

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD



DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Simulace proudění v porézním prostředí  
se zaměřením na puklinová prostředí  
a hrubozrnné materiály**

Bc. Anežka Švandová  
Vedoucí práce: Doc. Ing. Petr Girg, Ph.D.

Plzeň 2022

## Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Petru Girgovi, Ph.D. za odborné vedení práce a za podporu a trpělivost při jejím vytváření. Děkuji také za poskytnutí literatury a dalších podkladů a materiálů k tomuto tématu se vztahujících, možnost konzultací a osobních setkání za účelem diskuse o řešeném problému.

Numerické simulace prezentované v této práci vznikly za finančního přispění z projektu Grantové Agentury České republiky, registrační číslo 22-18261S.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně, za použití pouze podkladů uvedených v příloženém seznamu literatury.

**Abstrakt:**

Cílem této diplomové práce je přispět k problematice studia konstitutivních zákonů proudění podzemní vody v porézních prostředích puklinového typu. Konstitutivní zákony jsou v této práci získány ze série numerických simulací proudění vody v malém výřezu systému puklin, který byl vytvořen podle předlohy puklin v polozatopeném žulovém lomu. Ze simulací jsou získána potřebná data ke stanovení konstitutivních zákonů a dosazení těchto zákonů do rovnice popisující výšku hladiny podzemní vody ve zvodni (tvořené obdobnými puklinovými systémy) s volnou hladinou.

**Klíčová slova:**

proudění podzemní vody, puklinové zvodně, konstitutivní vztahy, Navierovy-Stokesovy rovnice, Reynoldsovy rovnice, k-omega SST model, laminární proudění, turbulentní proudění, disperze kontaminantů.

**Abstract:**

The aim of this thesis is to contribute to the study of the constitutive laws of groundwater flow in porous media of the fractured rock type. In this work, the constitutive laws are obtained from a series of numerical simulations of water flow in a small section of fractures, which is based on real pattern of fractures in a fractured rock collector in a semi-flooded granite quarry. Constitutive laws are determined from data obtained from numerical simulations. Subsequently, constitutive laws are substituted into the equation describing the height of the groundwater level in the aquifer (formed by similar fracture systems) with the free level.

**Key words:**

groundwater flow, fractured rock aquifer, constitutive relations, Navier-Stokes equations, Reynolds equations, k-omega SST model, laminar flow, turbulent flow, dispersion of contaminants .



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Úvod do problematiky</b>	<b>11</b>
2.1	Základní terminologie v hydrologickém modelování . . . . .	11
2.2	Konstitutivní zákony filtrace . . . . .	14
2.3	Bilanční rovnice proudění podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou . . . . .	16
2.3.1	Numerický experiment proudění v porézním prostředí . . . . .	17
2.4	Proudění na úrovni kanálů . . . . .	20
2.4.1	Navierovy-Stokesovy rovnice . . . . .	21
2.4.2	Reynoldsovy rovnice . . . . .	23
2.4.3	Stěnový zákon . . . . .	25
2.5	Disperze . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Numerické simulace</b>	<b>27</b>
3.1	Technické parametry numerických simulací . . . . .	27
3.2	Tvorba sítě puklinového systému . . . . .	28
3.3	Proudění mezi rovnoběžnými deskami . . . . .	33
3.3.1	Proudění mezi rovnoběžnými deskami s plně rozvinutým prouděním . . . . .	34
3.3.2	Proudění mezi rovnoběžnými deskami s postupně se rozvíjejícím prouděním . . . . .	37
3.4	Proudění v 2D puklinovém systému . . . . .	43
3.5	Proudění v 3D puklinovém systému . . . . .	48
3.6	Disperze . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>63</b>
	2D modely proudění mezi rovnoběžnými deskami . . . . .	63
	2D model proudění v puklinovém systému . . . . .	75
	3D model proudění v puklinovém systému . . . . .	82



# Použité značení

$n_c$	celková pórovitost porézního prostředí
$n_e$	efektivní pórovitost porézního prostředí
$n$	pórovitost
$Q$	objemový průtok
$q$	hustota toku, nebo Darcyho rychlost
$v$	průměrná pórová rychlost
$E_T$	totální mechanická energie
$\overline{E_T}$	průměrná totální mechanická energie
$H_T$	totální hydraulická výška
$H$	hydraulická výška
$\rho$	hustota tekutiny
$g$	hodnota tíhového zrychlení
$\mathbf{g}$	vektor tíhového zrychlení
$p$	statický tlak
$p_k$	kinetický tlak
$p_t$	totální tlak
$P_t$	průměrný totální tlak
$Re$	Reynoldsovo číslo
$Re_{crit}$	kritická hodnota Reynoldsova čísla
$\tau$	tečné napětí v tekutině
$\mu$	dynamická viskozita
$\nu$	kinetická viskozita
$\mathbf{f}$	vektor reprezentující objemové síly v tekutině
$P$	modifikovaný tlak
$k$	kinetická turbulentní energie
$\varepsilon$	disipace energie
$\omega$	specifická disipace energie
$I$	intenzita turbulence
$y^+$	bezrozměrná veličina udávající vzdálenost od stěny např. potrubí





# Kapitola 1

## Úvod

Podzemní voda je společně s povrchovou vodou jedním z nejdůležitějších přírodních zdrojů<sup>1</sup>. Je využívána k zásobování obyvatel pitnou vodou, zavlažování zemědělských plodin a je též nepostradatelnou surovinou v průmyslu. Tradičně se podzemní voda získávala z tzv. průlinových zvodní<sup>2</sup> tvořených písky, šterky a dobře propustnými horninami. S rychle rostoucí celkovou spotřebou vody tyto zdroje již nestačí pokrýt poptávku a je třeba hledat alternativní zdroje podzemní vody. Navíc se tento typ zvodní na řadě míst na Zemi ani nevyskytuje. V současné době nabývají na významu tzv. puklinové zvodně, nacházející se v tvrdých krystalických horninách (jako např. rula, žula a další nepropustné přeměněné a vyvřelé horniny) viz [5, 21, 38]. V nepropustných krystalických horninách voda proudí pouze v systémech puklin. Tento fakt způsobuje menší vydatnost studní, viz např. [25, Tab. 1.1, str. 15]. Dále tvrdost krystalických hornin způsobuje technologické problémy při hloubení studní. Obě tyto nevýhody pravděpodobně přispěly k nižšímu dosažitelnému využívání tohoto typu zvodní. Rostoucí význam puklinových zvodní je dán také tím, že velkou část pevninské kůry tvoří tzv. pevninské štíty. Jedná se o tvrdá a stabilní jádra kontinentů tvořená pevnými krystalickými horninami. Více než 50% pevninských štítů je složeno z ruly. Druhou nejvýznamější horninou zastoupenou v pevninských štítech je žula. Pevninské štíty pokrývají přibližně 20% zemské kůry a slouží jako rezervoár velkého množství podzemní vody.

Ještě důležitější je fakt, že puklinové zvodně jsou intenzivně využívány jako zdroj sladké vody pro zavlažování zemědělskými komunitami v semiaridních částech jižní Indie [5, 34]. Pevninské štíty a krystalické horniny zabírají cca 40% zemské kůry v semiaridních oblastech subsaharské Afriky, viz [5, 26, 42], a jejich potenciál k získávání sladké vody by se pravděpodobně dal také využít. Dále je odhadováno, že cca 40% podzemních vod Austrálie je uloženo v puklinových zvodních [5, 19]. Z tohoto důvodu je přínosné puklinové zvodně v pevninských štítech a krystalických horninách podrobně studovat jakožto potenciálně významné zdroje sladké vody.

