalisování u přesahu 0,3 mm	42
Obr. 40 - Výpočtové schéma s vyznačenou funkční délkou spoje.....	43
Obr. 41 - Toleranční pole řešené sestavy	44
Obr. 42 - Závislost zalisovací síly na velikosti přesahu.....	46
Obr. 43 - Závislost vylisovací síly na velikosti přesahu	46
Obr. 44 - Porovnání hlavních výsledků.....	47
Obr. 45 - Porovnání hlavních výsledků – detail.....	48
Obr. 46 - Porovnání výsledků zalisovací síly u modelů z hlediska geometrie.....	49
Obr. 47 - Porovnání výsledků zalisovací síly u modelů z hlediska tvorby spoje.....	50
Obr. 48 - Plastická deformace u modelu s přímým zalisováním	50
Obr. 49 - Plastická deformace u modelu s aktivací kontaktu.....	50
Obr. 50 - Porovnání výsledků zalisovací síly u modelů z hlediska materiálového modelu.....	51
Obr. 51 - Porovnání modelů z hlediska výpočetního času.....	52
Obr. 52 - Porovnání MKP modelů s experimenty.....	52

Seznam tabulek

Tab. 1 - Vstupní hodnoty do mat. modelu s multilineárním izotropním zpevněním.....	31
Tab. 2 - Vstupní hodnoty do modelu Cast Iron.....	32
Tab. 3 - Všechny výsledky získané z MKP modelů	39
Tab. 4 - Experimentálně získané hodnoty	41
Tab. 5 - Zadané hodnoty	43
Tab. 6 - Získané hodnoty z analytického výpočtu	45
Tab. 7 - Přehled všech modelů a jejich atributů.....	45

1 Úvod

Modelování nalisovaných spojů pomocí metody konečných prvků je poměrně komplexní problém, jelikož se zde nacházejí nelinearity všech tří typů – geometrické, materiálové a kontaktní (nelinearity okrajových podmínek). Úloha v mnoha případech tedy nemusí vůbec zkonvergovat či její výsledky jsou zatíženy až moc velkou chybou, což komplikuje práci výpočtářů při pevnostních, tuhostních či jiných analýzách nalisovaného spoje. Z tohoto důvodu se při vytváření modelů uplatňuje mnoho zjednodušení, které mohou dále snižovat přesnost výpočtu. Další problém může nastat, pokud materiály obou spojovaných součástí mají různé mechanické vlastnosti jako je např. odlišné chování materiálu v tahu a tlaku.

Nalisovaný spoj je v současnosti pořád hojně používaný způsob spojení dvou součástí v různých oblastech průmyslu, a to především v automobilovém průmyslu, leteckém průmyslu nebo stavebnictví a jeho modelování je základem při návrhu a kontrole tohoto spoje. Typicky se využívají pro upevnění ozubených kol, řemenic, ložisek nebo setrvačníků na hřídel.

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda, která se využívá pro úlohy, které nelze vyřešit analyticky nebo by jejich řešení bylo moc složité. Modelování pomocí MKP se používá v mnoha odvětvích průmyslu – např. v automobilovém průmyslu, leteckém průmyslu, kosmickém průmyslu, energetickém průmyslu atd.

Tato bakalářská práce je zaměřena na modelování nalisovaného spoje pomocí MKP, kde materiály zúčastněných těles vykazují elasto-plastické chování a jeden z materiálů vykazuje odlišné chování v tahu a tlaku. Bylo sestaveno několik MKP modelů a tyto modely byly porovnány mezi sebou, se zjednodušeným analytickým výpočtem a s experimentálně změřenými daty. Konkrétně byl problém řešen u nalisovaného spoje v napínacím systému klínového řemenu spalovacího motoru. Hlavním výstupem simulací jsou síly potřebné k zalisování a vylisování spoje, které už byly dříve experimentálně zjištěny zadavatelem – společností Mubea. Výpočet tedy slouží především pro porovnání s experimentálními daty a dále k vypracování doporučení modelování spoje. K výpočtu je použit systém ANSYS 2022 R1 (konkrétně produkty ANSYS Workbench, ANSYS SpaceClaim a ANSYS Mechanical). Dále jsou v práci použity programy Siemens NX pro dodatečnou grafiku a MATLAB pro tvorbu grafů.

Bakalářská práce je rozdělena na část teoretickou (kapitola 3 až 6) a část praktickou (kapitola 7 a 8). V teoretické části je nejprve stručně uvedena problematika napínání řemene a napínacích systémů (napínáků). Dále je uvedena detailní rešerše nalisovaných spojů od teoretických základů po analytický výpočet, který je i použit dále v praktické části. Poté se práce zaměřuje na téma metody konečných prvků, v rámci níž jsou zpracována základní témata MKP jako jsou historie metody, základní výpočetní systémy, typy prvků atd.

Detailněji se poté práce věnuje problematice nelineárních úloh a jednotlivým druhům nelinearit. Poslední kapitola teoretické části se zabývá materiálovými modely, přičemž největší pozornost je zaměřena na elasto-plastické materiálové modely včetně souvisejícího teoretického tématu základů teorie plasticity. V praktické části je nejprve popsána metodika, se kterou jsou výpočty provedeny. Dále je přiblížen postup tvorby všech MKP modelů a jejich rozdělení podle určitých kritérií. Následně je proveden analytický výpočet a zpracování experimentálních dat. Všechny získané hodnoty zalisovací a vylisovací síly jsou vhodně porovnány formou grafů. Nakonec je ze získaných výsledků porovnávání vypracován doporučený postup tvorby MKP modelu nalisovaného spoje.

2 Představení společnosti Mubea

Mubea je německá rodinná společnost s více než stoletou historií a působností takřka po celém světě. Mezi její portfolio spadají z velké části díly do automotive, jakými jsou například šroubovitě a listové pružiny, napínáky klínového řemenu, disky nebo stabilizátory. V České republice se již nacházejí čtyři závody, a to v Žebráku, Prostějově, Dolních Kralovicích a v Cerhovicích. [1]



Obr. 1 - Logo skupiny Mubea [2]

Počátky společnosti Mubea sahají až do roku 1916, kdy si Josef Muhr pronajal tovární budovu v Attendornu, což je město ve spolkové zemi Severní Porýní-Vestfálsko v Německu. Zde se začaly vyrábět listové a skříňové pružiny. Po příchodu společníka Ludwiga Bendera vzniká finální jméno společnosti Muhr und Bender, z čehož později vznikl obchodní název Mubea (**MU**hr, **BE**nder, Attendorn). V současnosti skupina Mubea zaměstnává cca 14 000 zaměstnanců a po celém světě má 48 výrobních závodů ve 20 různých zemích. Společnost taktéž stojí za mnoha inovacemi v automotive jakými jsou např. kompozitní listová pružina, DAT napínák klínového řemene nebo trubkový stabilizátor. [1]

Mubea Žebrák (Obr. 2) je prvním a největším závodem v rámci skupiny Mubea v České republice. Závod vznikl v roce 1995 a zaměstnává přes 1300 zaměstnanců. Vyrábí se zde napínací systémy řemene, hlavové opěrky, rámy do sedaček či objímky ke stabilizátorům. V roce 2014 zde byla zahájena výroba karbonových dílů pro výrobce sportovních automobilů, která byla poté rozšířena i do závodu v Dolních Kralovicích. Závod v Žebráku také provozuje vlastní učňovské středisko pro studenty středních škol. Kromě středních škol spolupracuje Mubea Žebrák i s vysokými školami včetně Západočeské univerzity v Plzni. [3]



Obr. 2 – Mubea v Žebráku [4]

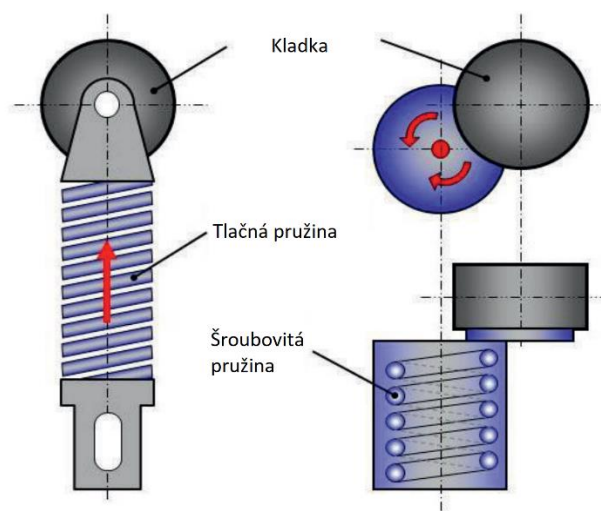
3 Systémy napínání řemene

U řemenového převodu je důležité vyvození dostatečné velké třecí síly mezi řemenicí a samotným řemenem. Toho se dosáhne napínáním řemene, kterého lze dosáhnout několika způsoby:

- Zvětšením vzdálenosti os řemenic
- Zkrácením řemene
- Pomocí napínací kladky
- Naklopením motoru

Nejpoužívanějším způsobem napínání řemenu je právě použití napínací kladky (napínací systém, napínák). Napínáky řemene používané v motorech automobilů slouží k napínání klínového řemene. Tento klínový řemen pohání mnoho příslušenství automobilu jako je alternátor, kompresor klimatizační jednotky nebo vodní pumpu chladiče motoru, přičemž sám je poháněn klikovým hřídelem. Avšak napínáky řemene neslouží pouze k napínání řemene, ale i k tlumení vibrací vznikajících v klikovém mechanismu motoru. Tyto vibrace nechceme přenášet do ostatních komponent příslušenství, jelikož by mohly snížit jejich životnost. [5]

V základu se napínáky dělí na napínáky **lineární** a **rotační** (Obr. 3) [5].



Obr. 3 - Lineární (vlevo) a rotační (vpravo) napínáky [5]

Dále se napínáky dají rozdělit podle dalších mnoha hledisek:

- 1) Tlumič element – třecí elementy nebo hydraulický tlumič
- 2) Prvek vyvozující konstantní sílu – šroubovitá pružina s konstantním nebo proměnným stoupáním, spirálová pružina nebo svazky přímých prutů (torzní pružina)
- 3) Délka ramene – s krátkým ramenem, s dlouhým ramenem
- 4) Konvenční a nekonvenční

4 Nalisovaný spoj

4.1 Spoje obecně

Nejprve je potřeba uvést nalisované spoje do širšího kontextu, jelikož možností, jak spojit nějaké dvě součásti, je mnoho a každá funguje na jiném principu. Základní definicí spojů je, že to jsou obecné strojní části, jejichž hlavní funkcí je spojení jednotlivých konstrukčních elementů v jeden celek, který je určen k vykonávání dalších funkcí. Tedy jsou to součásti, které vzájemně spojují funkčně navazující strojní součásti. [6]

4.1.1 Základní rozdělení

Spoje se rozdělují podle několika hledisek [6]:

- a) pohyblivost spojovaných součástí – pevné, přestavitelné
- b) možnost demontáže – rozebíratelné, nerozebíratelné
- c) způsob zatížení spoje – statické zatížení, proměnlivé zatížení
- d) podle vůle mezi součástmi – s vůlí, bez vůle
- e) podle silových účinků – spoj s předpětím, bez předpětí
- f) podle přenosu zatížení
 - 1) spoje s využitím tvaru – čepy, kolíky, pera, klíny, drážkování, polygony
 - 2) spoje s využitím tření – **nalisování**, sevření, rozpěrné kroužky
 - 3) spoje s využitím materiálu – svařování, pájení, lepení
 - 4) spoje s využitím předepjatých elementů – šrouby, zděře, nýty

4.2 Spoj nalisováním

Nalisovaný spoj je pevné a nerozebíratelné spojení, které funguje na principu tření mezi spojovanými součástmi. Toto tření je vyvozeno kontaktním tlakem, který vznikl při montáži – při nalisování. Kontaktní tlak vytváří elastická deformace obou součástí – hřídele a náboje. Tyto spoje se mohou montovat buď za studena nebo za tepla, přičemž obě možnosti mají své klady a zápory. U montáže za studena vznikají podélné rýhy, které zlepšují únosnost spoje při přenosu točivého momentu. Zato je ale potřeba vysoká lisovací síla a při samotném lisování dojde k částečnému vyhlazení povrchu, což snižuje přesah. U montáže za tepla se musí buď ohřát náboj tak, aby došlo ke zvětšení díry o přesah a montážní vůli, nebo se musí ochladit hřídel, anebo ohřát náboj a ochladit hřídel. [6] [7] [8]

Nalisované spoje mohou přenášet pouze točivý moment, pouze axiální zatížení nebo obojí najednou. S tímto se musí při návrhu spoje počítat. Jsou poměrně vhodné pro proměnlivé (dynamické) zatížení, také se hodí, pokud je třeba co nejmenší přestupní odpor při vedení tepla nebo elektrického proudu. [6] [8]

Hlavní výhodou spoje je jeho jednoduchost. Největší nevýhodou je nerozebíratelnost spoje. Spojení jako takové sice rozebrat jde, ale už se nesmí smontovat zpátky, jelikož při lisování došlo z části i k plastickým deformacím, takže by spoj už neměl požadovanou únosnost. [9] [10]

Celkové **výhody** nalisovaného spoje jsou:

- Mají vysokou únosnost
- Jsou vhodné pro dynamické zatížení
- Jsou vhodné pro velké a těžké součásti
- Vykazují vysokou přesnost souososti a kolmosti

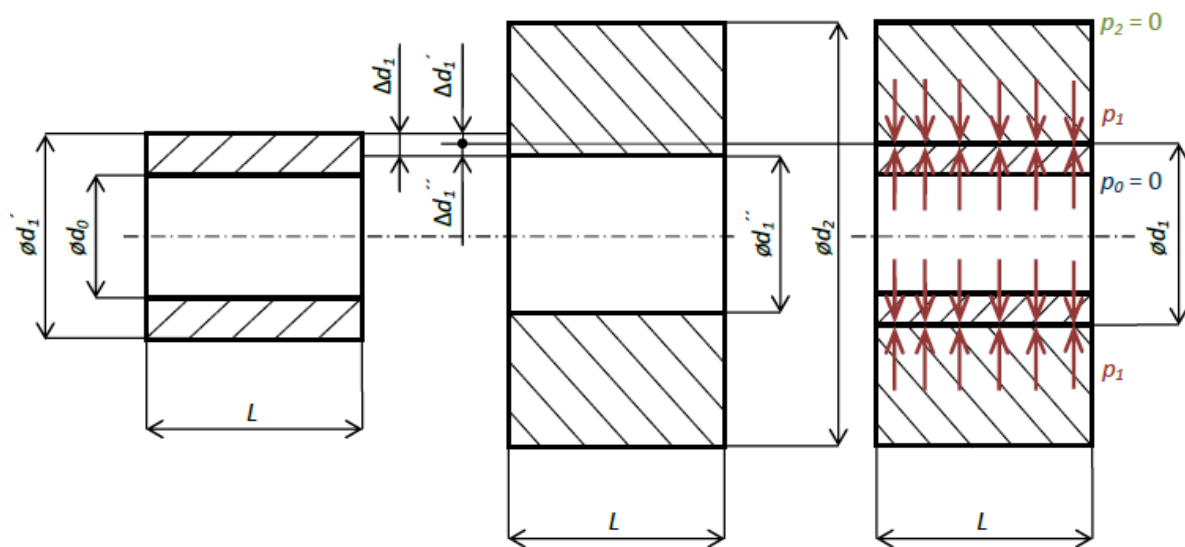
- Mají vysokou spolehlivost
- Jsou konstrukčně jednoduché
- Dají se snadno vyrobit

Naopak **nevýhody** jsou např.:

- Nerozebíratelnost spoje (s tím souvisí obtížná demontovatelnost)
- Jsou náročnější na montáž
- Jsou požadovány vysoké nároky na přesnost výroby spojovaných součástí
- Větší rozptyl v únosnosti spoje
- Součásti jsou při nalisování značně namáhány
- Nalisovaný spoj se chová jako vrub

Nalisované spoje se např. používají pro upevnění ozubených kol, řemenic, ložisek, setrvačnicků, rotorů turbín a elektromotorů na hřídel, železničních kol na nápravu nebo ocelových okolků na litinová kola. Dále se používají pro spojení částí klikových hřídelů, spojení bronzových věnců šnekových kol či nalisování ložiskových pouzder do ložiskových domků. [8] [9] [11]

Na Obr. 4 je zobrazeno schéma nalisovaného spoje s jeho charakteristickými rozměry, což jsou: d_0 [m] – vnitřní průměr hřídele, d_1 [m] – vnější průměr hřídele, d_2 [m] – vnější průměr náboje, L [m] – délka spoje, Δd_1 [m] – přesah.



Obr. 4 - Schéma nalisovaného spoje s jeho charakteristickými rozměry [7]

4.3 Analytické výpočty

4.3.1 Únosnost spoje

Nalisovaný spoj dokáže přenášet axiální sílu, točivý moment, nebo i obojí najednou. Pro přenesení námi požadovaného zatížení je třeba, aby byl mezi spojovanými součástmi vyvozen dostatečně velký kontaktní tlak. Ten se spočte jako normálová síla lomená plochou. Ze vztahu pro kontaktní tlak se dále dá dopočítat samotná únosnost, tedy velikost zatížení, které spoj dokáže s určitou bezpečností přenést.

I. Zatížení axiální silou F_a

Pro zatížení axiální silou se velikost kontaktního tlaku spočte jako:

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F_t}{f \cdot S} = \frac{F_a}{\pi \cdot d_1 \cdot L \cdot f} \quad (4.1)$$

kde p [Pa] je velikost kontaktního tlaku, F_n [N] je normálová síla, F_t [N] je třecí síla, F_a [N] je axiální síla, S [m²] je plocha spoje a f je součinitel tření.

Z předchozího vztahu (4.1) lze odvodit:

$$F_a = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot L \cdot p_{potř} \cdot f}{s_f} \quad (4.2)$$

kde $p_{potř}$ [Pa] je potřebný kontaktní tlak pro přenesení zatížení a s_f je bezpečnost.

II. Zatížení točivým momentem M_t

Stejně jako při zatížení axiální silou lze výpočetní vztahy odvodit i pro zatížení točivým momentem:

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F_t}{f \cdot S} = \frac{F_o}{\pi \cdot d_1 \cdot L \cdot f} = \frac{\frac{2 \cdot M_t}{d_1}}{\pi \cdot d_1 \cdot L \cdot f} = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot d_1^2 \cdot L \cdot f} \quad (4.3)$$

$$M_t = \frac{\pi \cdot d_1^2 \cdot L \cdot p_{potř} \cdot f}{2 \cdot s_f} \quad (4.4)$$

kde F_o [N] je obvodová síla a M_t [Nm] je točivý moment.

III. Zatížení axiální silou i točivým momentem

Při tomto zatížení se musí oba zátěžné účinky vektorově sečíst a dále se počítá s tímto součtem.

$$s_f \cdot \sqrt{F_a^2 + \left(\frac{M_t}{\frac{d_1}{2}}\right)^2} = p_{potř} \cdot \pi \cdot d_1 \cdot L \cdot f \quad (4.5)$$

4.3.2 Potřebný přesah

Z již definovaných zatížení se dá vyjádřit požadovaný tlak $p_{potř}$, který je třeba znát pro určení potřebného přesahu. Pro zatížení axiální silou je potřebný tlak uveden ve vztahu (4.6) a pro zatížení točivým momentem ve vztahu (4.7).

$$p_{potř} = \frac{F_a}{\pi \cdot d_1 \cdot L \cdot f} \cdot s_f \quad (4.6)$$

$$p_{potř} = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot d_1^2 \cdot L \cdot f} \cdot s_f \quad (4.7)$$

Velikost potřebného přesahu pro vyvození námi požadovaného tlaku se vypočte podle vztahu (4.8). Tento vztah však zohledňuje dutý hřídel a rozdílné materiály hřídele a náboje. Pro plný hřídel nebo stejné materiály obou součástí (nebo obojí) se vztah výrazně zjednoduší. $\Delta d_{1potř}$ [m] je potřebný přesah pro vyvození potřebného tlaku, C_1 a C_2 jsou rozměrové charakteristiky – viz (4.12) a (4.13), μ_1 a μ_2 jsou Poissonova čísla pro jednotlivé materiály a E_1 , E_2 [Pa] jsou moduly pružnosti v tahu pro jednotlivé materiály.

$$\Delta d_{1potř} = d_1 \cdot p_{potř} \cdot \left(\frac{C_1 - \mu_1}{E_1} + \frac{C_2 - \mu_2}{E_2} \right) \quad (4.8)$$

Výpočet potřebného přesahu pro dutý hřídel, ale stejné materiály hřídele a náboje ($d_0 \neq 0$; $\mu_1 = \mu_2$; $E_1 = E_2 = E$) uvádí vztah (4.9).

$$\Delta d_{1potř} = \frac{d_1 \cdot p_{potř}}{E} \cdot (C_1 + C_2) \quad (4.9)$$

Výpočet potřebného přesahu pro plný hřídel, ale rozdílné materiály hřídele a náboje ($d_0 = 0$; $\mu_1 \neq \mu_2$; $E_1 \neq E_2$) uvádí vztah (4.10).

$$\Delta d_{1potř} = d_1 \cdot p_{potř} \cdot \left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} + \frac{C_2 - \mu_2}{E_2} \right) \quad (4.10)$$

Výpočet potřebného přesahu plný hřídel a stejné materiály hřídele a náboje ($d_0 = 0$; $\mu_1 = \mu_2$; $E_1 = E_2 = E$) uvádí vztah (4.11).

$$\Delta d_{1potř} = \frac{d_1 \cdot p_{potř}}{E} \cdot (1 + C_2) \quad (4.11)$$

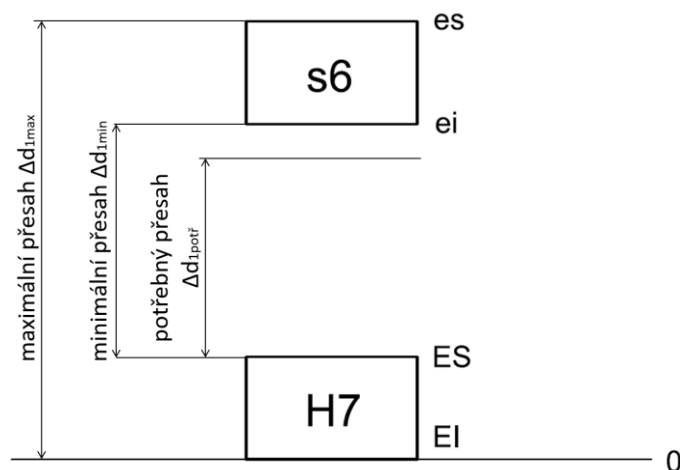
Ve výpočtu potřebného přesahu figurují konstanty C_1 a C_2 (tzv. rozměrové charakteristiky), které se dají dopočítat podle vztahů (4.12) a (4.13).

$$C_1 = \frac{d_1^2 + d_0^2}{d_1^2 - d_0^2} \quad (4.12)$$

$$C_2 = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} \quad (4.13)$$

4.3.3 Stanovení rozměrových tolerancí

Tolerance hřídele se většinou volí ve stupních IT 5-7, náboj se volí o stupeň větší (obecně z důvodu vyšší nákladnosti zhotovení přesné díry než přesného vnějšího průměru) – IT 6-8



Obr. 5 - Stanovení tolerancí

Na Obr. 5 je zobrazeno toleranční pole s vyznačenými krajními přesahy Δd_{1min} , Δd_{1max} a potřebným přesahem $\Delta d_{1potř}$. ES je horní úchylka díry, EI je dolní úchylka díry, es je horní úchylka hřídele a ei je dolní úchylka hřídele.

$$\Delta d_{1min} = ei - ES \quad (4.14)$$

$$\Delta d_{1max} = es - EI \quad (4.15)$$

U montáže za studena se musí potřebný přesah zvýšit o tzv. ztrátový přesah Δd_{1Z} :

$$\Delta d_{1Z} = 1,2 \cdot (R_{z1} + R_{z2}) = 5,4 \cdot (R_{a1} + R_{a2}) \quad (4.16)$$

kde R_{z1} , R_{z2} jsou největší výšky profilu drsnosti povrchu obou součástí a R_{a1} , R_{a2} jsou průměrné aritmetické hodnoty profilu povrchu obou součástí.

