



**ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI**

Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

Diplomová práce

Ověření a porovnání metodik modelování 3D  
tkaných kompozitních materiálů

Vypracoval: Bc. Eduard Šimůnek  
Vedoucí práce: Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.

Plzeň, 2022

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně s použitím pramenů a zdrojů uvedených na konci diplomové práce.

V Plzni dne: .....

Podpis: .....

# Poděkování

Rád bych zde poděkoval vedoucímu práce Ing. Tomáši Kroupovi, Ph.D., za přívětivé vedení práce a podnětné rady při prezentaci dílčích výsledků práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Janu Bartoškovi, Ph.D., za poskytnutou pomoc a cenné rady při zpracovávání úloh ve výpočtovém prostředí VPS. Také bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni za psychickou a materiální podporu.

# Abstrakt

Tato diplomová práce je zaměřena na rozdílné způsoby modelování 3D tkaných kompozitních materiálů pomocí metody konečných prvků v softwaru VPS. Cílem práce bylo provést analýzu výsledků modelů standardizovaných tahových, tlakových a smykových zkoušek a porovnat je s experimenty. K tvorbě modelů 3D tkaných kompozitů byly při diskretizaci snopků a matrice použity přístupy Voxel, 3D snopky a Shell. Voxel přístup diskretizuje celý model pravidelnou sítí elementů, které jsou rozděleny na prvky snopků a matrice. U 3D snopků je využita přesná diskretizace snopků a pravidelná síť matrice. U Shell přístupu je snopek diskretizován skořepinovými prvky, které jsou umístěny na pozici střední roviny snopku.

Nejprve byly vzájemně a s experimenty porovnány výsledky simulací různě zatížených reprezentativních objemových elementů (RVE), které představují nekonečně se opakující strukturu díky aplikaci periodických okrajových podmínek na hranici RVE. K určení materiálových parametrů snopku a materiálových parametrů tkaniny byla provedena víceúrovňová homogenizace ve výpočtovém prostředí VPS. Poté byly vytvořeny modely standardizovaných testů, kde jsou vlastnosti vzorků popsány homogenizovanými materiálovými parametry tkaniny. Stejně vzorky byly vytvořeny kopírováním Voxel RVE a Shell RVE do geometrie kompozitních vzorků použitých při standardizovaných testech.

**klíčová slova:** 3D tkanina, víceškálová homogenizace, RVE, periodické okrajové podmínky, Voxel, Shell, VPS, standardizované testy, snopek, matrice

# Abstract

This master's thesis is focused on different ways of modeling 3D woven composite materials using the finite element method in VPS software. The aim of the work was to analyze the results of models of standardized tensile, compressive and shear tests and compare them with experiments. The Voxel, 3D yarns and Shell approaches were used to discretize the yarns and matrix to create models of 3D woven composites. The Voxel approach discretizes the whole model by a regular mesh, which is divided into yarn and matrix elements. For 3D yarns, precise discretization of the yarns and a regular matrix mesh are used. In the Shell approach, the yarn is discretized by the shell elements that are located at the position of the middle plane of the yarn.

First, the results of simulations of differently loaded representative volume elements (RVE), which represent an infinitely repeating structure because of the application of periodic boundary conditions at the RVE boundary, were compared with each other and with experiments. To determine the material parameters of the yarn and the material parameters of the fabric, a multiscale homogenization was done in the VPS computing environment. Then, models of standardized tests were created, where the properties of the samples are described by homogenized material parameters of the fabric. The same samples were created by copying Voxel RVE and Shell RVE into the geometry of the composite samples used in the standardized tests.

**key words:** 3D fabric, multiscale homogenization, RVE, periodic boundary conditions, Voxel, Shell, VPS, standardized tests, yarn, matrix

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Materiálové modely</b>	<b>12</b>
2.1	Lineární elasticita . . . . .	12
2.1.1	Ortotropní materiál . . . . .	13
2.1.2	Izotropní materiál . . . . .	13
2.2	Plasticita . . . . .	14
2.3	Poškození ortotropního materiálu . . . . .	15
2.4	Kritéria porušení . . . . .	16
2.4.1	Kritérium maximálních napětí . . . . .	17
2.4.2	Puck: Mezivláknové porušení (IFF) . . . . .	17
2.4.3	Puck: Porušení vláken (FF) . . . . .	21
2.4.4	Porušení při působení plastických deformací . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Stanovení materiálových parametrů</b>	<b>23</b>
3.1	Stanovení materiálových parametrů snopku . . . . .	23
3.2	Stanovení materiálových parametrů tkaniny . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Přístupy modelování 3D tkaných kompozitních materiálů</b>	<b>31</b>
4.1	Voxel . . . . .	33
4.2	3D snopky . . . . .	35
4.3	Shell . . . . .	36
4.4	Homogenizovaný materiál . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Standardizované testy</b>	<b>39</b>
5.1	Tahový test . . . . .	39
5.2	Tlakový test . . . . .	40
5.3	Smykový test . . . . .	40
<b>6</b>	<b>MKP modely standardizovaných testů</b>	<b>42</b>
6.1	MKP model tahové zkoušky . . . . .	42
6.2	MKP model tlakové zkoušky . . . . .	45
6.3	MKP model smykové zkoušky . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Výsledky</b>	<b>50</b>
7.1	Porovnání výsledků modelů RVE . . . . .	50
7.2	Porovnání výsledků standardizovaných testů . . . . .	54
7.3	Shrnutí výsledků . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>62</b>

## Seznam použitého značení

Symbol	Jednotka	Název
$O(1, 2, 3)$		lokální kartézský souřadnicový systém materiálových os kompozitu
$O(X, Y, Z)$		globální kartézský souřadnicový systém
$C$	[Pa]	matice materiálové tuhosti
$C_0$	[Pa]	počáteční (nepoškozená) matice materiálové tuhosti
$d$	[–]	parametr poškození materiálu
$E$	[Pa]	modul pružnosti v tahu izotropního tělesa
$E_i$	[Pa]	modul pružnosti v tahu ve směru osy $i$
$E_i^{\text{snopek}}$	[Pa]	modul pružnosti v tahu ve směru osy $i$ pro materiál snopků na mesoúrovni
$E_i^{\text{tkanina}}$	[Pa]	modul pružnosti v tahu ve směru osy $i$ pro materiál tkaniny na makroúrovni
$F$	[N]	zatěžující síla
$G$	[Pa]	smykový modul izotropního tělesa
$G_{ij}$	[Pa]	smykový modul v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$G_{ij}^{\text{snopek}}$	[Pa]	smykový modul v rovině $\hat{i}\hat{j}$ pro materiál snopků na mesoúrovni
$G_{ij}^{\text{tkanina}}$	[Pa]	smykový modul v rovině $\hat{i}\hat{j}$ pro materiál tkaniny na makroúrovni
$K$	[Pa]	objemový modul izotropního tělesa
$p_{12}^+, p_{12}^-, p_{23}, p_{2\psi}^+, p_{2\psi}^-$	[–]	sklon mezní plochy
$R_{12}$	[Pa]	smyková pevnost laminy v rovině $\hat{1}\hat{2}$
$R_{12}^A$	[Pa]	lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování smykovým napětím $\tau_{21}$ ,
$R_{13}$	[Pa]	smyková pevnost laminy v rovině $\hat{1}\hat{3}$
$R_{13}^A$	[Pa]	lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování smykovým napětím $\tau_{13}$
$R_{22}^A$	[Pa]	lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování normálovým napětím $\sigma_2$

$R_{22}^+$	[Pa]	pevnost laminy ve směru 2 v tahu
$R_{22}^-$	[Pa]	pevnost laminy ve směru 2 v tlaku
$\mathbf{S}$	[Pa <sup>-1</sup> ]	matice poddajnosti
$u_m^d$	[ $m$ (rad)]	posuv (rotace) závislého uzlu ve směru $m$ (kolem osy $m$ )
$u_m^i$	[ $m$ (rad)]	posuv (rotace) nezávislého uzlu ve směru $m$ (kolem osy $m$ )
$\mathbf{U}(n_d)$	[ $m$ ]	vektor posunutí závislých uzlů
$\mathbf{U}(n_i)$	[ $m$ ]	vektor posunutí nezávislého uzlu
$X_{11}^+$	[Pa]	podélná tahová pevnost laminy
$X_{11}^-$	[Pa]	podélná tlaková pevnost laminy
$\boldsymbol{\alpha}(n_d)$	[°]	vektor pootočení závislých uzlů
$\boldsymbol{\alpha}(n_i)$	[°]	vektor pootočení nezávislého uzlu
$\gamma_{ij}$	[–]	zkos v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	[–]	tenzor deformace
$\varepsilon_e$	[–]	elastická složka deformace
$\varepsilon_{ii}$	[–]	normálová deformace ve směru $i$
$\varepsilon_{ij}$	[–]	smyková deformace v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$\varepsilon_{IFF}(\Theta)$	[°]	index porušení pro mezivláknové porušení jako funkce úhlu natočení roviny působení napětí
$\varepsilon_p$	[–]	plastická složka deformace
$\zeta$	[–]	faktor smykového napětí
$\eta$	[–]	faktor tříosého napětí
$\Theta$	[°]	úhel natočení roviny působení napětí
$\Theta_{fp}$	[°]	úhel natočení lomové roviny
$\nu$	[–]	Poissonovo číslo izotropního tělesa
$\nu_{ij}$	[–]	Poissonovo číslo v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$\nu_{ij}^{\text{snopek}}$	[–]	Poissonovo číslo v rovině $\hat{i}\hat{j}$ pro materiál snopků na mesoúrovni
$\nu_{ij}^{\text{tkanina}}$	[–]	Poissonovo číslo v rovině $\hat{i}\hat{j}$ pro materiál tka- niny na makroúrovni
$\boldsymbol{\sigma}$	[Pa]	tenzor napjatosti
$\sigma_{11}^+$	[Pa]	tahové napětí ve směru 1
$\sigma_{11}^-$	[Pa]	tlakové napětí ve směru 1
$\sigma_{fib}$	[Pa]	napětí ve vláknech



$\sigma_i = \sigma_{ii}$	[Pa]	normálové napětí ve směru $i$
$\sigma_{iiu}^c$	[Pa]	mez pevnosti v tlaku ve směru $i$
$\sigma_{iiu}^t$	[Pa]	mez pevnosti v tahu ve směru $i$
$\sigma_n$	[Pa]	napětí působící ve směru normály v rovině lomu
$\sigma_y$	[Pa]	mez kluzu
$\sigma_y^0$	[Pa]	počáteční mez kluzu
$\tau_{ij}$	[Pa]	smykové napětí v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$\tau_{iju}$	[Pa]	smyková mez pevnosti v rovině $\hat{i}\hat{j}$
$\tau_{n1}$	[Pa]	smykové napětí v v rovině lomu
$\tau_{nt}$	[Pa]	smykové napětí v v rovině lomu
$\tau_{n\psi}$	[Pa]	výsledné smykové napětí v v rovině lomu
$\phi$	[–]	parametr celkového poškození při působení plastických deformací
$\phi_d$	[–]	parametr tažného poškození při působení plastických deformací
$\phi_s$	[–]	parametr smykového poškození při působení plastických deformací
$\psi$	[°]	úhel natočení roviny působení napětí

# 1 Úvod

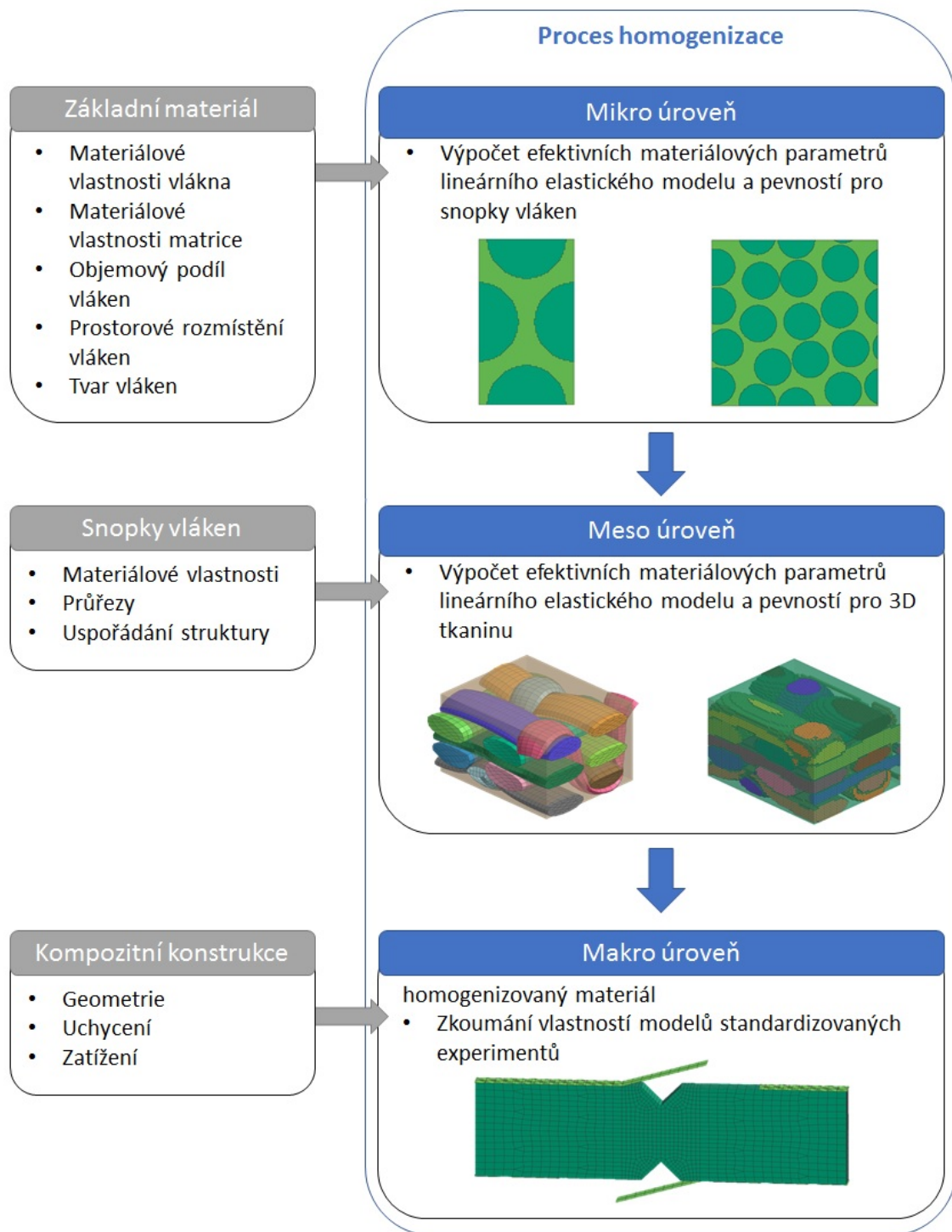
Kompozitní materiály jsou především díky svému vysokému poměru tuhosti a pevnosti k hmotnosti často využívané jako komponenty v leteckém, lodním a automobilovém průmyslu nebo jako sportovní pomůcky. Běžně používané lamináty mohou být mechanicky nejslabší ve spojení lamin. Odolnost kompozitu proti delaminaci lze zvýšit technologií sešití pomocí kolíků (Z-pinned laminates), nelze však takto sešít zakřivené kompozitní konstrukce a sešitím také dochází ke snížení mechanických vlastností laminátu v rovině [8]. Proto se často využívají různé 3D textilní kompozity, které jsou odolnější vůči delaminaci a rázu a vykazují vysokou strukturální stabilitu díky provázání snopků také ve směru tloušťky [9]. Lze je vyrábět pomocí různých 3D formovacích technik, jako je tkaní, pletení nebo splétání snopků textilie [10]. Z těchto technik je díky své účinnosti nejrozšířenější technika 3D tkaní kompozitních materiálů.

Mechanické vlastnosti 3D tkaných kompozitů úzce souvisí s architekturou tkaniny, která je určená výrobní technologií. Vliv architektury snopků na mechanické vlastnosti celé 3D tkané konstrukce je možné zjistit pomocí experimentálních testů. Aby se ušetřily časové i materiální náklady na testování, jsou vyvíjeny metody numerického modelování 3D tkaných kompozitních materiálů. Možnost simulovat libovolnou strukturu tkaniny a testovat různé fyzikální vlastnosti kompozitní struktury podporuje vývoj modelování 3D tkaných kompozitů pomocí numerických metod. Základem numerického modelování je co nejpřesněji popsat architekturu tkaniny. Víceškalová povaha, složitost vnitřní struktury 3D tkaného kompozitu a komplikované způsoby porušení mají za následek náročnost popisu 3D tkaného kompozitního materiálu pomocí numerického modelování.

3D tkané kompozity se skládají z propletených snopků, ty jsou tvořeny tisíci vlákny. Numerické modely jsou proto často uvažovány v různých měřítcích. Jedná se o mikroúroveň (měřítko vláken), mesoúroveň (měřítko snopků) a makroúroveň (měřítko základní tkané buňky). Proces výpočtu materiálových parametrů v různých škálách kompozitu a jejich zohlednění ve vyšších škálách se označuje jako víceškalová homogenizace. Schéma procesu homogenizace lze vidět na obrázku 1.

Tato práce je zaměřena na modelování 3D tkaných kompozitních materiálů pomocí metody konečných prvků. K procesu homogenizace byl použit nástroj poskytnutý společností MECAS ESI, s.r.o. Pomocí tohoto nástroje byla provedena homogenizace na mikroúrovni a mesoúrovni.

Princip homogenizace je v této práci využit k určení materiálových parametrů



Obrázek 1: Schéma procesu homogenizace

snopků a k určení materiálových parametrů tkaniny (homogenizovaný materiál). Jsou zde porovnány výsledky úloh na mesoúrovni pro tři přístupy diskretizace architektury snopků a matrice. Prvním způsobem je diskretizace pomocí Voxel reprezentativního objemového elementu (Voxel RVE), který je vytvořen z geometrie snopků pomocí nástroje poskytnutého společností MECAS ESI, s.r.o. Druhým příst

stupem je přesná diskretizace snopků pomocí 3D osmiuzlových prvků typu Solid (3D snopky RVE). A třetím přístupem je diskretizace snopků pomocí skořepinových prvků (Shell RVE).

Kromě porovnání Voxel RVE, 3D snopky RVE a Shell RVE při úlohách homogenizace na mesoúrovni byly v této práci vytvořeny modely celých kompozitních vzorků pomocí struktury Voxel RVE a Shell RVE. Tyto modely rozměrově odpovídající makroškále byly porovnány s výsledným homogenizovaným materiálem a s výsledky z experimentů při standardizovaných tahových, tlakových a smykových testech.

## 2 Materiálové modely

V této kapitole jsou uvedeny materiálové modely, které popisují chování konečno-prvkových modelů jednotlivých přístupů modelování 3D tkaných kompozitních materiálů.

- Snopky vláken, které jsou součástí přístupů Voxel, 3D snopky a Shell, jsou v této práci uvažovány jako ortotropní materiál s poškozením a porušením, které je popsáno Puckovo kritériem pro porušení vláken a mezivláknové porušení.
- Matrice, která je také součástí přístupů Voxel, 3D snopky a Shell, je uvažována jako izotropní elastoplastický materiál se zpevněním, poškozením a s porušením při působení plastických deformací.
- Výsledný homogenizovaný materiál tkaniny je popsán jako ortotropní materiál s poškozením a porušením, které je dáno kritériem maximálních napětí.

### 2.1 Lineární elasticita

V případech, kdy nedochází k plastickému tečení, matrice, snopky vláken i výsledný homogenizovaný materiál jsou uvažovány jako lineárně elastický materiálový model, kde je vztah mezi napětím  $\boldsymbol{\sigma}$  a deformací  $\boldsymbol{\varepsilon}$  vyjádřen Hookeovým zákonem

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{C}$  je matice materiálové tuhosti. Rovnici (1) lze vyjádřit v inverzním tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

kde  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$  je matice materiálové poddajnosti. Hookeův zákon v inverzním tvaru lze obecně pro anizotropní materiál a pravoúhlý souřadnicový systém materiálových os kompozitu  $\mathbf{O}(1, 2, 3)$  rozepsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

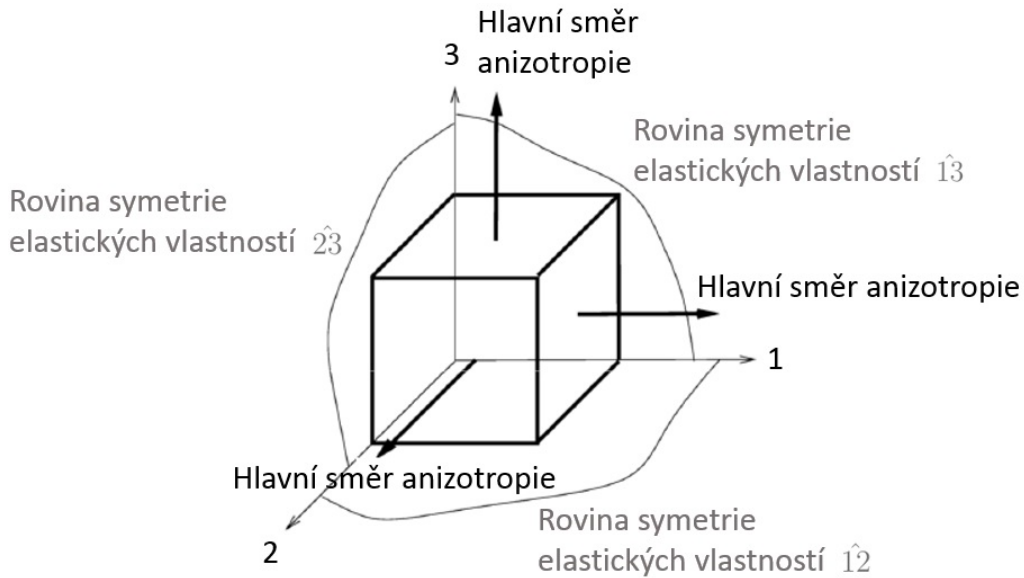
kde  $\varepsilon_{ii}$  jsou normálové deformace,  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  jsou zksoy,  $\sigma_{ii}$  normálová napětí a  $\tau_{ij}$  jsou smyková napětí. V následujících podkapitolách budou ve stručnosti popsány použité materiálové modely.