Dalším důvodem, proč je zajímavé proudění vody v těchto puklinových systémech studovat, je možnost ukládání nukleárního odpadu hluboko do pevninských štítů. Jelikož se jedná o pevná jádra kontinentů, která nejsou ovlivněna tektonickými pohyby, je možné zde odpad bezpečně uskladnit bez rizika kolapsu skalního podloží. Zároveň se ale musíme zajímat, jak tato úložiště chránit před zatopením, nebo naopak okolní vodu v puklinách před kontaminací. Tato problematika je podrobněji rozvedena například v článku [21]. Dále v souvislosti s energetickou krizí lze očekávat rostoucí význam studia geotermální energie. Jednou z možností jejího získávání je vtačování vody do systému puklin v tzv. horké suché skále pomocí hlubokých vrtů (v řádu km) [2]. Z výše uvedeného je patrné, jak je důležité studovat proudění podzemní vody v puklinových zvodních a systémech puklin. Bohužel na rozdíl od průlinových zvodní byla problematika proudění podzemní

---

<sup>1</sup>Dle databáze AQUASTAT provozované organizací FAO činil v roce 2018 poměr podzemní vody na celkové spotřebě např. Mexika 39%, Indie 38%, Pákistánu 33%, Brazílie 26%, Turecka 26% USA 25%, Německa 24% a Španělska 20%, viz [15].

<sup>2</sup>V těchto zvodních podzemní voda proudí mezi zrny pevného materiálu, tj. v tzv. průlinách. Tyto zvodně jsou intenzivně využívány pro snažší hloubení studní a relativně vyšší vydatnost (typických) studní, viz např. [25, Tab. 1.1, str. 15] (srovnání typických studní v aridních oblastech).

vody systémy puklin mnohem méně studována, viz např. [38].

Cílem této práce je přispět k dané problematice studiem konstitutivních zákonů proudění podzemní vody v puklinovém prostředí. Konstitutivní zákony jsou v této práci získány ze série numerických simulací proudění vody v malém výřezu systému puklin. Tyto simulace jsou provedeny na úrovni proudění v kanálech, které lze modelovat buď přímo pomocí Navierových-Stokesových rovnic, případně některými modely turbulentního proudění.

Kapitola 2 obsahuje úvod do problematiky hydrologického modelování. Jsou zde zavedeny základní pojmy z hydrologie, představeny základní rovnice popisující proudění podzemní vody. Jsou představeny fyzikální experimenty, kterými byly určeny konstitutivní vztahy popisující proudění v přírodních porézních prostředích. Je vysvětleno proudění na úrovni kanálů v porézním prostředí. Je nahlédnuto do problematiky modelování laminárního a turbulentního proudění.

Kapitola 3 je těžištěm této práce a jejím cílem je numericky simulovat fyzikální experimenty pro získání konstitutivních vztahů pro puklinové prostředí. Jsou v ní popsány numerické simulace proudění ve výřezu puklinového systému na úrovni kanálů. Fotografický vzor výřezu puklinového systému pro numerické simulace byl získán v žulovém masívu odkrytém v částečně zatopeném lomu Špic u Něčina. Pomocí simulací ve 2D i 3D modelu systému puklin jsou stanoveny konstitutivní vztahy. V závěru této kapitoly je na simulaci ve 2D modelu studována disperze shluku částic znečišťující látky.

Závěr obsahuje shrnutí získaných poznatků a úvahu o možnostech vylepšení a rozšíření práce do budoucna. V Příloze jsou uvedeny zdrojové kódy k simulacím.

# Kapitola 2

## Úvod do problematiky

### 2.1 Základní terminologie v hydrologickém modelování

V této kapitole čerpáme především z monografie Bear [4], článku Benedikt-Girg-Kotrla [5] a skript Valentová [41].

Přesně matematicky zadefinovat **porézní prostředí** a popsat jeho vlastnosti je komplikovaný proces, který lze nalézt například v [4]. Pro účely této práce si vystačíme se zjednodušenou definicí, která říká, že porézní prostředí je oblast vyplněná pevnou látkou a tekutinou (kapalina, nebo plyn). Pevná látka obsahuje póry, nebo-li dutiny, které tvoří síť kanálů, ve kterých se nachází různé fáze tekutin. Oblast, kde se spojují alespoň tři kanály, nazýváme **uzel**. V níže uvedených modelech převzatých z [5] se navíc předpokládá, že kanály a uzly mají v porézním prostředí víceméně rovnoměrné prostorové rozložení. Typickými příklady porézního prostředí jsou například šterk (pevná fáze) smíšený se vzduchem nebo vodou (kapalná a plynná fáze), pískovec, nebo žulový masiv protkaný systémem puklin.

Důležitou charakteristikou porézního prostředí je poměr objemu volných prostorů k celkovému objemu, kterou nazýváme **celková pórovitost porézního prostředí**. Tato vlastnost porézních prostředí nezávisí na tvaru volných prostorů a můžeme jí vyjádřit jako:

$$n_c = \frac{V_p}{V_c},$$

kde  $V_p$  je celkový objem volných prostorů a  $V_c$  je celkový objem porézního prostředí. Pórovitost nabývá hodnot z intervalu  $(0, 1)$ . Z hlediska proudění porézním prostředím jsou důležité jen vzájemně propojené póry. Proto definujeme tzv. **efektivní pórovitost porézního prostředí**  $n_e$  jako poměr objemů pevné látky a vzájemně propojených (efektivních z hlediska proudění) volných prostorů:

$$n_e = \frac{V_e}{V_c},$$

kde  $V_e$  je celkový objem vzájemně propojených volných prostorů. Další podrobnosti lze nalézt např. v monografii [4].