$$p_{max} = \frac{\Delta d_{1max}}{d_1} \cdot \frac{E}{C_1 + C_2} \quad (4.17)$$

4.3.4 Montáž

Zde se rozlišuje výpočet pro lisování za studena, kdy se počítá lisovací síla, a na lisování za tepla, kdy se počítá teplota, o kterou je nutné ohřát náboj nebo ochladit hřídel (lze také udělat obojí).

a) Montáž za studena (lisování podélné)

Při montáži za studena je náboj natlačen na hřídel (nebo hřídel do náboje) lisovací silou, která je většinou vyvozena hydraulickým nebo vřetenovým lisem. Při lisování se vyhlazují povrchy obou součástí ve směru lisování a vznikají na nich podélné rýhy. Tyto rýhy zlepšují únosnost spoje při zatížení krouticím momentem, jelikož zvyšují odpor proti vzájemnému pootočení součástí. Při vyhlazování povrchů se zmenšuje přesah součástí a je třeba navrhovaný přesah navýšit o určitou hodnotu, která závisí na drsnostech souvisejících povrchů. [6] [11]

Aby nedošlo při lisování k zadření, rychlost lisování by neměla překročit 2 mm/s. Popřípadě lze stykové plochy namazat, což má ale za následek snížení třecího součinitele a tím pádem i snížení únosnosti spoje. U rozměrných spojů s velkými přesahy je mazání nutností. Mazání stykových ploch vede také k usnadnění lisovacího procesu. Při montáži za studena je

také třeba myslet na sražení hran hřídele i náboje, navíc hřídel by měla mít menší úhel sražení než náboj. [6] [11]

Lisovací síla F_L [N] pro válcový hřídel se vypočte jako:

$$F_L = \pi \cdot d_1 \cdot L \cdot p_{max} \cdot f_L \quad (4.18)$$

kde p_{max} [Pa] je kontaktní tlak od maximálního přesahu a f_L je součinitel tření při lisování, který se uvažuje vyšší než součinitel tření povrchů f . Obvykle se uvažuje v rozmezí (0,2 ÷ 0,25). [12]

b) Montáž za tepla (lisování příčné)

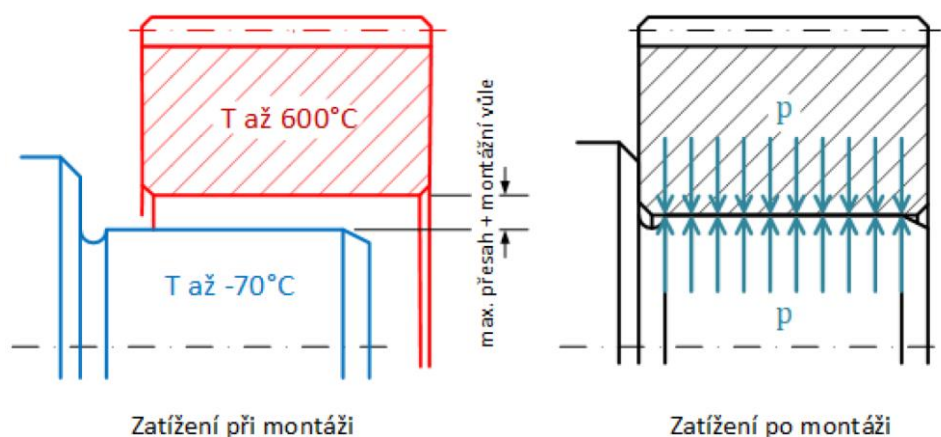
Tento způsob montáže je nenásilný. Funguje na principu teplotní objemové roztažnosti materiálu, kdy se při zvyšování teploty materiál roztahuje (dilatuje) a při snižování teploty se materiál smršťuje (dochází k restrikci). U tohoto druhu montáže nenastane takové sražení povrchových nerovností, naopak se do sebe „zaklíní“, čímž se zvýší únosnost spoje. Při ohřevu náboje je důležité si dávat pozor na velikost teploty, aby nedošlo k nějaké strukturální změně materiálů. Z tohoto důvodu není montáž za tepla vhodná pro tepelně zpracované součásti. Při ohřívání součásti (nebo chlazení) je nutno kromě maximálního přesahu rozměr zvětšit i o montážní vůli v (viz Obr. 6). Empirický vztah pro výpočet hodnoty montážní vůle je uveden ve vztahu (4.19). [6] [11] [12]

$$v = (0,006 \div 0,012) \cdot \sqrt{d_1} \quad (4.19)$$

Teplota ohřátí/ochlazení Δt se vypočte jako:

$$\Delta t = \frac{\Delta d_{1max} + v}{\alpha \cdot d_1} \quad (4.20)$$

kde α [K⁻¹] je součinitel teplotní roztažnosti.



Obr. 6 - Montáž za tepla [6]

5 Metoda konečných prvků

5.1 Modelování

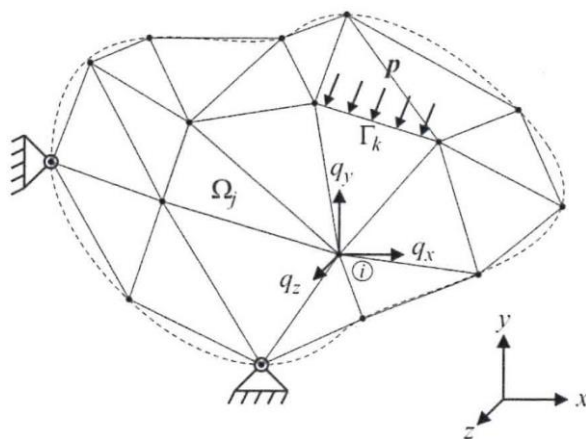
Modelování (simulace) je proces, kdy jednoznačně přiřazujeme zkoumanému reálnému objektu (originálu) model dle určitých kritérií [13] [14]. Tento model může být:

- Fyzický (fyzikální) model – slouží pro provádění experimentů
- Abstraktní model – slouží k matematickému popisu jevů na originálu
- Kombinovaný model – obsahuje jak část fyzickou, tak abstraktní

Matematický model (abstraktní model) určuje vztahy (závislosti) mezi vstupními a výstupními veličinami, které jsou definovány matematickými vztahy. Při vytváření matematických modelů se přistupuje k určitým zjednodušením, jelikož jinak by byly modely moc složité a těžko řešitelné. K ověření, zda přijaté zjednodušení neovlivní znatelně přesnost a vypovídající hodnotu modelu, slouží proces, který se nazývá **validace** modelu. Validace modelu ověřuje vztah mezi modelem a skutečností, což může být provedeno např. zhotovením experimentu. Matematický model bývá formulován pomocí matematických vztahů, jakými jsou soustavy rovnic a nerovnic, obyčejné diferenciální rovnice (ODR) nebo parciální diferenciální rovnice (PDR). Ne každou úlohu lze vyřešit analyticky, proto jsou často používány numerické metody (např. **metoda konečných prvků**), jejichž řešení je ale pouze přibližné (zatížené chybami). Z tohoto důvodu je nutno provádět tzv. **verifikaci** modelu, což je kontrola řešení matematického modelu a přibližného řešení. [15]

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která se využívá pro řešení různých úloh napříč mnoha obory. Její princip spočívá v rozdělení kontinua (tzv. diskretizace) na určitý počet prvků s daným počtem uzlů, ve kterých se počítá řešení (viz Obr. 7). Je nutno brát ohled na to, že jde o přibližnou metodu, jelikož je řešení zatíženo mnoha chybami (viz kapitola 5.2). Nespornou výhodou MKP je však její použitelnost pro prakticky jakkoli složitý problém, který nelze vyřešit analyticky. V současnosti se MKP používá pro řešení problémů mechaniky, modelování proudění tekutin, modelování vedení tepla, simulaci výrobních procesů (slévání, svařování, tváření), analýzu elektromagnetických polí, akustiku, biomechaniku atd. Z hlediska praktického využití je nejvíce MKP rozšířeno v automobilovém, leteckém, vesmírném, strojírenském, stavebním a elektrotechnickém průmyslu. [16] [13]

Mezi další numerické metody používané v technické praxi patří např. metoda konečných diferencí (MKD), metoda hraničních prvků (MHP) či metoda konečných objemů (MKO) [10] [17].



Obr. 7 - Diskretizace oblasti do konečného počtu prvků [18]

5.2 Chyby při modelování

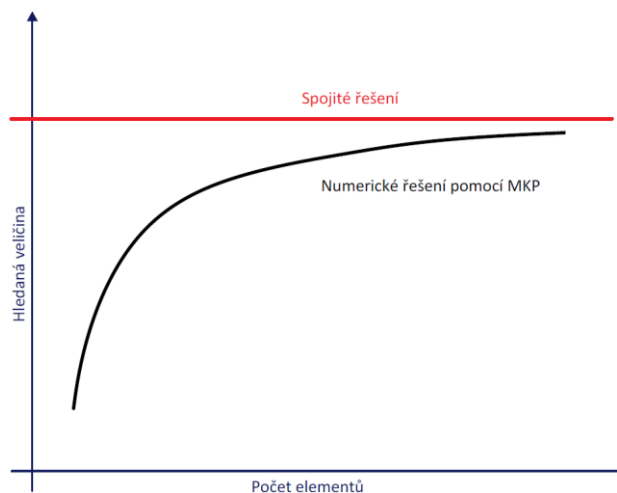
Při modelování některé úlohy pomocí metody konečných prvků je nutno brát na vědomí, že získané výsledky nejsou stoprocentně přesné, ale jsou zatíženy různými chybami, kvůli kterým se může celková relativní chyba výsledků vyšplhat až na desítky procent.

Chyby řešení MKP se obecně rozdělují na [13] [14]:

- Chyby modelu
 - Chyby kvalitativní
 - Chyby složitosti
 - Chyby kvantitativní
 - Chyby konkretizační
 - Chyby formální
- Chyby metody
 - Chyby formulační
 - Chyby diskretizační
 - Chyby numerické

Chyby modelu jsou způsobeny tím, že model dostatečně neodpovídá realitě. To je většinou způsobeno nesprávně zadanými okrajovými podmínkami. **Chyba kvalitativní** je chyba, kdy model nezahrnuje všechny důležité vlastnosti. Naopak **chyba složitosti** vzniká, když model obsahuje i nepodstatné vlastnosti, což může zkomplikovat řešení. **Chyba kvantitativní** se může objevit v případě, kdy sice model obsahuje všechny podstatné vlastnosti, ale ty jsou nedostatečně kvantitativně vyjádřeny. **Chyba konkretizační** spočívá v nesprávném řešení modelu. To může být způsobeno třeba špatně zadanými vstupními hodnotami nebo nevhodně zvoleným výpočetním programem. [13]

Chyby metody přímo vyplývají z řešení diskrétního modelu pomocí MKP. **Chyby formulační** jsou způsobeny nesprávným typem prvku, jelikož výběr správného prvku (dimenze, typ, řád náhradní funkce) přímo ovlivňuje přesnost výsledků. **Chyby diskretizační** jsou způsobeny nesprávně provedenou diskretizací kontinua, což může být způsobeno např. velmi hrubou sítí. Tuto chybu lze vyčíslit až po vyřešení úlohy a k její minimalizaci slouží adaptivní techniky (H-metoda, P-metoda). Jako poslední existují **chyby numerické**, které vznikají v řešiči kvůli zaokrouhlování a samotné nepřesnosti numerických metod (viz Obr. 8). Ve správně navrženém MKP programu by měla být tato chyba zanedbatelná oproti chybám formulačním a diskretizačním. [13] [14]



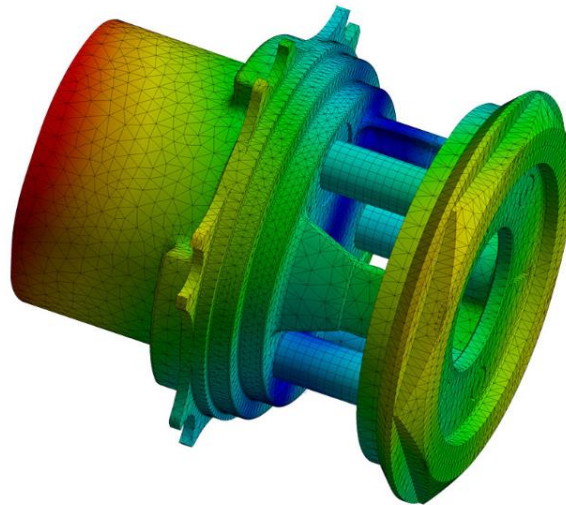
Obr. 8 - Konvergence numerického řešení [13]

5.3 Historie vývoje MKP

I když se může zdát, že metoda konečných prvků vznikla teprve nedávno s rozvojem počítačové techniky, tak to není úplně tak pravda, jelikož prvopočátky MKP sahají až do 40. let 20. století. Za zakladatele se považují rusko-kanadský stavební inženýr Alexander Hrennikoff a německo-americký matematik Richard Courant, kteří oba ve svých pracích použili myšlenku rozdělení kontinua na několik prvků. Metoda vznikla pro potřeby řešení elastostatických úloh ve stavebním a leteckém průmyslu a s tím související numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Mezi další průkopníky v 50. a 60. letech patří ruský matematik Leonard Oganessian a čínský matematik Feng Kang. [19] [20]

Hlavní průlom nastal na konci 60. let 20. století, kdy Olgierd Zienkiewicz publikoval ucelenou teorii MKP a její aplikace v mechanice kontinua. V tomto období také NASA začala vyvíjet MKP systém NASTRAN (**N**ASA **S**T**R**ucture **A**Nalysis) financovaný americkou vládou. Ve stejnou dobu Kalifornská univerzita v Berkeley zpřístupnila výpočetní systém SAP-IV (**t**he **S**tructural **A**nalysis **P**rogram). V roce 1970 John Swanson vydal první verzi výpočetního systému s názvem ANSYS (**A**nalysis **S**ystems), který je dodnes jedním z nejpoužívanějších MKP systémů (Obr. 9). O 8 let později spatřila světlo světa i první verze systému ABAQUS. [17] [19]

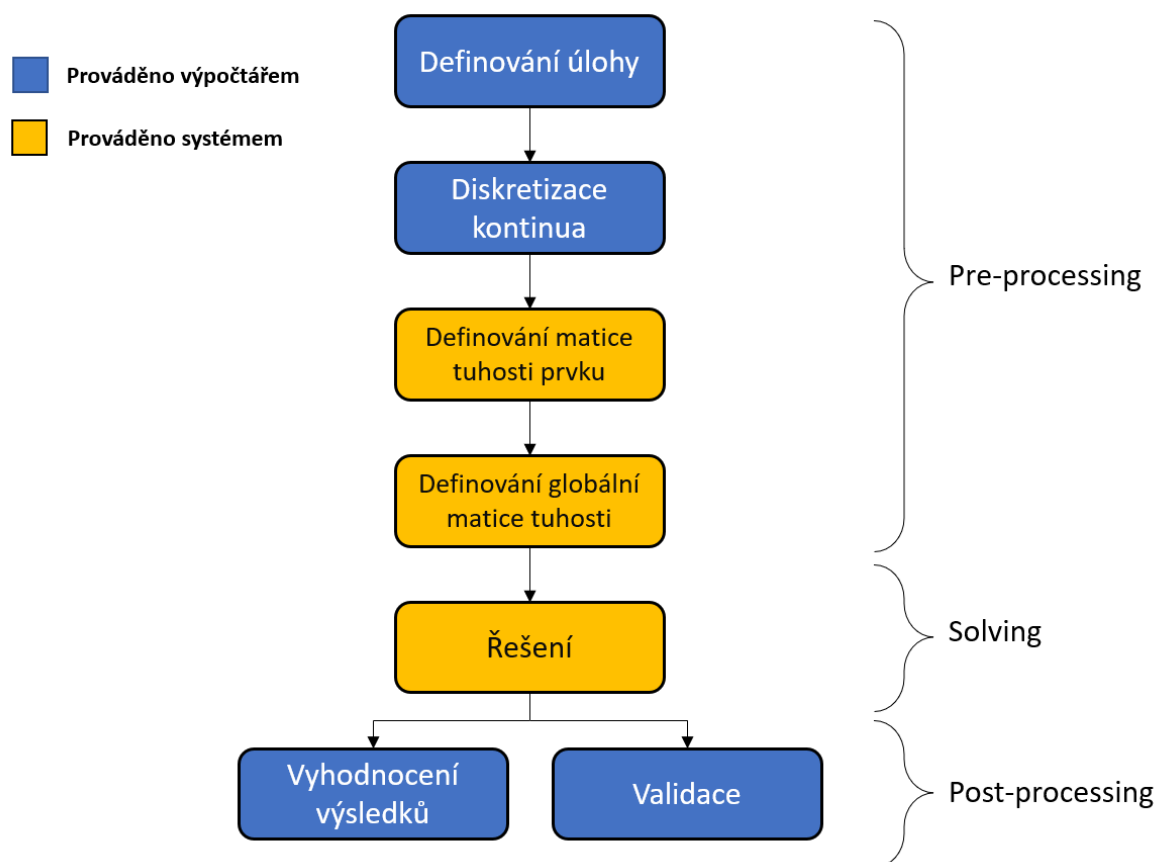
Mezi další velmi vlivné výzkumníky MKP patří Ray W. Clough, J. A. Argyris či Ivo Babuška [20] [21].



Obr. 9 - Ukázka aplikace MKP v systému ANSYS Mechanical [22]

5.4 Princip MKP

Princip MKP je znázorněn na Obr. 10.



Obr. 10 - Algoritmus výpočtu pomocí MKP [23]

5.5 CAE systémy používající MKP

Existuje nespočet výpočetních systémů, které využívají metodu konečných prvků. Zajímavostí může být, že tyto výpočetní systémy se v angličtině nazývají jako FEA systémy (finite element analysis – analýza konečnými prvky) nikoli FEM systémy (finite element method – MKP). V angličtině se totiž rozlišuje samotná matematická numerická metoda od jejích inženýrských aplikací v různých systémech. Mezi nejpoužívanější CAE systémy patří ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, MSC.Marc, Femap nebo Pro Mechanica [18]. Dále existují programy specializované pouze na určité druhy úloh jako je např. LS-DYNA, DEFORM, Sysweld, Pam-Crash či ADAMS.

5.6 Elastostatické úlohy

Elastostatické úlohy jsou základní úlohy pružnosti, které lze řešit pomocí MKP. Aby úloha byla elastostatická, musí splňovat několik podmínek [18]:

- Materiál tělesa je homogenní a izotropní
- Platí Hookeův zákon
- Posunutí a přetvoření jsou malá
- Vnější zatížení jsou statická (v průběhu celé úlohy se nemění)
- Řešené těleso je jednoznačně upevněno v prostoru
- Okrajové podmínky úlohy se během řešení nemění
- Podmínky rovnováhy jsou vztaženy na nedeformované těleso

Tyto úlohy jsou čistě lineární a hodí se především k pevnostní kontrole nebo dimenzování jednotlivých strojních součástí, u kterých známe zatížení a upevnění v prostoru (okrajové podmínky). Porušením podmínek elastostatické úlohy vznikají úlohy **nelineární**. [18]

5.7 Základní vztahy matematické pružnosti pro MKP

Při řešení lineárních elastostatických úloh vycházíme ze základních vztahů matematické pružnosti. V obecné prostorové statické úloze se nachází celkově 15 neznámých funkcí proměnných x, y, z a jedná se o tři posuvy u, v, w , šest přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ a šest napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Těchto 15 funkcí je spolu svázáno systémem rovnic, které musí být splněny uvnitř řešené oblasti, na jejíž hranici musí být splněny předepsané okrajové podmínky. Jsou to rovnice rovnováhy, konstitutivní rovnice (fyzikální) a geometrické rovnice. Je důležité zdůraznit, že vztahy níže platí pouze pro lineární elastostatické úlohy. [24] [18] [14]

Rovnice rovnováhy – tyto rovnice (5.1) vyjadřují rovnováhu mezi vnějšími objemovými silami na elementárním vnitřním prvku.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Rovnice rovnováhy se také dají zapsat vztahem (5.2), kde figurují: matice diferenciálních operátorů Φ – viz vztah (5.3), vektor složek napětí σ – viz vztah (5.4), a vektor objemových sil \mathbf{b} – viz vztah (5.5).

$$\Phi \sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T \quad (5.4)$$

$$\mathbf{b} = [o_x, o_y, o_z]^T \quad (5.5)$$

Rovnice geometrické – tyto rovnice určují vztah mezi posunutími a přetvořeními.

Geometrické rovnice se dají zapsat jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{u} \quad (5.6)$$

kde $\boldsymbol{\Phi}^T$ je transponovaná matice diferenciálních operátorů, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor složek přetvoření (viz vztah (5.7)) a \mathbf{u} je vektor složek posunutí (viz (5.8)).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^T \quad (5.7)$$

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] \quad (5.8)$$

Konstitutivní vztahy – určují vztah mezi přetvořeními a napětími, tyto vztahy platí pro elastický izotropní materiál.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mezi Youngovým modulem, Coulombovým modulem a Poissonovo číslem existuje vzájemný vztah (5.10), takže vzájemně nezávislé jsou pouze dvě z těchto hodnot.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.10)$$

5.8 Typy prvků

Prvky jsou zásadní součástí konečno-prvkového modelu. Na volbě správného typu prvku a jeho velikosti může záviset úspěšnost výpočtu, ale i jeho přesnost. Prvky také nesmí podléhat velké deformaci tvaru při síťování, jelikož to může negativně ovlivnit správnost výsledků.

Prvky se dělí podle několika kritérií, a to podle dimenze prvku na:

- Jednorozměrné (1D)
- Dvourozměrné (2D)
- Třírozměrné (3D)

Podle stupně použité náhradní funkce (řád prvku) na:

- Lineární
- Kvadratické (parabolické)
- Kubické

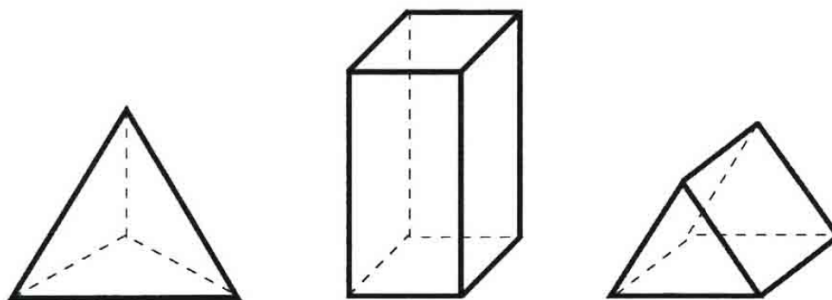
Dále se ještě mohou rozdělovat podle počtu neznámých na uzlu nebo podle použití.

5.8.1 Třírozměrné prvky (prostorové) – 3D

Základními tvary prostorových prvků jsou čtyřstěn (tetraedr), pětistěn (wedge) a šestistěn (brick). Tetraeder je prakticky nejpoužívanější tvar prvku a hodí se k nasítování takřka jakékoliv geometrie, jelikož síť z tetraederů dokáže diskretizovat jakýkoliv tvar. Brick je také velmi používaný prvek, ale na rozdíl od tetraederů už jím nelze vyplnit jakýkoliv objem. Wedge se moc nedoporučuje používat a v mnoha systémech je vyhodnocován jako vadný prvek (např. v ANSYS).

Prvky se rozlišují podle řádu, respektive podle použité aproximační funkce, na prvky lineární s polynomy prvního stupně (prvky bez meziuzlu), prvky kvadratické (prvky s meziuzly) a prvky kubické. Velkou výhodou prvků s meziuzly je, že dokáží popsat i zakřivené hranice prvku (a tím pádem lépe vymodelovat tělesa se zakřivenou geometrií – např. válec, rádiusy atd.).

U prostorového prvku má každý uzel 3 stupně volnosti, tedy 3 neznámé (3 posunutí u_x , u_y , u_z).