### 2.1.1 Ortotropní materiál

Ortotropní materiál má tři roviny symetrie elastických vlastností, jak je vidět na obrázku 2. Matice poddajnosti má tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kde  $E_1, E_2, E_3$  jsou moduly pružnosti,  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  jsou smykové moduly v příslušných rovinách a  $\nu_{ij}$  jsou Poissonova čísla, přičemž platí  $\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i$ . Ortotropní materiál je popsán devíti nezávislými parametry.



Obrázek 2: Ortotropní materiál

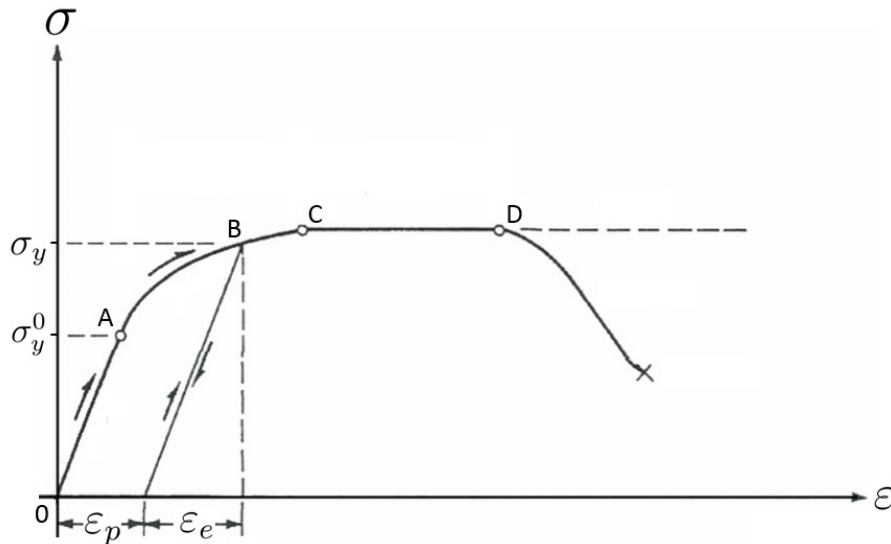
### 2.1.2 Izotropní materiál

Vlastnosti izotropního materiálu jsou stejné ve všech směrech. Matice poddajnosti  $\mathbf{S}$  je nezávislá na volbě Kartézského souřadnicového systému a má tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde  $E$  je modul pružnosti a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Izotropní materiál je popsán dvěma nezávislými parametry. Pro izotropní materiál může být jedním z těchto parametrů také smykový modul  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  nebo objemový modul  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ , který je měřítkem toho, jak je látka odolná vůči stlačení.

## 2.2 Plasticita



Obrázek 3: Schéma závislosti napětí–deformace pro 1D elastoplastický materiál

Plasticitu lze definovat jako vlastnost materiálu, kdy po zatížení nad mez kluzu  $\sigma_y^0$  a úplném odlehčení zůstává v materiálu trvalá deformace (plasticita)  $\varepsilon_p$ . Křivka napětí–deformace pro 1D elastoplastický materiál je vidět na obrázku 3. Ve fázi zatěžování čistým tahem, kdy je napětí menší než počáteční mez kluzu ( $0 \rightarrow A$ ), je chování materiálu lineárně elastické a je popsáno Hookeovým zákonem pro jednoosou napjatost

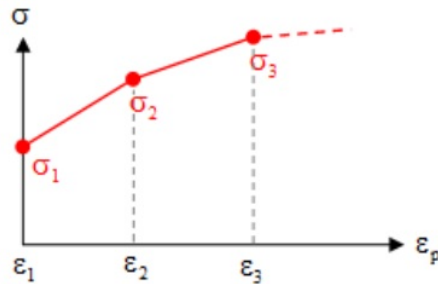
$$\sigma = E\varepsilon_e, \quad (6)$$

kde  $\varepsilon_e$  je elastická složka deformace. Pokud je materiál odlehčen před dosažením meze kluzu, vrátí se do původního stavu. Po překročení původní meze kluzu  $\sigma_y^0$  se mění mez kluzu  $\sigma_y$  a sklon křivky napětí–deformace, tato křivka je popsána funkcí plastického zpevnění ( $A \rightarrow C$ ) a výsledná deformace je pak součtem elastické a plastické složky

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (7)$$

V této fázi se při odlehčení materiál chová elasticky a křivka odlehčování má stejnou směrnici jako křivka zatěžování do původní meze kluzu. Při opětovném zatěžování

roste s každým navýšením současné meze kluzu  $\sigma_y$  také plastická deformace  $\varepsilon_p$ . Funkce zpevnění může být zadána v různých tvarech, například jako konstanta pro materiál bez zpevnění, nebo jako spojitá funkce, nebo jako lineární, nebo multilineární křivka zadána bodovými hodnotami napětí k odpovídající hodnotě deformace, jak lze vidět na obrázku 4.



Obrázek 4: Funkce zpevnění definována bodovými hodnotami napětí [7]

Na obrázku 3 mezi body C a D dochází v materiálu k nárůstu nevratné plastické deformace bez zvýšení meze kluzu. Tato vlastnost materiálu se označuje jako ideálně plastický materiál.

## 2.3 Poškození ortotropního materiálu

Poškození předchází porušení materiálu a je zde definováno proto, aby při dosažení určitého kritéria porušení (viz kapitola 2.4) v elementu nedošlo k okamžité eliminaci prvku, ale postupnému redukování jeho mechanických vlastností. Toto chování je nastaveno, aby se zabránilo numerickým nestabilitám během analýzy po eliminaci prvku. Od iniciace poškození dochází v materiálu ke snižování hodnot matice tuhosti. Toto chování je popsáno vztahem

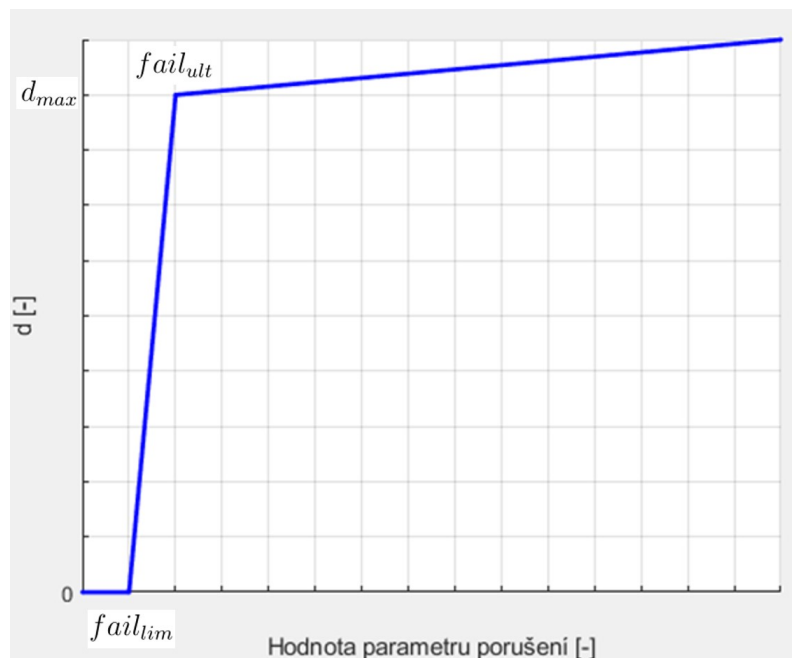
$$\mathbf{C}(d) = \mathbf{C}_0(1 - d), \quad (8)$$

kde  $\mathbf{C}(d)$  je matice okamžité tuhosti, která odpovídá matici  $\mathbf{C}$  z Hookeova zákona (1),  $\mathbf{C}_0$  je počáteční (nepoškozená) matice tuhosti,  $d$  je skalární parametr poškození, který závisí na deformaci. Poškození  $d$  nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , kde hodnota 0 odpovídá nulovému poškození a hodnota 1 maximálnímu poškození. K eliminaci prvku v tomto případě dojde pokud průměrné poškození v elementu  $\bar{d}^e > 0,999$ . Chování materiálu s poškozením a porušením lze pak rozdělit do tří fází:

- Elastické chování
- Vývoj poškození
- Porušení



Pro Homogenizovaný materiál je funkce poškození dána několika parametry, jejichž význam je popsán níže. Při zatěžování se v první fázi materiál chová lineárně elasticky s předepsanou tuhostí v odpovídajícím směru a poškození je nulové. Druhá fáze poškození je iniciována, když kritérium porušení dosáhne předepsané hodnoty  $fail_{lim}$ . Pokud je  $fail_{lim} = 1$ , iniciace poškození odpovídá dosažení mezního napětí v daném směru v kritérii maximálních napětí. V této fázi je tuhost materiálu snížena předepsanou hodnotou poškození a poškození se dále vyvíjí lineárně až k hodnotě  $d_{max}$ . V případě odlehčení se materiál chová lineárně se sníženou tuhostí. Třetí fáze nastává, když kritérium porušení dosáhne hodnoty  $fail_{ult}$ . Poškození se vyvíjí asymptoticky až do eliminace prvku. Funkce poškození pro křehký lom ortotropního materiálu je vidět na obrázku 5.



Obrázek 5: Funkce poškození

## 2.4 Kritéria porušení

Pokud chceme provést pevnostní posouzení materiálu, je třeba vybrat kritérium porušení. Existuje řada kritérií, která jsou vyvinuta přímo pro kompozitní materiály. Mezi často používaná patří kritérium maximálních napětí, kritérium maximální deformace, Hillovo kritérium pevnosti, Tsai–Hillovo kritérium pevnosti, Hoffmanovo kritérium pevnosti, Tsui–Wu kritérium pevnosti, Puckovo kritérium pevnosti nebo LaRC.

V této práci je porušení výsledného homogenizovaného materiálu určeno kritériem maximálních napětí. Pro snopky vláken v přístupech modelování Voxel, 3D snopky

RVE a Shell bylo zvoleno Puckovo kritérium [7, 15, 14], při kterém, aby došlo k porušení, musí být současně splněna dvě nezávislá kritéria porušení:

- Kritérium pro porušení mezi vlákny (IFF)
- Kritérium pro porušení vláken

Pro houževnaté materiály existují kritéria porušení spojená s vystavením materiálu plastickým deformacím. Jedná se o tažné a smykové poškození. Toto kritérium je použito pro popis porušení matrice v přístupech modelování Voxel, 3D snopky RVE a Shell.

#### 2.4.1 Kritérium maximálních napětí

Kritérium maximálních napětí je nejjednodušším kritériem porušení pro kompozitní materiály. Díky tomu se v praxi často používá i přesto, že se jedná o neinteraktivní kritérium, tudíž nezahrnující vazbu mezi jednotlivými složkami napětí. Dle kritéria maximálních napětí dojde k porušení tehdy, když jedna ze složek napětí dosáhne příslušné meze pevnosti daného materiálu. Podmínky porušení pro ortotropní materiál v systému (1, 2, 3) pak lze zapsat ve tvaru

$$1 = \max \left( \left| \frac{\sigma_1}{X_\sigma} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{Y_\sigma} \right|, \left| \frac{\sigma_3}{Z_\sigma} \right|, \left| \frac{\sigma_{12}}{\tau_{12u}} \right|, \left| \frac{\sigma_{23}}{\tau_{23u}} \right|, \left| \frac{\sigma_{13}}{\tau_{13u}} \right| \right), \quad (9)$$

kde

$$X_\sigma = \sigma_{11u}^t \quad \text{když} \quad \sigma_1 \geq 0, \quad X_\sigma = \sigma_{11u}^c \quad \text{když} \quad \sigma_1 < 0,$$

$$Y_\sigma = \sigma_{22u}^t \quad \text{když} \quad \sigma_2 \geq 0, \quad Y_\sigma = \sigma_{22u}^c \quad \text{když} \quad \sigma_2 < 0,$$

$$Z_\sigma = \sigma_{33u}^t \quad \text{když} \quad \sigma_3 \geq 0, \quad Z_\sigma = \sigma_{33u}^c \quad \text{když} \quad \sigma_3 < 0,$$

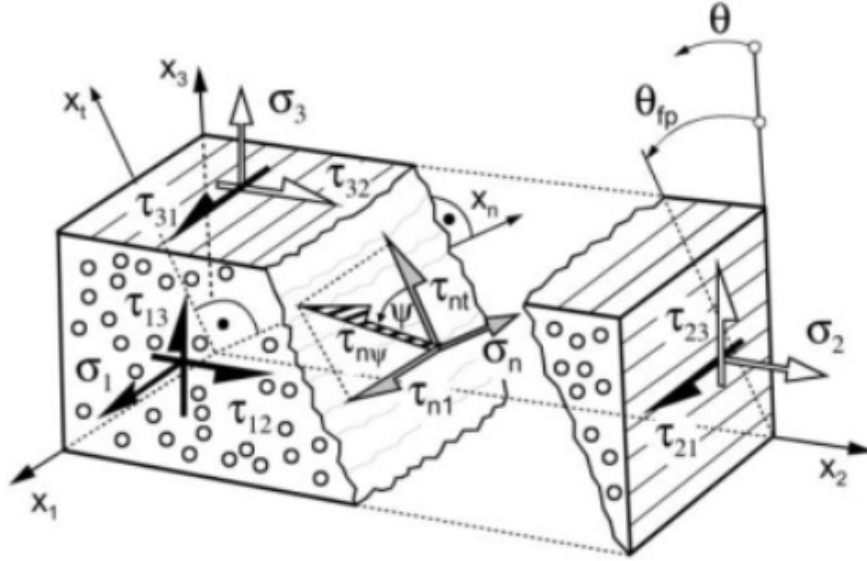
Zde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$  jsou normálová napětí působící v hlavních materiálových směrech,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  a  $\tau_{13}$  jsou smyková napětí.  $\sigma_{11u}^t$ ,  $\sigma_{11u}^c$  je mez pevnosti v tahu resp. tlaku ve směru 11.  $\sigma_{22u}^t$ ,  $\sigma_{22u}^c$  je mez pevnosti v tahu resp. tlaku ve směru 22.  $\sigma_{33u}^t$ ,  $\sigma_{33u}^c$  je mez pevnosti v tahu resp. tlaku ve směru 33.  $\tau_{12u}$  je smyková mez pevnosti v rovině 12.  $\tau_{23u}$  je smyková mez pevnosti v rovině 23.  $\tau_{13u}$  je smyková mez pevnosti v rovině 13.

#### 2.4.2 Puck: Mezivláknové porušení (IFF)

Mezivláknové porušení je následkem porušení soudržnosti matrice (kohezní porušení) nebo případně porušení na rozhraní matrice a vlákna (adhezní porušení). Pro

případ prostorové napjatosti závisí mezivláknové porušení (Inter–Fiber Failure) na úhlu lomové roviny  $\Theta_{fp}$ , což je nakloněná rovina rovnoběžná s vlákny.

Mezivláknové porušení je založeno na Mohrově pevnostní hypotéze, kde hranici porušení materiálu určují jen napětí vyskytující se v lomové rovině. Při zatížení napětími  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$  se v rovině lomu tvoří napětí  $\sigma_n, \tau_{nt}$  a  $\tau_{n1}$ , jak lze vidět na obrázku 6. Závislosti těchto napětí jsou dány vztahy



Obrázek 6: Rozložení napětí v materiálu a v lomové rovině [7]

$$\sigma_n(\Theta) = \sigma_2 \cos^2\Theta + \sigma_3 \sin^2\Theta + 2\tau_{23} \sin\Theta \cos\Theta,$$

$$\tau_{nt}(\Theta) = -\sigma_2 \sin\Theta \cos\Theta + \sigma_3 \sin\Theta \cos\Theta + \tau_{23}(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta), \quad (10)$$

$$\tau_{n1}(\Theta) = -\tau_{31} \sin\Theta + \tau_{21} \cos\Theta.$$

Smyková napětí  $\tau_{nt}$  a  $\tau_{n1}$  lze složit do výsledného smykového napětí  $\tau_{n\psi} = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}$ .

Kombinace napětí  $\sigma_n, \tau_{nt}$  a  $\tau_{n1}$  má za následek vznik lomu ve společné rovině působení těchto tří napětí, pokud dojde k naplnění podmínky porušení. Podmínka mezivláknového porušení tedy musí obsahovat vztah mezi těmito napětími a lomovým odporem roviny působení napětí. Lomový odpor roviny působení napětí je takový odpor, který při porušení daná rovina vytváří proti na ní působícímu napětí ( $\sigma_n, \tau_{nt}$  nebo  $\tau_{n1}$ ). V rovině působení napětí existují tři lomové odpory odpovídající napětím  $\sigma_2, \tau_{13}, \tau_{21}$ , která vyvolávají napětí  $\sigma_n, \tau_{nt}$  nebo  $\tau_{n1}$ .

Jedná se o

$R_{22}^A =$  Lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování příčným tahovým napětím  $\sigma_2$ ,

$R_{12}^A =$  Lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování smykovým napětím  $\tau_{21}$ ,

$R_{13}^A =$  Lomový odpor roviny působení napětí proti porušení v důsledku zatěžování smykovým napětím  $\tau_{13}$ .

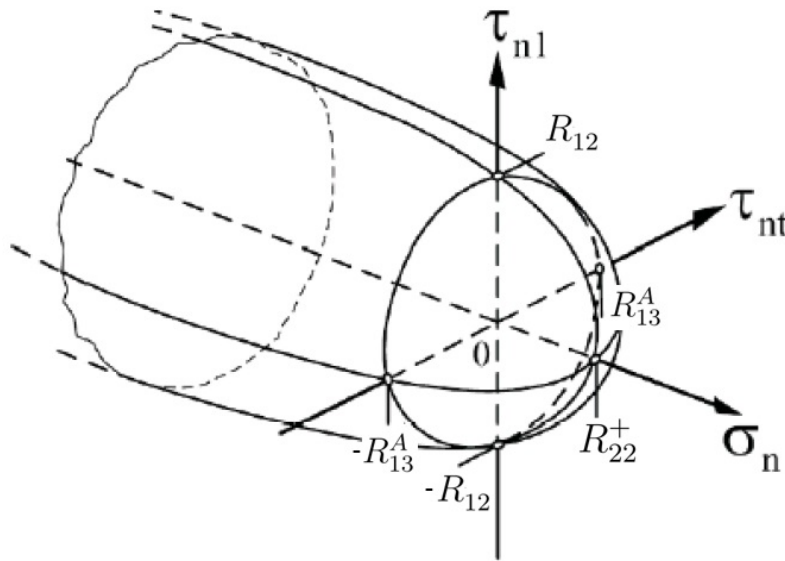
Při použití idealizovaného kompozitního modelu je předpokladem rotační symetrie. Proto by ve všech rovinách, které jsou rovnoběžné s vlákny, měly být lomové odpory stejně velké, nezávislé na úhlu  $\Theta$ . Ve skutečnosti jsou pak jen některé lomové odpory roviny působení napětí, označené  $R^A$ , identické s příslušnými pevnostmi  $R$ . Pro lomové odpory a příslušné pevnosti platí

$$R_{22}^A = R_{22}^+,$$

$$R_{12}^A = R_{12}, \quad (11)$$

$$R_{13}^A = \frac{R_{22}^-}{2(1 + p_{23})},$$

kde  $R_{22}^+$  je pevnost laminy ve směru kolmo na vlákna v tahu,  $R_{12}$  je smyková pevnost laminy v rovině  $\hat{1}2$ ,  $R_{22}^-$  je pevnost laminy ve směru kolmo na vlákna v tlaku a  $p_{23}$  je sklon mezní plochy.



Obrázek 7: Znázornění mezní plochy [15]

Podmínku porušení lze znázornit v systému napětí  $(\sigma_n, \tau_{nt}$  a  $\tau_{n1})$ , kde vytváří meznou plochu jak lze vidět na obrázku 7. Napětí  $\tau_{nt}$  a  $\tau_{n1}$  působí v rovině rovnoběžné s vlákny (viz obrázek 6), proto pro kombinované namáhání  $\tau_{nt}$  a  $\tau_{n1}$  při  $\sigma_n = 0$  je uvažováno eliptické kritérium porušení

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{2\psi}^A}\right)^2 = \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{13}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{12}}\right)^2 = 1 \quad \text{pro } \sigma_n = 0. \quad (12)$$

Celá mezná plocha je popsána kombinací elips a parabol pro všechny úhly  $\psi$ , což popisují vztahy

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{2\psi}^A}\right)^2 + c_1 \frac{\sigma_n}{R_{22}^+} + c_2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{22}^+}\right)^2 = 1 \quad \text{pro } \sigma_n \geq 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{2\psi}^A}\right)^2 + c_3 \cdot \sigma_n = 1 \quad \text{pro } \sigma_n < 0, \quad (14)$$

kde řezy mezné plochy mají v poloprostoru  $\sigma_n \geq 0$  tvar elipsy a v poloprostoru  $\sigma_n < 0$  tvar paraboly. Konstanty  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  mají tvar

$$c_1 = 2 \frac{p_{2\psi}^+ R_{22}^+}{R_{2\psi}^A}, \quad (15)$$

$$c_2 = 1 - 2 \frac{p_{2\psi}^+ R_{22}^+}{R_{2\psi}^A}, \quad (16)$$

$$c_3 = 2 \frac{p_{2\psi}^-}{R_{2\psi}^A}, \quad (17)$$

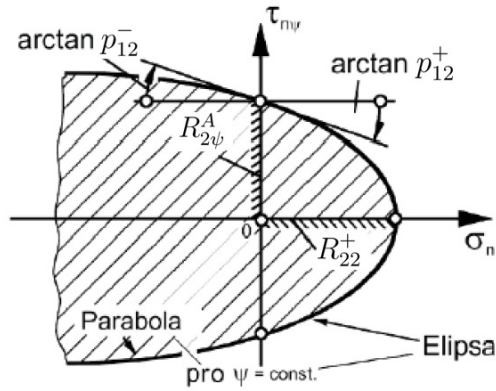
kde paramter  $p_{2\psi}^+$  znamená sklon, pod kterým protíná elipsa osu  $\tau_{n\psi}$ , a  $p_{2\psi}^-$  je sklon, pod kterým protíná parabola osu  $\tau_{n\psi}$  jak lze vidět na obrázku 8. Sklony  $p_{2\psi}^+$  a  $p_{2\psi}^-$  lze experimentálně stanovit v případě, že  $\psi = 90^\circ$ , tedy v rovině podélného řezu mezné plochy ( $\tau_{nt} = 0$ ). V tomto případě jsou tyto sklony označovány  $p_{12}^+$  a  $p_{12}^-$ . Stejně tak pro  $\psi = 0^\circ$  lze stanovit sklon  $p_{23}$ . Pro interpolaci sklonů pro úhly  $\psi \neq 90^\circ$  a  $\psi \neq 0^\circ$  se používají naměřené hodnoty sklonů pro  $\psi = 90^\circ$  a  $\psi = 0^\circ$  ve tvaru

$$\frac{p_{2\psi}^\pm}{R_{2\psi}^A} = \frac{p_{23}}{R_{13}^A} \cdot \cos^2 \psi + \frac{p_{12}^\pm}{R_{12}} \cdot \sin^2 \psi, \quad (18)$$

kde

$$\cos^2 \psi = \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}, \quad (19)$$

$$\sin^2 \psi = \frac{\tau_{n1}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}. \quad (20)$$



Obrázek 8: Znázornění mezné plochy [15]

Vztahy (12),(13) a (14), tedy polynomy druhého stupně, popisují meznou plochu porušení. Pokud jsou hodnoty levých strana těchto rovnic nižší než 1, nedochází k mezvláknovému porušení. Tyto rovnice však nepopisují index porušení, ten získáme úpravou těchto rovnic do výrazů, ve kterých je napětí v první mocnině. Výsledkem jsou dvě rovnice vyjadřující indexy porušení

$$\varepsilon_{IFF}(\Theta) = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{22}^+} - \frac{p_{2\psi}^+}{R_{2\psi}^A}\right)^2 \cdot \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{13}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{12}}\right)^2} + \sigma_n \cdot \frac{p_{2\psi}^+}{R_{2\psi}^A} \quad \text{pro } \sigma_n \geq 0 \quad (21)$$

$$\varepsilon_{IFF}(\Theta) = \sqrt{\left(\frac{p_{2\psi}^-}{R_{2\psi}^A}\right)^2 \cdot \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{13}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{12}}\right)^2} + \sigma_n \cdot \frac{p_{2\psi}^-}{R_{2\psi}^A} \quad \text{pro } \sigma_n < 0 \quad (22)$$

Použitím rovnic (21) a (22) lze najít lomový úhel  $\Theta_{fp}$ , který určuje rovinu lomu.