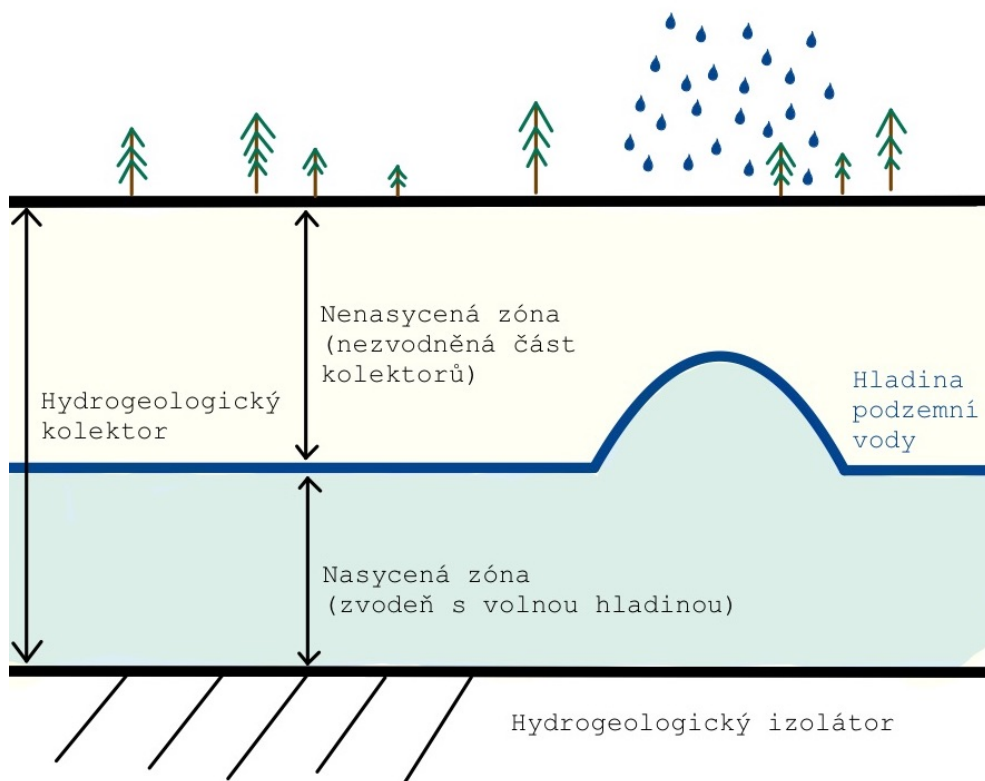
Přírodní porézní prostředí se nazývá **hydrogeologický kolektor**, obsahuje jak plynnou fázi, typicky v podobě vzduchu, nebo vodní páry. Zároveň obsahuje kapalnou fázi, jako například vodu v kapalném skupenství. Typická porézní prostředí, která se uvažují v hydrologii, jsou půdy, písky, šterky a šterkopísky, sutě, porézní horniny jako např. různé druhy pískovce nebo pemza a dále též rozpukané krystalické horniny jako např. čedič, amfibolit, žula nebo krystalické břidlice. Speciální skupinou hydrogeologických kolektorů jsou vápence, jejichž studium se od ostatních kolektorů výrazně liší, neboť je značně komplikovanější kvůli krasovým jevům.

Nepropustný materiál, skrz který tekutiny neproudí, se nazývá **hydrogeologický izolátor**. Typickými případy izolátorů je jíl, nebo nerozpukané krystalické horniny, jako je žula, rula a podobně.

V hydrogeologickém kolektoru se voda obecně vyskytuje ve všech třech skupenstvích (kapalném, plynném i pevném). Veškerá voda pod zemským povrchem se nazývá **podpovrchová voda**. Část této podpovrchové vody se vyskytuje jako tzv. půdní vlhkost, další část vody je kapilárně vázána. Tu část hydrogeologického kolektoru, ve které podpovrchová voda vyplňuje všechny póry, nazýváme nasycená zóna. Podpovrchová voda nacházející se v nasycené části kolektoru se nazývá **podzemní voda**. Nasycená zóna může být ze shora ohraničena buď geologickým izolátorem nebo volnou hladinou. Nad touto volnou hladinou jsou některé póry vyplněné vzduchem nebo jeho směsí s vodní párou. Zónu nad volnou hladinou nazýváme **nenasycenou zónou**.

Nenasycená část hydrogeologického kolektoru, která umožňuje proudění významného množství podzemní vody, se nazývá **zvodněň**. Typicky je zvodněň zdola ohraničena hydrogeologickým izolátorem, případně polopropustnou geologickou vrstvou. Zvodněň může být shora ohraničená dvěma způsoby, podle kterých jí dělíme na

- **zvodně s napjatou hladinou**, která je shora ohraničena hydrogeologickým izolátorem, nebo polopropustnou geologickou vrstvou a
- **zvodně s volnou hladinou**, kde se nad hladinou podzemní vody nachází nenasycená zóna.



Obrázek 2.1: Hydrogeologický kolektor rozdělený volnou hladinou podzemní vody na nasycenou a nenasycenou zónu.

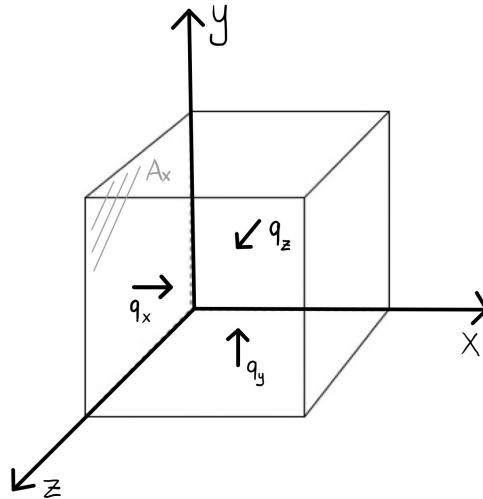
Podzemní voda se v zemi pohybuje systémem pórů a puklin. Skutečná rychlost proudění v systému kanálů v porézním prostředí se rychle mění v prostoru i čase, což je způsobené jednak nepravidelností tvarů těchto kanálů a dále též případnou turbulencí proudění v systému pórů nebo puklin. Skutečná rychlost se proto v praxi v hydrologii nepoužívá a zavádějí se Darcyho rychlost nebo průměrná pórová rychlost, které lze v praxi měřit.

Na obrázku 2.2 je znázorněn krychlový výsek porézního prostředí zasazený do kartézského systému souřadnic. Definujme objemový průtok  $Q_x$  jako objem proteklý plochou  $A_x$  za jednotku

času. Znaménko  $Q_x$  je kladné, pokud se daný celkový objem přemístí ve směru osy  $x$  a záporné pokud se přemístí ve směru opačném. Po složkách definujeme vektor  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ ,

$$q_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_x}{A_x},$$

kdy stejným způsobem lze definovat  $q_y$  a  $q_z$  a platí  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ . Velikost vektoru  $\mathbf{q}$  se nazývá **hustota toku** nebo též **Darcyho rychlost**. Dále definujeme **průměrnou pórovou rychlost** jako  $\mathbf{v} = \mathbf{q}/n$ , kde  $n$  je pórovitost. Analogicky definujeme  $v \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{v}| = q/n_e$ .



Obrázek 2.2: Výsek porézního prostředí zasazený do kartézské soustavy souřadnic s vyznačenými složkami toku  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ .

**Totální mechanická energie**  $E_T$  na jednotku objemu podzemní vody je definována jako

$$E_T = y\rho g + p + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

kde  $y\rho g$  vyjadřuje gravitační potenciální energii,  $p$  tlak a  $\frac{1}{2}\rho v^2$  kinetickou energii.  $v$  vyjadřuje průměrnou pórovou rychlost,  $\rho$  hustotu tekutiny,  $g$  je hodnota tíhového zrychlení. Tento vztah platí pro podzemní vodu, nebo jinou nestlačitelnou tekutinu viz [37]. Podzemní voda při průtoku porézním prostředím ztrácí svojí totální mechanickou energii, kdy pokles energie nastává ve směru proudění.