Obr. 11 - Tvary prostorových prvků [18]

5.8.2 Dvourozměrné prvky (plošné) – 2D

Tyto prvky se používají v případě, kdy je výhodné zjednodušení geometrie z důvodu úspory výpočetního času. Nejvhodnější jsou tyto prvky tehdy, když jeden rozměr je výrazně menší než další 2 rozměry. Používané tvary 2D prvků jsou trojúhelníky a čtyřúhelníky. Existují 2D prvky rovinné, které se používají čistě v 2D rovinných úlohách, a prvky pro použití v prostoru. Ty se dělí na prvky deskové a skořepinové (shell). Prvky používané v prostoru mají obecně na každém uzlu 6 stupňů volnosti, tedy 6 neznámých (3 posunutí a 3 rotace). [18]

5.8.3 Jednorozměrné prvky – 1D

Tyto prvky jsou vhodné tehdy, když dva rozměry jsou výrazně větší než rozměr třetí. Příkladem mohou být různé nosníky, pruty, tyče atd. Zjednodušená geometrie je navíc doplněna dalšími charakteristikami jako je plocha průřezu a momenty setrvačnosti k jednotlivým osám. Prvky se obecně rozdělují podle toho, jaké zatížení přenášejí. Obyčejné pruty namáhané na tah se modelují prvky, které se v Ansysu nazývají rod nebo link. Nosníky namáhané na ohyb jsou modelovány prvky typu beam. [18]

5.9 Nelineární úlohy

U nelineárních úloh nastává, na rozdíl od elastostatických úloh, několik problémů [14]:

- Rovnováha mechanické soustavy je dosahována v předem neznámém deformovaném stavu
- Vztah mezi posuvy a deformacemi již není lineární (např. Green-Lagrangeův tenzor deformace)
- Materiály mají obecné nelineární chování (nelineární vztah mezi napětím a deformací)
- Vazby jsou reprezentovány obecnými vztahy (kontakt těles)

V nelineární úloze se mohou objevit 3 různé druhy nelinearity:

- Geometrické nelinearity
- Materiálové nelinearity
- Nelinearity okrajových podmínek (kontaktní nelinearity)

5.9.1 Geometrická nelinearita

Geometrická nelinearita vznikne při velkých posuvech a natočení (při nich mohou zároveň vznikat velká přetvoření). Geometrická nelinearita je tedy rozdělována na:

- Velké posuvy – \mathbf{u}
- Velká přetvoření – $\boldsymbol{\varepsilon}$

Velké posuvy

Tento typ geometrické nelinearity vzniká, pokud se v tělesu během úlohy objevují velké posuvy a rotace, ale malá přetvoření (infinitesimální). Tedy prvky tělesa se posouvají a natačí, ale takřka nedeformují. Pro stanovení podmínek rovnováhy lze použít Cauchyho geometrické rovnice. [14]

Velká přetvoření

U tohoto typu geometrické nelinearity vznikají kromě velkých posuvů a natočení také velká přetvoření (deformace). Pro hodnoty přetvoření menší než 1 % (0,01) lze stále použít Cauchyho tenzor přetvoření. [14]

5.9.2 Kontaktní úloha

Kontaktní úloha je taková úloha, kdy hranice jednoho tělesa přichází do kontaktu s jiným tělesem. Tento kontakt vnáší do úlohy nelinearitu, jelikož před kontaktem není na hranici žádná kinematická podmínka, ale během kontaktu zde vznikne kinematická vazba bránící vzájemné penetraci hranic. Prvním člověkem, který řešil problematiku kontaktu, je Heinrich Rudolf Hertz. Ten v roce 1882 publikoval práci, která se zabývala kontaktem pružných těles bez uvažování tření mezi nimi. [14]

Kontaktní úlohy se můžou dělit podle výskytu tření v kontaktu na:

- kontakt bez tření (frictionless contact)
- kontakt se třením (frictional contact)

U kontaktu bez tření se stykovými plochami přenáší pouze normálové složky sil, tečné (smykové) složky sil jsou nulové. Jako kontakt bez tření se dá uvažovat např. kontakt mezi

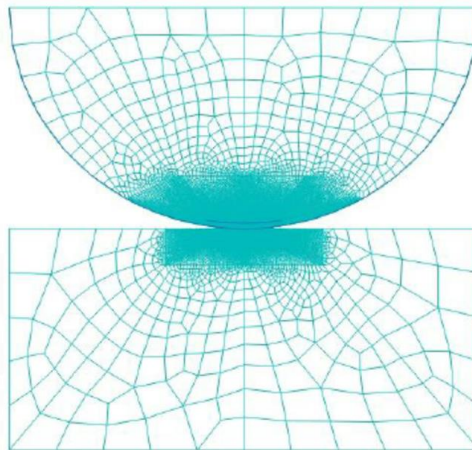
dobře mazanými povrchy. Naopak u kontaktu se třením se vyskytují jak normálové, tak tečné složky sil. [14]

Kontakt se dá dělit i podle typu kontaktních těles:

- deformovatelné a deformovatelné těleso
- deformovatelné a tuhé těleso

Kontakt se dvěma deformovatelnými tělesy je obecný typ kontaktu, kdy jsou ve styku tělesa s přibližně stejnou tuhostí. V případě, že tuhost jednoho tělesa výrazně převyšuje tuhost tělesa druhého, můžeme uvažovat první těleso jako absolutně tuhé. Tento typ kontaktu lze použít třeba u simulace tváření. [14]

Pro řešení kontaktní úlohy je třeba zjistit, které body na hranici vcházejí v kontakt a je nutné zajistit podmínku nepronikání hranic [18]. Na Obr. 12 lze vidět dvě nasíťovaná tělesa v kontaktu.



Obr. 12 - Příklad kontaktní úlohy řešené pomocí MKP [14]

Nelineární kontaktní úlohy se řeší s využitím kontaktních prvků, které se dají zadefinovat dvěma způsoby:

- uzel na uzel
- plocha na plochu

U kontaktu uzel na uzel kontaktní prvek spojuje řídicí a vázaný uzel. Pro tento typ kontaktu je nutné alespoň částečně znát plochu dotyku a také by zde na této ploše měla být u obou těles podobná síť. Kontakt plocha na plochu je obecnější a je u něj důležité správně zvolit jaká plocha bude plocha kontaktu (contact) a jaká plocha dotyku (target). Také se pro tyto plochy používají názvy master a slave. [18]

6 Materiálové modely

6.1 Rozdělení materiálových modelů

Pro popis nelineárního chování materiálu existuje nespočet materiálových modelů. Obecně lze tyto modely rozdělit do tří skupin, a to na materiálové modely:

- elastické
- elasto-plastické
- speciální

6.2 Elastické materiálové modely

Elastické materiálové modely se dále dělí na tři skupiny:

- Lineární elastické modely
- Nelineární elastické modely (hyperelastické)
- Viskoelastické modely

6.2.1 Lineární elastické modely

Lineární elastické modely se mohou ještě dělit podle materiálové symetrie na modely:

- Izotropní
- Ortotropní
- Anizotropní

Izotropní materiálový model je nejjednodušší, jelikož jeho vlastnosti nezávisí na směru. K jeho definici stačí zadat dva materiálové parametry, a to např. modul materiálu pružnosti v tahu E (Youngův modul) a Poissonovo číslo ν (ostatní parametry lze z těchto parametrů dopočítat). Alternativně by šlo zadat modul materiálu pružnosti ve smyku G (Coulombův modul) a Poissonovo číslo μ . Tento model lze používat u izotropních materiálů – typicky ocel. [14]

Ortotropní materiálový model je určený pro ortotropní materiály – tedy materiály, které mají jiné vlastnosti ve třech různých kolmých směrech. Typickým zástupcem této skupiny materiálů je dřevo nebo kompozit (přesněji některé druhy kompozitních materiálů). Pro definici tohoto modelu je ale třeba zadat výrazně více parametrů než u izotropního modelu, a to celkem 9. Těmito parametry jsou tři moduly pružnosti v tahu E_x, E_y, E_z , tři Poissonova čísla $\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{zx}$ a tři moduly pružnosti ve smyku G_x, G_y, G_z . [14]

Anizotropní materiálový model je nejobecnější, protože nemá žádnou rovinu materiálové symetrie. Pro definici tohoto modelu je třeba 36 parametrů, pokud je matice parametrů symetrická, stačí zadat pouze 21 parametrů. [14]

6.2.2 Nelineární elastické modely (hyperelastické)

Hyperelastické materiálové modely slouží k popisu specifických druhů materiálů jakými jsou pryže, plasty, pěny a biomateriály. Tyto materiály jsou schopny velmi vysokých elastických deformací, nicméně vztah mezi napětím a deformací je silně nelineární (tedy neplatí Hookeův zákon). [14] [25]

6.2.3 Viskoelastické materiálové modely

Viskoelastické materiálové modely popisují chování viskoelastických materiálů, které vykazují elastickou (vratnou), ale i zároveň viskozni (nevratnou) deformaci. Viskozní deformace je závislá na čase, jelikož se v čase mění rychlost deformace i při konstantním zatížení. Tomuto jevu se říká creep (tečení). [14]

6.3 Teorie plasticity

V klasické teorii pružnosti a pevnosti se uvažují malé deformace (přetvoření) a platnost Hookeova zákona, navíc se uvažuje, že zatěžované těleso se po odstranění zatížení vrátí do původního nezdeformovaného stavu. Ve skutečnosti ale všechny reálné materiály v přírodě podléhají určité nevratné deformaci, která přetrvá i po odstranění zatížení. Pružná deformace je vratná, jelikož spotřebovaná energie na elastické přetvoření se uloží v materiálu a po odlehčení se uvolní. Naopak plastická deformace je nevratná, jelikož dochází k disipaci energie. Plastická deformace je způsobena pohybem dislokací v materiálu. Oblastí trvalých (plastických) deformací se zabývá **teorie plasticity**, což je podobor mechaniky poddajného tělesa. [26] [27]

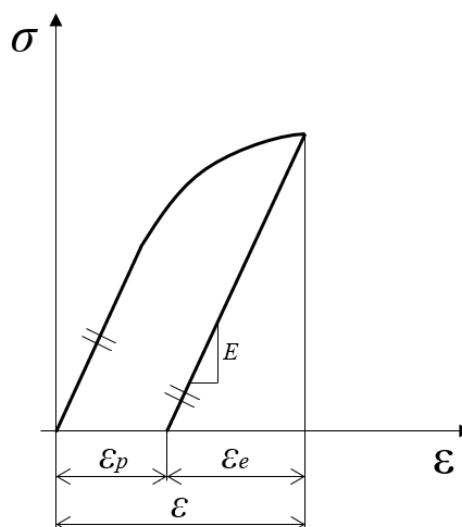
V několika následujících podkapitolách budou vysvětleny základy inkrementální teorie plasticity, což je teorie plasticity nejčastěji implementovaná v MKP systémech. Inkrementální teorie plasticity zanedbává vliv rychlosti deformace na napěťově deformační odezvu materiálu [26].

6.3.1 Aditivní zákon

Při překročení meze kluzu v tahu R_e vznikají v materiálu nevratné deformace (neboli plastické deformace). Po překročení této meze a následném odlehčení můžeme pozorovat lineární chování materiálu (viz Obr. 13) a tím pádem můžeme celkovou deformaci rozložit na elastickou část a plastickou část [26]:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (6.1)$$

Pro elastickou část deformace platí vždy Hookeův zákon, a to i po překročení meze kluzu.



Obr. 13 - Rozložení celkové deformace na elastickou a plastickou část

U víceosé napjatosti lze získat tenzor celkové deformace jako superpozici tenzoru elastické deformace a tenzoru plastické deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (6.2)$$

Pro elastickou deformaci tentokrát vždy platí obecný Hookeův zákon.

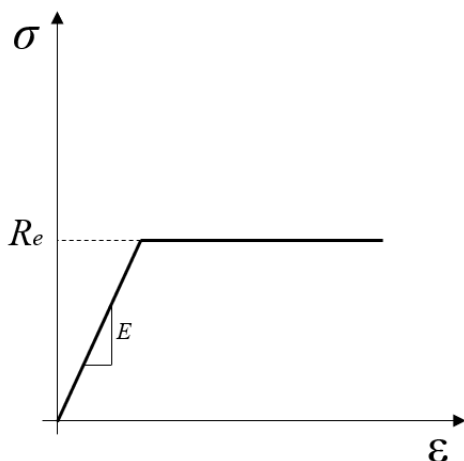
6.3.2 Podmínka plasticity

Pokud má v materiálu nastat plastická deformace, musí být splněna **podmínka plasticity** (yield criterion). Ta má u jednoosé napjatosti a u ideálně elasto-plastického materiálu (viz Obr. 14) tvar:

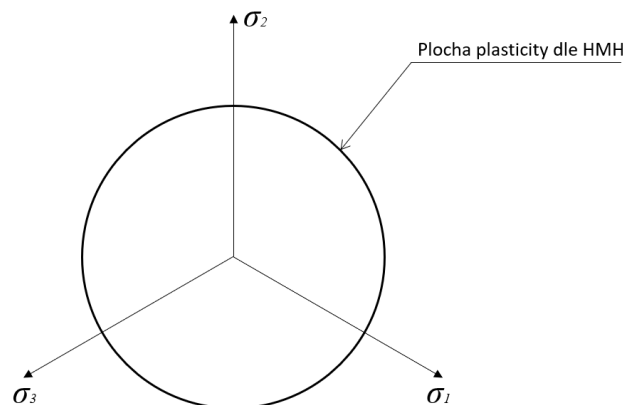
$$f = \sigma_1 - R_e = 0 \quad (6.3)$$

U ideálního elasto-plastického materiálu tedy nedochází ke změně podmínky plasticity během zatěžování. U víceosého namáhání a ideálního elastoplastického materiálu má podmínka plasticity tvar:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - R_e = 0 \quad (6.4)$$



Obr. 14 - Ideální elasto-plastický materiál



Obr. 15 - Plocha plasticity u podmínky plasticity MMH

Funkci plasticity $\bar{f}(\boldsymbol{\sigma})$ dle MMH (podmínka potenciální energie na změnu tvaru) jde vyjádřit ve formě hlavních napětí jako:

$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (6.5)$$

Pokud tuto podmínku plasticity zobrazíme v Haighově prostoru (souřadný systém hlavních napětí), tak vznikne **plocha plasticity**. Tou je u MMH podmínky plasticity válec s osou totožnou s hydrostatickou osou ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). V devíťrovné rovině ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{konst.}$) je průmětem tohoto válce kružnice (viz Obr. 15). [26]

Další často používanou podmínkou plasticity je **Guestova podmínka plasticity** (neboli Trescova podmínka, podmínka τ max, intenzita napětí). Guestova funkce plasticity je uvedena v rovnici (6.6). Plochou plasticity je v Haighově prostoru šestiboký hranol s osou, která je totožná s hydrostatickou osou. [28]

$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (6.6)$$

Pokud budeme uvažovat odlišné meze kluzu v tahu a tlaku, tak vznikne **Mohr-Coulombova** podmínka plasticity.

6.3.3 Pravidlo zpevnění

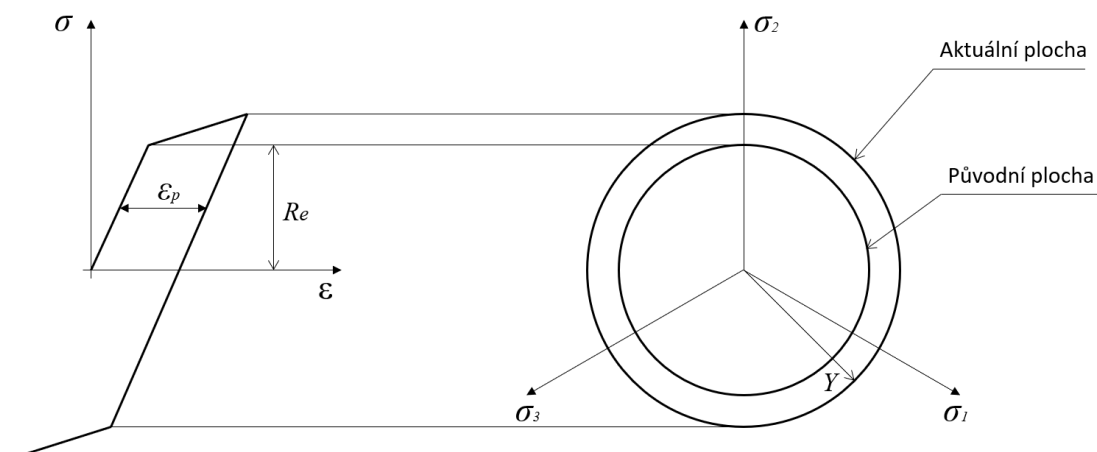
Pravidlo zpevnění udává způsob změny plochy plasticity v průběhu zatěžování. U ideálně elastoplastického materiálu k žádnému zpevnění nedochází, čímž je plocha plasticity v celém průběhu zatěžování konstantní. Ve skutečnosti se však plocha plasticity v průběhu zatěžování mění, a to nelineárně. Plocha plasticity se může posouvat, rozšiřovat, či obecně měnit své rozměry a tvar. Tomuto ději se říká zpevnění, jelikož materiál vykazuje větší pevnost než ideální elastoplastický materiál. Při matematickém modelování je žádoucí se zjednodušeným modelem, co nejvíce přiblížit skutečnosti a popsat co nejvýstižněji děj zpevnění. Obecně se dají pravidla zpevnění rozdělit na:

- Izotropní zpevnění
- Kinematické zpevnění
- Kombinované zpevnění

U **izotropního zpevnění** (viz Obr. 16) se plocha plasticity v průběhu zatěžování rozšiřuje, přičemž její počátek se nemění. Podmínka plasticity pro modely s izotropním zpevněním se dá obecně napsat jako:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, Y) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - Y = 0 \quad (6.7)$$

kde Y je skalární izotropní proměnná, která u HMM podmínky plasticity vyjadřuje poloměr plochy plasticity. Tato proměnná souvisí se změnou hustoty dislokací v materiálu při zatěžování a rozvoji plastické deformace. Existují modely s lineárním izotropním zpevněním a nelineárním izotropním zpevněním. Nelineární izotropní zpevnění se však hůře popisuje. Tento model plasticity se dá použít především u monotónního zatěžování, jelikož nedokáže správně popsat Bauschingerův efekt. Pro cyklické zatěžování vhodný není. [26] [14]



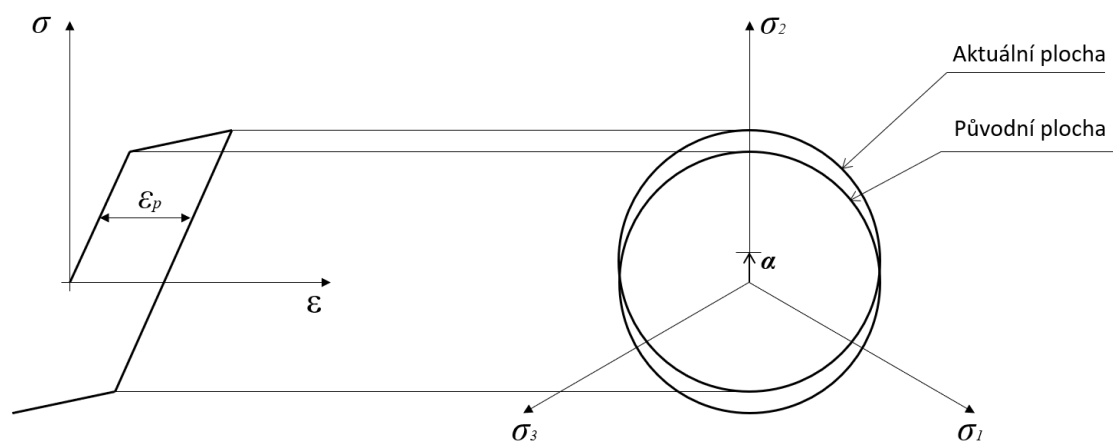
Obr. 16 - Lineární izotropní zpevnění

U **kinematického zpevnění** se naopak nemění velikost, ale pouze poloha plochy plasticity v Haighově prostoru. Střed plochy plasticity se posouvá o kinematický tenzor napětí $\boldsymbol{\alpha}$

(anglicky backstress), který vyjadřuje vnitřní napětí v materiálu vzniklé vývojem dislokací. Podmínka plasticity pro modely s kinematickým zpevněním se dá obecně napsat jako:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - R_e = 0 \quad (6.8)$$

Toto zpevnění se dá použít pro modelování zatížení a odlehčení součásti nebo pro cyklické zatěžování, jelikož tento model je schopný zachytit Bauschingerův efekt. Naopak se tolik nehodí na modelování velkých monotónních deformací, jakým je tváření. Tento model také nedokáže zachytit cyklické zpevnění a změkčení, takže by se měl používat pro materiály s podobnou mezí kluzu v cyklické a statické deformační křivce. [14] [26]



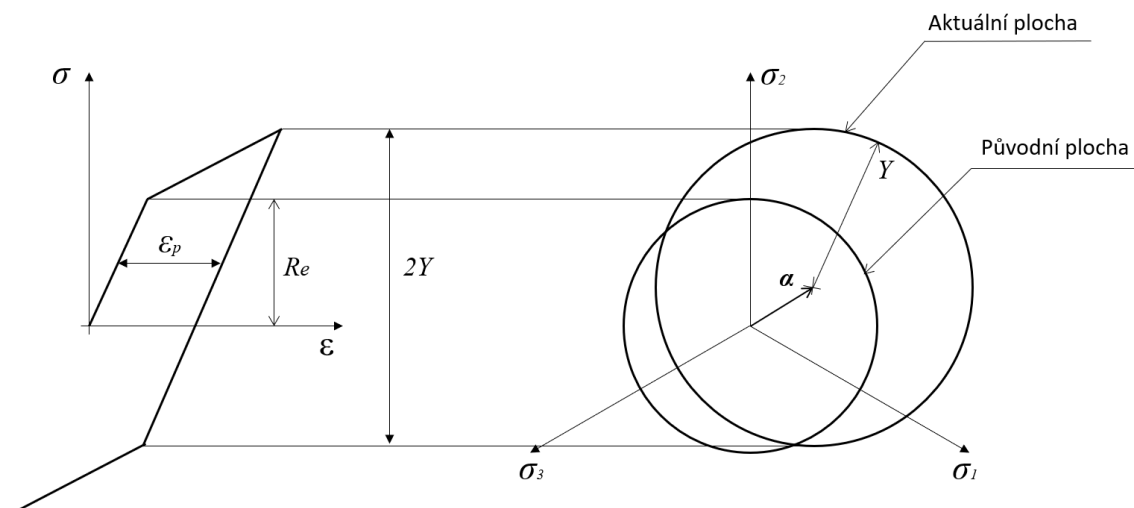
Obr. 17 - Lineární kinematické zpevnění

Stejně jako u izotropního zpevnění existují modely s lineárním kinematickým zpevněním a nelineárním kinematickým zpevněním. U nelineárního kinematického zpevnění je závislost posuvu plochy plasticity na zatěžování nelineární a je složitější k vyjádření. Modelů nelineárního kinematického zpevnění existuje nespočet, nicméně pro úplnost bude uvedeno alespoň jejich dělení [26]:

- 1) Vícevrstvé modely
- 2) Jednoplché modely založené na diferenciálních rovnicích
- 3) Modely s více plochami plasticity
- 4) Modely s dvěma plochami plasticity
- 5) Endochronní teorie
- 6) Modely s distorzí plochy plasticity

Pokud vytvoříme superpozici izotropního a kinematického pravidla zpevnění, tak vznikne tzv. **kombinované zpevnění**. U tohoto zpevnění dochází k rozšiřování i posuvu plochy plasticity během zatěžování. Podmínka plasticity je obecně vyjádřena jako:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, Y) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - Y = 0 \quad (6.9)$$



Obr. 18 - Kombinované zpevnění

Tímto kombinovaným modelem lze popsat tranzientní efekty v počátečních cyklech namáhání, cyklické změkčování nebo zpevňování materiálu, přídavné zpevnění/změkčení v důsledku neproporcionálního namáhání, ratcheting i další efekty cyklické plasticity. [26]

6.3.4 Pravidlo plasticity

Pravidlo plasticity (flow rule), také známo jako pravidlo tečení nebo zákon plastického přetváření, určuje vývoj přírůstků plastické deformace při aktivním zatížení. Lze ho psát ve formě:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.10)$$

kde $d\lambda$ je plastický multiplikátor (plastický násobek), což je skalární součinitel, a Q je plastický potenciál. Existuje **asociované** (asociativní, sdružené) a **neasociované** (neasociativní, nesdružené) pravidlo plasticity. U asociovaného pravidla plasticity se plastický potenciál Q shoduje s podmínkou plasticity f ($Q = f$). Naopak u neasociovaného pravidla plasticity se plastický potenciál s podmínkou plasticity neshoduje ($Q \neq f$). [29] [26]

Asociované pravidlo plasticity se dá psát jako:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.11)$$

Z důvodu, že přírůstek plastické deformace má směr vnější normály k zatěžované ploše, je tato rovnice někdy také nazývána jako pravidlo normality. Z rovnice vyplývá, že u jednoosého namáhání plastická deformace přibývá ve směru namáhání. Toto pravidlo je spolu s podmínkou plasticity podle HMM implementováno ve většině MKP řešičů pro výpočet úloh s materiálovou nelinearitou. [26] [30]