### 2.4.3 Puck: Porušení vláken (FF)

Vlákna jsou v případě kompozitního materiálu nosným prvkem a předpokládá se tedy jejich maximální využití až na mez pevnosti vláken v podélném směru. V příčném směru mohou působit na vlákna jen taková napětí, která může přenést matrice nebo rozhraní mezi maticí a vlákny. Porušením vláken je myšleno porušení tisíců elementárních vláken tvořící snopky vláken (meso úroveň). Stav, při kterém dochází k porušení vláken při tahovém zatížení v podélném směru vláken, je označován jako přetržení. Při tlakovém zatížení v podélném směru vláken dochází při porušení k vybočení a zlomení vláken v důsledku ztráty stability, protože matrice není schopna vlákna nadále podpírat.

K porušení vláken dojde v důsledku působení prostorové napjatosti vyvolané napětími  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$  právě tehdy, pokud je v podélném směru vláken dosaženo kritické napětí potřebné k porušení při jednoosém zatěžování tahovým napětím  $\sigma_{11}^+$  nebo tlakovým napětím  $\sigma_{11}^-$ . Kritéria porušení vláken jsou pak dány vztahy

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{fib}}{X_{11}^+}\right)^2} = 1 \quad \text{pro } \sigma_{fib} > 0, \quad (23)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{fib}}{X_{11}^-}\right)^2} = 1 \quad \text{pro } \sigma_{fib} < 0, \quad (24)$$

kde  $\sigma_{fib}$  je napětí ve vláknech,  $X_{11}^+$  je podélná tahová pevnost laminy a  $X_{11}^-$  je podélná tlaková pevnost laminy.

#### 2.4.4 Porušení při působení plastických deformací

Tažné poškození materiálu je způsobeno nukleací, růstem a spojováním dutin a mikrotrhlin v matrici, když je vystavena plastické deformaci. Smykové poškození je způsobeno rozvojem diagonálních trhlin. Kritéria porušení pro tažné a smykové poškození mají tvar

$$\phi_d = \int_0^{\varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_p}{g_d(\eta, \dot{\varepsilon}_p, p)} \quad (25)$$

$$\phi_s = \int_0^{\varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_p}{g_s(\zeta, \dot{\varepsilon}_p, p)} \quad (26)$$

$$\phi = \max(\phi_d, \phi_s) = 1, \quad (27)$$

kde  $\phi$  je parametr celkového poškození,  $\phi_d \in \langle 0; 1 \rangle$  je parametr tažného poškození,  $\phi_s \in \langle 0; 1 \rangle$  je parametr smykového poškození,  $g_d(\eta, \dot{\varepsilon}_p, p)$  je funkce tažného poškození a  $g_s(\zeta, \dot{\varepsilon}_p, p)$  je funkce smykového poškození. Tyto funkce závisí na faktoru tříosého napětí  $\eta$ , faktoru smykového napětí  $\zeta$ , rychlosti plastické deformace  $\dot{\varepsilon}_p$  a mikroporozitě  $p$ . K porušení dojde pokud alespoň jeden z parametrů poškození  $\phi_d$  nebo  $\phi_s$  dosáhne kritické hodnoty porušení.

### 3 Stanovení materiálových parametrů

Pro stanovení materiálových parametrů kompozitů se stejně jako u izotropních kovů používají standardizované tahové, tlakové a smykové testy. U kompozitních materiálů je díky variabilitě jejich skladby testování složitější. Problémy například způsobuje zohlednění vlivu okrajů nařezaných vzorků nebo vliv in-situ efektu [11], kdy mají například vrstvy uvnitř skladby vícesměrných laminátů nebo textilií větší pevnost a pevnost laminy také závisí na tloušťce vzorku. Vzorky s jinou skladbou z úplně stejného materiálu tak často nedávají stejné hodnoty materiálových parametrů. Jedním ze způsobů jak tyto variabilitu kompozitních materiálů zohlednit je určování parametrů na základě virtuálních numerických testů. Postup použitý v diplomové práci je založený na víceúrovňové homogenizaci, kdy na mikro a meso úrovni zohledňujeme vliv mikro a meso struktury pro odvození chování materiálu na makro úrovni.

Víceúrovňová homogenizace analyzuje kompozit z hlediska mikromechaniky a to pomocí reprezentativního objemového elementu (RVE). Pak je možné materiálové parametry mikromodelu pomocí homogenizace převést do mesomodelu, kde lze zohlednit například geometrii snopků vláken u různých typů tkanin. Vlastnosti mesomodelu se pak využijí k sestavení makromodelu popisujícího kompozitní konstrukci. Homogenizace může také doplnit experiment pro získání všech materiálových parametrů kompozitu.

V této kapitole je popsán princip stanovení materiálových parametrů snopků a celé tkaniny pomocí procesu víceškálové homogenizace [17, 18, 19]. Homogenizace byla provedena pomocí nástroje poskytnutého společností MECAS ESI, s.r.o. V rámci řešení diplomové práce byla, na základě dodaných parametrů vláken, matrice a objemového podílu vláken, provedena homogenizace na mikroúrovni pro stanovení materiálových parametrů snopku (mesoúroveň) a homogenizace na mesoúrovni pro stanovení materiálových parametrů tkaniny (makroúroveň).

#### 3.1 Stanovení materiálových parametrů snopku

U mikroúrovně v procesu homogenizace se pohybujeme v měřítku vláken (milimetry), tedy spojení vláken a matrice ve snopku. Cílem procesu homogenizace na mikroúrovni je charakterizovat vlastnosti snopku pro různé hodnoty objemového podílu vláken. Určení materiálových vlastností snopku je nezbytné pro další analýzu na meso úrovni. V této práci je na mikroúrovni provedena elastická analýza k určení elastických materiálových parametrů snopku a analýza porušení pro odhad hodnot Puckova kritéria porušení, které je spolu s elastickými materiálovými parametry po-



užito v modelech snopků vláken na mesoúrovni.

Pro stanovení homogenizovaných materiálových parametrů snopku byly použity dva typy reprezentativních objemových elementů (RVE): s pravidelným a náhodným rozložením vláken, jak lze vidět na obrázku 9. Geometrie těchto mikromodelů je diskretizována pomocí konečných prvků typu 3D solid, lineární, osmiuzlové prvky s plnou integrací. Velikost hrany prvku u obou modelů je 0.33 mm, model s pravidelným rozložením vláken je tvořen 6696 prvky a model s náhodným rozložením vláken 54292 prvky.



Obrázek 9: MKP síť s pravidelným rozložením vláken (vlevo) a náhodným rozložením vláken (vpravo)

Pro stanovení všech devíti elastických konstant ( $E_1^{\text{snopek}}$ ,  $E_2^{\text{snopek}}$ ,  $E_3^{\text{snopek}}$ ,  $\nu_{12}^{\text{snopek}}$ ,  $\nu_{13}^{\text{snopek}}$ ,  $\nu_{23}^{\text{snopek}}$  a  $G_{12}^{\text{snopek}}$ ,  $G_{13}^{\text{snopek}}$ ,  $G_{23}^{\text{snopek}}$ ) pro popis ortotropního materiálového modelu, který popisuje chování snopku, je potřeba řešit šest úloh statické analýzy pro zatěžující stavy odpovídající čistému tahu ve směrech 1, 2, 3 a čistému smyku v rovinách  $\hat{1}2$ ,  $\hat{1}3$  a  $\hat{2}3$ . Z těchto šesti simulací lze materiálové parametry snopku přímo stanovit. Pro elastickou analýzu byla použita síť s pravidelným rozložením vláken.

Pro detekci mezivláknového porušení (IFF) Puckova kritéria porušení jednosměrového kompozitu byla použita síť s náhodným rozložením vláken, tím se chování RVE více přiblížilo realitě. Cílem analýzy porušení je stanovit parametry Puckova kritéria porušení, které jsou popsány v kapitolách 2.4.2 a 2.4.3.

Při analýzách homogenizace na mikroúrovni se k vyvolání periodicity na hranici RVE používají periodické okrajové podmínky, které jsou definovány funkcí Linear Constrain (LINCO). Periodické okrajové podmínky jsou souborem okrajových pod-

mínek, které se používají k vyjádření nekonečně se opakující struktury modelu a jsou dány vztahem:

$$\sum_i u_m^i - u_m^d = 0 \quad (28)$$

kde  $u_m^i$  je posuv (rotace) nezávislého uzlu a  $u_m^d$  je posuv (rotace) závislého uzlu. Index  $m$  značí vázaný stupeň volnosti v rovnici. U uzlů 3D prvků jsou vázány všechny posuvy. U uzlů skořepinových prvků jsou vázány všechny posuvy a rotace. Uzly jsou při definování periodických okrajových podmínek svázány také s pohybem řídicích bodů  $M_x, M_y, M_z, M$ , ve kterých jsou v úlohách homogenizace předepsány okrajové podmínky RVE. Musí být předepsány tři kategorie periodických okrajových podmínek pro:

- a) uzly na povrchu, které nejsou na hranách nebo na rozích,
- b) uzly na hranách, které nejsou na rozích,
- c) uzly na rozích.

Vybrané periodické okrajové podmínky pro každou kategorii jsou znázorněny na obrázku 10. K nim příslušné rovnice, pro tyto konkrétní uzly doplněné do rovnice (28), mají tvar

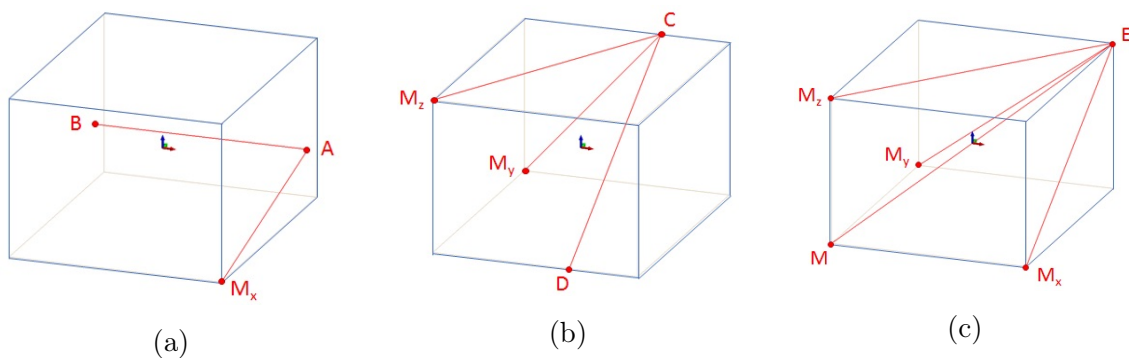
$$\text{a) } u_m^B + u_m^{M_x} - u_m^A = 0, \quad \text{pro } m = x, y, z$$

$$\text{b) } u_m^D + u_m^{M_y} + u_m^{M_z} - u_m^C = 0, \quad \text{pro } m = x, y, z$$

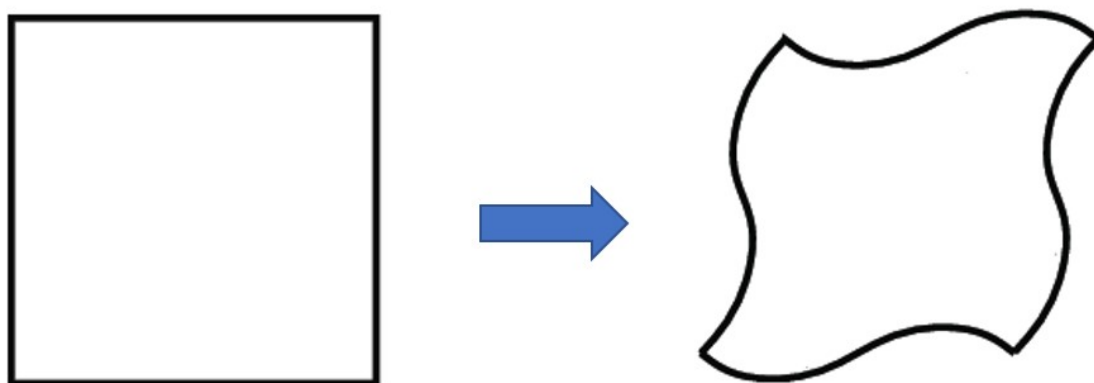
$$\text{c) } u_m^{M_x} + u_m^{M_y} + u_m^{M_z} + u_m^M - u_m^E = 0, \quad \text{pro } m = x, y, z$$

Schématické zobrazení defromace RVE s periodickými okrajovými podmínkami je vidět na obrázku 11. Stejný vztah jako (28) je platný také pro rychlosti a zrychlení uzlů.

Homogenizované materiálové parametry snopku vláken, které jsou v této práci uvažovány jako ortotropní materiál s porušením, které je dáno Puckovo kritériem pro porušení vláken a mezivláknové porušení, jsou popsány v tabulkách 1 a 2. Tyto materiálové parametry jsou následně používány v mesoúrovni homogenizace.



Obrázek 10: Periodické okrajové podmínky



Obrázek 11: Schématické zobrazení deformace RVE s periodickými okrajovými podmínkami

### 3.2 Stanovení materiálových parametrů tkaniny

Pro stanovení materiálových parametrů 3D tkaniny je třeba zohlednit vliv architektury snopků v materiálu, což se provádí na mesoúrovni procesu homogenizace. Klíčovým předpokladem homogenizace na mesoúrovni je co nejpřesnější reprezentace geometrie snopků a matrice odpovídající výrobnímu procesu. V tomto případě byla pomocí nástroje poskytnutého společností MECAS ESI, s.r.o., výchozí geometrie snopků, stlačena do požadované velikosti a provedla se příčná expanze průřezu a bylo nastaveno předpětí snopků. Tento krok byl proveden z důvodu zjednodušení dodané vstupní geometrie. Výchozí geometrie a požadovaný tvar lze vidět na obrázku 12.

Z požadované geometrie byl následně vytvořen MKP model mesoúrovně, tedy reprezentativní objemový element (RVE), který je tvořen snopky vláken a maticí. V této práci byl jako model mesoúrovně vybrán Voxel RVE, který je více popsán v kapitole 4.1. Materiálové parametry snopků (viz tabulky 1 a 2) byly vypočteny na základě

$E_1^{\text{snopek}}$	GPa	202
$E_2^{\text{snopek}}$	GPa	10
$E_3^{\text{snopek}}$	GPa	10
$G_{12}^{\text{snopek}}$	GPa	4
$G_{23}^{\text{snopek}}$	GPa	4
$G_{13}^{\text{snopek}}$	GPa	4
$\nu_{12}^{\text{snopek}}$	–	$8 \cdot 10^{-2}$
$\nu_{23}^{\text{snopek}}$	–	$2 \cdot 10^{-1}$
$\nu_{13}^{\text{snopek}}$	–	$8 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 1: Elastické vlastnosti snopků vláken na mesoúrovni

$R_{22}^+$	MPa	97
$R_{22}^-$	MPa	123
$R_{12}$	MPa	43
$p_{12}^+$	–	$3 \cdot 10^{-1}$
$p_{12}^-$	–	$1 \cdot 10^{-6}$
$p_{23}$	–	$2 \cdot 10^{-1}$
$X_{11}^+$	GPa	4
$X_{11}^-$	GPa	4

Tabulka 2: Parametry Puckova kritéria pro pevnostní analýzu snopku

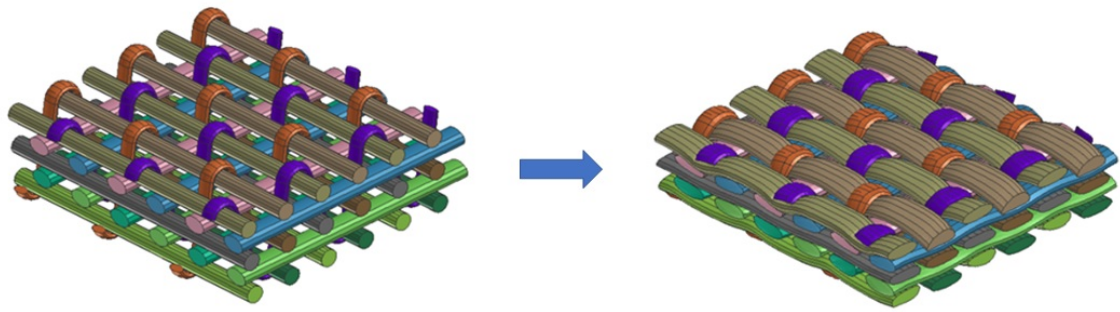
homogenizace na mikroúrovni, jak bylo v principu vysvětleno v předchozí kapitole 3.1.

Matrice je uvažována jako izotropní elastoplastický materiál s funkcí zpevnění, která je definována bodovými hodnotami napětí (obrázek 13), a s porušením při působení plastických deformací. V tabulce 3 jsou uvedeny elastické parametry matrice a na obrázku 14 je zobrazena funkce tažného poškození, která se vyskytuje v kritériu porušení při působení plastických deformací. Smykové poškození matrice není uvažováno.

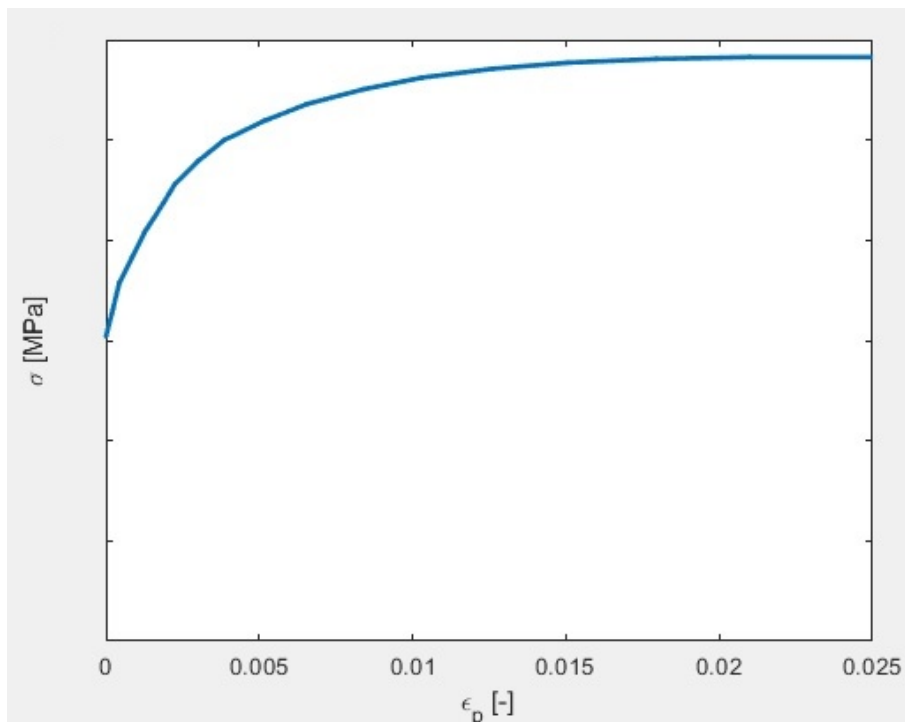
$G$	GPa	1,2
$K$	GPa	3,2

Tabulka 3: Elastické vlastnosti matrice

Stejně jako u homogenizace na mikroúrovni byla na RVE provedena elastická analýza ke stanovení elastických materiálových parametrů makroúrovně a analýza porušení.