**Totální hydraulickou výšku**  $H_T$  lze vyjádřit jako fiktivní výšku sloupce podzemní vody, kdy totální mechanická energie je rovna gravitační potenciální energii, tj.  $E_T = H_T\rho g$  ve stagnujícím bodě proudění. Totální hydraulická výška má pak tvar

$$H_T = y + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g}v^2 \quad (2.1)$$

kde  $y$  je geodetická výška měřená od (nějaké předem zvolené) referenční hladiny a  $\frac{p}{\rho g}$  je výška tlaková. Průměrná pórová rychlost v mnoha přírodních porézních prostředích je velice nízká, přibližně jeden metr za den, a proto se v praxi velice často její velikost  $v$  a celý člen vyjadřující kinetickou energii zanedbává. Místo toho se v praxi pak používá **hydraulická výška**, která je definována (viz např. [5]) jako

$$H = y + \frac{p}{\rho g}.$$

## 2.2 Konstitutivní zákony filtrace

Konstitutivní zákon filtrace může být poměrně obecná závislost mezi hustotou toku  $q$  a hydraulickou výškou  $H$  obsahující parciální derivace různých řádů, případně může obsahovat nelokální závislosti vyjádřené integrálními členy. Protože děje probíhající při proudění podzemní vody jsou poměrně pomalé, lze zanedbat závislosti na časových derivacích  $q$  a  $H$ <sup>1</sup>. Dále pro (téměř) nestlačitelnou tekutinu, kterou je i podzemní voda lze v podstatě též vyloučit závislost na hodnotě  $H$ . V případě proudění podzemní vody se z experimentů ukázalo, že je dostatečné uvažovat konstitutivní vztahy tvaru:

$$q = \Phi \left( \frac{\Delta H}{\Delta L} \right), \quad (2.2)$$

kde  $\frac{\Delta H}{\Delta L}$  je pokles hydraulické výšky na jednotku délky směrem po proudu (viz výklad níže) a  $\Phi$  je funkce z nějaké vhodně zvolené třídy funkcí (např. polynomiální nebo mocninné funkce), která dostatečně přesně aproximuje data získaná experimentálně.

V 19. století se francouzský inženýr Henry Darcy zabýval prouděním vody v porézním prostředí a to z důvodu nedostatku pitné vody v rychle se rozrůstajících městech. Jednou z v té době známých metod jak vyčistit vodu bylo filtrovat ji přes písek. K sestavení efektivních filtračních zařízení bylo třeba přesněji matematicky popsat fyzikální zákony filtrace. Za tímto účelem Darcy sestavil experiment, kdy nechal ve válci kruhového průřezu protékat vodu přes různá porézní prostředí jako písek, nebo jiné druhy zeminy, viz např. [41]. Pozoroval pokles totální mechanické energie pomocí poklesu hydraulické výšky na vstupu a výstupu zařízení znázorněného na obrázku 2.3. Zaznamenal zákonitost dnes známou jako Darcyho zákon. Vyjadřující lineární závislost mezi poklesem hydraulické výšky a objemovým průtokem vody skrz experimentální zařízení. Postupem času se stejnou problematikou s jinými porézními prostředími začali zabývat další vědci. Mezi nejznámější uveďme například Smreker [39] (1878), Forchheimera [18] (1901), Izbasha [22] (1931), Missbacha [27, 28, 29, 30] (1936-1937), kteří stanovují další zákonitosti popisující závislost poklesu hydraulické výšky a objemového průtoku vody skrz experimentální zařízení. Tyto zákony budou uvedeny níže.

Nyní vysvětlíme činnost Darcyho experimentálního zařízení z obrázku 2.3. Zařízení je tvořeno kruhovým válcem vyplněným porézním prostředím (jako např. písek). Tímto prostředím protéká voda s objemovým průtokem  $Q$ , což je objem vody proteklý za jednotku času. V porézním prostředí jsou umístěny dva piezometry, jejichž vzdálenost směrem po proudu činí  $\Delta L$ . Darcy odečítal hodnoty  $H_1$  a  $H_2$  z piezometrů pro různé hodnoty objemového průtoku  $Q$ . Tímto postupem experimentálně získal závislost  $\Delta H/\Delta L$  na hodnotách  $Q$ , zde  $\Delta H = H_1 - H_2$  je pokles hydraulické výšky. Darcy ukázal, že lineární vztah

$$Q = C \frac{\Delta H}{\Delta L}, \quad (2.3)$$

vhodně aproximuje naměřená data, kde  $C > 0$  je konstanta určená z dat. Vezme-li v úvahu, že  $Q = Aq$ , kde  $A$  je obsah podstavy válce, v němž je uloženo zkoumané porézní prostředí, lze tento vztah přepsat pro  $q$  jako

$$q = c \frac{\Delta H}{\Delta L}, \quad (2.4)$$

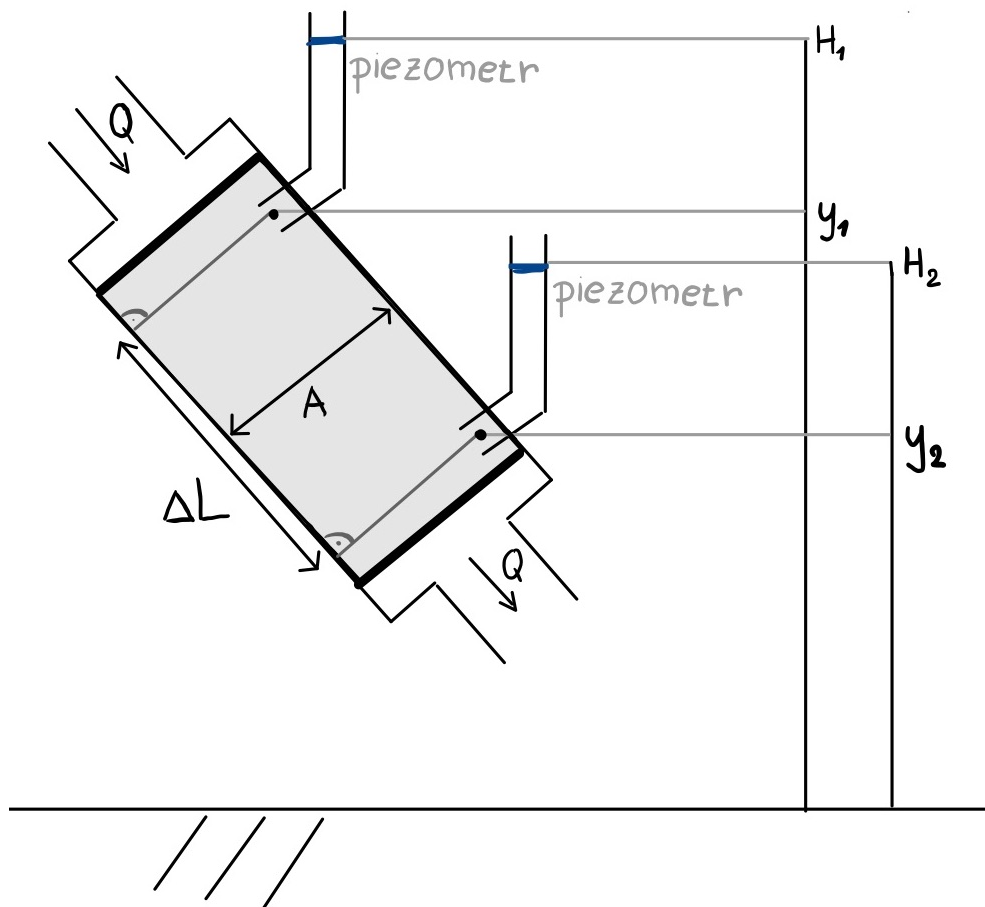
kde konstanta  $c = C/A$  se nazývá filtrační konstanta.