6.4 Elasto-plastické materiálové modely

Elasto-plastické materiálové modely jsou určeny pro modelování elastické i plastické deformace. Závislost napětí a poměrného prodloužení je v oblasti elastické deformace (do meze kluzu) lineární, naopak v oblasti plastické (trvalé) deformace silně nelineární. Elasto-plastické modely se tedy především zabývají oblastí plastické deformace a jejím co nejpřesnějším

vymodelování. Plastickou deformaci ovlivňuje rychlost deformace, a proto se modely rozdělují na modely časově závislé a časově nezávislé. [14]

6.4.1 Časově nezávislé elasto-plastické modely

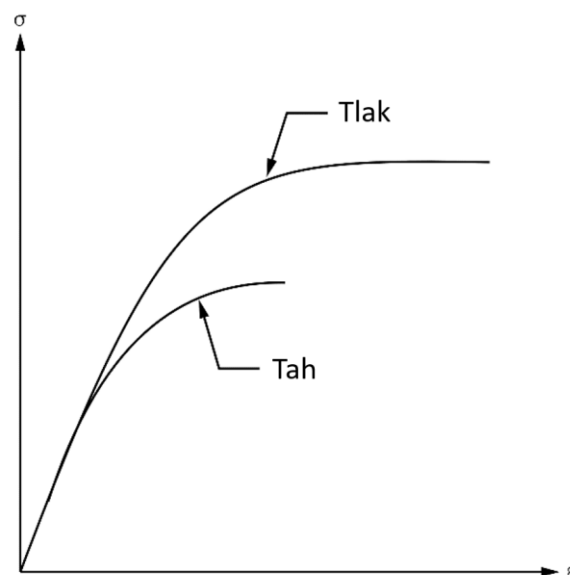
Tyto modely se rozdělují na:

- Modely s izotropním zpevněním
 - Bilineární
 - Multilineární
 - Nelineární
- Modely s kinematickým zpevněním
 - Lineární
 - Nelineární
- Modely s kombinovaným zpevněním

Cast Iron

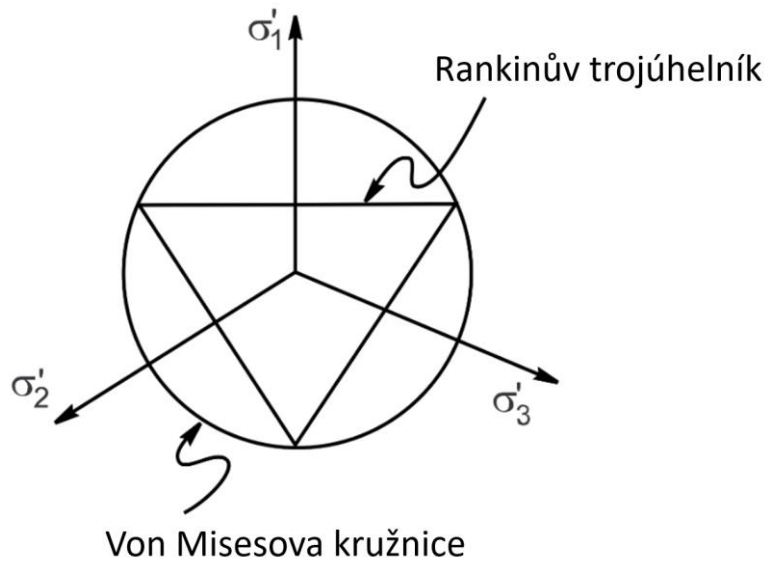
Cast Iron je elasto-plastický časově nezávislý materiálový model sloužící primárně k modelování šedé litiny, z čehož také vychází název modelu (litina je anglicky cast iron). Šedá litina má v důsledku dvoufázové struktury (skládá se lupínkového grafitu a kovové matrice – feritu nebo perlitu) odlišné vlastnosti v tahu a tlaku. Podobné chování má více křehkých kovových materiálů jako např. lité hliníkové slitiny nebo ocel na odlitky. [31] [32]

Model uvažuje izotropní elastické chování, které je stejné jak v tahu, tak v tlaku. Tedy Youngův modul a Poissonova konstanta se neliší pro oba zátěžné stavy. Naopak plastické zpevňování se v tahu a tlaku může lišit. Meze kluzu bývají různé pro tah a tlak. [31] [32]



Obr. 19 - Rozdíl chování v tahu a tlaku u modelu Cast Iron [31]

Pro popis odlišného chování v tahu a tlaku se používá tzv. složená plocha plasticity. Pro popis chování v tahu se používá Rankinovo kritérium (také známo jako kritérium maximálních částečných napětí), které předpokládá, že k porušení křehkého materiálu dojde při překročení maximálního dovoleného napětí v tahu. Pro popis tlaku se používá podmínka plasticity HMH (von Misesova). [31]



Obr. 20 - Složená plocha plasticity modelu Cast Iron [31]

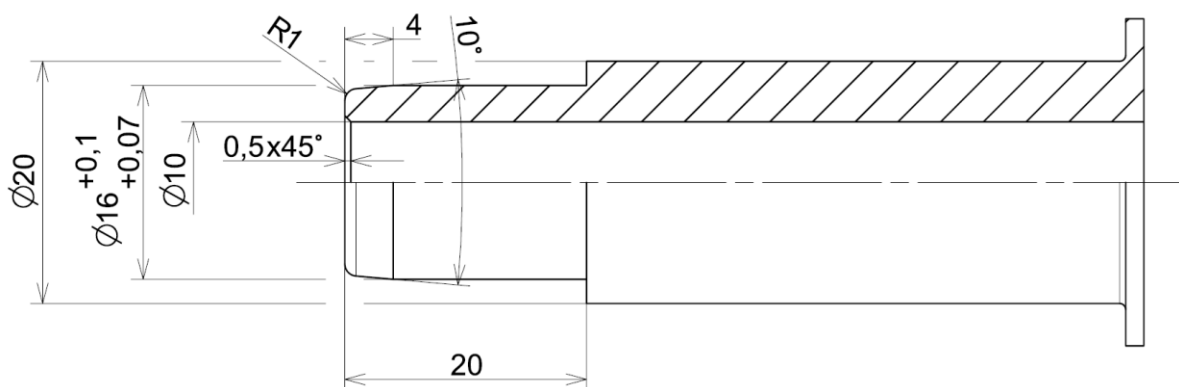
6.4.2 Časově závislé elasto-plastické modely

Pokud nelze zanedbat rychlost deformace, musíme použít nějaký časově závislý materiálový model. Mezi tyto materiálové modely patří např. Cowper-Symonds, Johnson-Cook, Perzyna, Pierce, Steinberg atd. [14]

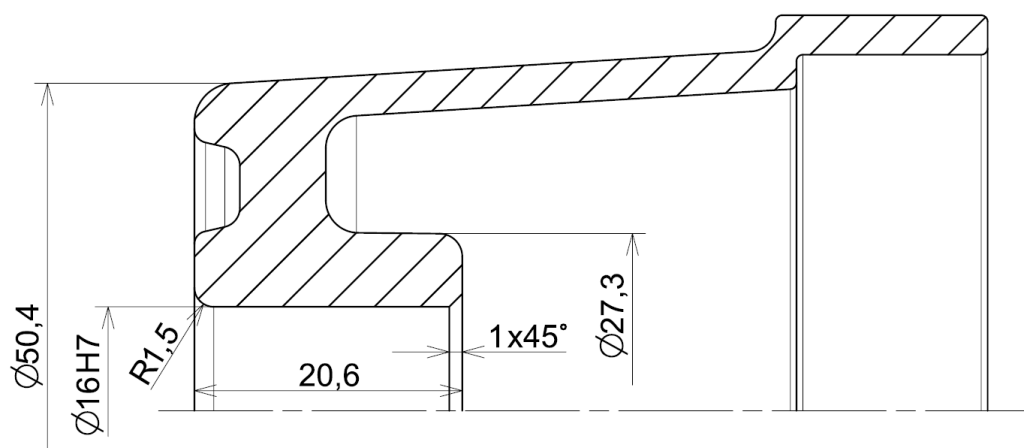
7 Praktická část

7.1 Zadání

Jak již bylo zmíněno v úvodu, problém modelování nalisovaného spoje je řešen na konkrétní aplikaci tohoto spoje. Tou je nalisovaný spoj hřídele s nábojem v napínáku klínového řemenu spalovacího motoru. Jedná se o podélně lisovaný spoj (spoj montovaný za studena) a právě na tento druh montáže spoje bude práce zaměřena. Z této konkrétní aplikace vychází především rozměry a druh materiálu obou součástí, které budou během modelování použity. Dále lze díky tomu provést porovnání, jelikož u tohoto nalisovaného spoje bylo v minulosti provedeno několik experimentálních měření společností Mubea. Výsledky těchto měření byly poskytnuty pro účely vypracování této bakalářské práce. Na Obr. 21 a Obr. 22 jsou zobrazeny základní rozměry obou spojovaných součástí (hřídele a náboje), ze kterých bude vycházeno při tvorbě jednotlivých modelů pro numerický výpočet a poté i v analytickém výpočtu. Zobrazeny jsou pouze rozměry relevantní pro řešení nalisovaný spoj.



Obr. 21 - Základní rozměry hřídele



Obr. 22 - Základní rozměry náboje

7.2 Metodika praktické části

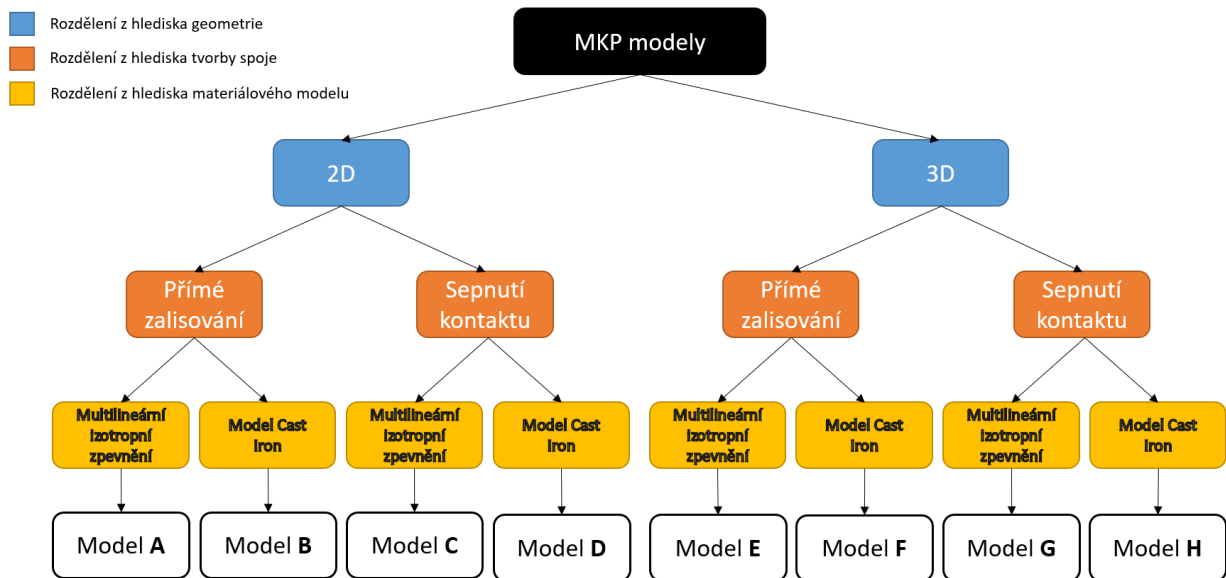
Existuje mnoho přístupů, jak modelovat nalisované spoje v MKP. Tyto přístupy se však velmi liší, a to především různými zjednodušeními aplikovanými na model, které však do jisté míry ovlivní i požadované výsledky.

Pro zjištění nejvýhodnějšího přístupu z hlediska přesnosti výpočtu a minimalizace výpočetního času bylo sestaveno osm různých typů modelů, které budou mezi sebou porovnány. Zároveň však jejich výsledky budou srovnány s experimentálně naměřenými daty poskytnutými společností Mubea, které vycházejí ze dvou různých měření. Výsledky budou také porovnány s analyticky vypočtenými hodnotami. Porovnávanými veličinami jsou zalisovací síla a vylisovací síla (tedy síla potřebná k montáži nalisovaného spoje a síla potřebná k demontáži).

Přístupy, jak modelovat nalisované spoje, se dají rozdělit podle mnoha hledisek. Podle vstupní geometrie do výpočtu a dimenze úlohy se dají modely rozdělovat na 2D axisymetrické modely (rotačně symetrický model) a 3D modely, u kterých se většinou řeší pouze určitá část tělesa (např. čtvrtina nebo osmina), jelikož je u nich předpokládána rovinná či rotační symetrie. Dále lze podle způsobu tvorby spoje modely rozdělit na modely s přímým zalisováním a vylisováním nebo modely, kde jsou obě součásti již spojené a pouze se mezi nimi aktivuje kontakt a s tím související přesah. Posledním hlediskem jsou materiálové modely součástí. Zde mohou mít obě součásti elastický izotropní model, nebo jedna z nich elasto-plastický model a druhá elastický, popřípadě obě součásti elasto-plastický model. Speciálním případem je použití materiálového modelu Cast Iron, který, jak již název napovídá, slouží k modelování litiny nebo jiných materiálů, které mají odlišné vlastnosti v tahu a tlaku. Zjištění přínosnosti tohoto modelu je také jedním z cílů této bakalářské práce. Dalšími hledisky, podle kterých lze modely rozdělit, může být např. formulace kontaktu nebo typ sítě.

Všech osm typů modelů je vytvořeno a rozděleno právě podle dříve popsaných hledisek. Vytvořeno je právě osm typů modelů, aby bylo možné všechny tyto hlediska porovnávat nezávisle na hlediscích ostatních. Podle dimenze úlohy (geometrie) jsou modely rozděleny na 2D a 3D. V tomto případě je cílem zjistit, zda se vyplatí modelovat nalisované spoje ve 3D, jelikož to obnáší zvýšení výpočetního času z důvodu většího počtu prvků a uzlů v modelu. Dalším hlediskem je způsob spojení součástí, kde nás primárně zajímá, zda je zjednodušení u pouhé aktivace kontaktu dostatečně markantní ve vztahu k výsledkům. Posledním hlediskem je materiálový model náboje. Je řešen pouze náboj, jelikož ten je vyroben z mnohem méně pevného materiálu, u kterého ve větší míře během lisování vznikají plastické deformace. U tohoto hlediska je nejvíce cíleno na rozdílnost výsledků mezi složitějším Cast Iron modelem a relativně běžným elasto-plastickým modelem s multilineárním izotropním zpevněním.

Dohromady se tedy u každého sledovaného hlediska dají porovnat mezi sebou čtyři páry modelů lišící se pouze tímto hlediskem. Na Obr. 23 je znázorněn princip dělení modelů dle již zmíněných hledisek.



Obr. 23 - Princip dělení modelů

Jak již bylo zmíněno v kapitole o chybách modelů, tak výpočet pomocí MKP nemusí být vůbec přesný, pokud byl proveden nesprávně. Z tohoto důvodu se musí vypočtené hodnoty porovnat s výsledky získanými jiným způsobem. V tomto případě s výsledky analytickými a experimentálně změřenými. Pro porovnání bylo třeba vytvořit určitý rozsah přesahů, ve kterých budou spočtené hodnoty zalisovací a vylisovací síly porovnány. Navíc díky tomu lze vypracovat závislost těchto sil na velikosti přesahu, ze které můžeme zjistit, v jakých hodnotách přesahu nebo rozsazích přesahů se hodnoty sil shodují nebo naopak odlišují. Bylo vybráno 10 různých hodnot přesahů od 0,005 do 0,3 mm. Výběr se řídil především rozsahem přesahů jednoho z experimentálních měření, jelikož by bylo nevhodné nevyužít co největší rozsah experimentálně změřených hodnot, který je k dispozici.

V následujících podkapitolách bude nejprve popsán postup tvorby modelů v systému ANSYS, dále bude přiblíženo zpracování experimentálně změřených hodnot a analytický výpočet. Poté budou všechny získané hodnoty porovnány a z poznatků z tohoto srovnání bude vypracován obecný postup modelování nalisovaného spoje.

7.3 Postup tvorby modelů

Materiálové modely

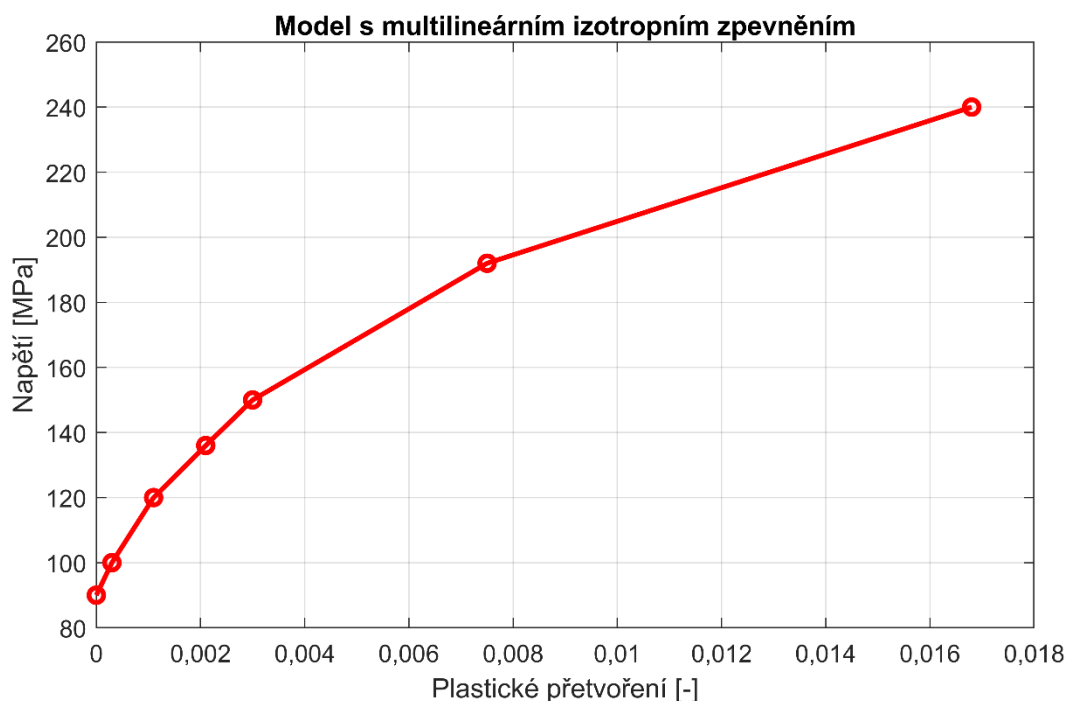
Hřídel i náboj jsou vyrobeny z odlišných materiálů. Konkrétně hřídel je vyrobena z automatové oceli 11SMnPb30 (1.0718) a náboj je vyroben z hliníkové slitiny AlSi9Cu3 (Fe) určené k lití. Materiálové modely obou součástí je vhodné modelovat jako elasto-plastické, kvůli vznikajícím plastickým deformacím během lisování. Pro hřídel byl vytvořen elasto-plastický materiálový model s bilineárním izotropním zpevněním. Materiál hřídele je výrazně pevnější než materiál náboje a prakticky zde při lisování nevznikají skoro žádné plastické deformace, takže nemá takový smysl používat složitější elasto-plastický model.

Pro náboj byly vytvořeny dva různé modely. Prvním je elasto-plastický materiálový model s multilineárním izotropním zpevněním. Vstupní hodnoty do tohoto materiálového modelu jsou uvedeny v Tab. 1 a graf zpevnění je zobrazen na Obr. 24. Druhý model byl vytvořen pomocí

programovacího jazyka APDL (Ansys Parametric Design Language), jelikož přímo v systému ANSYS Mechanical nejde zadat rozdílné vlastnosti materiálu v tahu a tlaku. Kód, kterým byl materiálový model zadán do systému, je uveden na Obr. 25. Jeho vstupní hodnoty jsou uvedeny v Tab. 2 a vyobrazeny na Obr. 26. V této chvíli je nutno podotknout, že se pro zhotovení obou materiálových modelů musely použít hodnoty ze skutečného tahového diagramu, nikoliv smluvního, jelikož smluvní diagram by nesprávně vykazoval pokles napětí v průřezu za mezí kluzu.

Tab. 1 - Vstupní hodnoty do mat. modelu s multilineárním izotropním zpevněním

Plastické přetvoření [-]	Napětí [MPa]
0	90
0,0003	100
0,0011	120
0,0021	136
0,003	150
0,0075	192
0,0168	240



Obr. 24 - Multilineární izotropní zpevnění

Tab. 2 - Vstupní hodnoty do modelu Cast Iron

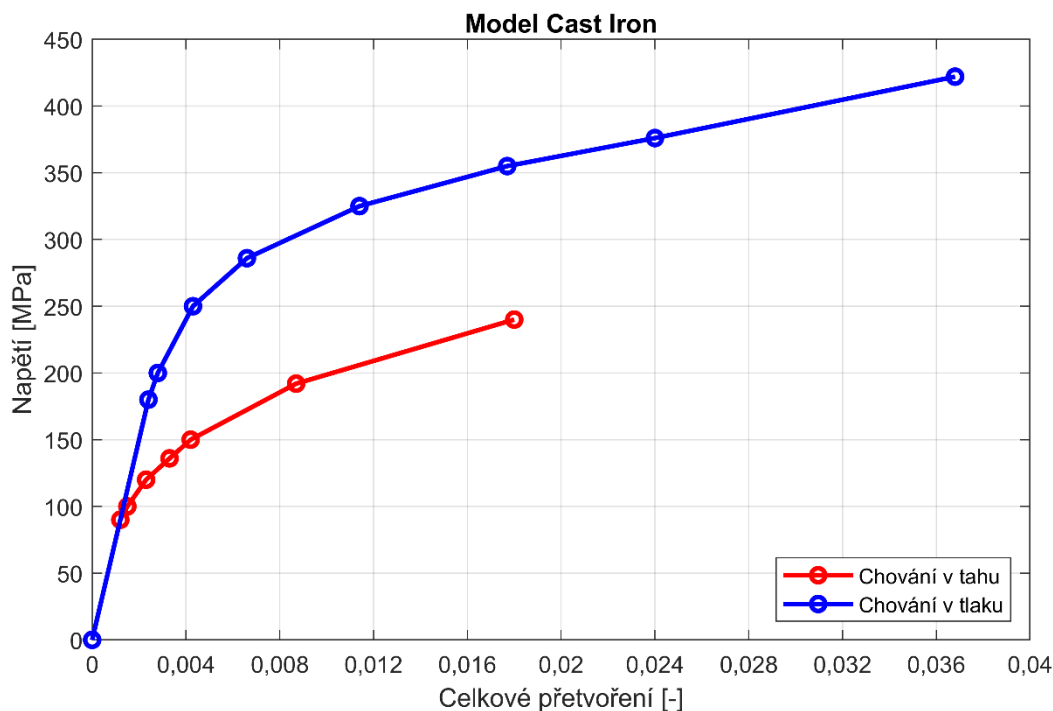
Chování v tahu		Chování v tlaku	
Celkové přetvoření [-]	Napětí [MPa]	Celkové přetvoření [-]	Napětí [MPa]
0,0012	90	0,0024	180
0,0015	100	0,0028	200
0,0023	120	0,0043	250
0,0033	136	0,0066	286
0,0042	150	0,0114	325
0,0087	192	0,0177	355
0,018	240	0,024	376
-	-	0,0368	422

```

1 /PREP7
2 mp,ex,matid, 75000 !Youngův modul [MPa]
3 mp,nuxy,matid,0.33 !Poissonovo číslo
4
5 tb,cast,matid,, ,isotropic !Definice Cast Iron modelu
6 tbdata,1,0.47 !Plastické Poissonovo číslo
7
8 tb,uniaxial,matid,1,7,tension !Napětí [MPa] vs. přetvoření v tahu
9 tbtemp,22
10 tbpt,,0.0012,90
11 tbpt,,0.0015,100
12 tbpt,,0.0023,120
13 tbpt,,0.0033,136
14 tbpt,,0.0042,150
15 tbpt,,0.0087,192
16 tbpt,,0.018,240
17
18 tb,uniaxial,matid,1,8,compression !Napětí [MPa] vs. přetvoření v tlaku
19 tbtemp,22
20 tbpt,,0.0024,180
21 tbpt,,0.0028,200
22 tbpt,,0.0043,250
23 tbpt,,0.0066,286
24 tbpt,,0.0114,325
25 tbpt,,0.0177,355
26 tbpt,,0.024,376
27 tbpt,,0.0368,422

```

Obr. 25 - APDL kód pro zadání Cast Iron modelu

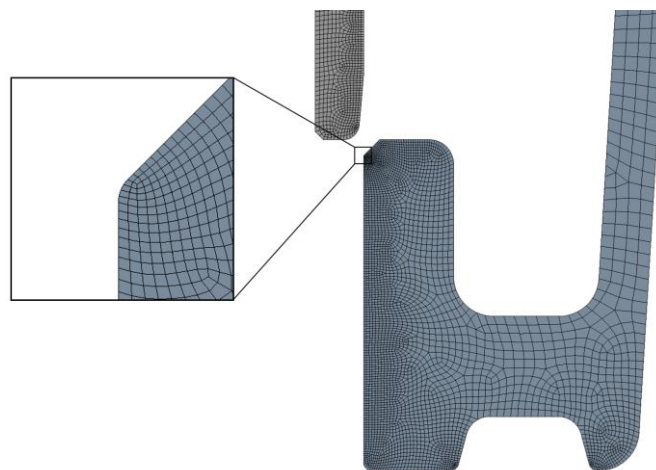


Obr. 26 - Model Cast Iron

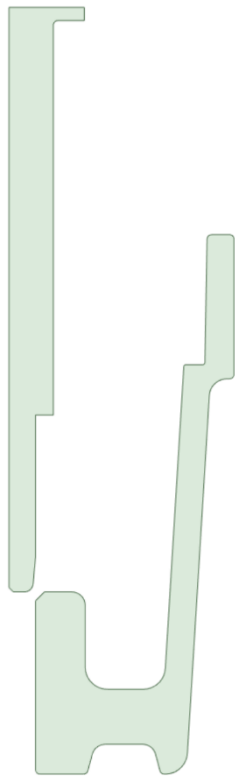
Geometrie

Geometrie vstupující do výpočtu byla namodelována v programu ANSYS SpaceClaim, avšak původní součásti byly zjednodušeny tak, aby byly rotačně symetrické a tím pádem i symetrické podle rovin XY a YZ. Předlohou pro CAD modely byly výrobní výkresy společnosti Mubea, které byly pro výpočet zjednodušeny. Zjednodušenou geometrii hřídele a náboje lze vidět na Obr. 21 a Obr. 22.