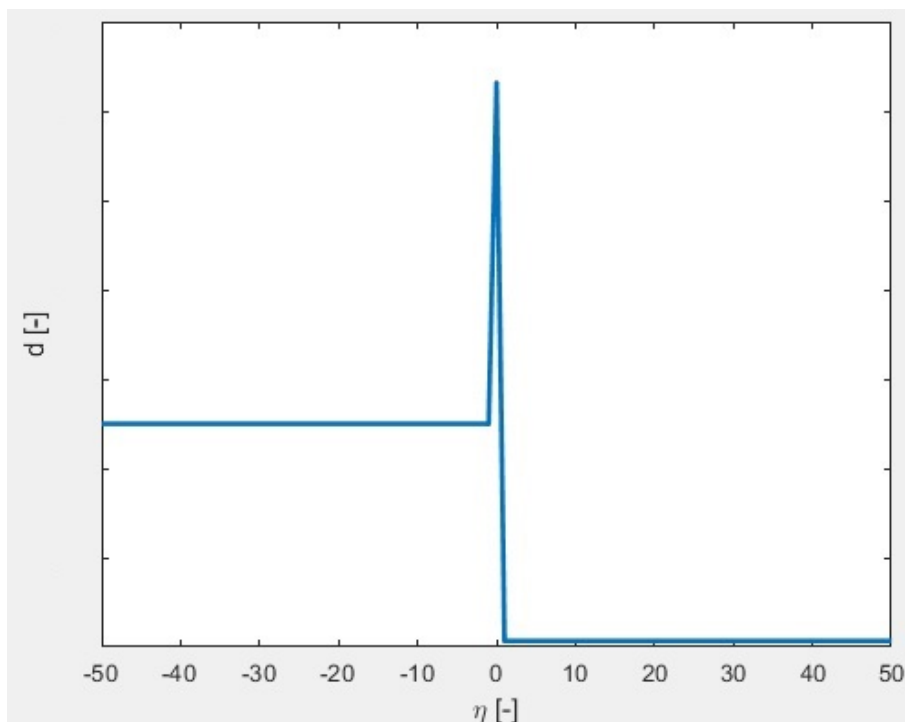
Obrázek 12: Formování výchozí geometrie do požadovaného tvaru



Obrázek 13: Funkce zpevnění matrice

U elastické analýzy je cílem určení devíti materiálových parametrů, které se použijí pro popis elastických konstant makroškály ( $E_1^{\text{tkanina}}$ ,  $E_2^{\text{tkanina}}$ ,  $E_3^{\text{tkanina}}$ ,  $\nu_{12}^{\text{tkanina}}$ ,  $\nu_{13}^{\text{tkanina}}$ ,  $\nu_{23}^{\text{tkanina}}$  a  $G_{12}^{\text{tkanina}}$ ,  $G_{13}^{\text{tkanina}}$ ,  $G_{23}^{\text{tkanina}}$ ). Je třeba řešit šest úloh statické analýzy pro zatěžující stavy odpovídající čistému tahu ve směrech 1, 2, 3 a čistému smyku v rovinách  $\hat{1}2$ ,  $\hat{1}3$  a  $\hat{2}3$ . Z těchto šesti simulací lze materiálové parametry snopku přímo stanovit.

Pro homogenizovaný materiál tkaniny bylo zvoleno porušení dané kritériem maximálních napětí. Je tedy třeba řešit devět úloh analýzy porušení pro zatěžující stavy odpovídající čistému tahu a tlaku ve směrech 1, 2, 3 a čistému smyku v rovinách  $\hat{1}2$ ,  $\hat{1}3$  a  $\hat{2}3$ .



Obrázek 14: Funkce tažného poškození matrice

Při všech úlohách homogenizace na mesoúrovni se stejně jako u mikrohomogenizace používají k vyvolání periodicity na hranici RVE periodické okrajové podmínky, které jsou definovány funkcí Linear Constrain (LINCO). Periodické okrajové podmínky jsou dány rovnicí (28) a více popsány v kapitole 3.1.

V tabulkách 4, 5 a 6 jsou uvedeny hodnoty elastických parametrů, parametrů poškození a porušení tkaniny (homogenizovaného materiálu), které byly získány homogenizací kompozitu na mesoúrovni.

$E_1^{\text{tkanina}}$	GPa	54
$E_2^{\text{tkanina}}$	GPa	54
$E_3^{\text{tkanina}}$	GPa	9
$G_{12}^{\text{tkanina}}$	GPa	3
$G_{23}^{\text{tkanina}}$	GPa	3
$G_{13}^{\text{tkanina}}$	GPa	3
$\nu_{12}^{\text{tkanina}}$	—	$2 \cdot 10^{-2}$
$\nu_{23}^{\text{tkanina}}$	—	$4 \cdot 10^{-1}$
$\nu_{13}^{\text{tkanina}}$	—	$3 \cdot 10^{-1}$

Tabulka 4: Elastické parametry tkaniny

$fail_{lim}$	1
$fail_{ult}$	2
$d_{max}$	0,9

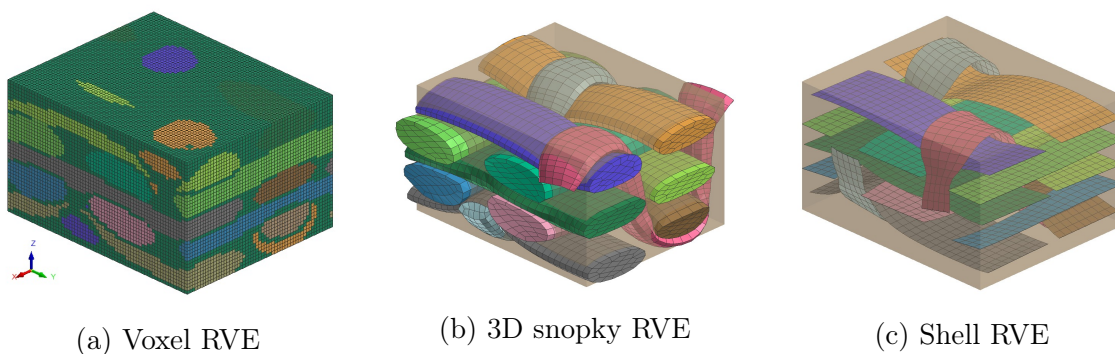
Tabulka 5: Parametry funkce poškození tkaniny

$\sigma_{11u}^t$	MPa	530
$\sigma_{22u}^t$	MPa	440
$\sigma_{33u}^t$	MPa	58
$\sigma_{11u}^c$	MPa	274
$\sigma_{22u}^c$	MPa	282
$\sigma_{33u}^c$	MPa	224
$\tau_{12u}$	MPa	85
$\tau_{23u}$	MPa	74
$\tau_{13u}$	MPa	74

Tabulka 6: Parametry porušení tkaniny

## 4 Přístupy modelování 3D tkaných kompozitních materiálů

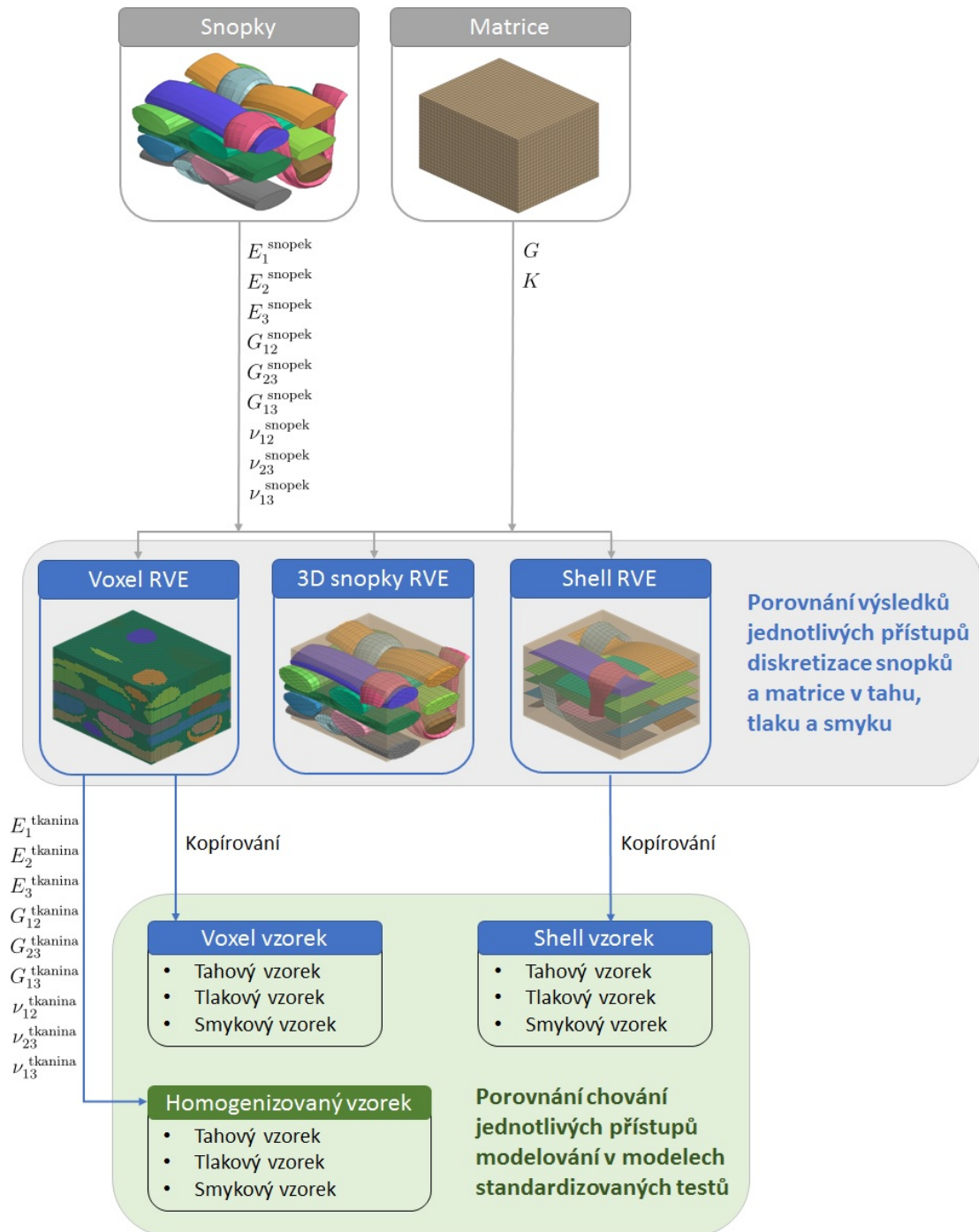
V této kapitole jsou popsány přístupy modelování 3D tkaných kompozitních materiálů, kterými jsou v této práci: Voxel, 3D snopky, Shell a homogenizovaný materiál (makroúroveň, tkanina). Tyto přístupy jsou porovnávány na mesoúrovni, v podobě modelů reprezentativních objemových elementů (RVE), a na makroúrovni v podobě modelů standardizovaných testů pro tah, tlak a smyk. Na mesoúrovni jsou porovnávány Voxel RVE, 3D snopky RVE a Shell RVE, které jsou vidět na obrázku 15.



Obrázek 15: Porovnávané modely RVE na mesoúrovni

V této práci byly také vytvořeny modely celých kompozitních vzorků pomocí Voxel struktury (Voxel vzorek) a Shell struktury (Shell vzorek), které rozměrově odpovídají makroškále, a byly porovnány s výsledným homogenizovaným vzorkem při standardizovaných tahových, tlakových a smykových testech. Vývojový diagram porovnávaných přístupů modelování 3D tkaných kompozitů je na obrázku 16

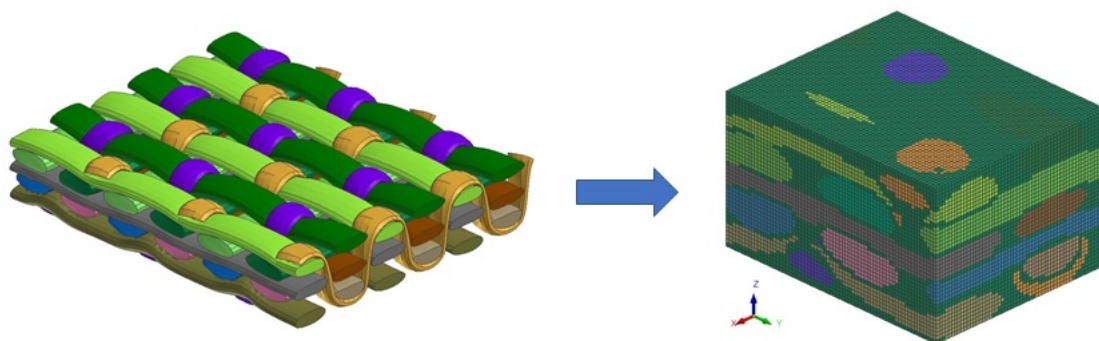




Obrázek 16: Schéma porovnávaných přístupů modelování 3D tkaných kompozitů

## 4.1 Voxel

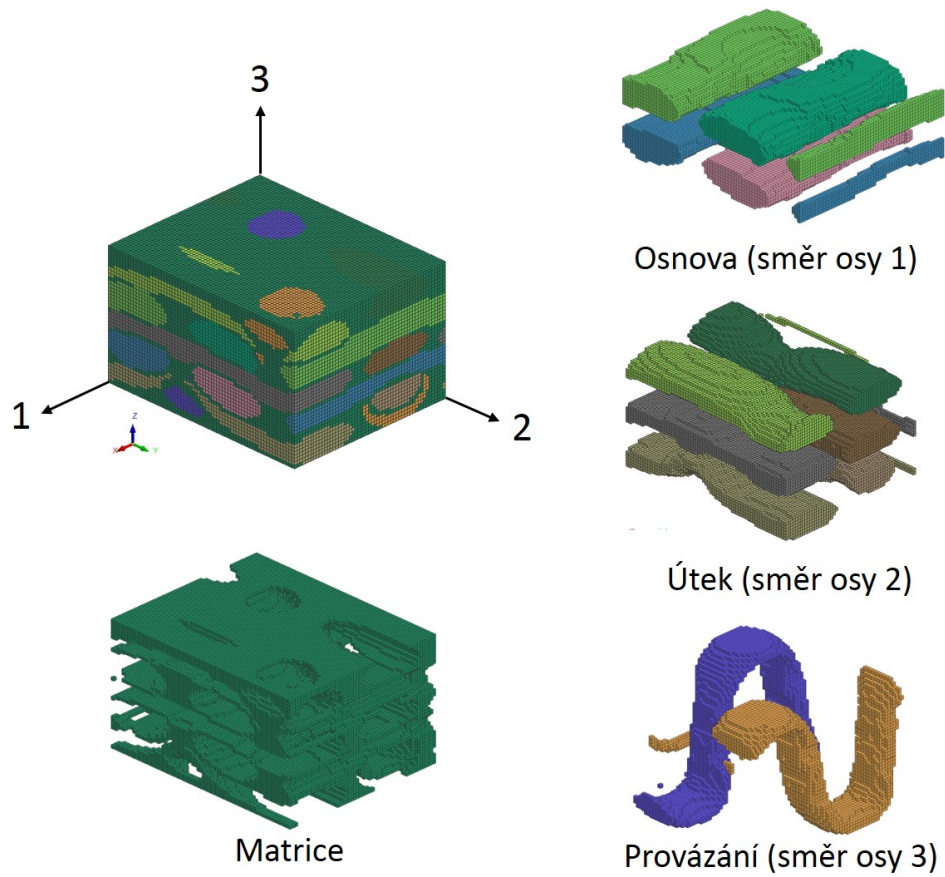
Jedním z porovnávaných přístupů modelování 3D tkaných kompozitních materiálů je použití Voxel (volumetric pixel) sítě pro diskretizace snopků a matrice. Voxel RVE je vytvořen z požadované geometrie snopků pomocí nástroje poskytnutého společností MECAS ESI, s.r.o., tak, že kolem geometrie snopků se vytvoří pravidelná síť 3D elementů dle zvolené velikosti hrany elementu. Následně je síť dle geometrie snopků rozdělena do dvou skupin, na elementy patřící snopkům vláken a zbylé prvky jsou přiřazeny matici, jak lze vidět na obrázku 17. Odpovídajícím skupinám elementů jsou pak přiřazeny materiálové parametry snopku, popsané v kapitole 3.1, a materiálové parametry matrice (viz tabulka 3 a obrázky 13 a 14).



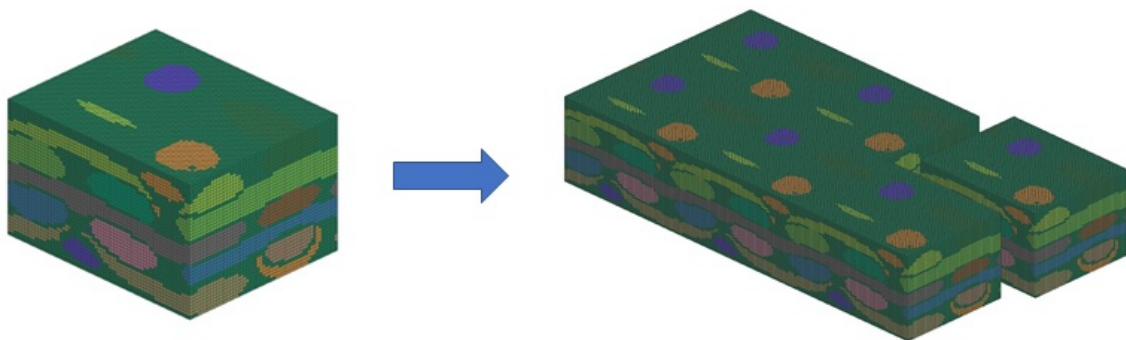
Obrázek 17: Tvorba Voxel RVE

Voxel RVE byl procesu homogenizace použit v meso úrovni pro stanovení elastických parametrů a parametrů porušení tkaniny na makroúrovni. Uspořádání snopků lze vidět na obrázku 18. Rozměry Voxel RVE jsou  $5.4 \times 6.64 \times 3.91$  mm. Voxel RVE je tvořen pravidelnou sítí osmiuzlových elementů typu 3D solid s uniformní redukovanou integrací. Velikost hrany elementu je 0.09775 mm a celkem je Voxel RVE tvořen 147 400 prvky. Díky pravidelné síti Voxel RVE je možné snadněji nadefinovat periodické okrajové podmínky na hranici RVE.

Kromě porovnání výsledků úloh na mesoúrovni byly pomocí struktury Voxel RVE vytvořeny modely Voxel vzorků používaných při tahovém, tlakovém a smykovém standardizovaném testu (viz kapitola 5). Principem vytvoření modelů těchto vzorků je "nakopírovat" Voxel RVE do celé geometrie vzorku, jak je naznačeno na obrázku 19. U takto vytvořených modelů, které jsou rozměrově na úrovni makroškály, již nejsou aplikovány periodické okrajové podmínky. Více o konečnoprvkových modelech standardizovaných testů je popsáno v kapitole 6.



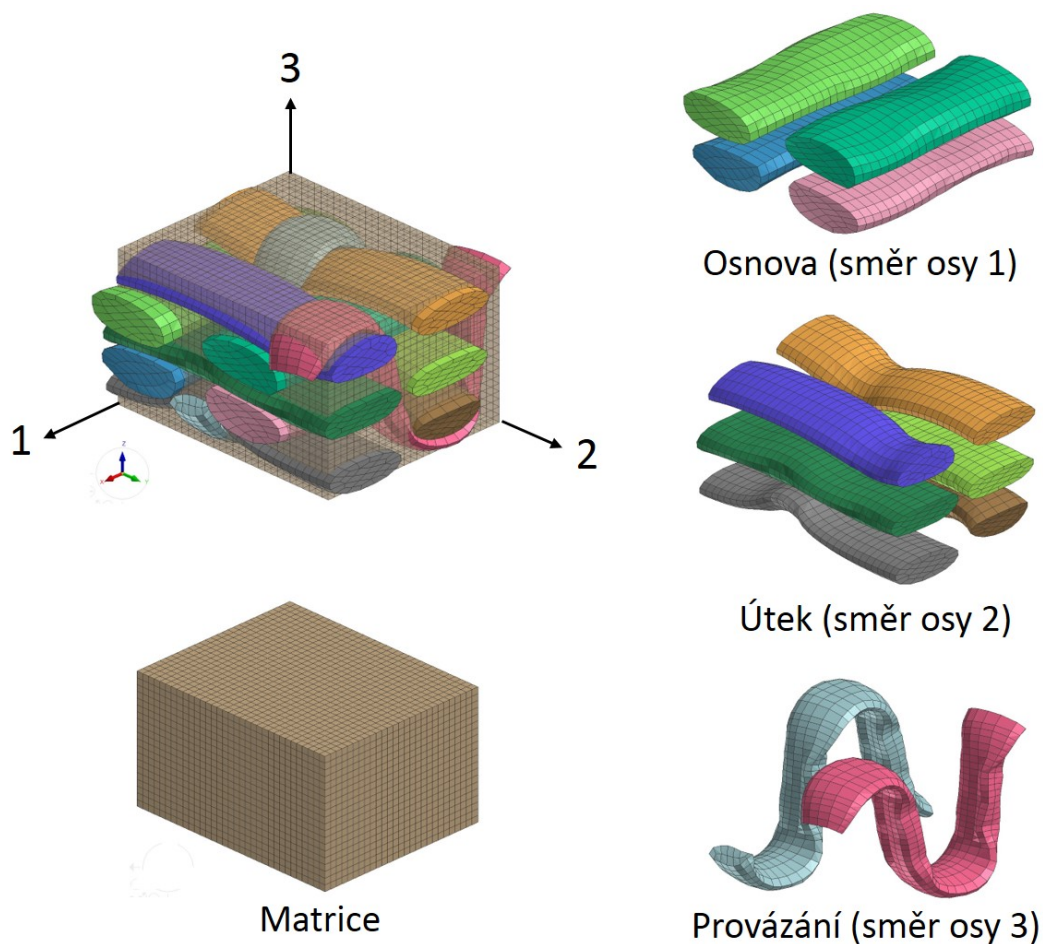
Obrázek 18: Voxel RVE se zobrazením uspořádání snopků v lokálním souřadnicovém systému (123)



Obrázek 19: Schéma tvorby modelu kompozitního vzorku pomocí Voxel RVE

## 4.2 3D snopky

Tento přístup modelování 3D tkaných kompozitních materiálů využívá přesné diskretizace geometrie snopků pomocí 3D osmiuzlových prvků typu Solid s uniformní redukovanou integrací. Matrice vyplňuje celý objem RVE a je tvořena pravidelnou sítí 3D osmiuzlových prvků typu Solid, velikost hrany elementu matrice je 0.2 mm. Prvky snopků jsou s matricí spojeny kontaktem typu TIED. Na hraniční uzly matrice a na koncové uzly snopků jsou aplikovány periodické okrajové podmínky. Model 3D snopky RVE lze vidět na obrázku 20. Materiálové parametry snopků a matrice u přístupu 3D snopky jsou stejné jako u Voxel přístupu modelování, pro snopek jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2, pro matrici v tabulce 3 a na obrázcích 13 a 14.