Analogickým postupem byly empiricky nalezeny další konstitutivní vztahy proudění různých tekutin různými porézními prostředími:

- Mocninný zákon: Smreker [39] (1878), Izbash [22] (1931), Missbach [27, 28, 29, 30] (1936-1937):

$$q = d \left( \frac{\Delta H}{\Delta L} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Matematicka Polubarinova-Kochina navrhla konstitutivní vztah obsahující parciální časovou derivaci pro popis rychlých dějů  $\frac{\Delta H}{\Delta L} = aq + bq^2 + c\partial q/\partial t$ , kde koeficienty  $a, b, c$  jsou určeny experimentálně pro dané porézní prostředí a tekutinu, viz např. [37, Tabulka 4]. Tento vztah se ale pro svoji obtížnou aplikovatelnost v praxi příliš neujal.



Obrázek 2.3: Darcyho fyzikální experimentu proudění v porézním prostředí.

kde konstanty  $d, m > 0$  jsou získány empiricky z naměřených dat.

- Kvadratický zákon: Forchheimer [18] (1901):

$$\frac{\Delta H}{\Delta L} = aq + bq^2, \quad (2.6)$$

kde konstanty  $a, b > 0$  jsou získány empiricky z naměřených dat. Vyřešením kvadratické rovnice a volbou fyzikálně relevantního kořene pak dostaneme

$$q = \frac{\sqrt{a^2 + 4b\frac{\Delta H}{\Delta L}} - a}{2b} = \frac{2\frac{\Delta H}{\Delta L}}{\sqrt{a^2 + 4b\frac{\Delta H}{\Delta L}} + a}. \quad (2.7)$$

Podrobný přehled těchto konstitutivních vztahů a jejich historický vývoj lze nalézt v článku [6] a následnou diskuzi o jejich aplikovatelnosti v matematických modelech v hydrologii lze nalézt např. v [5].

Pro izotropní porézní prostředí mají výše uvedené konstitutivní vztahy vektorový tvar (viz např. [5]):

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pro } \nabla H = \mathbf{0}, \\ -\Phi(|\nabla H|) \frac{\nabla H}{|\nabla H|} & \text{pro } \nabla H \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

S tímto tvarem dále pracujeme v matematických modelech .

### 2.3 Bilanční rovnice proudění podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou

Matematický popis proudění podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou (viz obrázek 2.1) je velice komplexní problém, protože kromě stavové a tokové veličiny je neznámou i hranice oblasti (volná hladina), kterou zvođen vyplňuje. Tento problém lze v jistých případech zjednodušit přijetím tzv. Dupuitova postulátu<sup>2</sup>. Na základě pozorování proudění podzemní vody v typických zvodních došel J. Dupuit [14] k závěru, že maximální ztráta hydraulické výšky na jednotku délky  $\Delta H/\Delta L$  se pohybuje mezi 0.001 a 0.01. Tento poznatek jej vedl k zformulování následujících dvou postulátů (publikovaných v [14] v roce 1863):

(DF1) podzemní voda teče jen ve vodorovném směru (a tedy hydraulická výška je konstantní ve svislém směru, v našem případě osa  $y$ , viz obrázek 2.2) a dále

(DF2) toto proudění probíhá podle Darcyho zákona (2.3)<sup>3</sup>.

Za Dupuitova předpokladu (DF1), je  $H(x, y, z, t) \equiv H(x, z, t)$  a výška hladiny podzemní vody měřená od referenční hladiny (typicky od hydrogeologického izolátoru) je rovna hydraulické výšce  $H(x, z, t)$ , kde funkce  $H(x, z, t)$  splňuje tzv. rovnici pro výšku volné hladiny podzemní vody (odvození viz např. [5]):

$$n_e \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) - \operatorname{div}(H(x, z, t) \mathbf{q}(x, z, t)) = r(x, z, t), \quad (2.8)$$

kde  $H(x, z, t)$  je výška volné hladiny v místě o souřadnicích  $(x, z)$  a čase  $t$ ,  $n_e$  je efektivní pórovitost prostředí,  $r(x, z, t)$  je objem srážek nebo objem ztráty vody evapotranspirací<sup>4</sup> na jednotku plochy za jednotku času v daném místě a čase<sup>5</sup> a  $\mathbf{q}(x, z, t)$  je tok v daném místě a čase.

Tok  $\mathbf{q}(x, z, t)$  lze podle postulátu (DF2) odvodit z Darcyho zákona. Oba postuláty jsou ale od sebe nezávislé, a tak je možné uvažovat postulát (DF1) i v kombinaci s nelineárními konstitutivními vztahy, jako již zmíněný mocninný (2.5), nebo kvadratický (2.7). Budeme-li za předpokladu  $H \geq 0$  postupně dosazovat tak jako v [5] výše uvedené zákony, dostaneme pro vektorový tvar (3.5) Darcyho zákona (2.4) rovnici

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{c}{n_e} \operatorname{div}(H \nabla H) = r(x, z, t) \quad (2.9)$$

známou v anglicky psané literatuře jako „Porous Medium Equation“. Dále použijeme-li vektorový tvar (3.5) mocninného zákona (2.4), dostaneme rovnici

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{d}{n_e} \operatorname{div}\left(H |\nabla H|^{p-2} \nabla H\right) = r(x, z, t), \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Tento postulát je též v literatuře nazýván Dupuitův-Forchheimerův.

<sup>3</sup>Dupuit předpokládal, že proudění podzemní vody je pro uvažované maximální hodnoty  $\Delta H/\Delta L$  dostatečně pomalé na to, aby bylo možné zanedbat nelineární efekty.

<sup>4</sup>Evapotranspirace je celkový výpar ze zemského povrchu do atmosféry zahrnující fyzikální výpar (evaporace) a výpar vody způsobený fyziologickými procesy rostlin (transpirace).

<sup>5</sup> $r(x, z, t) := \frac{f(x, z, t)}{\rho_{\text{water}}}$  v článku [5].



kde  $p = 1 + 1/m$ . A nakonec použijeme-li vektorový tvar (3.5) invertovaného kvadratického Forchheimerova zákona (2.7), dostaneme rovnici

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{n_e} \operatorname{div} \left( \frac{2H\nabla H}{\sqrt{a^2 + 4b|\nabla H|} + a} \right) = r(x, z, t). \quad (2.11)$$

Výše uvedené rovnice jsou pro  $H \geq 0$  nelineární rovnice parabolického typu. Tyto rovnice se řeší na časoprostorovém válci  $\Omega \times (0, T)$ , kde  $T > 0$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast představující půdorys zvodně. Musí být zadána počáteční podmínka  $H(x, y, 0) = H_0(x, z)$  na  $\Omega$  a vhodné okrajové podmínky na  $\partial\Omega$  jako např. Dirichletovy nebo Neumannovy. Teoretické studium počátečně-okrajových úloh pro nelineární rovnice (2.10) a (2.11) je velmi komplikované a není předmětem této práce. Cílem této práce je stanovení hodnot parametrů  $d, m, a, b$  pro puklinová prostředí pomocí numerických simulací.

### 2.3.1 Numerický experiment proudění v porézním prostředí

V případě puklinového systému se nabízí provést fyzikální experiment nebo numerickou simulaci na jedné puklině případně několika málo puklinách, aby se v konstitutivních vztazích projevil i vlivy křížení puklin. Tento přístup byl zvolen v řadě experimentálních, teoretických i numerických pracích, viz např. přehledový článek [7] a dále např. články [11, 12, 24, 36, 43].