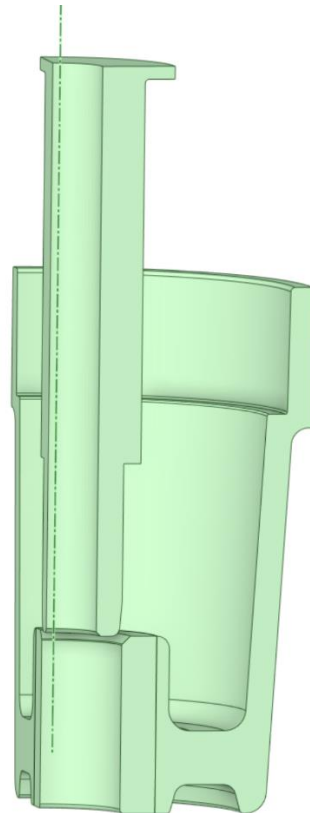
Geometrií pro 2D modely jsou 2 plochy – jedna pro hřídel a druhá pro náboj. Geometrie pro 2D modely je zobrazena na Obr. 28. Geometrií pro 3D modely jsou 3 tělesa (viz Obr. 29), kde model náboje byl rozdělen na dvě tělesa kvůli kvalitnějšímu nasíťování. U 2D i 3D modelů byla navíc ještě zaoblená hrana u sražení náboje (viz Obr. 27), ve které během simulace zalisování vznikalo velmi vysoké napětí.



Obr. 27 - Detail na zaoblení hrany



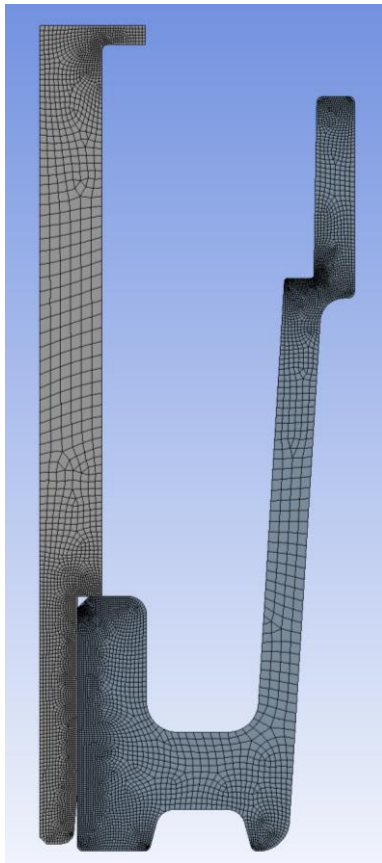
Obr. 28 - 2D geometrie



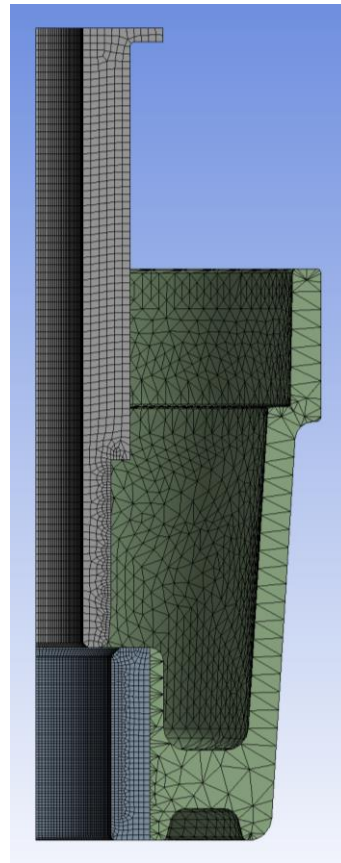
Obr. 29 - 3D geometrie

Sít'

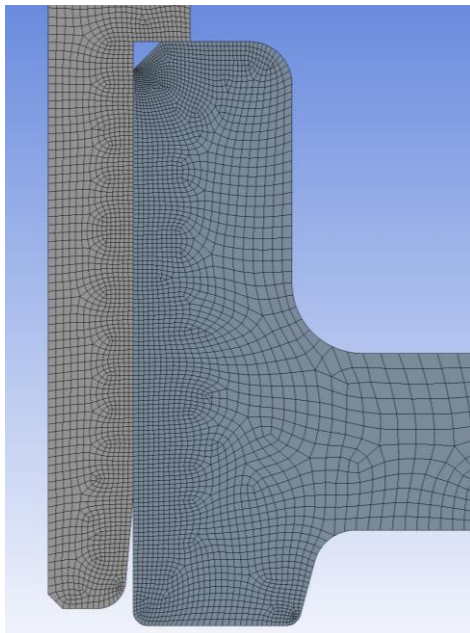
Sít' je u kontaktních úloh stěžejní částí modelu, takže na ni byla zaměřena pozornost. Sít' v místech kontaktů by měla být stejná na obou tělesech v kontaktu. Velikost prvku v místech kontaktu byla zvolena 0,3 mm. Sít' mimo kontakt už nemusí být tolik jemná, ale pořád by neměla být hrubá natolik, aby to nějak ovlivnilo přesnost výpočtu. Gradient růstu velikosti prvku byl snižen na 1,1 (z původních 1,2), aby sít' v blízké oblasti kontaktu, kde očekáváme elastickou a plastickou deformaci, byla pořád ještě dostatečně jemná. Zasiťovanou 2D geometrii lze vidět na Obr. 30 a Obr. 32, zasiťovanou 3D geometrii lze vidět zase na Obr. 29 a Obr. 31.



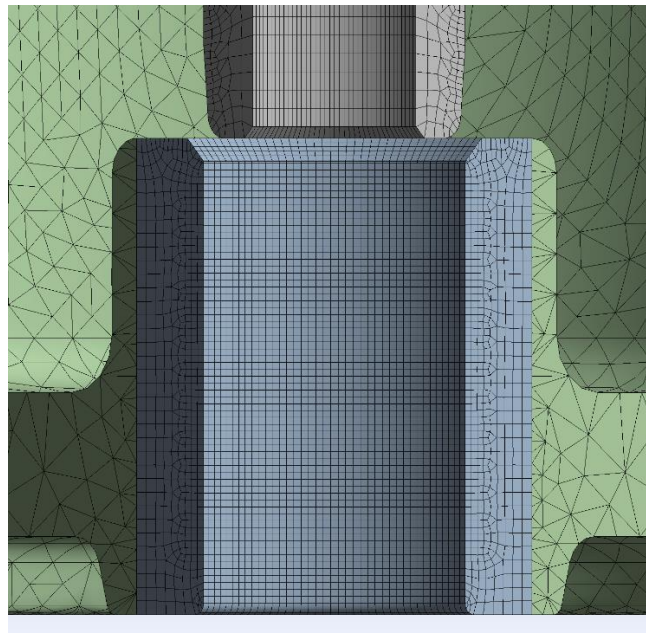
Obr. 30 - 2D síť



Obr. 31 - 3D síť



Obr. 32 - Detail na 2D síť v oblasti kontaktu



Obr. 33 - Detail na 3D síť v oblasti kontaktu

Symetrie

Symetrie podle roviny XY a YZ byla zadána pouze u 3D modelů, jelikož u nich se řeší pouze čtvrtina objemového modelu.

Kontakty

Základem kontaktní úlohy v MKP je správné nastavení kontaktů v modelu. Hlavním kontaktem je kontakt válcových ploch, které se při lisování smýkají po sobě. Tento kontakt je nastaven jako kontakt se třením (frictional) (viz Obr. 34), kde součinitel tření činí 0,18. Jako „contact“ je zvolen vždy náboj a jako „target“ je vždy volen hřídel, a to z důvodu, že by „contact“ mělo být vždy poddajnější z těles. Formulace kontaktu je nastavena na Augmented Lagrange, které je nastaveno v systému ANSYS jako výchozí, a chování bylo zvoleno jako asymetrické. V nastavení tohoto kontaktu se také zadává velikost přesahu, která je ale poloviční než určená, jelikož není vztažena na průměr.

Dalším kontaktem je kontakt dosedacích ploch při zalisování celé délky čepu hřídele. Tento kontakt je zadán bez tření (frictionless) (viz Obr. 35). Stejně jako předtím je jako „contact“ zvolen náboj a jako „target“ je volen hřídel.

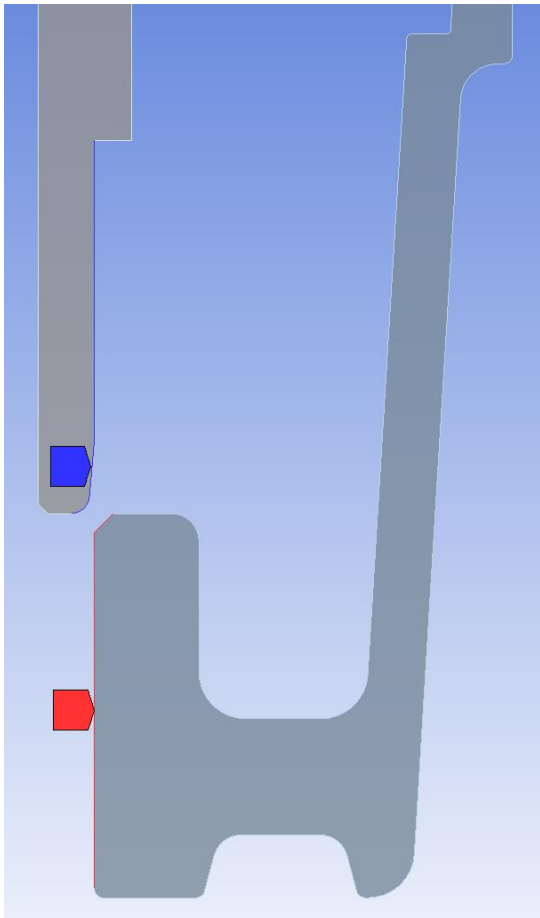
Posledním kontaktem je kontakt u 3D modelů mezi rozdělenými tělesy náboje. Zde je automaticky systémem ANSYS vytvořen kontakt typu „bonded“, který zajistí, že se obě plochy neoddělí, ani po sobě neposunou (dalo by se říci, že jsou slepené k sobě).

Okrajové podmínky

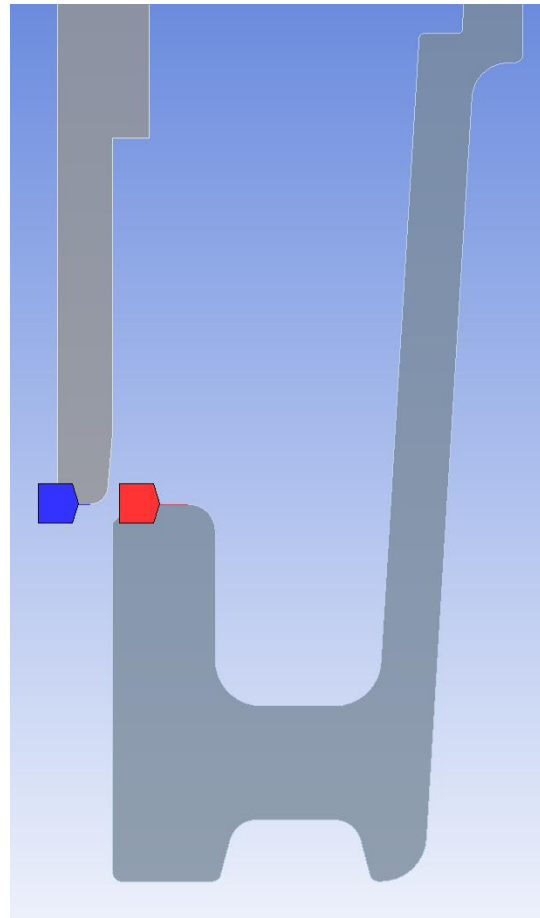
U modelů s přímou simulací zalisování a vylisování byly zadány 2 okrajové podmínky (viz Obr. 36), a to 2 posunutí (displacement). Jedno posunutí je umístěno na konci hřídele a nabývá hodnoty 0 až -20 mm ve směru osy Y v prvním kroku řešení a poté -20 až 0 mm ve směru osy Y ve druhém kroku řešení. Druhé posunutí je umístěno na dolní ploše náboje a nabývá konstantní hodnoty 0 ve směru osy Y po oba kroky výpočtu. Tímto je tedy odebrán stupeň volnosti této plochy ve směru osy Y. U modelů s aktivací kontaktu je první okrajová podmínka potlačena a aktivní zůstává pouze druhá.

Krokování úlohy

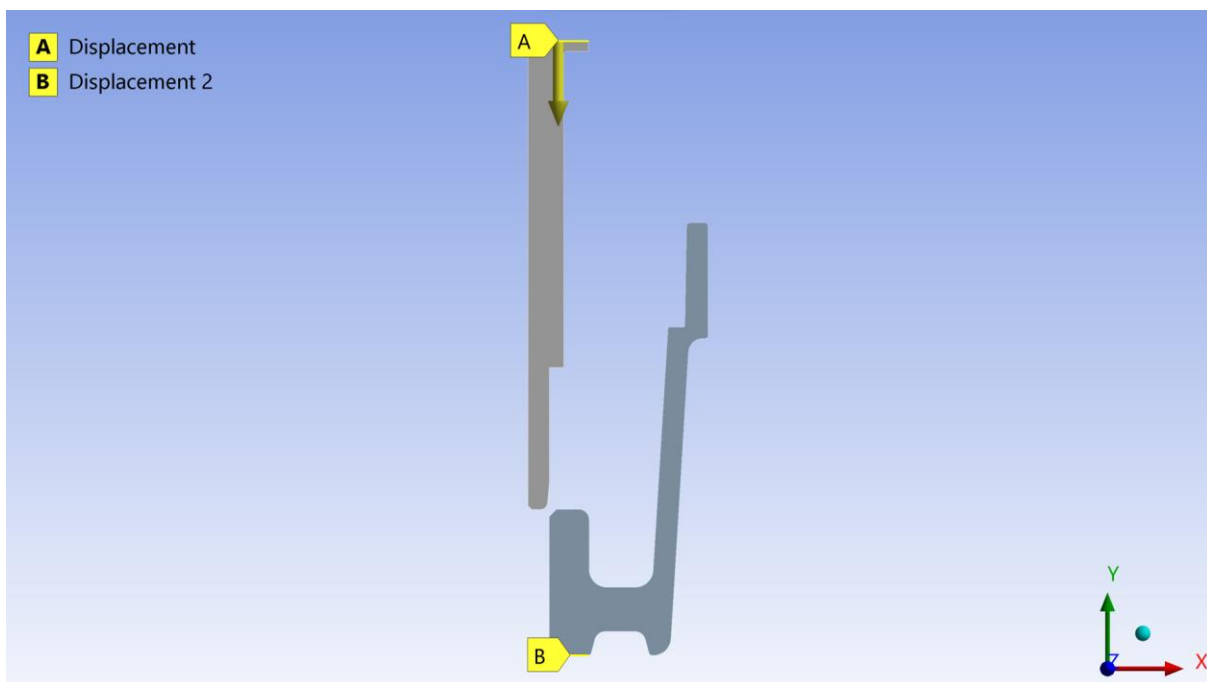
Velikost časového inkrementu (časového mezikroku) byla u každého modelu zvolena s ohledem na konvergenci výpočtu. Někde bylo třeba časový inkrement výrazně snížit, což zase vyústilo v prodloužení výpočetního času. Obecně bylo potřeba použít nižší časový inkrement při simulaci zalisování. Naopak u aktivace kontaktu a simulace vylisování stačilo použít časový inkrement větší.



Obr. 34 - Kontakty se třením v 2D modelu



Obr. 35 - Kontakty bez tření v 2D modelu



Obr. 36 - Okrajové podmínky v 2D modelu

7.4 Zpracování výsledků z modelů

V Tab. 3 jsou uvedeny všechny vypočtené hodnoty zalisovací a vylisovací síly. Některé hodnoty u modelů **E** a **H** nebyly spočteny z důvodu velké časové náročnosti výpočtu, ze které se už dá předběžně usoudit, že tyto modely nebudou vhodné pro praktické použití. Vylisovací síla byla získána pouze z modelů se simulací zalisování a vylisování (tedy modely **A**, **B**, **E** a **F**). Navíc zalisovací síla byla u modelů s aktivací kontaktu získána přepočtem mezi normálovou silou ve spoji vynásobením třecím součinitelem f (dle vztahu (7.1)). Pokud bychom chtěli z těchto modelů získat i vylisovací sílu, museli bychom např. zkombinovat oba přístupy tvorby nalisovaného spoje – nejdříve aktivovat kontakt v již spojeném stavu a poté součásti vylisovat.

Mezi normálovou silou N a třecí silou T platí vztah:

$$T = N \cdot f \quad (7.1)$$

Třecí součinitel byl uvažován stejný jako v samotné definici kontaktu se třením v MKP modelu – 0,18. U 3D modelů, u kterých byla řešena pouze čtvrtina geometrie, musela být vypočtená zalisovací a vylisovací síla vynásobená čtyřmi.

Tab. 3 - Všechny výsledky získané z MKP modelů

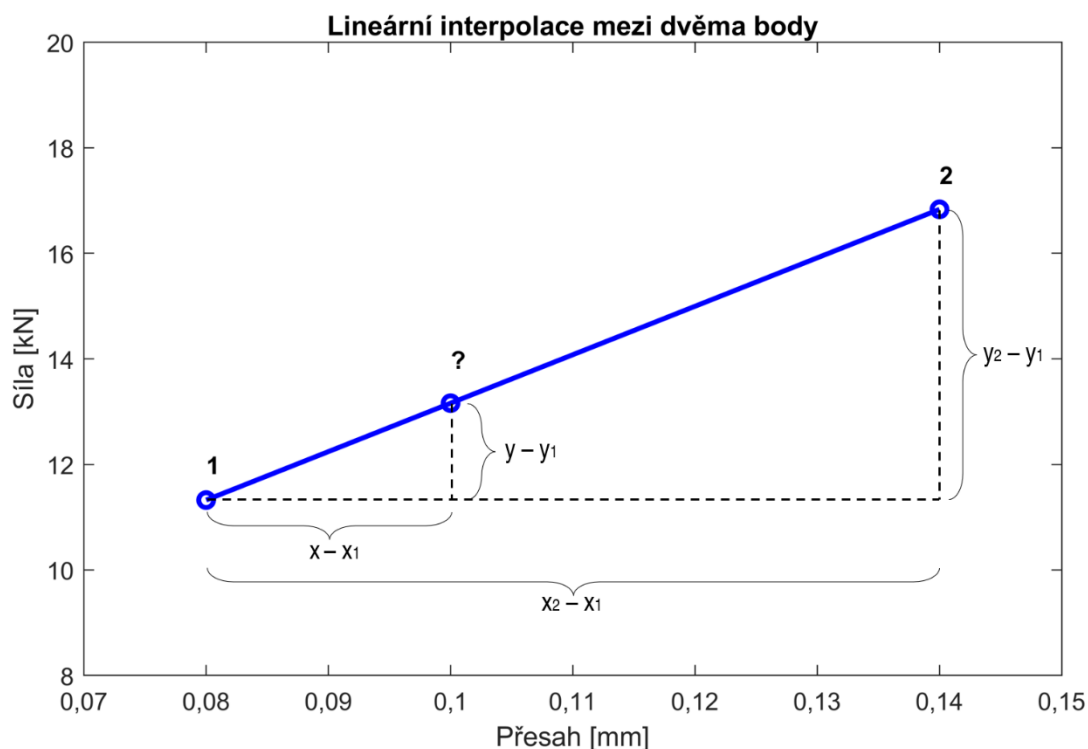
Přesah [mm]	Model A		Model B		Model C	Model D	Model E		Model F		Model G	Model H
	Zalis. síla [N]	Vylis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Vylis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Vylis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Vylis. síla [N]	Zalis. síla [N]	Zalis. síla [N]
0,005	1 425,1	1 359,6	1 424,9	1 359,6	1 416,6	1 416,6	1 416,48	1 332,44	1 407,88	1 328,52	1 393,27	1 393,27
0,01	2 849,4	2 717	2 845,1	2 713,8	2 833,2	2 833,2	2 813,56	2 669,16	2 823,4	2 666,96	2 793,6	2 793,67
0,02	5 690,2	5 425,8	5 423,1	5 157,4	5 652,36	5 667,48	–	–	5 466,8	5 272,8	5 585,83	5 594,76
0,03	8 435,2	8 025,9	7 542,7	7 103,7	8 185,14	8 496,72	–	–	7 674	7 148,8	8 113,68	8 395,2
0,04	10 951	10 361	9 201,2	8 534,4	10 131,66	11 144,16	–	–	9 434	8 690,4	10 063,44	11 033,28
0,06	15 133,3	12 142,7	11 909	10 002	12 893,04	15 404,76	–	–	11 676	10 494,8	12 831,12	15 305,04
0,08	18 214,7	14 614,9	14 998	10 605	14 903,46	18 541,8	–	–	13 740	11 386,4	14 855,04	18 455,76
0,1	21 157	16 628,5	17 420	10 747	16 554,78	20 869,2	–	–	15 635,2	12 038,8	1 6524	–
0,2	26 735,1	18 832,3	22 089	14 929	21 945,6	26 100	–	–	21 230,12	16 346,7	21 897,36	–
0,3	30 656	21 716	22 784	16 375	24 723	28 913,4	–	–	23 413,8	16 698,4	24 679,44	–