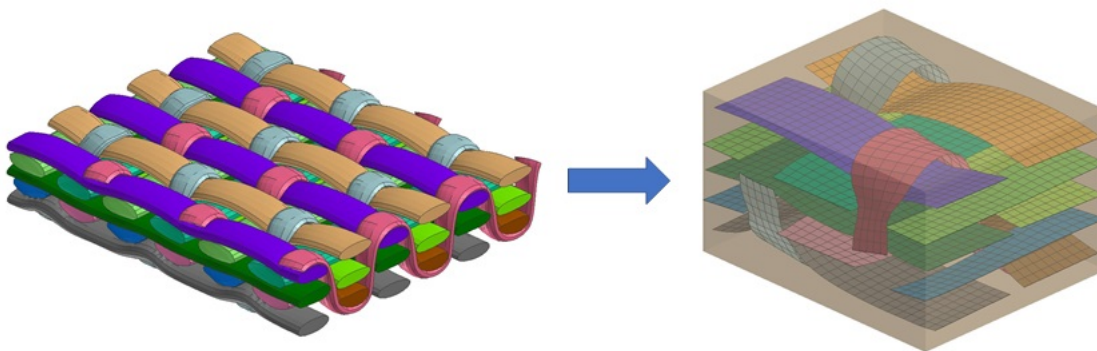
Obrázek 20: 3D snopky RVE se zobrazením uspořádání snopků v lokálním souřadnicovém systému (123)

Přístup modelování 3D snopky RVE byl do této práce doplněn později pro porovnání většího množství variant modelů RVE na mesoúrovni. Proto je 3D snopky RVE porovnáván jen u výsledků úloh homogenizace na mesoúrovni a nebyly pomocí této

struktury vytvářeny modely standardizovaných vzorků.

### 4.3 Shell

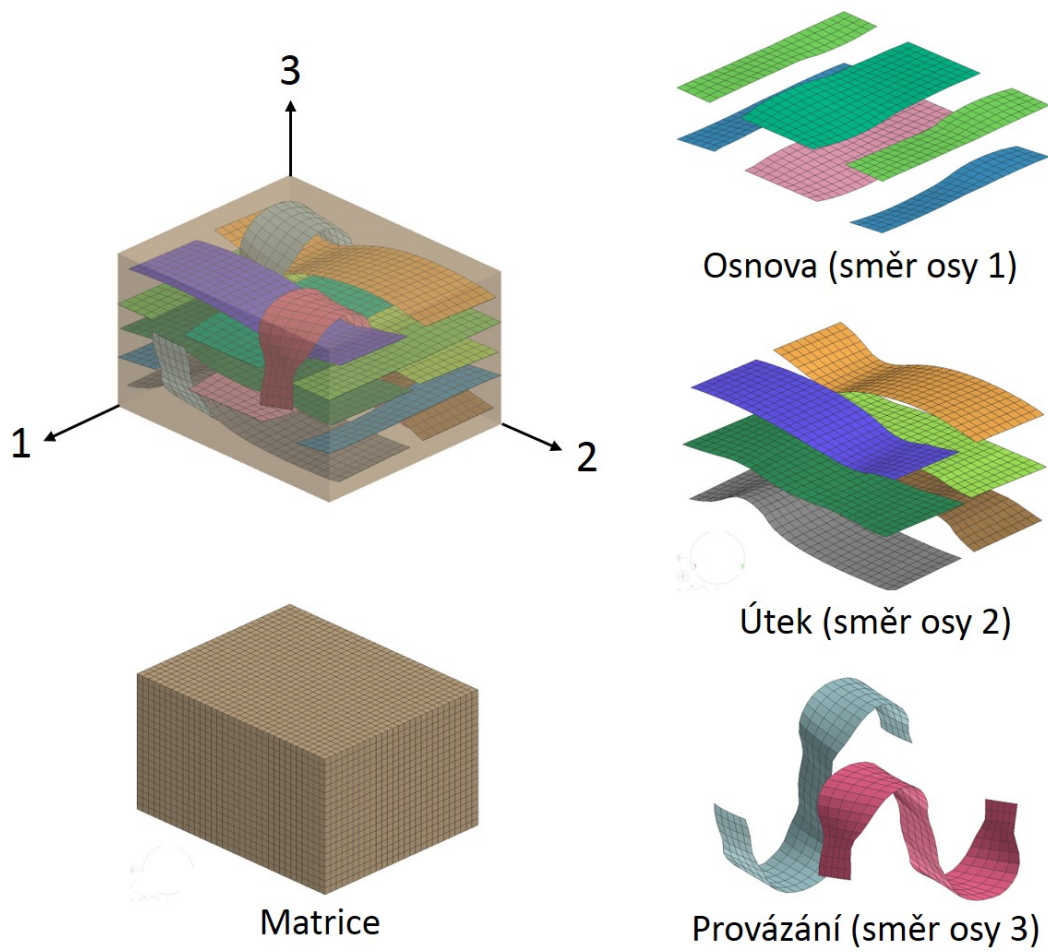
Dalším z porovnávaných přístupů modelování 3D tkaných kompozitních materiálů v této práci je použití kombinace matrice z 3D prvků typu Solid a snopků vláken reprezentovaných 2D prvky typu Shell. 3D snopky RVE je vytvořen z dané geometrie 3D tkaného kompozitního materiálu, jak je znázorněno na obrázku 17, zde reprezentují střední roviny 3D snopků. Každému skořepinovému snopku je přiřazena tloušťka tak, aby si odpovídaly průřezy 3D snopků a skořepinová reprezentace s přiřazenou tloušťkou.



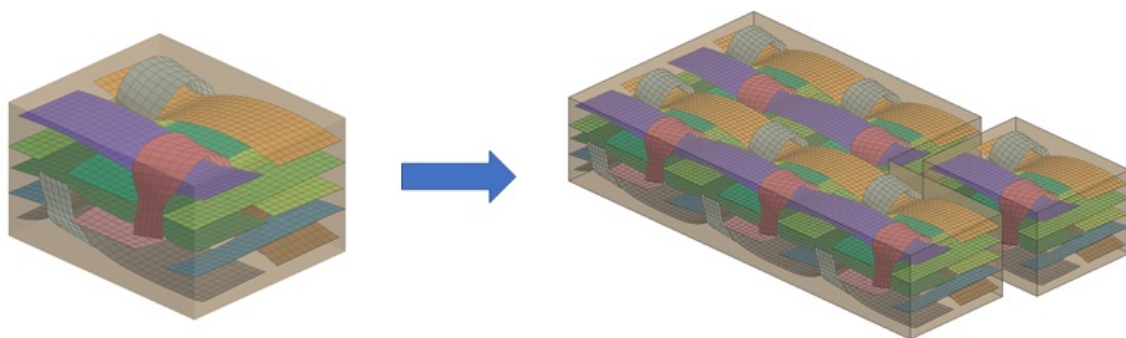
Obrázek 21: Tvorba Shell RVE

Snopky jsou modelovány pomocí čtyřuzlových elementů typu Shell s uniformní redukovanou integrací. Velikost hrany skořepinového elementu je 0.25 mm. K vytvoření RVE s Shellovými pásy je nutné přidat matrici. Matrice je tvořena pravidelnou sítí osmiuzlových elementů typu 3D solid s uniformní redukovanou integrací. Velikost hrany elementu matrice je 0.2 mm. Shellové prvky jsou s matricí spojeny kontaktem typu TIED. Celkem je Shell RVE tvořen 20 795 prvky. Model RVE s uspořádáním snopků v lokálním souřadnicovém systému (123) je vidět na obrázku 22. Materiálové parametry snopků a matrice u Shell přístupu jsou stejné jako u předchozích přístupů modelování, pro snopek jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2, pro matrici v tabulce 3 a na obrázcích 13 a 14.

Kromě porovnání výsledků úloh na mesoúrovni byly pomocí struktury Shell RVE vytvořeny modely Shell vzorků používaných při tahovém, tlakovém a smykovém standardizovaném testu, stejně jako u Voxel RVE. "kopírování" Shell RVE do celé geometrie vzorků je naznačeno na obrázku 23. U takto vytvořených modelů, které jsou rozměrově na úrovni makroškály, opět nejsou aplikovány periodické okrajové podmínky.



Obrázek 22: Shell RVE se zobrazením uspořádání snopků v lokálním souřadnicovém systému (123)



Obrázek 23: Schéma tvorby modelu kompozitního vzorku pomocí Shell RVE

## 4.4 Homogenizovaný materiál

Materiálové parametry homogenizovaného materiálu (tkaniny) jsou výsledkem procesu víceškálové homogenizace. Tyto materiálové parametry byly získány z elastické analýzy a analýzy porušení na mesoúrovni, pro které byl použit Voxel RVE. Výsledný homogenizovaný materiál je popsán jako ortotropní materiál s poškozením a porušením daným kritériem maximálních napětí. Hodnoty elastických parametrů, parametrů poškození a porušení homogenizovaného materiálu byly uvedeny v kapitole 3.2 v tabulkách 4, 5 a 6.

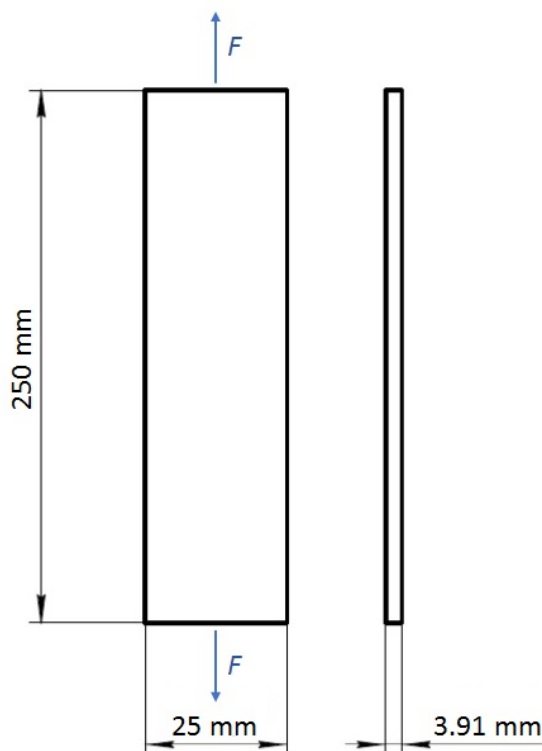
Modely s těmito homogenizovanými materiálovými parametry jsou označeny jako Homogenizovaný vzorek a byly použity v porovnáních standardizovaného tahového, tlakového a smykového testu.

## 5 Standardizované testy

V této kapitole jsou popsány standardizované testy, které jsou v této práci využity k porovnání výsledků jednotlivých přístupů modelování 3D tkaných kompozitních materiálů. K ověření chování modelů při nejčastějších způsobech namáhání byly vybrány tři různé zkoušky. Jedná se o tahový test, tlakový test a smykový test.

### 5.1 Tahový test

Prováděný tahový test odpovídá normě ASTM D 3039 [4]. Jedná se o standardní zkušební metodu pro kompozitní materiál s polymerní matricí, který je ve tvaru plochých obdélníkových vzorků. Na obrázku 24 je vidět schéma tahového testu. Vzorek má délku 250 mm, šířku 25 mm a tloušťku 3.91 mm. Pro přenesení zatížení z čelistí do vzorku se pro vzorky jednosměrových kompozitů používají nalepené kovové příložky. U vícesměrových laminátů, kompozitních materiálů na bázi tkanin nebo směsí s nahodilou výztuží je vzorek v čelistech držen tlakem přes smirkové plátno. Tahový test slouží ke stanovení tahových vlastností materiálu, kterými jsou mez pevnosti v tahu, maximální tahová deformace, modul pružnosti v tahu.

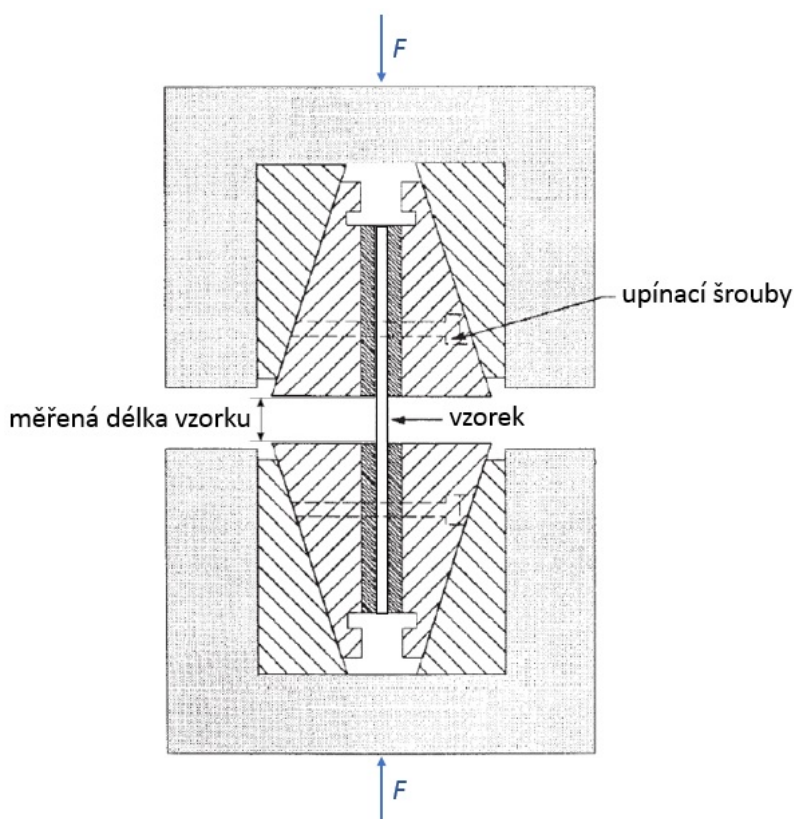


Obrázek 24: Schéma tahové zkoušky dle ASTM D 3039



## 5.2 Tlakový test

Tlakový test odpovídá normě ASTM D 3410 [5]. Stejně jako u tahového testu se jedná o zkoušku kompozitů ve tvaru plochých obdélníkových vzorků. Vzorek je pomocí kovových příložek upevněn ve speciálních tlakových čelistech testovacího zařízení, jak je vidět na obrázku 25. Toto zařízení se pak umístí mezi desky zkušebního stroje a je zatěžováno tlakem. Vzorek má délku 150 mm, šířku 25 mm, tloušťku 3.91 mm a jeho volná měřená délka je 30 mm. Tlakový test slouží ke stanovení tlakových vlastností materiálu, kterými jsou mez pevnosti v tlaku, maximální tlaková deformace, modul pružnosti v tlaku.

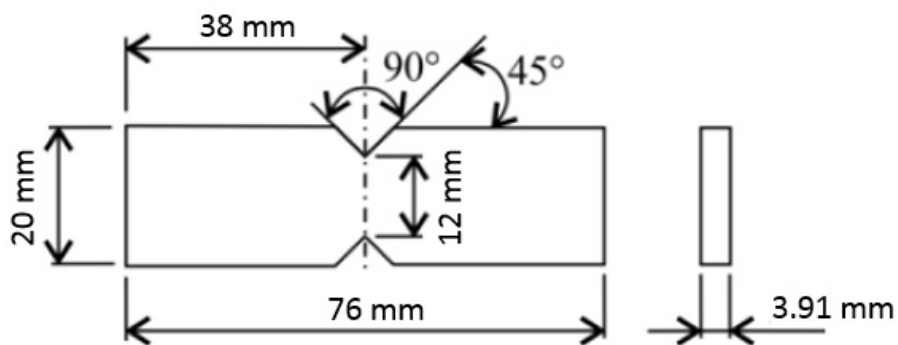
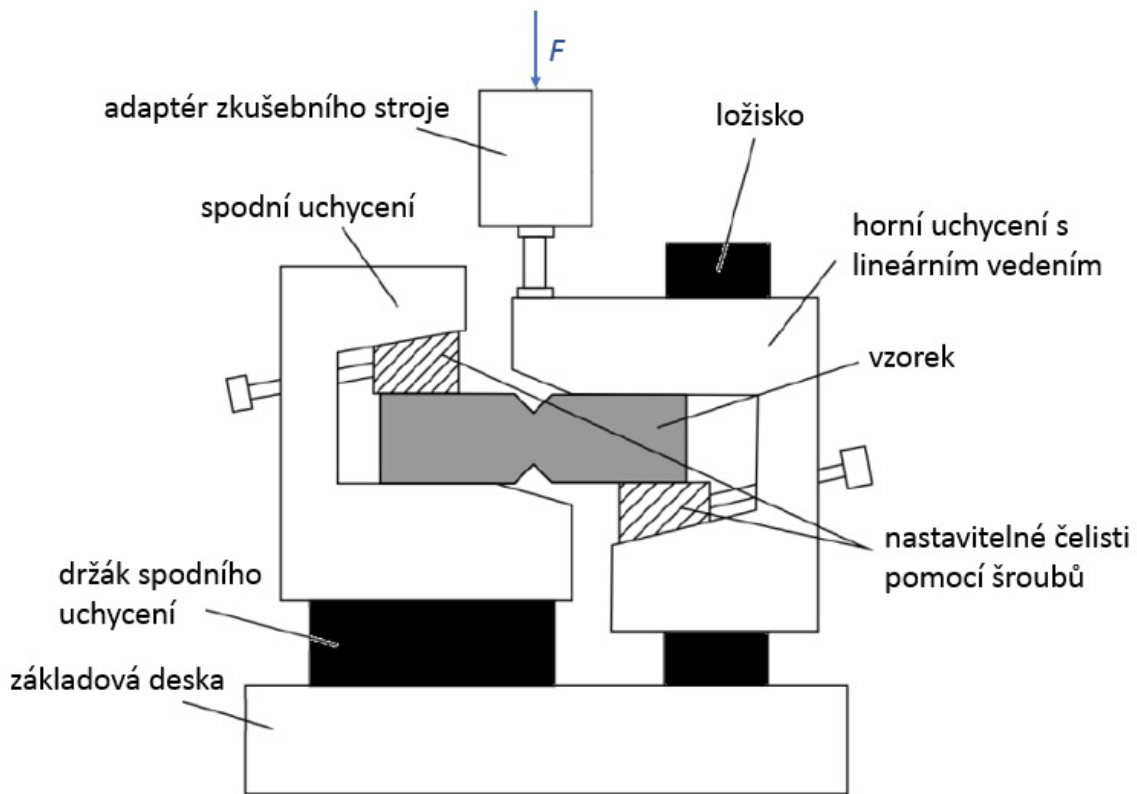


Obrázek 25: Schéma tlakové zkoušky dle ASTM D 3410

## 5.3 Smykový test

Smykových zkoušek existuje více druhů, v této práci byl vybrán smykový test vzorku s V vrubem (Iosipescu), který odpovídá normě ASTM D 5379 [6]. Vzorek ve formě plochého obdélníkového pásku se středově symetricky vyříznutými V-vrubami je umístěn ve speciálním testovacím zařízení, jak lze vidět na obrázku 26. Vruby způsobují, že je rozložení smykové deformace ve směru zatížení rovnoměrnější, než by bylo vidět bez vrubů. Vzorek v testovací zařízení pro smykový test je pak zatěžován

ve zkušebním stroji. Při smykovém testu se určuje odezva na smykové napětí nebo deformaci, mez pevnosti, maximální deformace, smykový modul pružnosti.



Obrázek 26: Schéma smykové zkoušky dle ASTM D 5379

## 6 MKP modely standardizovaných testů

V této kapitole jsou popsány vytvořené konečnoprvkové modely pro tahový, tlakový a smykový test. Všechny úlohy byly vytvořeny v konečnoprvkovém softwaru Virtual Performance Solution (VPS) s použitím explicitního řešiče CSM. U tahového a tlakového testu byly pro homogenizovaný materiál vytvořeny vždy dvě varianty modelu – pro zatížení vzorku ve směru osnovy a zatížení ve směru útku. Vzhledem k dlouhé výpočetní době úloh tahového a tlakového testu Voxel vzorku a Shell vzorku pro zatížení ve směru osnovy nebyl již vytvářen Voxel vzorek a Shell vzorek pro tahový a tlakový test pro zatížení ve směru útku.

### 6.1 MKP model tahové zkoušky

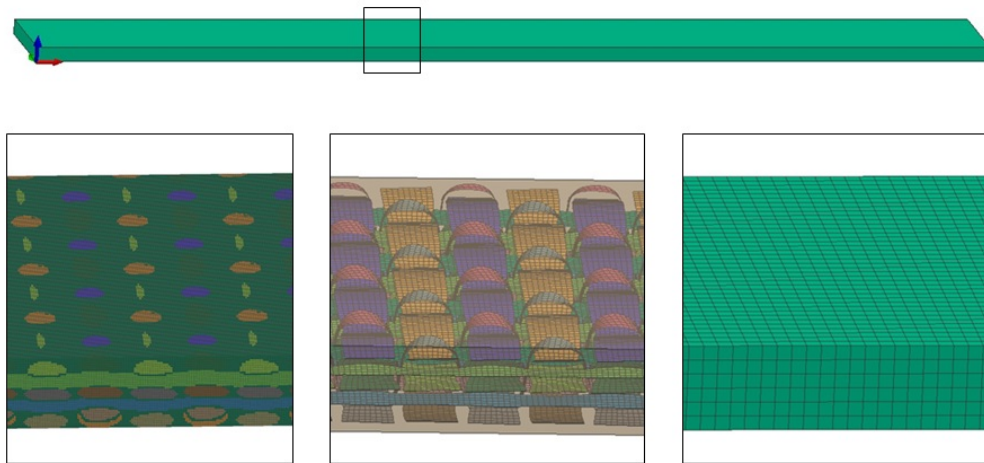
Model tahové zkoušky s detaily pro Voxel strukturu, shell strukturu a homogenizovaný vzorek je vidět na obrázku 27. Vazbou Multiple Constrain (MTOCO) jsou přes všechny stupně volnosti propojeny závislé uzly elementů na obou stranách vzorku vždy do jednoho nezávislého uzlu reprezentujícího jejich střed hmotnosti, jak lze vidět na obrázku 28. Vazba MTOCO váže jeden nebo několik posuvných nebo rotačních stupňů volnosti závislých uzlů s odpovídajícími stupni volnosti nezávislého uzlu a je definována rovnicemi:

$$\mathbf{U}(n_d) = \mathbf{U}(n_i) + \boldsymbol{\alpha}(n_i)\mathbf{d} \quad (29)$$

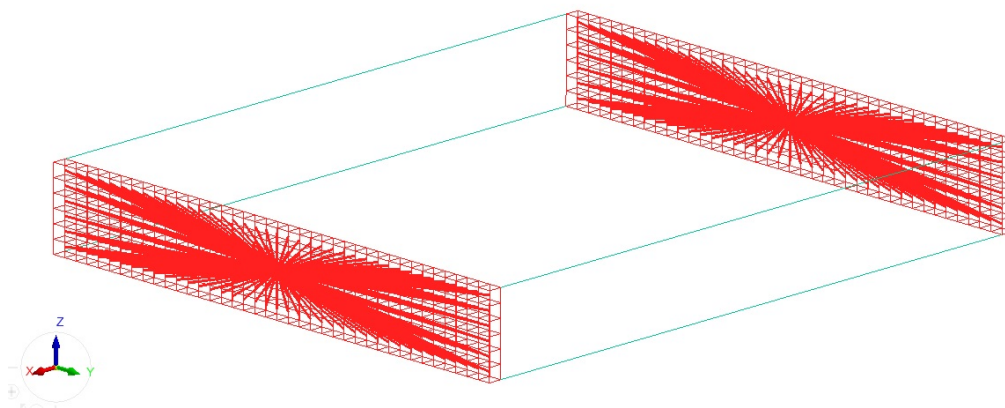
$$\boldsymbol{\alpha}(n_d) = \boldsymbol{\alpha}(n_i), \quad (30)$$

kde  $\mathbf{U}(n_d)$  je vektor posunutí závislých uzlů,  $\mathbf{U}(n_i)$  je vektor posunutí nezávislého uzlu,  $\boldsymbol{\alpha}(n_d)$  a  $\boldsymbol{\alpha}(n_i)$  jsou vektory pootočení závislých uzlů, resp. nezávislého uzlu a  $\mathbf{d}$  je vektor  $n_i n_d$ .