V této práci vytváříme zjednodušený matematický model proudění podzemní vody v malém výřezu puklinového porézního prostředí. Jedná se o numerické napodobení Darcyho fyzikálního experimentu, viz srovnání obrázků 2.3 a 2.4. Simulace proudění v systému puklin (obrázek 2.4) je provedena buď přímo pomocí Navierových-Stokesových rovnic případně některými modely turbulentního proudění. Model testujeme pro různé rychlosti proudění vody a následně z něj odvodíme konstitutivní vztahy, které dosadíme do bilanční rovnice proudění podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou.

Darcy ve svém fyzikálním experimentu určoval ztrátu totální mechanické energie  $E_T$  pomocí hydraulické výšky  $H$ , která sice zanedbává kinetickou energii, ale lze ji snadno reálně naměřit pomocí piezometrů. Při numerickém experimentu nemáme možnost měřit hydraulickou výšku pomocí piezometrů, proto musíme zvolit jiný přístup. Stejně jako ve fyzikálním experimentu chceme zaznamenat ztátu mechanické energie tekutiny protečené porézním prostředím.

V numerickém experimentu není nutné kinetickou energii zanedbávat. Naopak, neboť modelujeme proudění v puklinovém porézním prostředí, kde proudění dosahuje vyšší průměrné pórové rychlosti  $\mathbf{v}$  než například v pískovém porézním prostředí, předpokládáme, že kinetická energie  $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$  není zanedbatelná, viz kapitola 2.1. Zároveň v numerické simulaci využíváme reálné rychlosti  $\mathbf{u}$  namísto průměrné pórové rychlosti  $\mathbf{v}$ . Reálná rychlost  $\mathbf{u}$  poskytuje přesnější informace o proudění, které v puklinovém systému probíhá. Proudění (z celkového pohledu) v modelu probíhá horizontálně ve směru osy  $x$ .

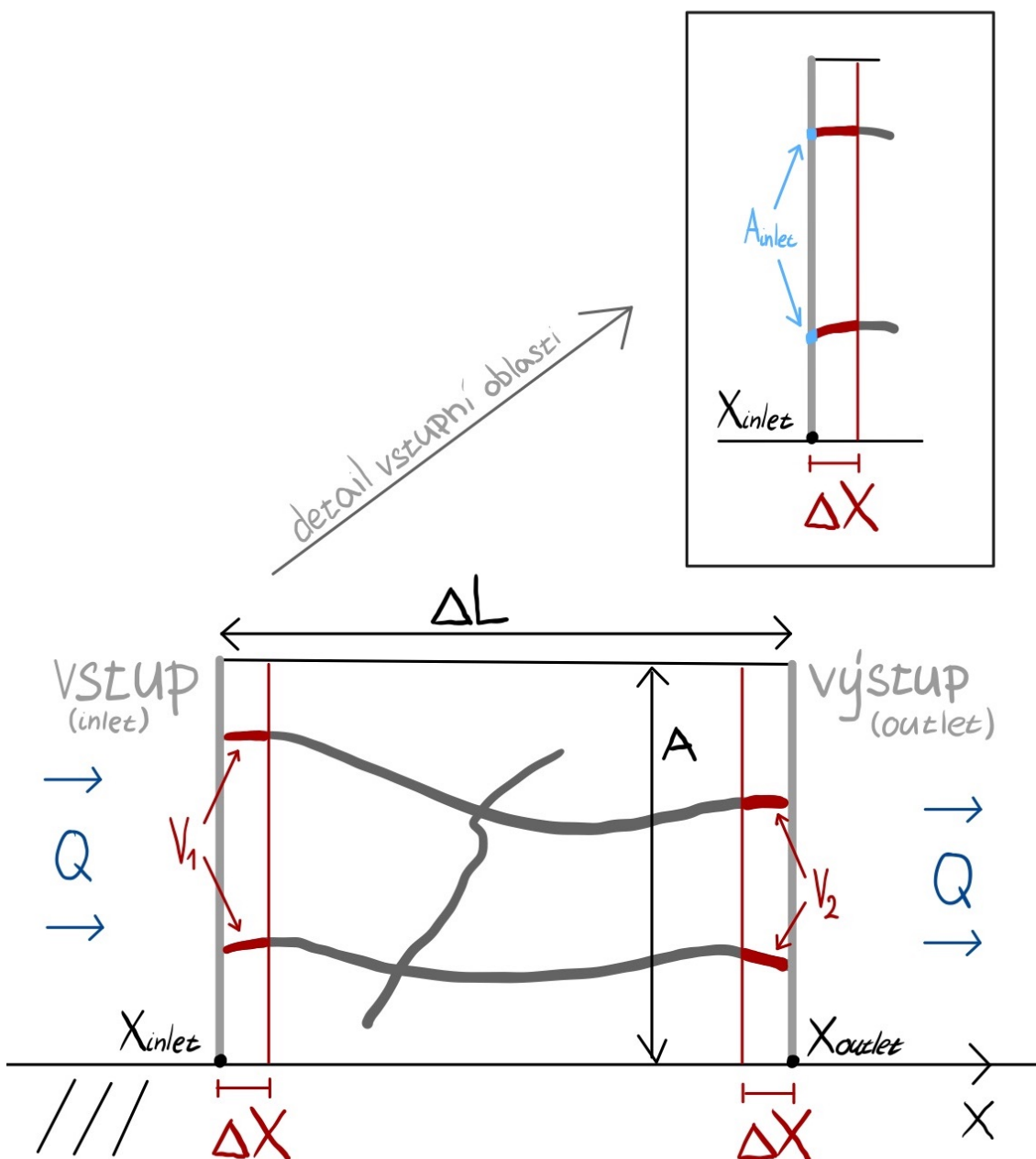
Ztrátu průměrné totální mechanické energie na jednotku objemu  $\Delta\overline{E_T}$  na jednotku délky  $\Delta L$  stanovujeme následujícím postupem. Nejprve definujeme průměrnou totální mechanickou energii na jednotku objemu  $\Delta\overline{E_{T_i}}$ , na vstupu ( $i = 1$ ) a výstupu ( $i = 2$ ):

$$\overline{E_{T_i}} = \frac{\int_{V_i} E_T dV}{V_i},$$

kde  $V_1$  je průnik kanálů v porézním prostředí s pásem  $x_{inlet} \leq x \leq x_{inlet} + \Delta x$  a  $V_2$  je průnik kanálů s pásem  $x_{outlet} - \Delta x \leq x \leq x_{outlet}$  viz obrázek 2.4.

Pro spojitě proudové a tlakové pole, mají-li stěny kanálu dostatečnou hladkost a vhodnou geometrii (jako např. na obrázku 2.4), lze pro dostatečně malá  $\Delta x$  psát

$$\overline{E_{T1}} = \frac{\int_{V_1} (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + p + \rho g y) dV}{V_1} \approx \frac{\Delta x \int_{A_{inlet}} (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}_{inlet}|^2 + p_{inlet} + \rho g y) dS}{\Delta x A_{inlet}} = \frac{\int_{A_{inlet}} (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}_{inlet}|^2 + p_{inlet} + \rho g y) dS}{A_{inlet}} \quad (2.12)$$



Obrázek 2.4: Numerický experiment proudění v porézním prostředí.