7.5 Zpracování experimentálně naměřených dat

Společností Mubea byla provedena dvě různá experimentální měření zalisovací a vylisovací síly pro různé hodnoty přesahu. První měření obsahuje výsledky pro rozsah od 0 do 0,3 mm, což odpovídá rozsahu přesahů vypočítaných MKP modely. Druhé měření obsahuje pouze rozsah hodnot mezi 0,03 a 0,06 mm. Experimentální měření byla provedena na hodnotách přesahu, které se zrovna podařilo pro experiment vyrobit. Z tohoto důvodu bylo třeba zjistit hodnoty zalisovací a vylisovací síly pro konkrétní hodnoty přesahu určené ke srovnávání. Hodnoty sil pro konkrétní přesah byly dopočteny přes lineární interpolaci mezi dvěma nejbližšími přesahy s výsledky sil. Vztah (7.2) byl odvozen z věty o podobnosti trojúhelníků, což je naznačeno na Obr. 37. Z tohoto vztahu je vyjádřena rovnice (7.5) pro výpočet hodnoty y , což je v našem případě hledaná hodnota zalisovací a vylisovací síly pro konkrétní hodnoty přesahu. Všechny získané hodnoty jsou uvedeny v Tab. 4.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (7.2)$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_1)} + y_1 \quad (7.3)$$

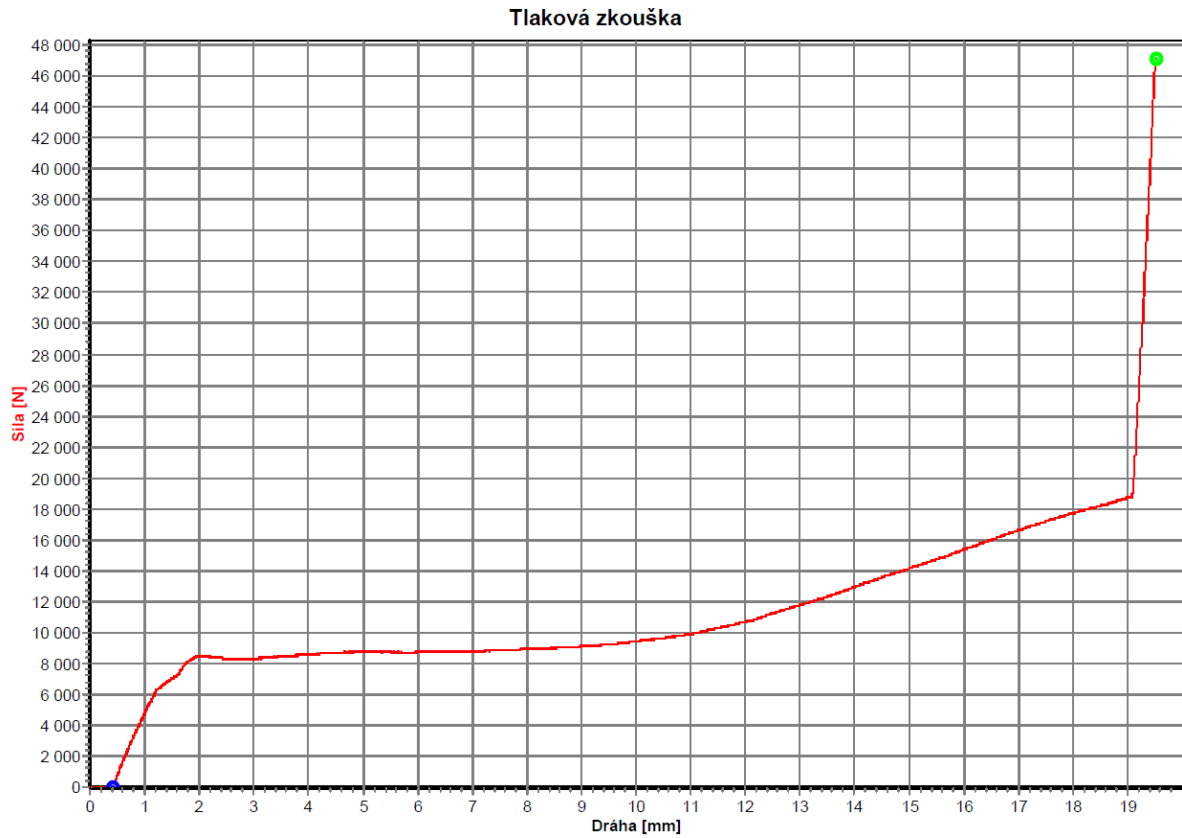


Obr. 37 - Lineární interpolace mezi dvěma naměřenými body z experimentálního měření

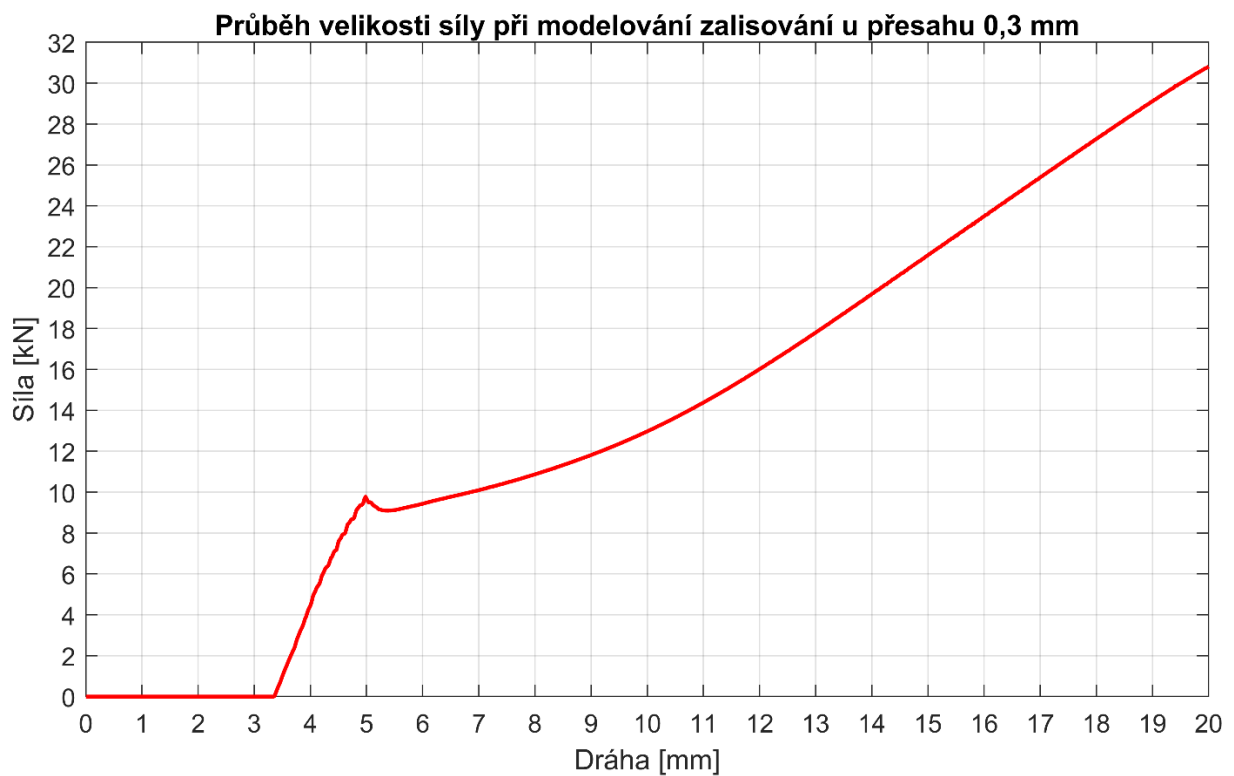
Tab. 4 - Experimentálně získané hodnoty

Přesah [mm]	Experimentální výsledky 1		Experimentální výsledky 2	
	Zalisovací síla [N]	Vylisovací síla [N]	Zalisovací síla [N]	Vylisovací síla [N]
0,005	1 410,26	1 772,82	-	-
0,01	1 820,51	2 165,64	-	-
0,02	2 641,03	2 951,28	-	-
0,03	3 461,54	3 736,92	7 000	6 088
0,04	4 352	4 508,64	7 800	7 614
0,06	7 392	5 801,44	8 383,333	7 599
0,08	9 600	6 924,91	9 850	7 608
0,1	11 520,24	7 964,24	-	-
0,2	13 941,35	9 638,65	-	-
0,3	18 302,26	13 513,09	-	-

Na Obr. 38 je ukázán výstup z jednoho experimentálního měření zalisovací síly provedeného na univerzálním trhacím stroji. Zde je za výslednou zalisovací sílu považována největší změřená síla před náhlým vzrůstem vzniklým dorazem čela hřídele na čelo náboje. Pro porovnání je na Obr. 39 zobrazen průběh zalisovací síly získaný z 2D MKP modelu. Lze si u obou diagramů všimnout, že v určité fázi lisování je závislost síly na dráze prakticky lineární. Naopak přibližně v první polovině lisování je závislost nelineární, což je právě způsobeno přítomností plastických deformací.



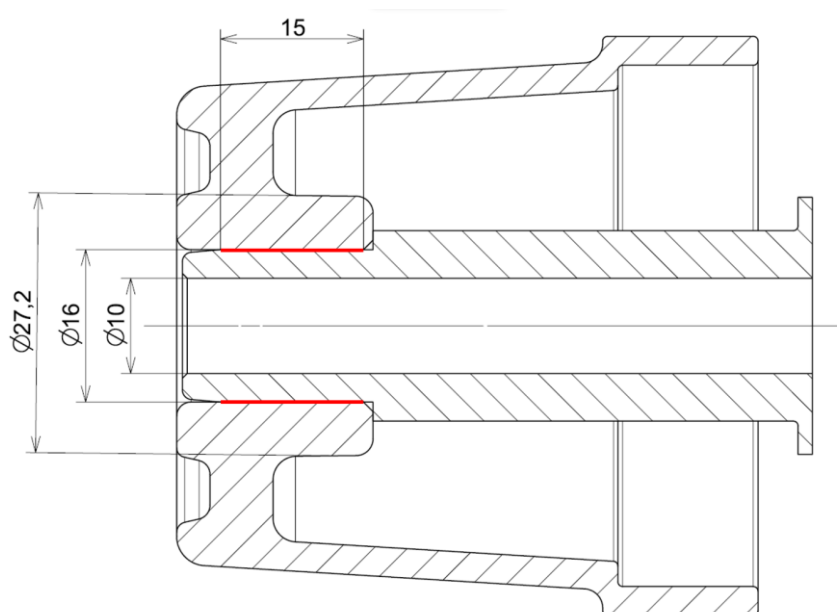
Obr. 38 - Tlakový diagram závislosti síly na dráze pro přesah 0,3 mm



Obr. 39 - Průběh velikosti síly při modelování zalisování u přesahu 0,3 mm

7.6 Analytický výpočet

Zde bude demonstrován analytický výpočet zalisovací a vylisovací síly u jedné z hodnot přesahu – 0,01 mm. U ostatních hodnot přesahu byl výpočet proveden totožně, jelikož jedinou proměnnou u tohoto konkrétního nalisovaného spoje je právě hodnota přesahu. Nejprve bylo třeba zjistit aktivní délku spoje L , která z důvodu výskytu sražení na obou součástech je menší než délka čepu hřídele (ta činí 20 mm). Délka spoje je menší o 4 mm sražením na konci hřídele a o 1 mm sražením na začátku vnitřního průměru náboje (bráno ze směru lisování). Celková aktivní délka spoje je tedy pouze 15 mm, což je znázorněno na Obr. 40. Tato aktivní délka spoje bude ve skutečnosti ještě menší, jelikož u montáže za studena se vlivem plastických deformací při lisování zredukuje velikost přesahu v určité délce. V Tab. 5 jsou vypsány všechny zadané hodnoty vyplývající z geometrie a materiálů spojovaných součástí. Hodnota součinitele tření při lisování je uvažována vyšší než hodnota součinitele tření mezi materiály obou součástí. V tomto případě byla zvolena 0,2.



Obr. 40 - Výpočtové schéma s vyznačenou funkční délkou spoje

Tab. 5 - Zadané hodnoty

Popis	Značení	Hodnota	Jednotky
Vnitřní průměr hřídele	d_0	10	mm
Vnější průměr hřídele	d_1	16	mm
Vnější průměr náboje	d_2	27,2	mm
Délka spoje	L	15	mm
Poissonovo číslo mat. hřídele	μ_1	0,3	–
Poissonovo číslo mat. náboje	μ_2	0,33	–
Youngův modul mat. hřídele	E_1	200 000	MPa
Youngův modul mat. náboje	E_2	75 000	MPa
Součinitel tření	f	0,18	–
Součinitel tření při lisování	f_L	0,2	–
Maximální hodnota přesahu	Δd_{1max}	0,01	mm

Nejprve jsou ze vztahů (4.12) a (4.13) spočteny rozměrové charakteristiky, které jsou pro všechny hodnoty přesahu konstantní:

$$C_1 = \frac{d_1^2 + d_0^2}{d_1^2 - d_0^2} = \frac{16^2 + 10^2}{16^2 - 10^2} = 2,2821 \quad (7.4)$$

$$C_2 = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} = \frac{27,2^2 + 16^2}{27,2^2 - 16^2} = 2,0582 \quad (7.5)$$

Poté je spočten ze vztahu (4.8) maximální tlak vyvozený zadaným přesahem:

$$p_{max} = \frac{\Delta d_{1max}}{d_1} \cdot \frac{1}{\frac{C_1 - \mu_1}{E_1} + \frac{C_2 - \mu_2}{E_2}} = \frac{0,01}{16} \cdot \frac{1}{\frac{2,2821 - 0,3}{200\,000} + \frac{2,0582 - 0,33}{75\,000}} =$$

$$= 18,966 \text{ MPa} \quad (7.6)$$

Dále je ze vztahu (4.18) spočtena zalisovací síla F_L . Vylisovací síla se dá vypočítat ze vztahu pro únosnost spoje zatíženého axiální silou **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** při uvažování součinitele bezpečnosti s_f jako 1.

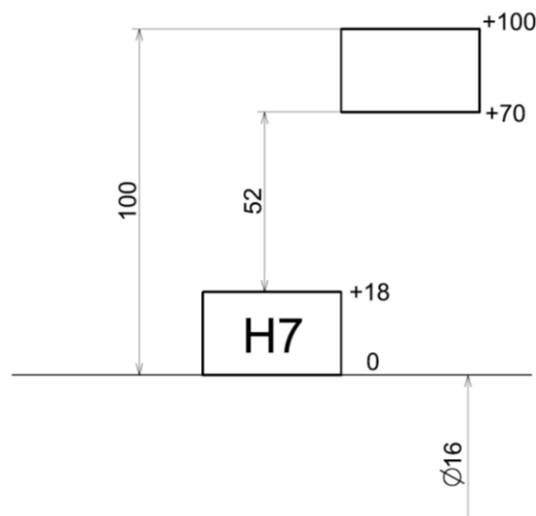
$$F_L = \pi \cdot d_1 \cdot L \cdot p_{max} \cdot f_L = \pi \cdot 0,016 \cdot 0,015 \cdot 18,966 \cdot 10^6 \cdot 0,2 =$$

$$= 2\,860,07 \text{ N} \quad (7.7)$$

$$F_V = \pi \cdot d_1 \cdot L \cdot p_{max} \cdot f = \pi \cdot 0,016 \cdot 0,015 \cdot 18,966 \cdot 10^6 \cdot 0,18 =$$

$$= 2\,574,07 \text{ N} \quad (7.8)$$

Řešený nalisovaný spoj se ve skutečnosti vyrábí v tolerancích tak, aby byl minimální vzniklý přesah mezi součástmi 52 μm (0,052 mm) a maximální vzniklý přesah 100 μm (0,1 mm). Toleranční pole uložení s přesahem u nalisovaného spoje je zobrazeno na Obr. 41.



Obr. 41 - Toleranční pole řešené sestavy

Tento postup výpočtu byl proveden pro všechny porovnávané hodnoty přesahů a všechny takto spočtené výsledky jsou uvedeny v Tab. 6.

Tab. 6 - Získané hodnoty z analytického výpočtu

Velikost přesahu [mm]	Maximální tlak p_{max} [MPa]	Zalisovací síla F_L [N]	Vylisovací síla F_V [N]
0,005	9,48	1 430,04	1 287,03
0,01	18,97	2 860,07	2 574,06
0,02	37,93	5 720,14	5 148,13
0,03	56,9	8 580,22	7 722,19
0,04	75,87	11 440,29	10 296,26
0,06	113,8	17 160,43	15 444,39
0,08	151,73	22 880,58	20 592,52
0,1	189,66	28 600,7	25 740,65
0,2	379,33	57 201,44	51 481,3
0,3	568,99	85 802,17	77 221,95

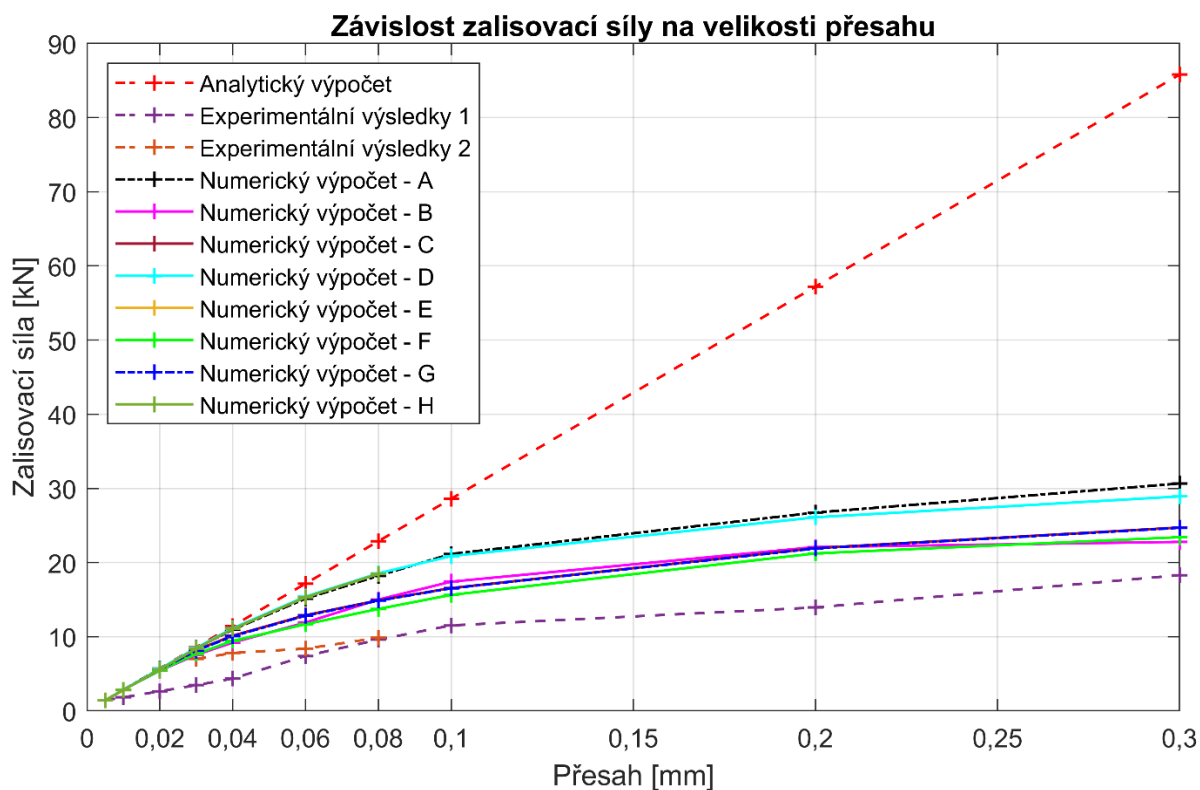
7.7 Porovnání

Pro přehlednost všech vytvořených MKP modelů a jejich abecedního značení byla vypracována Tab. 7, kde jsou uvedeny jejich hlavní parametry, kterými se navzájem liší.

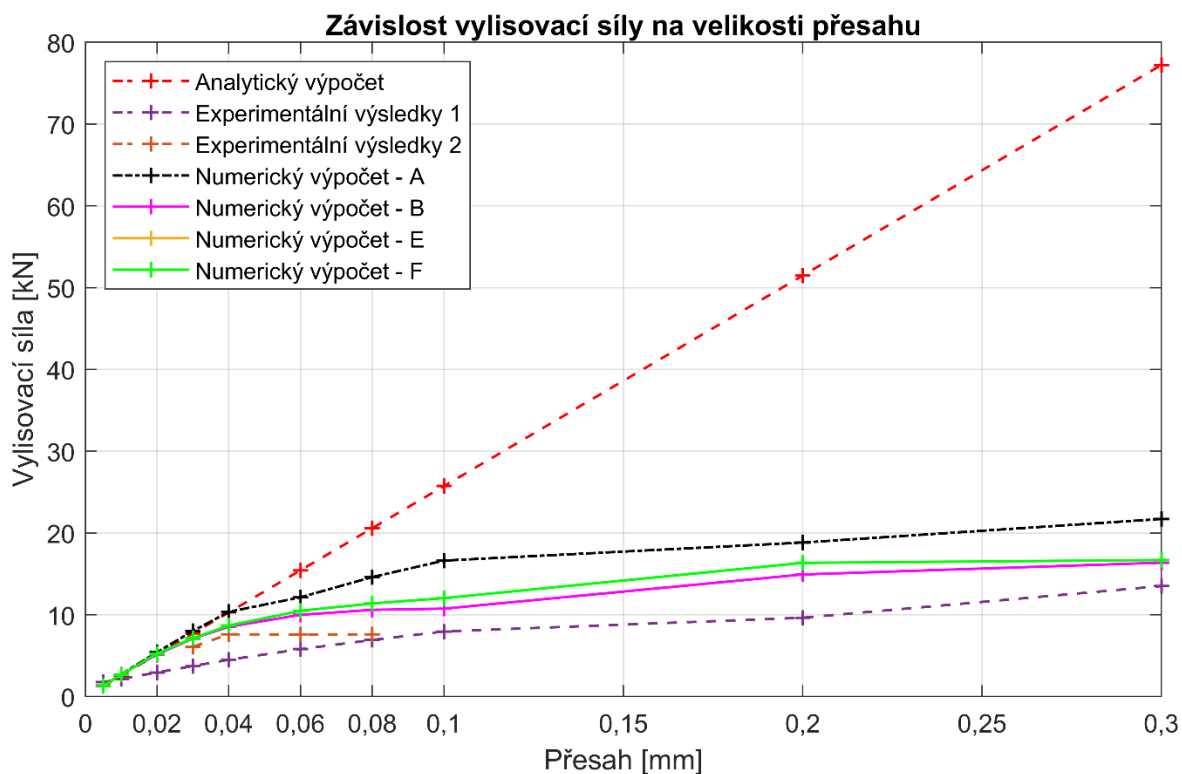
Tab. 7 - Přehled všech modelů a jejich atributů

	Dimenze	Způsob spojení	Materiálový model
Model A	2D	Přímé zalisování	Cast Iron
Model B	2D	Přímé zalisování	Multilineární izotropní zpevnění
Model C	2D	Aktivace kontaktu	Multilineární izotropní zpevnění
Model D	2D	Aktivace kontaktu	Cast Iron
Model E	3D	Přímé zalisování	Cast Iron
Model F	3D	Přímé zalisování	Multilineární izotropní zpevnění
Model G	3D	Aktivace kontaktu	Multilineární izotropní zpevnění
Model H	3D	Aktivace kontaktu	Cast Iron

Nejprve bude provedeno srovnání všech výsledků najednou z důvodu názornosti rozdílů mezi všemi vypočtenými hodnotami. Byly vypracovány odlišné grafy pro hodnoty zalisovací a hodnoty vylisovací síly, jelikož by bylo v jednom grafu až moc různých hodnot, což by snižovalo rozlišitelnost jednotlivých výsledků. Přehledový graf pro hodnoty zalisovací síly lze vidět na Obr. 42, zatímco přehledový graf pro hodnoty vylisovací síly lze vidět na Obr. 43. U grafu hodnot vylisovací síly se nachází pouze polovina modelů, jelikož u druhé poloviny (modely s aktivací kontaktu) nelze přímo spočítat vylisovací sílu.