V těchto nezávislých uzlech jsou aplikovány okrajové podmínky. Na jednom konci vetknutí pomocí Displacement BC (BOUNC) a odebráním všech stupňů volnosti. Na opačném konci je pomocí Displacement BC umožněn pouze posuv ve směru  $x$  a aplikován posuv v kladném směru  $x$  pomocí 3D BC (DIS3D) se sinovým náběhem a dále konstantním průběhem, jak lze vidět na obrázku 29. Porovnání celkového počtu prvků jednotlivých modelů a příslušného výpočetního času úlohy lze vidět v tabulce 7.



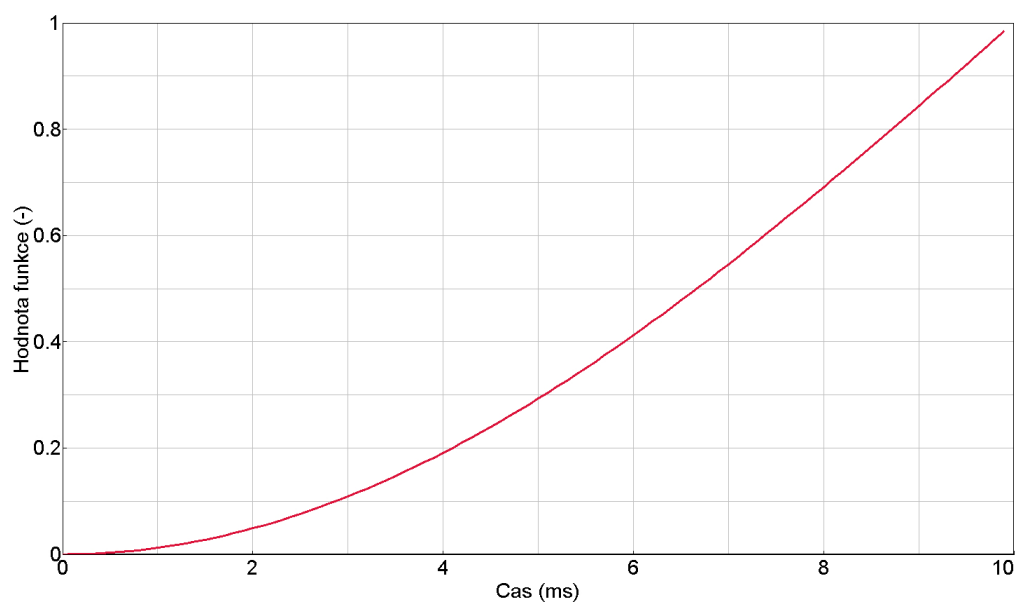
Obrázek 27: Model tahového testu s detaily Voxel struktury (vlevo), shell struktury (uprostřed) a homogenizovaného materiálu (vpravo)



Obrázek 28: Vizualizace vazby Multiple Constraint (MTOCO)

	Počet elementů	Výpočetní čas [h:m:s]	Počet procesorů
Voxel vzorek	25 765 520	106:59:24	64
Shell vzorek	573 975	38:12:50	8
Homogenizovaný vzorek	90 090	0:20:57	8

Tabulka 7: Porovnání jednotlivých modelů pro tahový test



Obrázek 29: Funkce posunutí

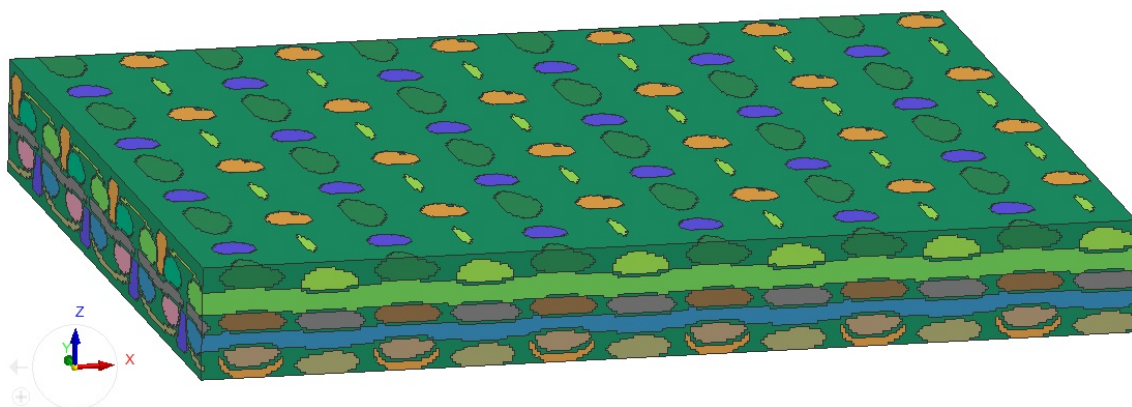
## 6.2 MKP model tlakové zkoušky

Pro tlakový test není modelován celý vzorek, ale jen měřená oblast vzorku mezi uchyaceními. Model tlakové zkoušky pro voxel strukturu, strukturu s shell prvky a pro homogenizovaný materiál je na obrázku 30. Vazbou Multiple Constrain (MTOCO) jsou přes všechny stupně volnosti propojeny elementy na obou stranách vzorku do jednoho uzlu reprezentujícího jejich střed hmotnosti, stejně jako u tahového testu. V těchto uzlech jsou aplikovány okrajové podmínky. Na jednom konci vetknutí pomocí Displacement BC (BOUNC) a odebráním všech stupňů volnosti. Na opačném konci je pomocí Displacement BC umožněn pouze posuv ve směru  $x$  a aplikován posuv v záporném směru  $x$  pomocí 3D BC (DIS3D).

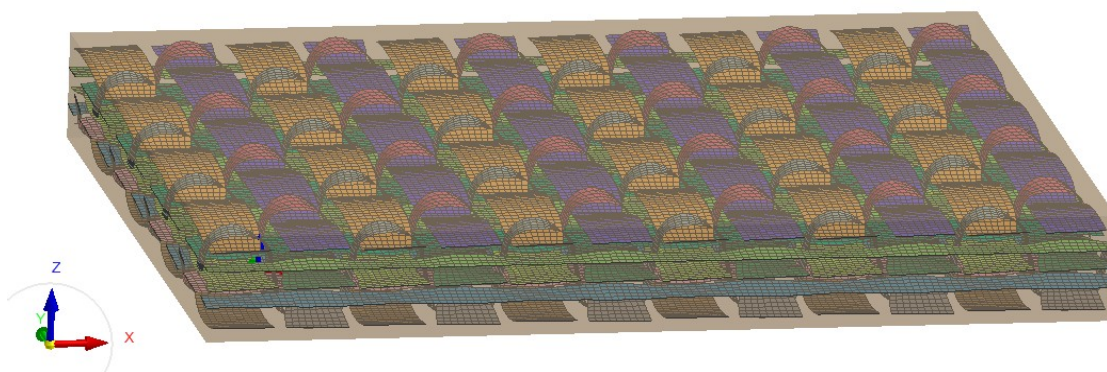
V tabulce 8 lze vidět porovnání celkového počtu prvků modelů tlakového testu a příslušného výpočetního času úlohy.

	Počet elementů	Výpočetní čas [h:m:s]	Počet procesorů
Voxel vzorek	3 096 720	26:40:02	64
Shell vzorek	68 593	2:28:34	8
Homogenizovaný vzorek	10 764	0:02:55	8

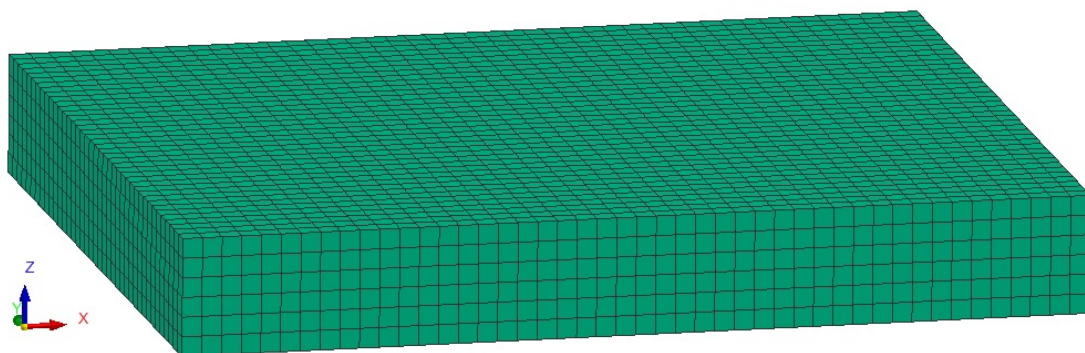
Tabulka 8: Porovnání jednotlivých modelů pro tlakový test



(a) Voxel vzorek



(b) Shell vzorek



(c) Homogenizovaný materiál

Obrázek 30: Modely tlakového testu

### 6.3 MKP model smykové zkoušky

Konečnoprvkový model smykového testu je tvořen dvěma částmi— kompozitním vzorkem a dvěma čelistmi sloužícími k uchycení a posuvu. Model smykového testu pro voxel strukturu, strukturu s shell prvky a pro homogenizovaný materiál je na obrázku 31. Mezi vzorkem a čelistmi je nastaven nesymetrický kontakt mezi uzly a segmenty s úpravou hran (typ 34) se třením. Úloha smykového testu probíhá ve dvou krocích. První krok simuluje utazení čelistí pro upevnění vzorku. Nejprve jsou tedy jednotlivé části čelistí zvlášť modelovány jako tuhá tělesa (vazba RBODY), tedy vzdálenosti mezi jednotlivými uzly, které tvoří tuhé těleso, se nemění a jejich pohyb je zcela definován posuvy a rotacemi řídicího uzlu. Vizualizace vazby RBODY pro první krok úlohy je vidět na obrázku 32. V těchto uzlech působí síla ve směru ke kompozitnímu vzorku, čelisti se tak posunou těsně k vzorku. Aby vzorek zůstal v tomto kroku mezi čelistmi, je středovým uzlům vzorku zamezen posuv ve směru  $y$  a jednomu z těchto uzlů odebrány i zbylé stupně volnosti (BOUNC).

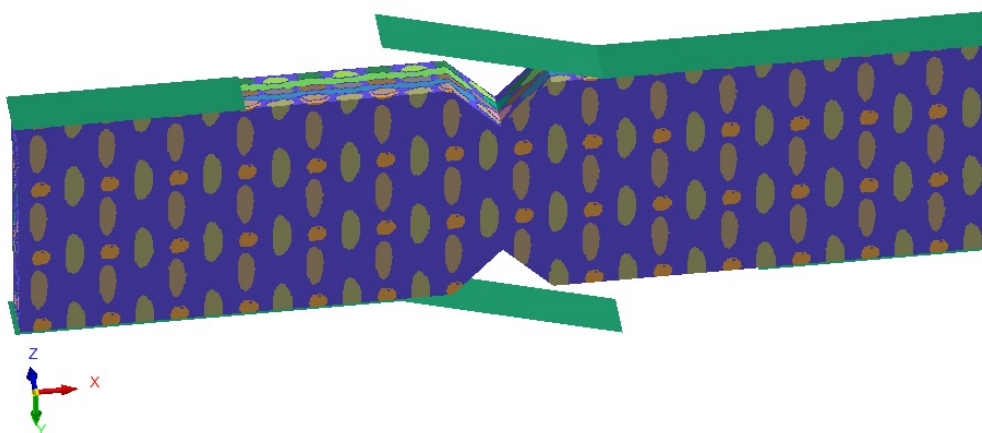
Ve druhém kroku je simulováno smykové zatížení vzorku pomocí posuvu jedné z čelistí. Každá z čelistí je modelována jako tuhé těleso (RBODY), v řídicím uzlu nepohybující se čelisti je aplikována okrajová podmínka vetknutí, tedy odebrání všech stupňů volnosti pomocí Displacement BC (BOUNC). V řídicím uzlu pohyblivé čelisti je pomocí 3D BC (DIS3D) zavedeno konstantní posunutí v kladném směru osy  $y$ . Vazba tuhého tělesa pro čelisti ve druhém kroku úlohy lze vidět na obrázku 32.

Pro homogenizovaný materiál a voxel strukturu jsou použity prvky typu 3D solid, lineární, s uniformní redukovanou integrací. Pro model smykového testu tvořený voxel strukturu jsou kromě osmiuzlových prvků (hexa) použity v místě výřezu vzorku šestiuzlové prvky (penta). Pro model s homogenizovaným materiálem byla v oblasti výřezu vzorku použita jemnější MKP síť s dvakrát menší velikostí hrany elementu. Porovnání celkového počtu prvků modelu a příslušného výpočetního času úlohy lze vidět v tabulce 9.

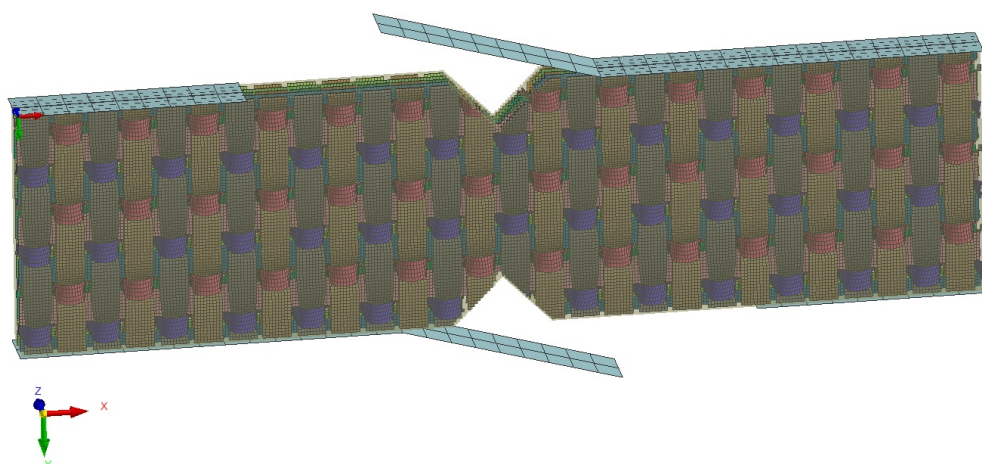
	Počet elementů	Výpočetní čas [h:m:s]	Počet procesorů
Voxel vzorek	6 066 132	314:32:57	64
Shell vzorek	850 548	18:50:10	8
Homogenizovaný vzorek	6 180	0:07:16	8

Tabulka 9: Porovnání jednotlivých modelů pro smykový test

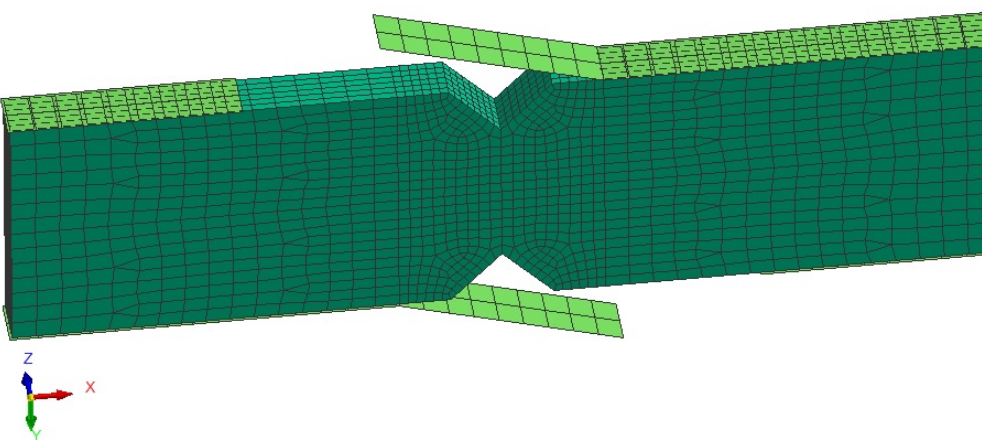




(a) Voxel vzorek

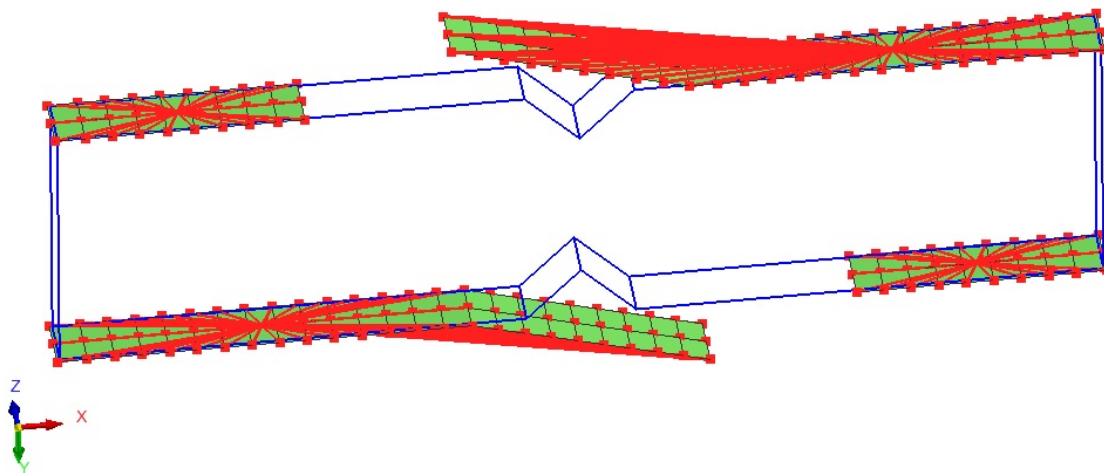


(b) Shell vzorek

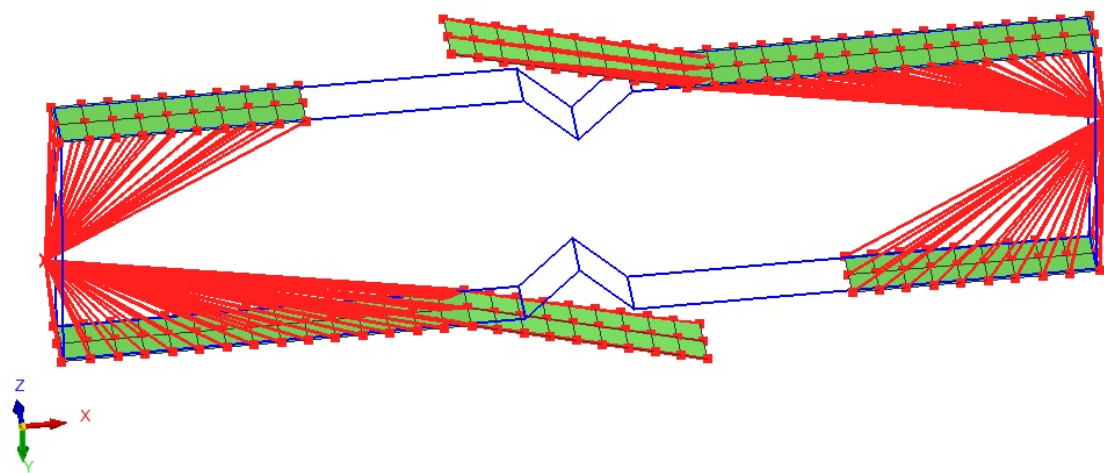


(c) Homogenizovaný vzorek

Obrázek 31: Model smykového testu



(a) První krok úlohy



(b) Druhý krok úlohy

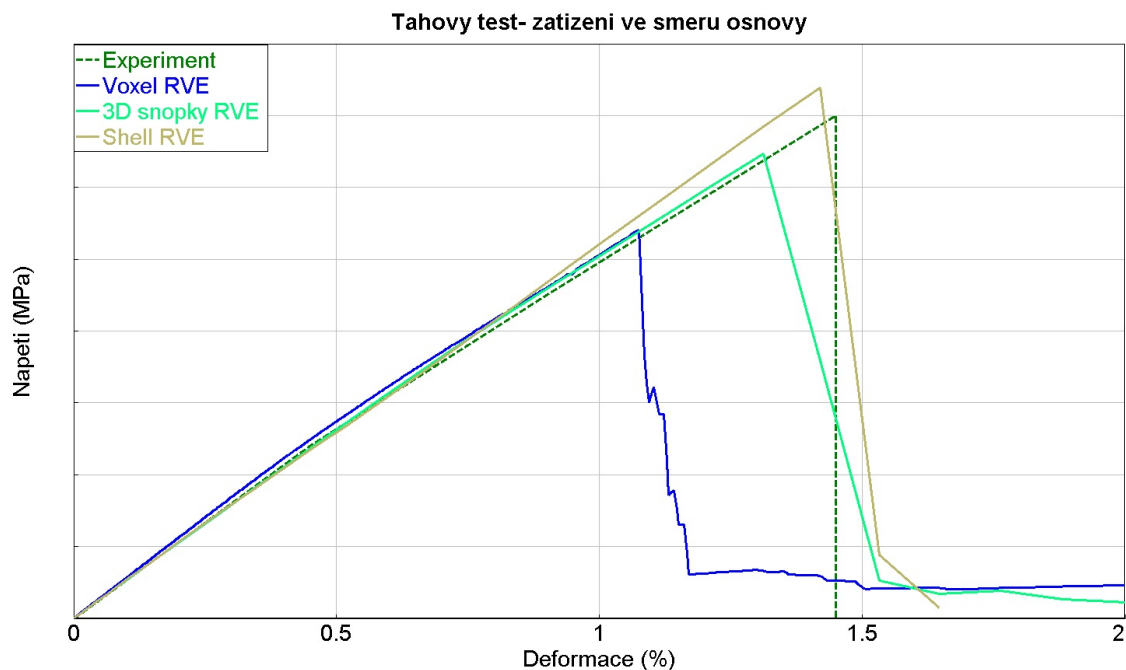
Obrázek 32: Vizualizace vazby tuhého tělesa (RBODY)