### 2.3. BILANČNÍ ROVNICE PROUDĚNÍ PODZEMNÍ VODY VE ZVODNĚ S VOLNOU HLADINOU<sup>19</sup>

kde  $A_{inlet}$  je průnik kanálů v porézním prostředí s rovinou  $x = x_{inlet}$ .

Analogicky pro výstup (outlet) dostaneme

$$\overline{E_{T2}} = \frac{\int_{A_{outlet}} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}_{outlet}|^2 + p_{outlet} + \rho g y \right) dS}{A_{outlet}},$$

kde  $A_{outlet}$  je průnik kanálů v porézním prostředí s rovinou  $x = x_{outlet}$ .

Ztráta průměrné totální mechanické energie na jednotku objemu  $\Delta \overline{E_T}$  na jednotku délky  $\Delta L$  je pak

$$\frac{\Delta \overline{E_T}}{\Delta L} = \frac{\overline{E_{T1}} - \overline{E_{T2}}}{\Delta L}.$$

Modelování proudění v puklinovém prostředí je speciální případ, kdy je tlak v Navierových-Stokesových rovnicích modifikován, díky čemuž se model stává nezávislý na gravitačním zrychlení a pro člen totální mechanické energie platí  $\rho g y = 0$ , více viz kapitola 2.4.1. Dále definujeme **totální tlak** jako  $p_t = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + p$ . Pak z výše uvedeného plyne, že pro výpočty ztráty totální mechanické energie v experimentu můžeme průměrnou totální mechanickou energii převést na průměrný totální tlak a to následujícím způsobem

$$\overline{E_{T1}} = \frac{\int_{A_{inlet}} p_{t_{inlet}} dS}{A_{inlet}} =: P_{t_{inlet}},$$

kde  $p_{t_{inlet}}$  je totální tlak na vstupu do systému. Analogicky pro výstup (outlet) dostaneme

$$\overline{E_{T2}} = \frac{\int_{A_{outlet}} p_{t_{outlet}} dS}{A_{outlet}} =: P_{t_{outlet}},$$

kde  $p_{t_{outlet}}$  je totální tlak na výstupu systému. A platí

$$\frac{\Delta \overline{E_T}}{\Delta L} = \frac{P_{t_{inlet}} - P_{t_{outlet}}}{\Delta L} = \frac{\Delta P_t}{\Delta L},$$

kde  $\Delta P_t = P_{t_{inlet}} - P_{t_{outlet}}$ . Konstitutivní vztah z numerických simulací získáváme následujícím způsobem. Testujeme model pro škálu vstupních rychlostí do systému puklin viz kapitola 3, zaznamenáme rozdíl průměrných totálních tlaků na vstupu a výstupu na jednotku délky  $\Delta L$  a aproximujeme je funkcí  $f$ :

$$\frac{\Delta P_t}{\Delta L} = f(u_{inlet})$$

kteřou volíme, podle tvaru v jakém chceme konstitutivního vztah určit:

**lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = a \cdot u_{inlet}$

**kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = a \cdot u_{inlet} + b \cdot u_{inlet}^2$

**mocinná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = c \cdot u_{inlet}^{(1/m)}$

V dalším kroku invertujeme<sup>6</sup> funkci  $f$

$$f^{-1} \left( \frac{\Delta P_t}{\Delta L} \right) = u_{inlet}.$$

Dále využijeme, že platí

$$q = A_{inlet} u_{inlet}$$

<sup>6</sup>Pro kvadratickou aproximaci použijeme výraz pro fyzikálně relevantní kořen, tj. uvažujeme  $f^{-1}(s) = \frac{2s}{\sqrt{a^2 + 4bs} + a}$ , pro  $s \geq 0$ .

tj.

$$q = A_{inlet} f^{-1} \left( \frac{\Delta P_t}{\Delta L} \right)$$

Z (2.1) dostaneme:

$$\frac{\Delta \overline{H_T}}{\Delta L} = \frac{1}{\rho g} \frac{\Delta \overline{E_T}}{\Delta L} = \frac{1}{\rho g} \frac{\Delta P_t}{\Delta L}$$

a odtud stanovíme konstitutivní vztah pro průměrné ztráty hydraulické výšky:

$$q = A_{inlet} f^{-1} \left( \rho g \frac{\Delta \overline{H_T}}{\Delta L} \right).$$

Odtud srovnáním s požadovaným tvarem

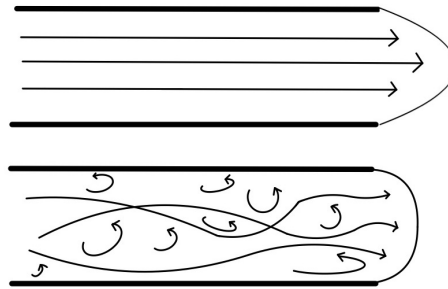
$$q = \Phi \left( \frac{\Delta \overline{H_T}}{\Delta L} \right), \quad (2.13)$$

dostaneme

$$\Phi(s) = A_{inlet} f^{-1}(\rho g s) \quad \text{pro } s \geq 0. \quad (2.14)$$

## 2.4 Proudění na úrovni kanálů

Proudění podzemní vody v puklinových systémech modelujeme jako proudění v kanálech. Proudění tekutiny nabývá dvou stavů. Laminární proudění a turbulentní proudění. Při laminárním proudění se tekutina pohybuje po rovnoběžných proudnicích. Při turbulentním proudění se částice tekutiny začnou pohybovat zdánlivě chaoticky a tvořit mikroskopické a makroskopické víry. Tekutina proudí laminárně pro nižší rychlosti a při zvyšování rychlosti začne proudění přecházet v turbulentní viz obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Rychlostní profily rozvinutého laminárního (nahore) a turbulentního proudění (dole) mezi rovnoběžnými deskami, nebo v potrubí.

Tímto jevem se již roku 1883 zabýval anglický fyzik Osborne Reynolds, který prováděl experimenty proudění tekutiny v potrubí s hladkými stěnami a stanovil bezrozměrnou veličinu, dnes známou jako Reynoldsovo číslo  $Re$ , podle které lze poměrně přesně předvídat, kdy dochází k přechodu mezi laminárním a turbulentním prouděním viz [35]. Reynoldsovo číslo je definováno

$$Re = \frac{uD}{\nu},$$

kde  $u$  je charakteristická rychlost<sup>7</sup>,  $D$  je hydraulický průměr potrubí a  $\nu$  je kinetická viskozita. Reynoldsovi se experimentálně podařila stanovit hodnota, kterou dnes nazýváme kritická hodnota Reynoldsova čísla  $Re_{crit}$  při které v potrubí dochází k přechodu laminárního na turbulentní proudění jako

$$Re_{crit} \sim 2000,$$

viz například [13]. Turbulence je přirozený stav tekutin a jeho přesný matematický popis je stále nevyřešený problém. Richard Feynman ve své knize The Feynman Lectures on Physics Vol 1. napsal

*”Konečně je tu fyzikální problém, který je společný mnoha oborům, je velmi starý a není vyřešen. Nejde o problém najít nové fundamentální částice, ale o něco, co zbylo z doby dávno minulé – více než sto let. Nikdo ve fyzice to skutečně nedokázal matematicky uspokojivě analyzovat, navzdory jeho důležitosti pro sesterské vědy. Jedná se o analýzu cirkulujících nebo turbulentních tekutin.”*

viz [16]. Při určitých fyzikálních zjednodušeních, počínaje hypotézou kontinua dokážeme laminární proudění matematicky popsat Navierovými-Stokesovými rovnicemi a turbulentní proudění Reynoldsovými rovnicemi viz [3]. Navierovy-Stokesovy a Reynoldsovy rovnice jsou použity pro proudění v systému puklin v této práci. Jejich pomocí modelujeme proudění podzemní vody v porézním prostředí jako stacionární proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny.