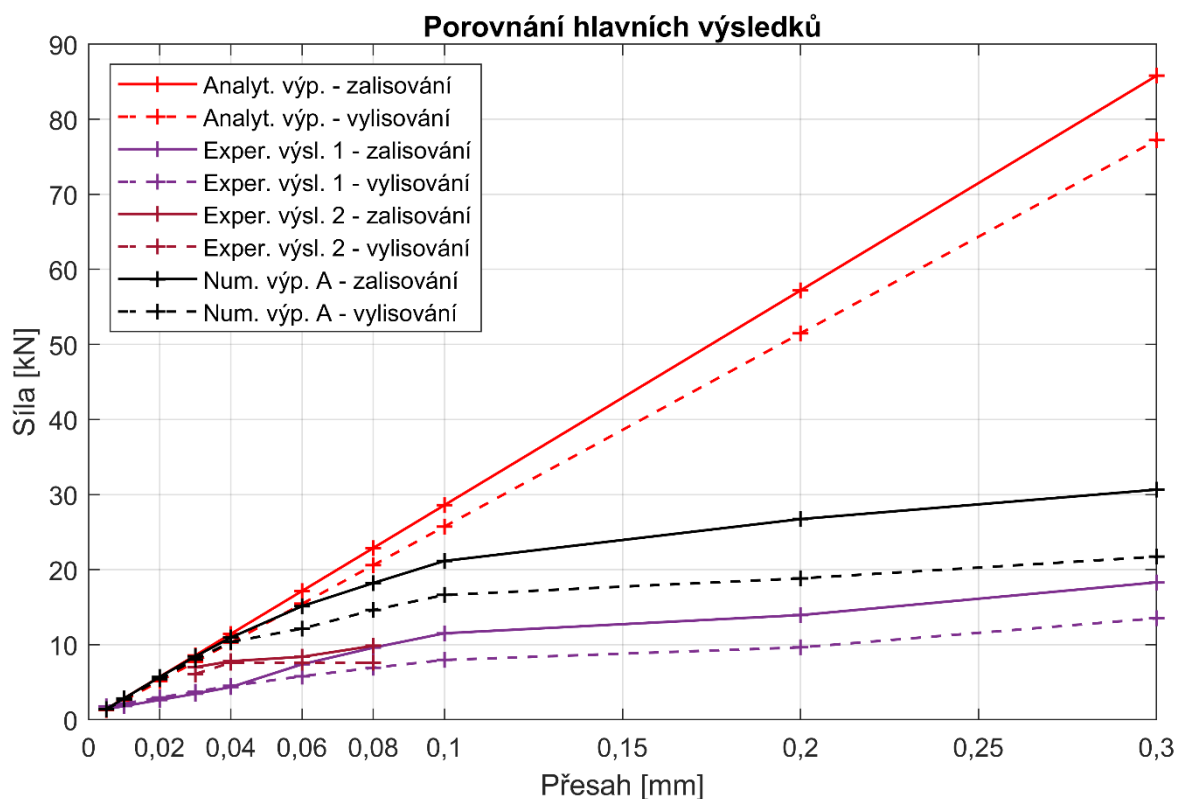
Obr. 42 - Závislost zalisovací síly na velikosti přesahu



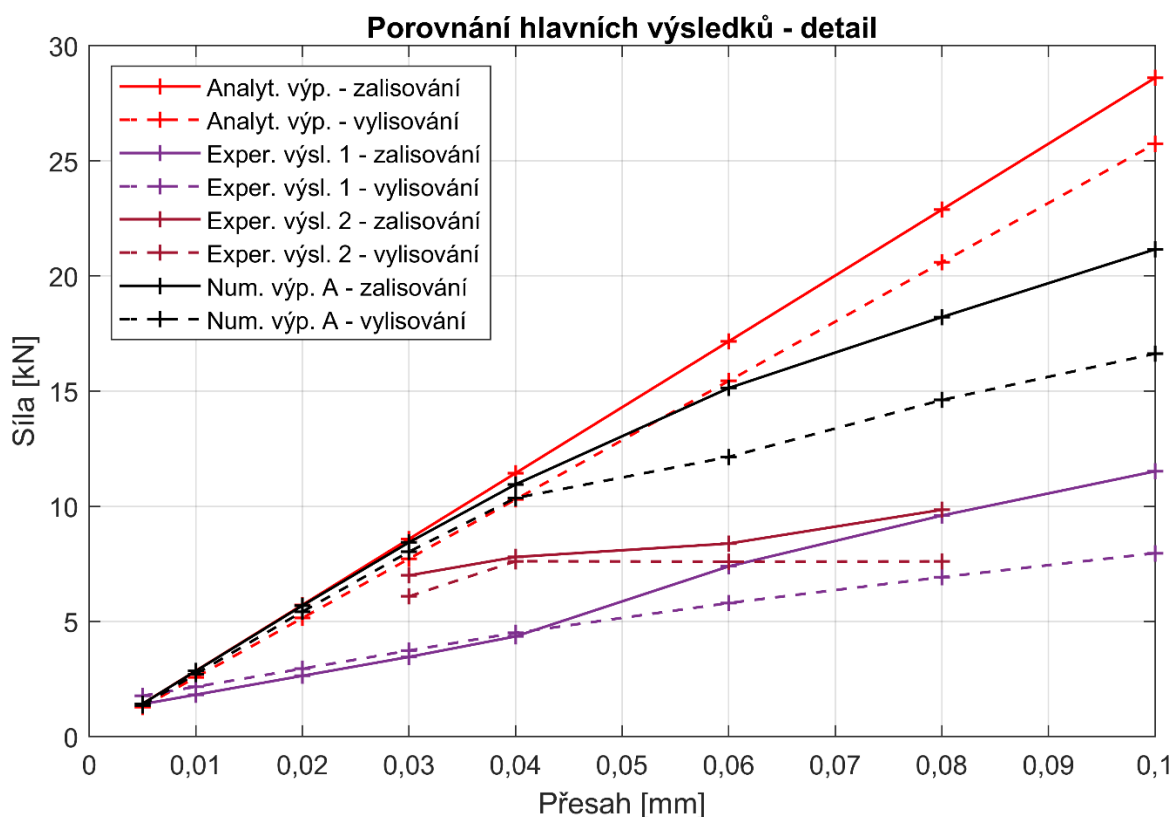
Obr. 43 - Závislost vylisovací síly na velikosti přesahu

Poté jsou na Obr. 44 porovnány hlavní výsledky, tedy výsledky analytického výpočtu, obou experimentálních měření a jednoho reprezentativního MKP modelu. V grafu je zahrnuta zalisovací i vylisovací síla, čímž lze i porovnat jejich poměry. Pro jednoduché odlišení je průběh zalisovací síly vyznačen plnou čarou a průběh vylisovací síly čarou čárkovanou. Jak lze vidět na přechodných přehledových grafech, výsledky z MKP modelů se neliší zas tak razantně a jsou shluknuty pohromadě. Neliší se také ani jejich průběh, takže pro účely porovnání byl vybrán pouze model A. Jak lze spatřit na grafu, tak analyticky zjištěná závislost sil na přesahu je lineární, jelikož jedinou proměnnou v použitých analytických vztazích je velikost přesahu. Naopak závislosti získané experimentálně a numericky lineární nejsou.

U numerického výpočtu se do přesahu 0,04 mm hodnoty moc neliší od analytického řešení. Poté se však výsledky vlivem výskytu plastických deformací při lisování začínají odchylovat. U experimentu 1 se lineární chování dá také vypořádat, ale už se neshoduje s výsledky analytickými. Co se týče poměru mezi zalisovací a vylisovací silou, tak z grafu lze vidět, že obě síly mají podobný průběh. Na Obr. 45 je zobrazen detail totožného grafu jako na Obr. 44, ale pozornost je zaměřena pouze na oblast od 0 do 0,1 mm přesahu, což je rozsah, který odpovídá přesahům, se kterými se součásti skutečně vyrábějí (viz Obr. 41).



Obr. 44 - Porovnání hlavních výsledků

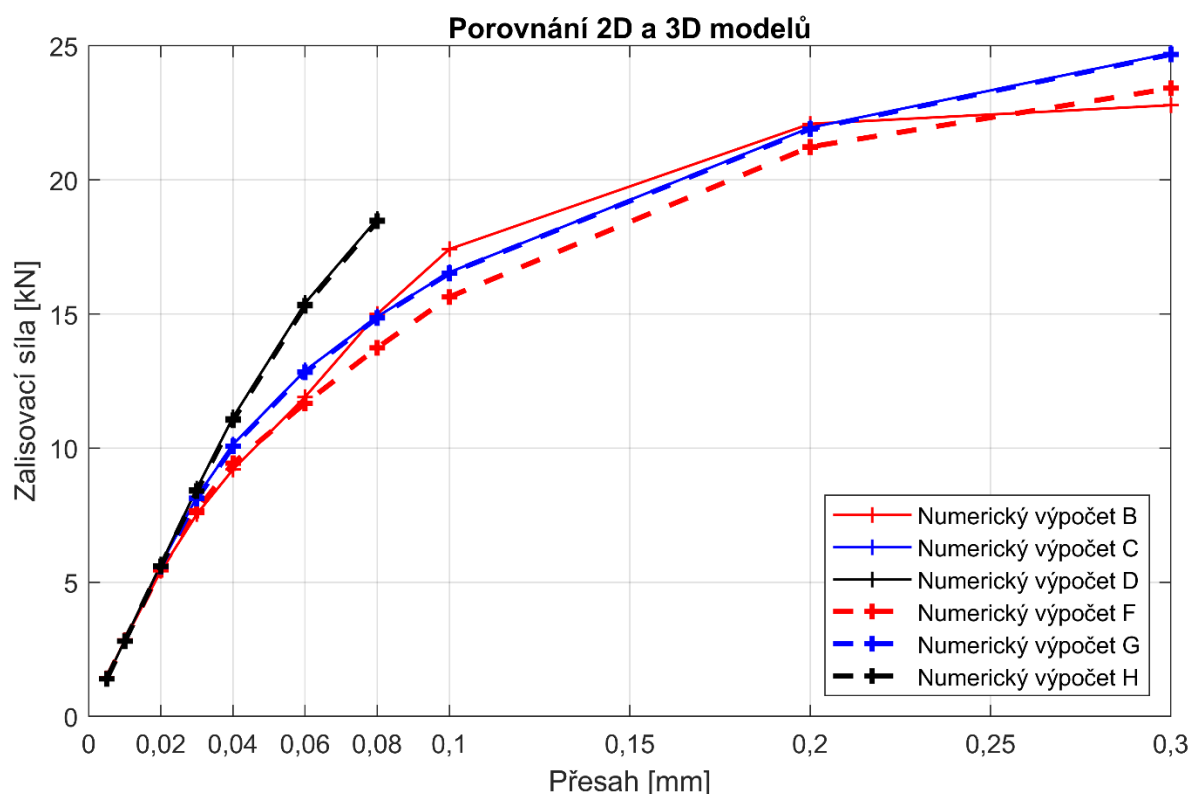


Obr. 45 - Porovnání hlavních výsledků – detail

7.7.1 Porovnání modelů z hlediska geometrie

Z hlediska geometrie mohly být mezi sebou porovnány dvojice modelů A-E, B-F, C-G a D-H, avšak dvojice modelů A-E byla z porovnání vyřazena z důvodu nedostatku vypočtených dat modelu E. Srovnání zbylých tří dvojic modelů dle dimenze použité geometrie lze vidět na Obr. 46. Navíc srovnání modelů D a H je provedeno pouze do hodnoty přesahu 0,08 mm. Závislosti 2D modelů jsou plnou čarou a závislosti 3D modelu naopak čárkovanou čarou. Z porovnání lze usoudit, že u dvojic modelů C-G a D-H, což jsou všechno modely s pouhou aktivací kontaktu v již zalisoávaném stavu, nehraje dimenze prakticky žádnou roli, jelikož se křivky závislosti zalisoávací síly na přesahu skoro shodují.

Rozdíl v průbězích lze však spatřit v porovnání modelů B a F přibližně od hodnoty přesahu 0,06 mm. Ten může být způsoben z mnoha důvodů, ale nejpravděpodobnějším důvodem je špatné sestavení modelu B, který se jako jediný výrazněji odchyluje od průběhu všech ostatních modelů (např. zalisoávací síla mezi přesahy 0,2 a 0,3 mm se prakticky nezmění, což nejspíše neodpovídá realitě). Porovnání vylisoávací síly u modelů z hlediska dimenze zde není uvedeno, jelikož byly k porovnání vhodné jenom modely B a F, které stejně jako u zalisoávací síly vykazovaly podobné odchylky.

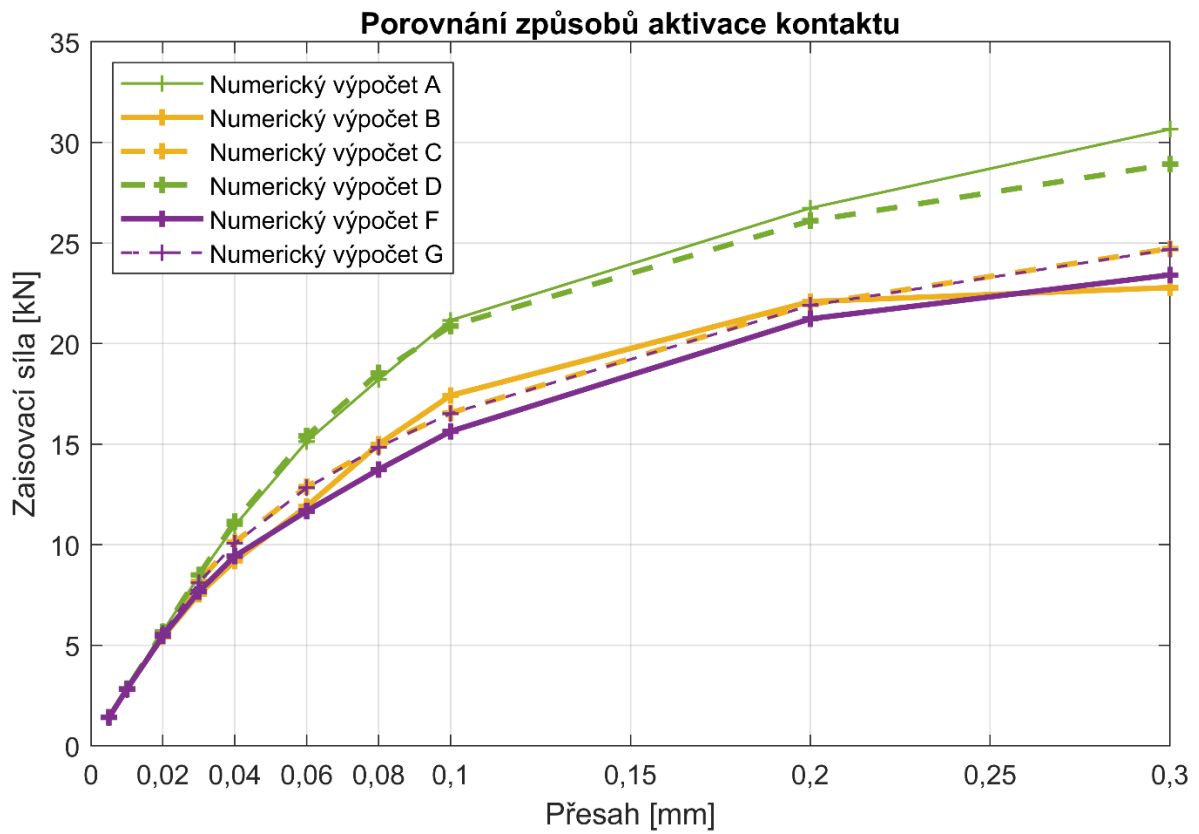


Obr. 46 - Porovnání výsledků zalisovací síly u modelů z hlediska geometrie

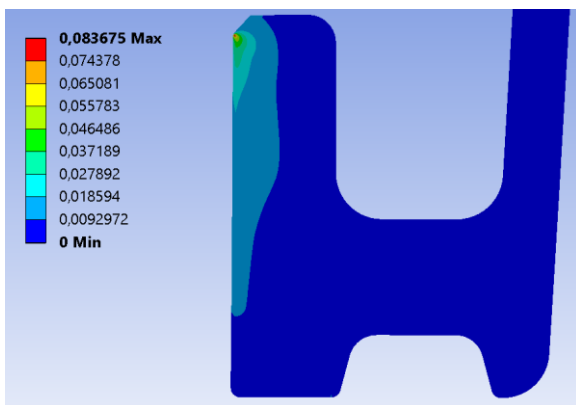
7.7.2 Porovnání modelů z hlediska tvorby spoje

Z hlediska tvorby spoje mohly být mezi sebou porovnány dvojice modelů A-D, B-C, E-H a F-G. Dvojice modelů **E** a **H** byla z porovnání vyřazena ze stejných důvodů jako u předchozího porovnání – nedostatku vypočtených hodnot modelu **E** a částečně i modelu **H**. Srovnány zde budou pouze hodnoty zalisovací síly, jelikož vylisovací síla je spočtena pouze u poloviny modelů – modelů se simulací přímého zalisování a vylisování (nebyla by dvojice pro srovnání). Srovnání podle aktivace kontaktu lze vidět na Obr. 47. Zde si lze všimnout, že výraznější odchylky vznikají až u přesahu 0,1 mm a více.

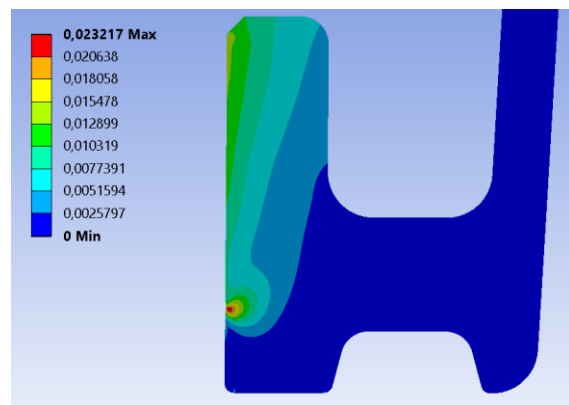
Největší rozdíl u těchto dvou přístupů je velikost plastické deformace, která přímo souvisí s velikostí zalisovací a vylisovací síly. Totiž čím větší plastická deformace vznikne při lisování, tím menší obě síly jsou. Tento jev lze pozorovat např. na Obr. 42, kde se u experimentálně získaných výsledků a MKP modelů vypočítaná síla se zvyšujícím se přesahem více odchyluje od lineárního analytického řešení. To je způsobeno úbytkem aktivní délky spoje. Na Obr. 48 je zobrazena velikost plastické deformace u modelů s přímým zalisováním, naopak na Obr. 49 je plastická deformace u modelů s aktivací kontaktu. Oba výsledky pochází z modelů s přesahem 0,3 mm.



Obr. 47 - Porovnání výsledků zaisovací síly u modelů z hlediska tvorby spoje



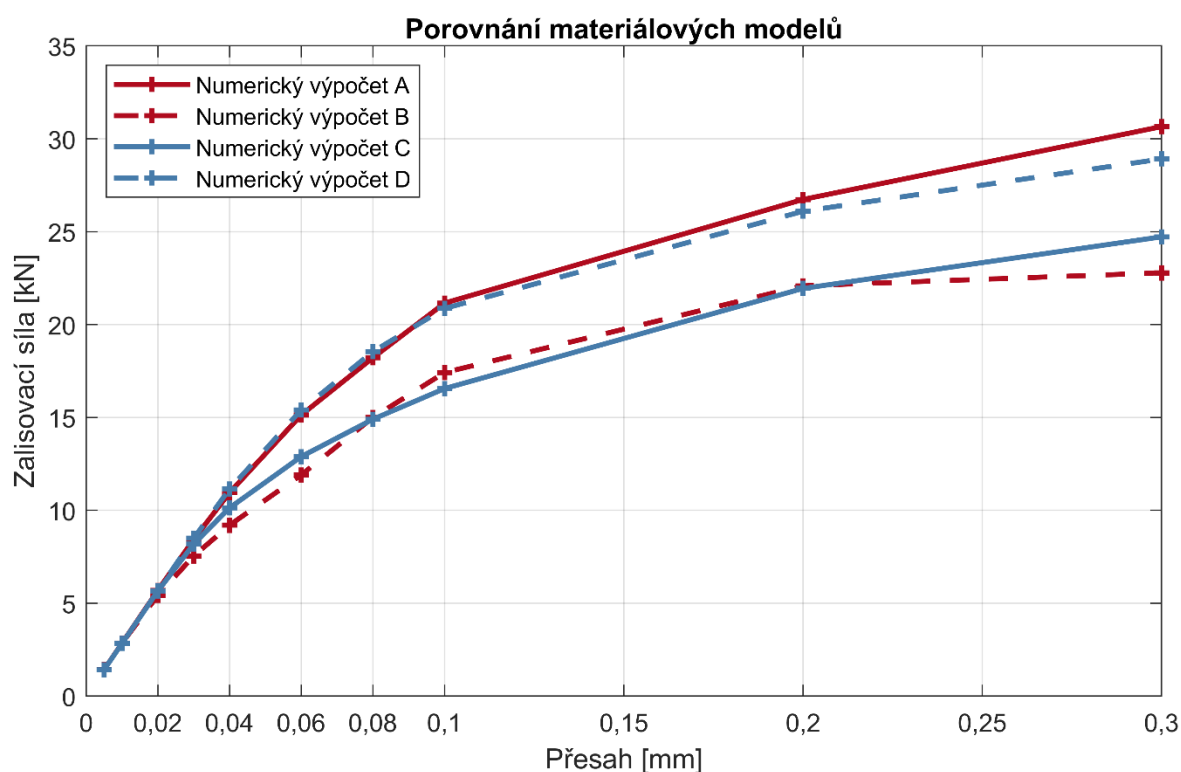
Obr. 48 - Plastická deformace u modelu s přímým zalisováním



Obr. 49 - Plastická deformace u modelu s aktivací kontaktu

7.7.3 Porovnání modelů z hlediska materiálového modelu

Z hlediska použitého materiálového modelu mohly být mezi sebou porovnány modely A-B, C-D, E-F a G-F. Porovnány byly nakonec pouze dvojice modelů A-B a C-D, jelikož pro porovnání E-F nebylo dostatek dat a dvojice G-H byla úmyslně vyřazena, jelikož její výsledky se překrývaly s výsledky modelů A a D, což snižovalo celkovou přehlednost grafu. Srovnání lze vidět na Obr. 50. Stejně jako u předchozích grafů jsou porovnávané dvojice označeny stejnou barvou. Plnou čarou jsou vyznačeny výsledky modelů s Cast Iron materiálovým modelem a čárkovanou čarou jsou vyznačeny výsledky modelů s multilineárním izotropním zpevněním. U obou porovnávaných dvojic si lze všimnout poměrně velkého rozdílu mezi výsledky, z čehož vyplývá, že volba materiálového modelu hraje u nalisovaného spoje největší roli v přesnosti výsledků. Na druhou stranu nelze přesně říci, jaký z materiálových modelů je více vyhovující, protože se výsledky modelů s oběma materiálovými modely poměrně dost odchyľují od experimentálního měření (viz Obr. 42 a Obr. 43).