## 7 Výsledky

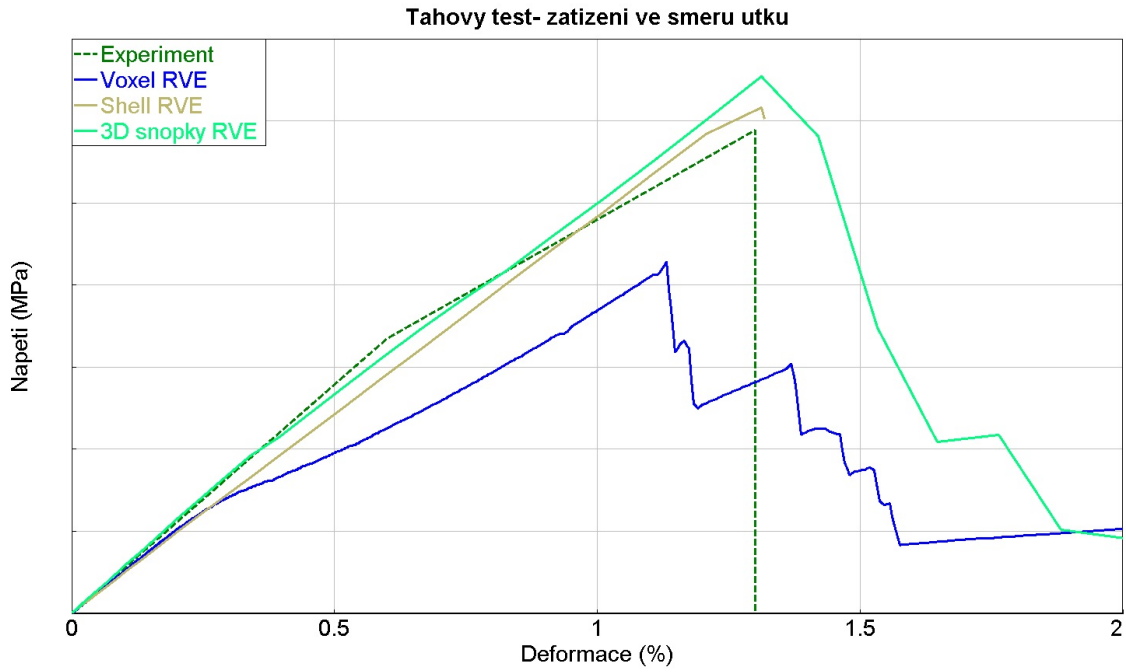
### 7.1 Porovnání výsledků modelů RVE

V této kapitole je porovnání výsledků jednotlivých úloh homogenizace na mesoúrovni. V následujícím textu nejsou porovnány přímo hodnoty elastických konstant, ale záznamy z experimentů a ze simulací jednotlivých jednoosých zkoušek ve směru osnovy a útku a smykové zkoušky, ke kterým byl k dispozici experiment. Tyto zkoušky byly provedeny pro tři přístupy modelování 3D tkaných kompozitních materiálů na mesoúrovni, tedy Voxel RVE, 3D snopky RVE a Shell RVE. Jelikož standardizované testy pro tah a tlak mají geometricky stejný tvar (kvádr) a způsob zatížení vzorku jako porovnávané RVE, je při zobrazení závislostí napětí a deformace možné porovnat výsledky RVE s výsledky experimentu příslušných standardizovaných testů.

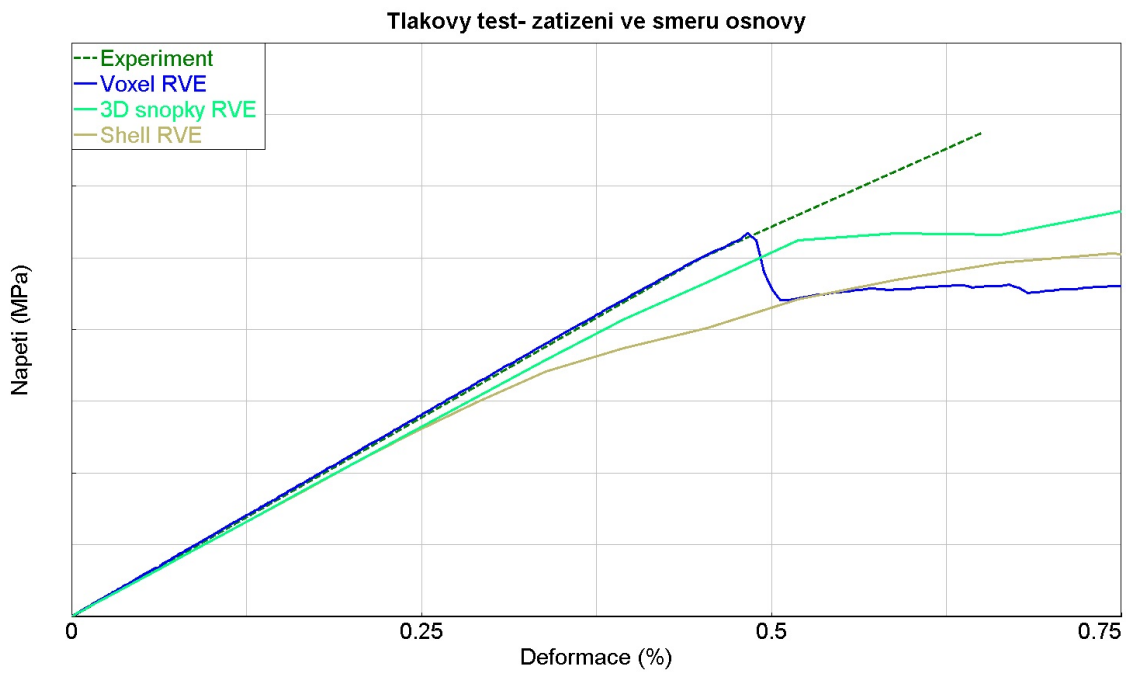
Na obrázku 33 resp. 34 je porovnání závislostí napětí a deformace pro RVE zatížené tahem ve směru osnovy resp. ve směru útku. Také je zde vidět výsledek experimentu standardizované tahové zkoušky s natočením materiálu k zatížení ve směru osnovy resp. ve směru útku. Na obrázku 35 resp. 36 je porovnání závislostí napětí a deformace pro RVE zatížené tlakem ve směru osnovy resp. ve směru útku a výsledek experimentu standardizované tlakové zkoušky s natočením materiálu k zatížení ve směru osnovy resp. ve směru útku.



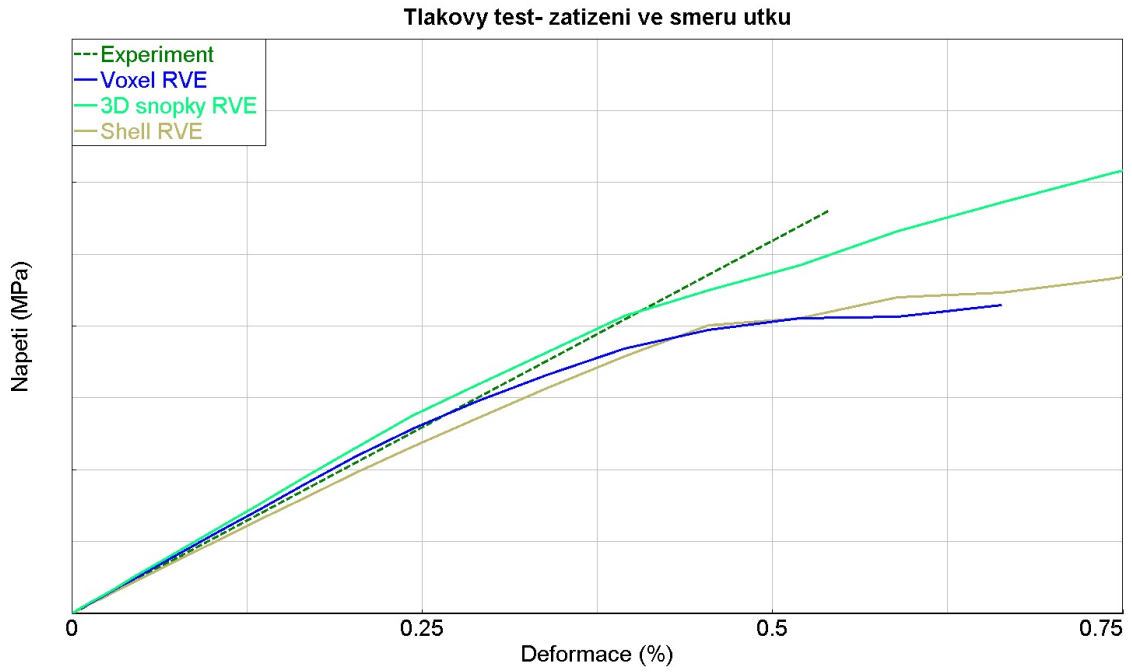
Obrázek 33: Porovnání závislostí napětí a deformace pro zatížení tahem ve směru osnovy



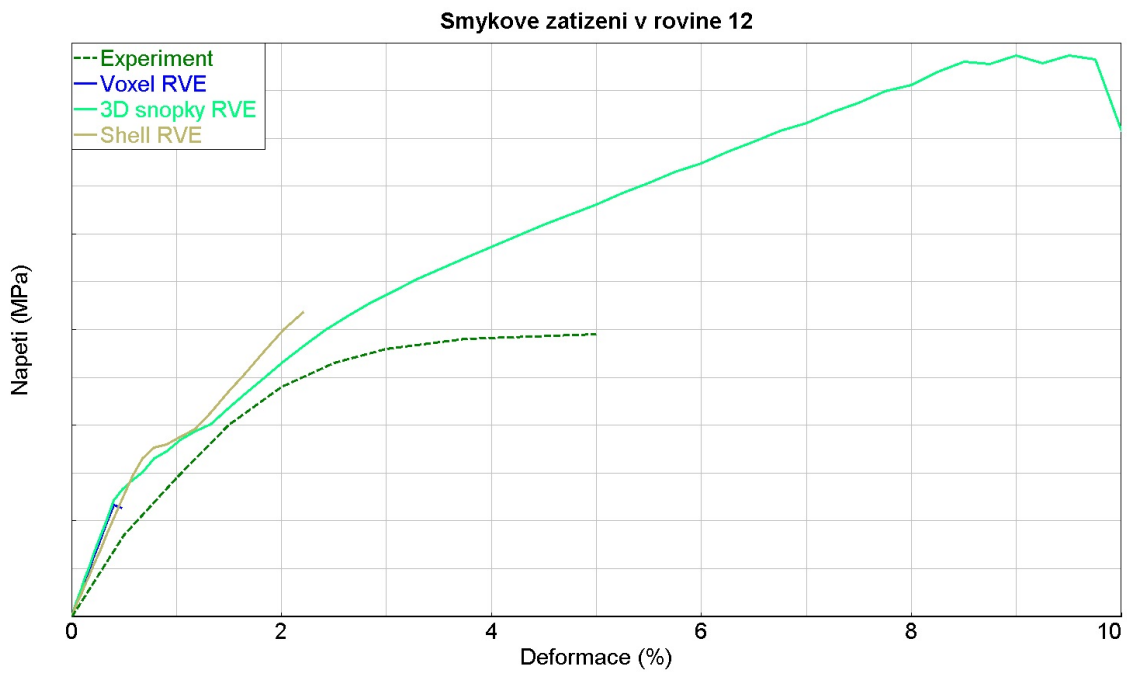
Obrázek 34: Porovnání závislosti napětí a deformace pro zatížení tahem ve směru útku



Obrázek 35: Porovnání závislosti napětí a deformace pro zatížení tlakem ve směru osnovy



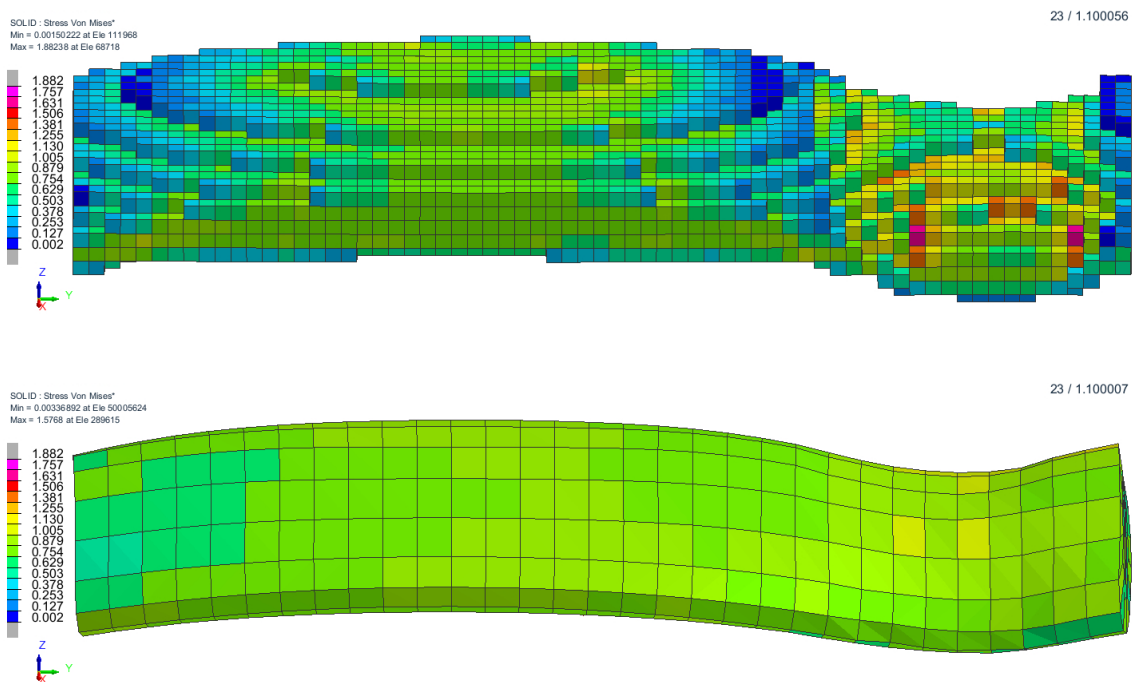
Obrázek 36: Porovnání závislosti napětí a deformace pro zatížení tlakem ve směru útku



Obrázek 37: Porovnání závislosti napětí a deformace pro zatížení smykem v rovině osnovy a útku

Průběhy závislostí napětí a deformace modelů 3D snopky RVE a Shell RVE přibližně odpovídají u tahových a tlakových testů výsledkům experimentů. Při tahovém zatížení Voxel RVE vytváří ostré hrany pravidelné sítě efekt vrubů, které působí jako koncentrátory napětí, jak lze vidět na obrázku 38, kde je zobrazeno rozložení napětí na snopku Voxel RVE v porovnání se stejným snopkem u 3D snopky RVE. Dochází tak k dřívějšímu poškozování elementů a může dojít ke snížení pevnosti vzorku. Tento úkaz lze vidět například u zatížení Voxel RVE tahem ve směru útku na obrázku 34. U modelů 3D snopky RVE a Shell RVE nedochází díky hladší diskretizaci snopků k tvorbě koncentrátorů napětí.

U smykového zatížení nesouhlasí závislosti smykového napětí a smykové deformace RVE s experimentem standardizované smykové zkoušky, jak je vidět na obrázku 37. Důvodem je V–vrub u standardizovaného testu, který nemůže být zohledněn v RVE, protože RVE představují nekonečnou periodickou strukturu. Proto zde není možné porovnávat výsledek experimentu s RVE narozdíl od tahového a tlakového testu.



Obrázek 38: Rozložení napětí na snopku Voxel RVE (nahore) a 3D snopky RVE (dole) při zatížení tahem ve směru útku

## 7.2 Porovnání výsledků standardizovaných testů

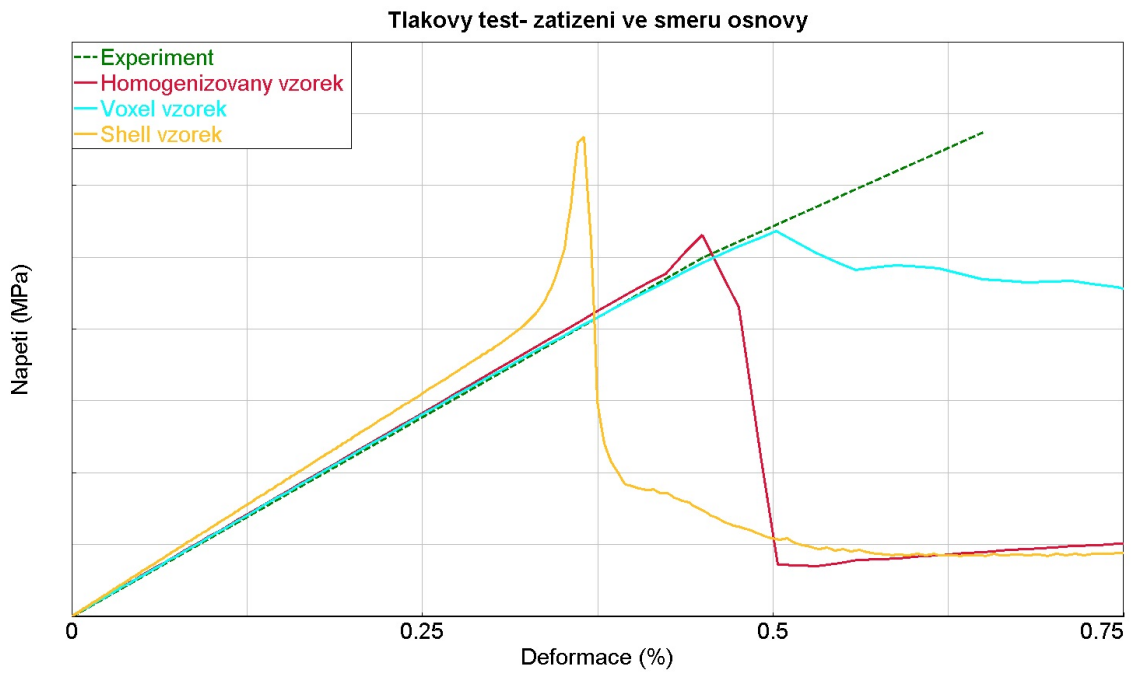
V této kapitole jsou porovnány výsledky MKP simulací standardizovaných testů s výsledky experimentů. Jedná se o tahový test se zatížením ve směru osnovy (obrázek 39) a se zatížením ve směru útku (obrázek 40), tlakový test se zatížením ve směru osnovy (obrázek 41) a se zatížením ve směru útku (obrázek 42) a smykový test (obrázek 43). S experimentem jsou porovnávány homogenizovaný vzorek, Voxel vzorek a Shell vzorek. Porovnání počtu prvků jednotlivých modelů standardizovaných testů a doby výpočtu úloh jsou shrnuty v tabulkách 7, 8 a 9 v kapitole 6.