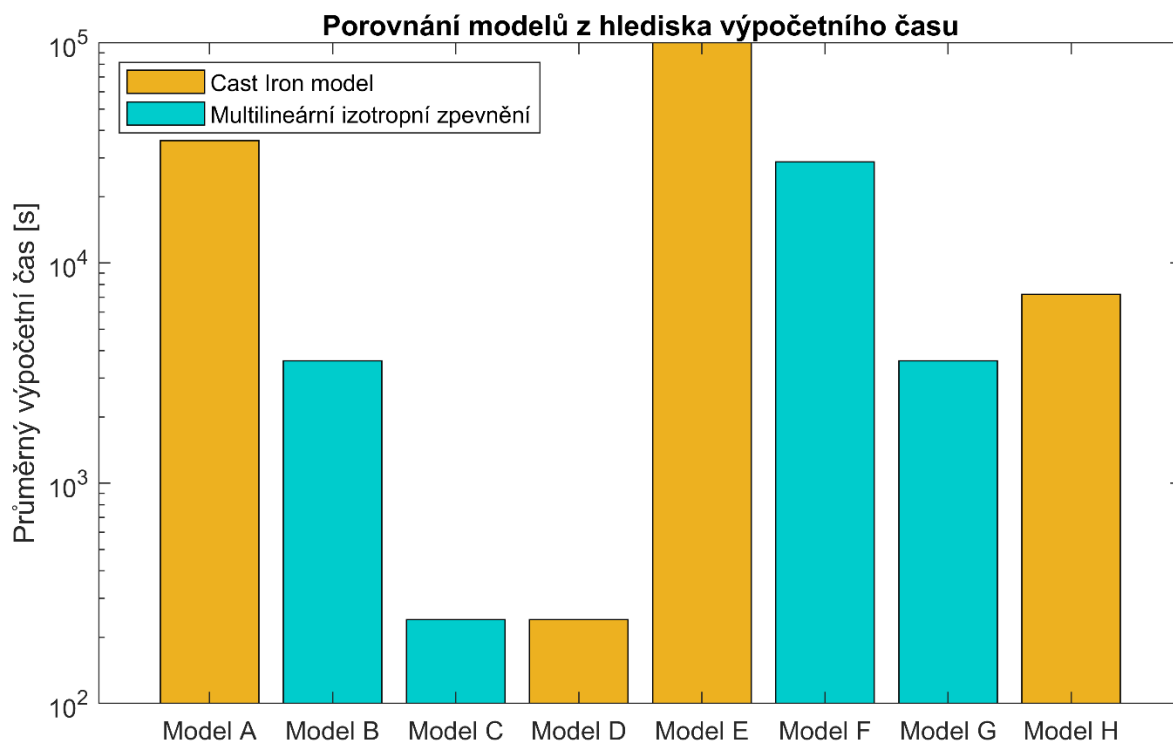


Obr. 50 - Porovnání výsledků zalisovací síly u modelů z hlediska materiálového modelu

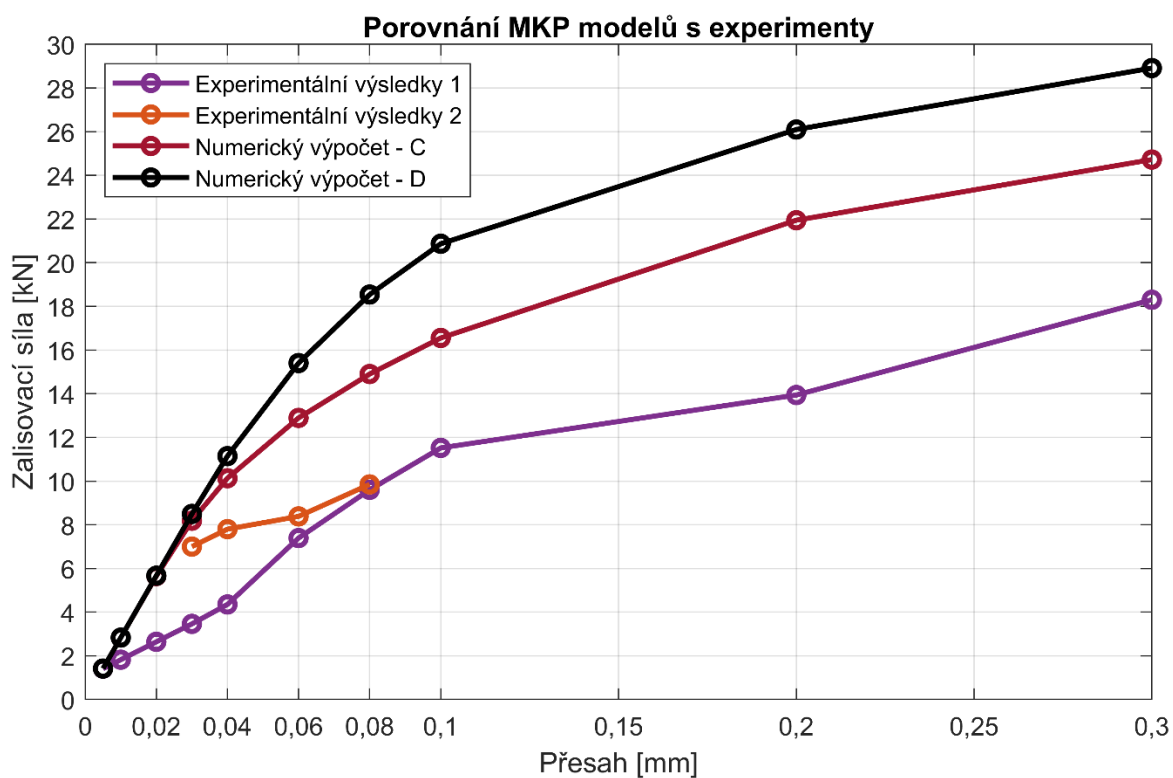
7.7.4 Porovnání z hlediska výpočetního času

Každý z použitých modelů byl jinak výpočetně složitý, z čehož vyplývá, že i u každého modelu trvalo různý čas úlohu vyřešit. Některé modely byly tak časově náročné, že i kdyby vykazovaly o něco přesnější výsledky než ostatní modely, v praxi by se je nevyplatilo používat. K účelu porovnání modelů z hlediska jejich časové náročnosti byl vypracován sloupcový graf s orientačními průměrnými výpočetními časy všech modelů (viz Obr. 51). Jednotlivé modely byly v grafu barevně odlišeny podle použitého materiálového modelu. Časově nejlépe vychází modely C a D, jejichž výpočet trval v řádu jednotek minut. Naopak nejhůře vycházejí modely

A a **E**, jejichž výpočet trval kvůli velmi malým časovým inkrementům i jednotky až desítky hodin. Právě z tohoto důvodu právě nebyly získány všechny výsledky u modelu **E**.



Obr. 51 - Porovnání modelů z hlediska výpočetního času



Obr. 52 - Porovnání MKP modelů s experimenty

7.7.5 Celkové vyhodnocení

Z časového hlediska vycházejí nejlépe modely **C** a **D**. Tyto modely je dále vhodné znovu porovnat s oběma experimenty pro vyhodnocení, zda se numericky vypočtené hodnoty shodují s experimentálně změřenými hodnotami. Toto srovnání je zobrazeno na Obr. 52. Jak lze na grafu vidět, hodnoty MKP modelů a experimentů se poměrně liší, což může být způsobeno mnoha příčinami. Hlavní příčinou je pravděpodobně nepřesná hodnota součinitele tření mezi materiály obou součástí. Pouze malá změna tohoto součinitele může výrazně ovlivnit výsledky zalisovací a vylisovací síly. Experimentálními hodnotám se sice více blíží model **C** (s multilineárním izotropním zpevněním), ale při změně součinitele tření by zase naopak mohl být blíže model **D** (Cast Iron model), takže momentálně bohužel nelze s jistotou říci, jaký model se více blíží realitě.

8 Postup modelování nalisovaného spoje

8.1 Geometrie

Při modelování nalisovaného spoje je třeba se nejprve rozhodnout, jaká dimenze úlohy bude řešena, respektive jaká bude dimenze použité geometrie spoje. Ne vždy lze uvažovat spojované součásti jako rotačně symetrické nebo symetrické podle nějaké roviny. V tom případě musíme spoj modelovat jako celý 3D model. Vždy je výhodnější z hlediska výpočetního času nějak model zjednodušit, ať už na čtvrtinu 3D modelu, určitou výseč nebo rovnou pouze na 2D osově symetrický (axisymetrický) model. Porovnání modelů v předchozí kapitole ukazuje, že rozdíl mezi 3D a 2D modelem je zanedbatelný z hlediska samotných výsledků, ale dramatický rozdíl je ve výpočetním čase. Z tohoto důvodu je skoro vždy lepší použít 2D rotačně symetrický model. Výjimkou by mohla být výrazná nesymetrie lisovaných součástí, což může ovlivnit tuhost jednotlivých součástí v různých směrech.

8.2 Materiálový model

Dále je třeba se rozhodnout, jaké materiálové modely budou použity. Při zjišťování hodnot zalisovací a vylisovací síly, ale i např. napětí nebo deformací, hrají materiálové modely velkou roli v přesnosti výsledků. Jelikož v nalisovaném spoji vznikají určité plastické deformace (výjimkou jsou spoje s velmi malými přesahy), tak nemá význam uvažovat o jiném modelu, než elasto-plastickém. Ideální stav je, když obě součásti (hřídel i náboj) jsou ze stejného materiálu a je použit stejný materiálový model. Často však jsou použité materiály odlišné a tehdy by měla být pozornost zaměřena spíše na materiálový model měkčího a poddajnějšího z materiálů, u kterého předpokládáme větší výskyt plastických deformací. Více plastických deformací se většinou vyskytuje na náboji, jelikož povrch hřídele se často nějak tepelně nebo chemicko-tepelně zpracovává (např. karbonitridace), a tím je ještě tvrdší.

Poté je třeba se rozhodnout jaký mechanismus zpevnění použít, jelikož pro každý druh materiálu nebo režim zatěžování se může hodit jiný. Jak bylo zmíněno v kapitole 6.4 o elasto-plastických materiálových modelech, tak např. model s izotropním zpevněním se hodí pouze pro tvárné materiály monotónně zatěžované. Pro cyklické zatěžování se zase více hodí Chabocheův model zpevnění.

Po výběru mechanismu zpevnění následuje výběr konkrétního materiálového modelu. Tedy pokud se rozhodneme pro model s izotropním zpevněním, tak je dále třeba zvolit, zda půjde o model s bilineárním, multilineárním či nelineárním zpevněním. Pokud budeme vyšetřovat pouze zalisování spoje a následné vylisování, tak jde o monotónní proces, jelikož

zalisování se dá považovat za zatížení součástí do plastické oblasti a vylisování jako odlehčení (při vylisování nevznikají žádné plastické deformace). Můžeme tedy použít model s izotropním zpevněním.

Speciálním případem je použití elasto-plastického materiálového modelu Cast Iron. Ten je vhodný pro materiály s rozdílným chováním (rozdílnou mezí kluzu a mezí pevnosti) v tahu a tlaku. Tento model je však výrazně náročnější na zkonvergování, takže je ho výhodné použít pouze u přesnějších výpočtů.

8.3 Sít'

Dalším krokem je nasítování geometrie. Zde platí nutnost mít stejnou síť v oblastech, kde jsou součásti v kontaktu. Navíc by síť v těchto oblastech měla být dostatečně jemná, a to nejen na povrchu, ale i blízké oblasti povrchu (podpovrchové oblasti), kde vznikají velká napětí a deformace. Mimo oblast kontaktu už by síť měla být hrubší z důvodu minimalizace výpočetního času. Hrubší síť zde tolik nevádí, jelikož zde už nebývají velká posunutí, a je nutná pouze k určení celkové tuhosti součásti. Při přímé simulaci zalisování je vhodné udělat síť jemnější než při prosté aktivaci kontaktu.

8.4 Kontakty

Velmi důležitým krokem při modelování nalisovaného spoje je tvorba kontaktů. Hlavní kontakt se nachází mezi vnitřní válcovou plochou náboje a vnější válcovou plochou hřídele. Tento kontakt by měl být definován jako kontakt se třením (už jenom z definice nalisovaného spoje). Vhodné je zvolit plochu hřídele jako „Target“ (Master) a plochu náboje jako „Contact“ (Slave), protože náboj bývá poddajnější než hřídel. V systému ANSYS je doporučena volba kontaktu Augmented Lagrange, která je zvolena jako výchozí. S tím souvisí i rozhodnutí, zda bude nalisovaný spoj modelován jako přímá simulace lisování a vylisování, či pouze aktivace kontaktu v již smontovaném stavu. Aktivace kontaktu je mnohem rychlejší a jednodušší na konvergenci, než simulace zalisování a vylisování, ale nevystihuje tolik plastické zdeformování náboje na začátku lisování. Z toho lze i usoudit, že vylisovací síla bude u těchto dvou typů modelu vycházet rozdílně, jelikož přímo závisí na plastické deformaci obou součástí (respektive záleží, jak velká délka nalisovaného spoje pořád vytváří potřebný kontaktní tlak).

8.5 Krokování úlohy

U nelineárních úloh je velmi důležitým parametrem časový inkrement (neboli časový mezikrok), který vyjadřuje, na kolik úseků se rozdělí aplikace okrajových podmínek. To znamená, že když zadáme posunutí o 20 mm, tak bude rozděleno na určitý počet mezikroků, během kterých se přírůstkově bude zvětšovat od 0 do 20 mm (z 0 na 100 % okrajové podmínky, respektive z času 0 do času 1). Rozdělení na mezikroky se dá zadat pomocí celkového počtu mezikroků nebo přímo pomocí velikosti časového inkrementu. V systému ANSYS se rozlišuje časové krokování na krokování řízené systémem, automatické krokování a manuální krokování. Krokování řízené systémem je většinou u takto nelineárních úloh nevhodné a úloha nezkonverguje. Automatické krokování je nejvhodnější, jelikož je uživatelem zadána počáteční velikost inkrementu a minimální a maximální velikost inkrementu. Mezi těmito hodnotami systém automaticky zvětšuje a zmenšuje velikost inkrementu, tak jak je to potřeba. U manuálního krokování je zadána pevná velikost inkrementu (nebo daný počet mezikroků), která se nemění.

Nejvhodnější u nelineárních úloh je automatické krokování, kdy lze při nekonvergenci řešení jednotlivé velikosti inkrementu dynamicky měnit, tak aby byl výpočet úspěšný. Při

použití modelu Cast Iron je důležité zadat natolik malou velikost časového inkrementu, aby se minimalizovala velikost přírůstku plastické deformace, která dělá největší problémy ve výpočtu.

8.6 Problémy s konvergencí

Pokud úloha nekonverguje, dá se v modelu provést několik úprav, které mohou problém vyřešit. Nejzákladnějším řešením je snížení časového mezikroku, které může v mnoha případech pomoci, ale za cenu zvýšení výpočetního času. Ne vždy ale toto bude fungovat. V tom případě existuje mnoha dalších řešení. Pokud chceme řešit problémy s konvergencí úlohy, je třeba si uvědomit, co tyto problémy může způsobovat. Nejčastěji jsou tyto problémy způsobeny nelinearitami, jako je kontakt či nelineární materiálový model.

Problémy s konvergencí kontaktních úloh se dají řešit několika způsoby. Prvním z nich je změna formulace kontaktu na jednodušší formulaci, která snadněji zkonverguje. V našem případě z výchozího Augmented Lagrange na formulaci Pure Penalty. Dále lze snížit normálovou tuhost kontaktu (Normal Stiffness Factor), což zvýší povolenou hodnotu penetrace, ale zlepší konvergenci na úkor přesnosti výsledků. Také lze přidat stabilizační tlumení (Stabilization Damping Factor), které by mohlo pomoci při problémech s konvergencí na počátku lisování. Stabilizační tlumení tlumí relativní pohyb mezi kontaktními plochami, ale tímto tlumením vnášíme do systému umělou energii, což ovlivňuje přesnost výpočtu.

9 Závěr

Cílem této bakalářské práce byla analýza možností modelování nalisovaného spoje pomocí MKP. Hlavním cílem bylo ze zjištěných poznatků během této analýzy vypracovat doporučený postup modelování nalisovaných spojů. Dále bylo cílem provést rešerši na modelování elasto-plastických materiálů.

V teoretické části byla nejprve provedena stručná rešerše na napínáky řemenů, jelikož v praktické části byly zhotoveny MKP modely nalisovaného spoje, který je součástí konstrukce napínáku vyráběného společností Mubea – zadavatelem této bakalářské práce. Dále byla provedena rešerše nalisovaných spojů, ve které kladen dán důraz na analytické výpočty použité dále v praktické části. Poté se práce zabývá samotnou metodou konečných prvků, jelikož se jedná o poměrně složité téma a bez jeho znalosti se u takto složitého problému nelze obejít. Důraz byl dán na nelineární úlohy v MKP, mezi které modelování nalisovaného spoje bezesporu patří, a na jednotlivé nelinearity objevující se při výpočtech pomocí MKP. Posledním zpracovaným tématem rešerše byly materiálové modely, zejména modely elasto-plastické, které byly hlavním cílem teoretické části. Součástí tohoto tématu byla i rešerše teorie plasticity, která s elasto-plastickými materiálovými modely přímo souvisí.

V praktické části bylo nejprve vyjasněno konkrétní zadání a metodika řešeného úkolu. Dále byl v práci popsán postup tvorby všech použitých modelů v systému ANSYS. Z těchto modelů byly vypočteny hodnoty zalisovací a vylisovací síly pro deset různých hodnot přesahu. Shodné hodnoty byly získány z experimentálních měření provedených společností Mubea a tyto hodnoty byly zpracovány tak, aby se daly přímo porovnat s hodnotami získanými jiným způsobem. Pro porovnání byly ještě tyto síly vypočteny z analytických vztahů uvedených v rešerši. Všechny získané hodnoty byly porovnány z různých hledisek a podle různých kritérií. Ze získaných poznatků byl poté vypracován postup modelování nalisovaného spoje, kde byly shrnuty hlavní kroky a rozhodnutí při tvorbě modelu tohoto spoje a byl sepsán souhrn rad a doporučení, co dělat, když úloha nebude konvergovat (nevypočte se). Všechny tyto rady byly vyzkoušeny a otestovány při tvorbě samotných modelů v praktické části.

Z porovnání bylo zjištěno, že použití 3D modelů při modelování nalisovaného spoje nemá žádný význam, jelikož rozdíly v přesnosti výpočtu oproti 2D axisymetrickému modelu jsou zanedbatelné, a navíc 3D model je výrazně náročnější na výpočetní výkon, a tedy i na výpočetní čas. Dále bylo zjištěno, že modelovat nalisovaný spoj jako přímou simulaci zalisování a vylisování má význam až od vyšších hodnot přesahů, kdy se více projevuje rozdíl mezi modely v plastickém zdeformování při spojení. Ohledně materiálových modelů bylo zjištěno, že při použití zkoumaného materiálového modelu Cast Iron vyjdou poměrně odlišné výsledky, které se však liší od experimentálně změřených hodnot ještě více než výsledky materiálového modelu s multilineárním izotropním zpevněním. Použití modelu Cast Iron je však vhodné pouze v kombinaci s pouhou aktivací kontaktu, jelikož u přímé simulace zalisování se objevovaly výrazné problémy s konvergencí.

Z porovnání časové náročnosti vyšly nejlépe modely **C** a **D**, které se liší pouze použitým materiálovým modelem. Při porovnání těchto modelů s experimentálně změřenými daty se žádný z nich výrazně nepřibližoval experimentálním hodnotám. Blíže k těmto hodnotám však byl model s multilineárním izotropním zpevněním, což ale nemusí být úplně vypovídající, jelikož model Cast Iron by měl lépe vystihovat skutečnost. Pro zpřesnění numerického výpočtu by se dále dalo provést několik věcí. Bylo by vhodné lépe zjistit přesnou hodnotu součinitele tření f , jehož skutečná hodnota je neznámá. Tato hodnota je přitom naprosto rozhodující při výpočtu zalisovací i vylisovací síly. Jako další by se dalo provést přesnější zjištění vlastností obou použitých materiálů.

Seznam použitých zdrojů

- [1] O skupině Mubea. In: *Mubea* [online]. 2019 [cit. 2023-05-14]. Dostupné z: <https://www.pracemubea.cz/skupina-mubea/>
- [2] Mubea logo. In: *Práce Mubea* [online]. 2019 [cit. 2023-05-11]. Dostupné z: <https://www.pracemubea.cz/wp-content/uploads/2017/11/mubea-logo.png>
- [3] Závod Žebrák. In: *Mubea* [online]. 2019 [cit. 2023-05-14]. Dostupné z: <https://www.pracemubea.cz/zavod-zebrak/>
- [4] Mubea Žebrák. In: *Mubea* [online]. 2023 [cit. 2023-05-11]. Dostupné z: https://www.mubea.com/sites/default/files/styles/max_640/public/2019-05/mubea-standort-zebrak.jpg?itok=AZfbDuy8
- [5] *Mubea Academy: Belt Tension Systems*. Version 2.0. Muhr und Bender KG, 2016.
- [6] KUBEC, Václav a Jaroslav KRÁTKÝ. *Studijní podklady k předmětům Části a mechanismy strojů 2*. 1. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta strojní, 2019.
- [7] KRÁTKÝ, Jaroslav a Eva KRÓNEROVÁ. *CMSI - 4. cvičení - Spoje nalisováním, spoje sevřením a rozpěrnými kroužky*. 1. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta strojní.
- [8] KALÁB, Květoslav. *Části a mechanismy strojů pro bakaláře: Části spojovací*. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2007. ISBN 978-80-248-1290-8.
- [9] BOHÁČEK, František. *Části a mechanismy strojů I, Základy konstruování, Spoje*. 2. dopl. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1984. ISBN 55-574-84.
- [10] ZAJÍČEK, Vít. *Srovnání FEM a BEM* [online]. Brno, 2009 [cit. 2023-05-15]. Dostupné z: <https://core.ac.uk/download/pdf/30290884.pdf>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Tomáš Návrát, Ph.D.
- [11] Silové spoje hřídele s nábojem. In: *MITCalc* [online]. [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: <https://www.mitcalc.com/doc/shaftconf/help/cz/shaftconf.htm>
- [12] HOSNEDL, Stanislav. *Obecné strojní části I: teoretické základy, spoje, přenosové části, otočná uložení, akumulátory energie, hřídelové spojky*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2012. ISBN 978-80-261-0125-3.
- [13] FUSEK, Martin a Jaroslav ROJÍČEK. *Metoda konečných prvků I* [online]. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2013 [cit. 2023-05-16]. ISBN 978-80-248-3023-0. Dostupné z: https://projekty.fs.vsb.cz/463/edubase/VY_01_010/Metoda%20kone%20%C4%8Dn%C3%BDch%20prvk%C5%AF%201/02%20Text%20pro%20e-learning/publikovat/komplet/METODA%20KONE%20%C4%8CN%C3%9DCH%20PRVK%C5%AE%20I.pdf
- [14] FUSEK, Martin a Radek HALAMA. *MKP a MHP* [online]. [cit. 2023-02-21]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecnych_prvku_a_hranicnic_h_prvku.pdf

- [15] BLAHETA, Radim. *Matematické modelování a metoda konečných prvků* [online]. [cit. 2023-05-04]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody_2.pdf
- [16] BROŽOVSKÝ, Jiří a Alois MATERNA. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice* [online]. [cit. 2023-05-04]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecnych_prvku_stavebni_mechanika.pdf
- [17] MADIER, Dominique. *Practical Finite Element Analysis For Mechanical Engineers*. 1. Hamilton: FEA Academy, 2020. ISBN 978-1-9990475-0-4.
- [18] LAŠOVÁ, Václava. *Metoda konečných prvků ve výpočtech obráběcích strojů*. 1. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. ISBN 978-80-261-0008-9.
- [19] Finite element method. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2023-05-16]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method
- [20] MUELLER, Guenter. The history of the finite element method. In: *CADFEM* [online]. [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: <https://www.cadfem.net/at/en/cadfem-informs/media-center/cadfem-journal/fem-history.html>
- [21] SABAT, Lovely a Chinmay KUNDU. History of Finite Element Method: A Review. In: *Springer Link* [online]. Springer Nature Switzerland AG, 2021 [cit. 2023-05-16]. Dostupné z: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-15-4577-1_32
- [22] ANSYS Academic. In: *ANSYS* [online]. ANSYS, Inc., 2023 [cit. 2023-05-16]. Dostupné z: https://images.ansys.com/is/image/ansys/2020-12-ansys-academic-ansys-student-product?&wid=402&op_usm=0.9,1.0,20,0&fit=constrain,0
- [23] Understanding the Finite Element Method. In: *The Efficient Engineer* [online]. [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: <https://efficientengineer.com/finite-element-method/>
- [24] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [25] Hyperelastic Materials. In: *Simscale* [online]. [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: <https://www.simscale.com/docs/simulation-setup/materials/hyperelastic-materials/>
- [26] SEDLÁK, Josef a Radim HALAMA. *Základy inkrementální teorie plasticity: Teoretický základ* [online]. [cit. 2023-05-08].
- [27] Plasticity. In: KELLY, Piaras. *Solid Mechanics Part II: Engineering Solid Mechanics* [online]. [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: https://pkel015.connect.amazon.auckland.ac.nz/SolidMechanicsBooks/Part_II/08_Plasticity/08_Plasticity_Complete.pdf
- [28] JENÍK, Ivan. *Identifikace parametrů elasto-plastických modelů materiálu z experimentálních dat* [online]. Brno, 2015 [cit. 2023-05-25]. Dostupné z: <https://dspace.vutbr.cz/bitstream/handle/11012/38782/final-thesis.pdf?sequence=->

1&isAllowed=y. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Petr Kubík.

- [29] SERVÍT, Radim, Eva DOLEŽALOVÁ a Miloslav CRHA. *Teorie pružnosti a plasticity I*. 1. Praha: SNTL, 1981. ISBN 04-024-81.
- [30] BITTNAR, Zdeněk a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky I* [online]. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1992 [cit. 2023-05-07]. ISBN 80-01-00855-X. Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/6/69/Nmm1.pdf>
- [31] *ANSYS Mechanical APDL 2023 R1: Theory Reference*. ANSYS, Inc., 2023.
- [32] 4.4. Rate-Independent Plasticity. In: *ANSYS Mechanical APDL 2023 R1: Material Reference*. ANSYS, Inc., 2023.