Obrázek 39: Porovnání závislosti napětí a deformace pro tahový test při zatížení ve směru osnovy

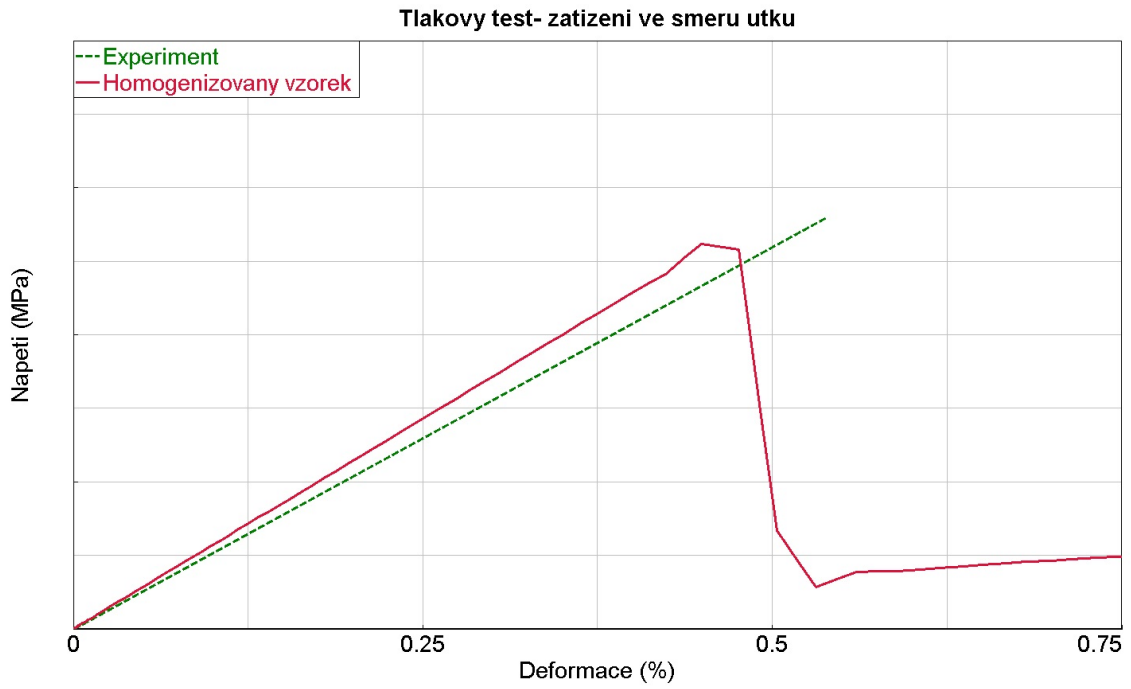


Obrázek 40: Porovnání závislosti napětí a deformace pro tahový test při zatížení ve směru útku

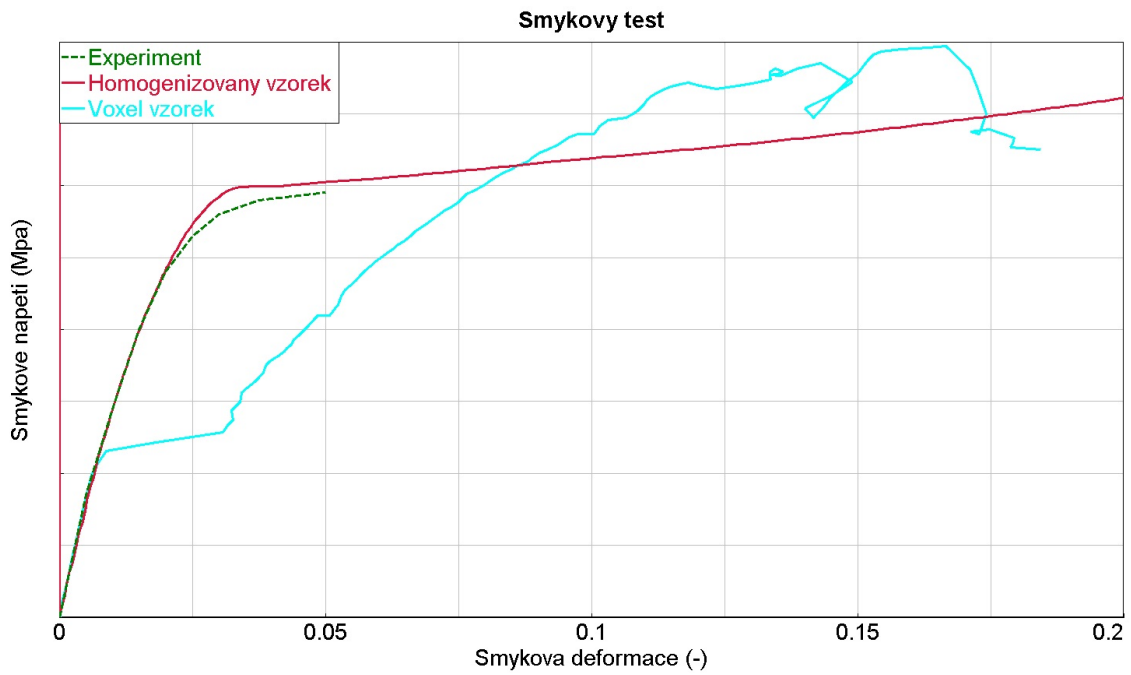


Obrázek 41: Porovnání závislosti napětí a deformace pro tlakový test při zatížení ve směru osnovy





Obrázek 42: Porovnání závislosti napětí a deformace pro tlakový test při zatížení ve směru útku

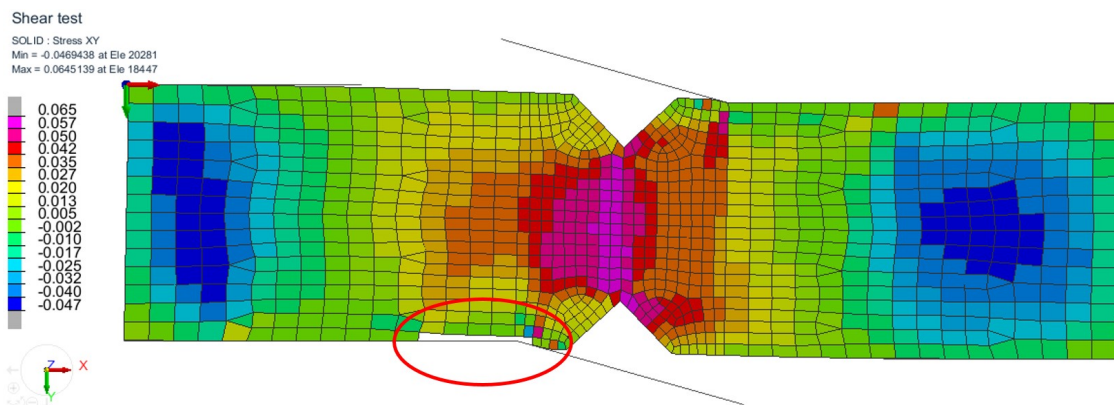


Obrázek 43: Porovnání závislosti napětí a deformace pro smykový test

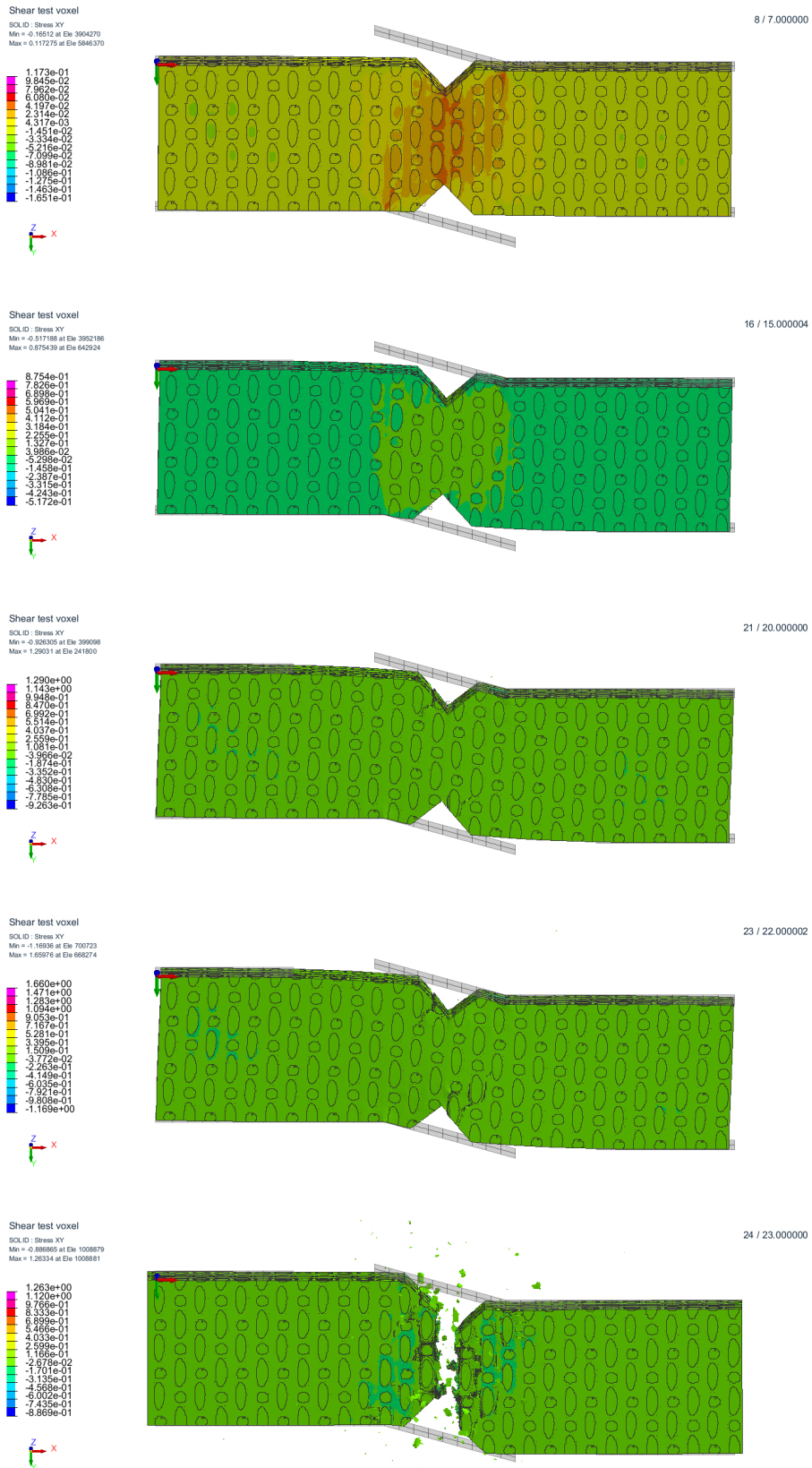
Při tlakovém testu Shell vzorku se projevuje nedostatečná provázanost snopků. Skořepinové elementy snopku nejsou v těsném kontaktu s ostatními snopky a ve svém nejbližším okolí jsou svázány jen s prvky matrice. Nedostatečná provázanost snopků se projevuje i při smykovém testu Shellového vzorku, zde dochází ke snaze snopků o vybočení kvůli vzpěru, prvky matrice jsou mnohem více namáhány a dochází k jejich porušení a nedojde tak k požadovanému smykovému zatížení vzorku. V grafu porovnání závislosti napětí a deformace pro standardizovaný smykový test (obrázek 43) proto není zobrazen výsledek Shellového vzorku.

U Voxelového vzorku při smykovém testu odpovídá na začátku zatěžování průběh závislosti napětí na deformaci experimentu a homogenizovanému vzorku, pak se ale začne opět projevovat vliv koncentrátoru napětí a dojde podobně jako u tahového testu (viz obrázek 34) k porušování vzorku. Průběh smykového testu Voxel vzorku je vidět na obrázku 45.

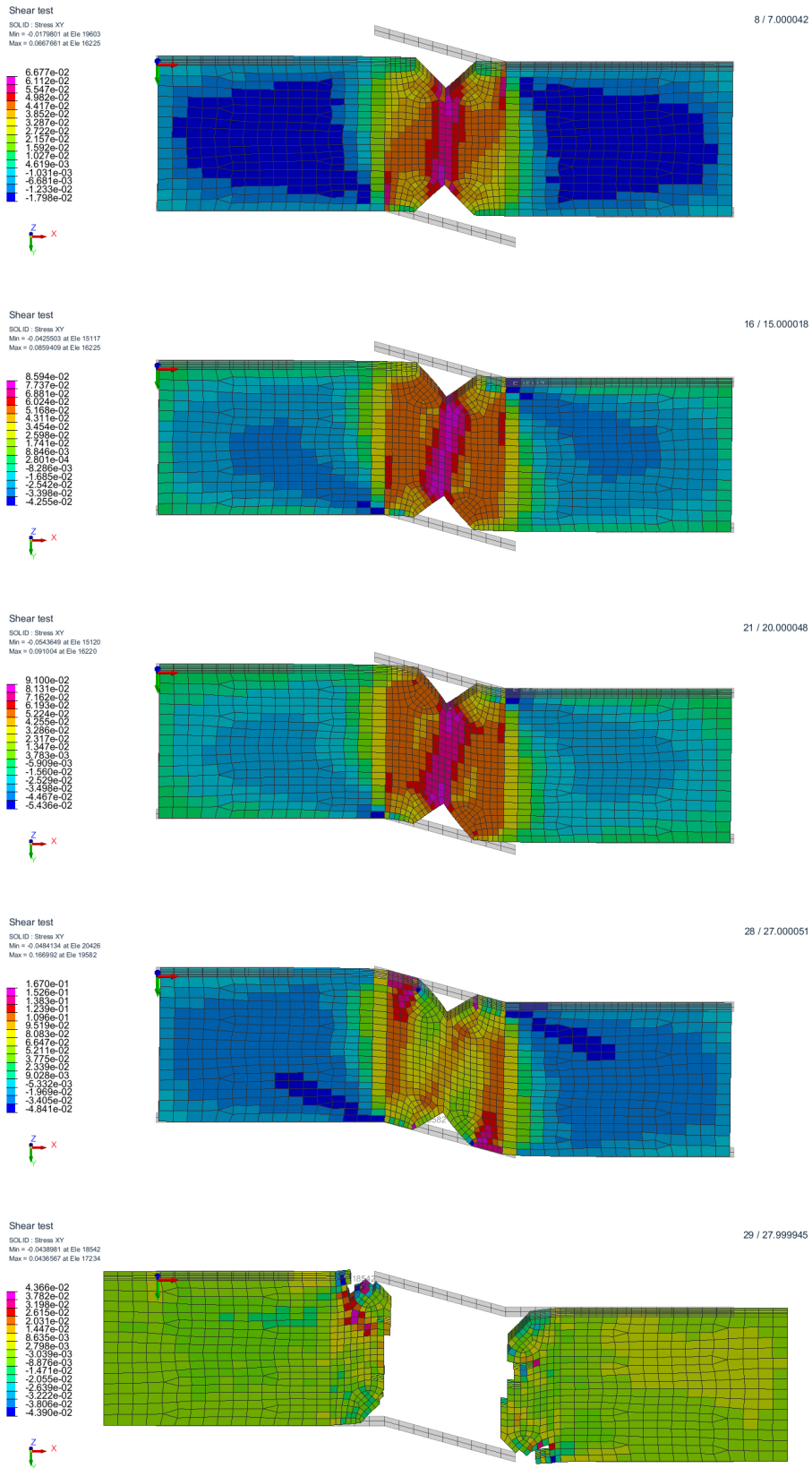
U smykového testu s homogenizovaným vzorkem docházelo k eliminaci prvků, které jsou v kontaktu s čelistmi, v důsledku namáhání tlakem a nedocházelo tak k požadovanému smykovému zatížení vzorku, jak je vidět na obrázku 44. Proto byly upraveny hodnoty udávající funkci poškození, protože původní funkce poškození je nastavena pro křehké porušení materiálu, zatímco tento materiál má při smykovém zatížení houževnatý charakter porušování. V tomto grafu (obrázek 43) je pak uveden výsledek homogenizovaného vzorku s parametry poškození pro smykové zatížení, které jsou uvedeny v tabulce 10. Průběh smykového testu Homogenizovaného vzorku je vidět na obrázku 46.



Obrázek 44: Porovnání závislosti napětí a deformace pro smykový test



Obrázek 45: Průběh smykového testu Voxel vzorku



Obrázek 46: Průběh smykového testu Homogenizovaného vzorku

$fail_{lim}$	0,2
$fail_{ult}$	1,3
$d_{max}$	0,5

Tabulka 10: Parametry funkce poškození homogenizovaného materiálu pro smykové zatížení

### 7.3 Shrnutí výsledků

Z výsledků lze popsat chování kompozitního materiálu při zatížení tahem, tlakem a smykem. V tahu jde o lineární chování do porušení materiálu, které je dáno pevností vláken v daném směru. V tlaku se materiál chová lineárně do porušení, které může být ovlivněno geometrií a vzpěrem. Pro smyk je charakteristické nelineární chování materiálu patrně ovlivněné plasticitou matrice a změnou polohy vláken v průběhu zatěžování.

Z výsledků je vidět, že u Voxelové struktury dochází k tvorbě koncentrátorů napětí, které v realitě neexistují. Kvůli tomu dochází rychleji k poškození elementů, snížení tuhosti modelu a dřívejšímu porušení. Voxel RVE tak není vhodný ke stanovení parametrů poškození tkaniny (makromodelu), protože může být příliš konzervativní a podhodnocovat reálné vlastnosti materiálu. Nicméně, díky snadnější aplikaci periodických okrajových podmínek na Voxel RVE a dobrým výsledkům elastické analýzy na mesoúrovni se tento model RVE v procesu homogenizace používá.

Shell RVE vykazuje dobrou shodu s experimenty a výpočetní doba úloh je kratší než u modelu Voxel a 3D snopků. Při větším osovém zatížení volných snopků však dochází k přetěžování a eliminaci prvků matrice, které jsou vázány ke snopkům. Tím se snižuje tuhost a pevnost modelu. Předmětem dalšího zkoumání by tak mohly být možnosti spojení snopků s maticí a vzájemné kontakty elementů snopků.

Model s 3D snopky s v konfiguraci RVE chová realisticky. Řeší problém Voxel přístupu, neboť povrch snopků respektuje reálnou geometrii— je hladký. Nevýhodou modelu je pracnost jeho přípravy a výpočetní čas.

Voxel vzorky, Shell vzorky i vzorky s 3D snopky je prakticky nemožné vytvořit pro složitější geometrii vzorků (zkušebních tělísek) standardizovaných testů. Díky jemné síti navíc obsahují Voxel vzorky miliony prvků, což vede k neúnosně dlouhé době výpočtu úlohy.

Homogenizovaný materiál má tuhost odpovídající výsledkům experimentů, ale pev-

nostně jim neodpovídá. To je způsobeno tím, že materiálové parametry homogenizovaného materiálu (tkaniny) byly určeny z modelu Voxel RVE. Přesnějšími hodnotám porušení by mělo být dosaženo použitím 3D snopků RVE nebo Shell RVE při analýze porušení na mesoúrovni homogenizace.

U kompozitního materiálu dochází při tahovém zatížení ke křehkému porušení, zatímco u smykového zatížení má kompozitní materiál houževnatý charakter porušování. Proto je u výsledného homogenizovaného materiálu nutné definovat rozdílné funkce poškození pro tahové a smykové zatížení.

## 8 Závěr

V této práci byly ověřeny a porovnány různé přístupy modelování 3D tkaných kompozitních materiálů. Byly vytvořeny modely reprezentativního objemového elementu (RVE) na mesoúrovni kompozitního materiálu pro tři různé diskretizace architektury snopků a matrice: Voxel RVE, 3D snopky RVE a Shell RVE. Jejich chování bylo porovnáno při zatížení tahem, tlakem a smykem. Podrobné výsledky jsou vyhodnoceny v kapitole 7.1. Pro finální posouzení vhodné metodiky modelování 3D tkaných kompozitních materiálů byly výsledky simulací standardizovaných testů (tah, tlak, smyk) porovnány s výsledky experimentů, viz kapitola 7.2. Standardizované testy byly simulovány pomocí modelů Voxel, Shell a modelů s homogenizovanými parametry tkaniny. Model s 3D snopky byl kvůli výpočetní náročnosti pro konečné vyhodnocení na standardizovaných testech vynechán (i pro reálné úlohy není vhodný).

Z provedené analýzy vyplývá, že přístup modelování 3D tkaných kompozitů pomocí Voxel sítě je konzervativní, jelikož může podhodnocovat pevnost materiálu díky výskytu koncentrátorů napětí – způsobeno samotnou metodikou tvorby Voxel sítě. Model se Shell prvky vykazoval dobrou shodu na úrovni RVE, na standardizovaných testech se projevuje nedostatečná provázanost snopků při zatížení v tlaku a smyku. Navíc modelování celých kompozitních dílů pomocí přístupů Voxel nebo Shell není praktické díky vysoké časové náročnosti výpočtu. Navíc těmito přístupy je velmi náročné vytvořit složitější tvary. Z tohoto pohledu se jednoznačně nejvhodnějším způsobem modelování jeví model s homogenizovaným materiálem tkaniny.

Z provedených analýz je zřejmé, že je proces homogenizace potřeba upravit dle následujících zjištění:

- Na meso úrovni je pro stanovení pevnostních parametrů v tahu třeba použít detailnější model než Voxel model, protože síť generuje koncentrátoři napětí. Problém lze vyřešit pomocí 3D snopků, které díky hladkosti snopků nevedou k podhodnocení meze pevnosti.
- Pro tah a tlak je patrný křehký lom, zatímco pro smyk dochází k porušení pozvolně. Pro tyto zatěžovací stavy je nutné použít odlišný popis poškození.

V rámci diplomové práce se podařilo ověřit postup modelování 3D tkaných kompozitních materiálů. Nejeftivnější metodou je přístup víceúrovňové homogenizace, u které se podaří vyřešit dvě výše identifikované úskalí. Navíc tento přístup umožňuje modelování tvarově složitých kompozitních struktur.

## Reference

- [1] Rosenberg, J.; Křen, J.: *Mechanika kontinua*, ZČU v Plzni, 1998
- [2] Laš, V.: *Mechanika kompozitních materiálů*, ZČU v Plzni, 2008
- [3] Bathe, K. J.: *Finite element procedures*, Prentice hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA 2007
- [4] ASTM International: D 3039 Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. ASTM International, USA.
- [5] ASTM International: D 3410 Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading. ASTM International, USA.
- [6] ASTM International: D 5379 Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V–Notched Beam Method. ASTM International, USA.
- [7] Esi Virtual Performance Solution, Solver Reference Manual 2019
- [8] Mouritz, A. P.: Review of z–pinned laminates and sandwich composites, *Composites: Part A* 139, 2020
- [9] Wang, Ch.; Roy, A.; Silberschmidt, V. V.; Chen, Z.: *Modelling of Damage Evolution in Braided Composites: Recent Developments*, *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*, 2017
- [10] Wambua, P. M.; Anandjiwala, R.: A Review of Preforms for the Composites Industry, *Journal of Industrial textiles*, 2011
- [11] Garcia–Rodriguez, S.M.; Costa, J.; Maimi, P.; Singery, V.; Cozar, I.R.; Quintanas–Corominas, A.; Sasikumar, A.: Experimental demonstration of the in–situ effect under transverse shear, *Composites: Part A* 138, 2020
- [12] Srbová, H.: *Micromechanical Analysis of Unidirectional Carbon Fiber Composite*, Plzeň, 2017
- [13] Tian, W.; Qi, L.; Chao, X.; Liang, J.; Fu, M.: Periodic boundary condition and its numerical implementation algorithm for the evaluation of effective mechanical properties of the composites with complicated micro–structures, *Composites: Part B* 162, 2019
- [14] Puck, A.: *Festigkeitsanalyse von Faser–Matrix–Laminaten: Modelle für die Praxis*, München, Wien, 1996



- [15] Bek, L.: Kritérium porušení Puck pro dlouhovláknové kompozitní materiály, Plzeň
- [16] Berger, A.; Pyttel, T.; Duddeck, F.: Crash simulation of wound composite tubes based on multi–level modelling, *International Journal of Crashworthiness*, 20:2, 151–164, 2015
- [17] Berger, A.: Numerical Modelling of Composite Materials Based on a Combined Manufacturing–Crash Simulation, Queen Mary University London, 2014
- [18] Hühn, D.: Failure prediction of fibre reinforced plastics based on multi–scale analysis, Technische Universität Dresden, 2016
- [19] Berger, A.; Pyttel, T.; Hühn, D.: A general Concept for Virtual Manufacturing and Performance Coupling for Endless Fibre Reinforced Plastics, Hanau, Germany, 2017