Všechny tekutiny jsou ve své podstatě stlačitelné. **Stlačitelnost** znamená, že tekutina při zvyšování tlaku na ní působícího zmenšuje svůj objem. U některých tekutin je tato ztráta objemu tak malá, že ji můžeme zanedbat a můžeme tekutiny dělit na stlačitelné (převážně plyny) a nestlačitelné (převážně kapaliny). Podzemní voda se řadí mezi **nestlačitelné tekutiny**, pro něž platí, že jejich hustota je konstantní. Hustota je definována jako poměr hmotnosti  $m$  a objemu  $V$  tekutiny,

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Hustota podzemní vody se může nepatrně lišit v závislosti na teplotě. Pro potřeby této práce budeme využívat  $\rho = 10^3$ .

**Newtonův zákon viskozity** udává, že tečné napětí v tekutině  $\tau$  je přímo úměrné deformaci tekutiny, tj.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dx},$$

kde  $\mu$  je dynamická viskozita a  $\frac{du}{dx}$  je derivace rychlosti ve směru kolmém na směr proudění viz [3], nebo [17]. Podle Newtonova zákona viskozity dělíme tekutiny na dvě základní skupiny. Tekutiny **newtonovské**, které se řídí Newtonovým zákonem kapaliny (vzduch, voda). A tekutiny **nenewtonovské**, jejichž vlastnosti tento lineární vztah nespĺňují a závislost tečného napětí v kapalině na deformaci kapaliny je nelineární (např. krev). Dynamická viskozita podzemní vody je pro účely této práce stanovena  $\mu = 10^{-6}$ .

### 2.4.1 Navierovy-Stokesovy rovnice

Stacionární proudění (tj. neměnné v čase  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ) podzemní vody na úrovni kanálů v porézním prostředí je popsáno Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Konkrétně **Cauchyho momentovou rovnicí**

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.15)$$

a rovnicí kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

<sup>7</sup>Rychlost využívaná pro výpočet Reynoldsova čísla se v literatuře různí. V této práci využíváme střední rychlost  $u_{avr} = \frac{Q}{A}$ , kde  $Q$  je objemový průtok přes plochu  $A$ .

kde

$\mathbf{u} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$  je rychlost tekutiny,

$\rho$  je konstantní hustota tekutiny,

$p = p(x, y, z)$  je tlak,

$\nu$  kinetická viskozita a  $\mu = \frac{\nu}{\rho}$  je dynamická viskozita

$\mathbf{f}$  je vektorové pole reprezentující objemové síly, (často platí  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ , kde  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$  je vektor gravitačního zrychlení.)

Pro Navierovy-Stokesovy rovnice neznáme analytické řešení a v mnoho případech je i velice obtížné tato řešení najít alespoň přibližně nástroji numerické matematiky. Existují ale případy, kdy můžeme Navierovy-Stokesovy rovnice zjednodušit. A v některých z nich dokonce nalézt i analytické řešení.

Při proudění nestlačitelné tekutiny existují případy, kdy může být z Navierových-Stokesových rovnic odstraněn člen  $\mathbf{f}$  reprezentující objemové síly. Pokud člen reprezentující objemové síly vyváží tlak rovnající se  $\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ , tj.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{f} = 0,$$

můžeme zavést takzvaný **modifikovaný tlak**  $P$  a odstranit z momentové rovnice gravitační zrychlení  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$ . Modifikovaný tlak je definován vztahem

$$p = p_0 + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + P,$$

kde  $p_0$  je konstanta. Pro modifikovaný tlak platí, že pokud je tekutina v klidu pak  $P = 0$  a člen s gravitačním zrychlením je v momentové rovnici zcela vyvážen gradientem tlaku. Modifikovaný tlak  $P$  je tedy část tlaku, který vzniká pouze pohybem tekutiny. Navierovy-Stokesovy rovnice pak mají tvar

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Zároveň pro nestlačitelnou tekutinu platí, že díky její konstantní hustotě je i gravitační zrychlení konstantní a to pak může být vyváženo skalárním tlakovým gradientem. Viz například [3].

Příkladem, kdy není možné pomocí modifikovaného tlaku Navierovy-Stokesovy rovnice zjednodušit na tvar (2.17), je proudění tekutiny s volnou hladinou (voda/vzduch.) Naopak typickými případy, kdy můžeme Navierovy-Stokesovy rovnice zjednodušit na tvar (2.17) je proudění nestlačitelné tekutiny v potrubí, nebo mezi rovnoběžnými deskami.

Budeme-li uvažovat 2D proudění mezi nekonečnými rovnoběžnými deskami, které jsou rovnoběžné s osou  $x$  a jsou od sebe vzdáleny  $h$ , můžeme rovnice (2.17) dále zjednodušit. Proudění probíhá zcela ve směru osy  $x$ , to znamená, že složky rychlosti  $\mathbf{u}$  ve směru osy  $y$  a  $z$  jsou nulové, tj.  $v = w = 0$  a  $u_y = u_z = 0$  a pro tlak platí  $p_y = p_z = 0$ . Navierovy-Stokesovy rovnice mají pak tvar

$$\begin{aligned} uu_x &= -\frac{1}{\rho} P_x + \nu u_{yy}, \\ u_x &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde  $\mathbf{u}(x, y, z) \equiv (u(x, y), 0, 0) \equiv u(x, y)$  a  $\nabla P = (P_x, 0, 0) \equiv P_x$  je konstantní modifikovaný tlakový gradient.

Po dosazení rovnice kontinuity do rovnice momentové získáváme jednu rovnici<sup>8</sup>

$$\mu u_{yy} = -P_x \quad (2.19)$$

pro které existuje analytické řešení

$$\mu u = -\frac{P_x y^2}{2} + C_1 y + C_2, \quad (2.20)$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Případ 2D proudění mezi rovnoběžnými deskami je okrajová úloha, kdy rychlost na deskách je nulová, to znamená řešíme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \mu u_{yy} = -P_x \\ u(x, 0) = u(x, h) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \equiv u(y), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Okrajová úloha (2.21) má řešení

$$\mu u(x, y) = \frac{P_x}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, h]. \quad (2.22)$$

Jedná se o rychlostní profil parabolický viz laminární proudění na obrázku 2.5<sup>9</sup>, pro který platí, že vrchol paraboly je maximální rychlost proudění mezi deskami, tzn.

$$u_{max} = \frac{P_x h^2}{8\mu}$$

Řešení okrajové úlohy (2.21) lze vyjádřit jako

$$u(y) = 4u_{max} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h}. \quad (2.23)$$

Výše uvedené řešení proudění mezi deskami je řešení Navierových-Stokesových rovnic, které odpovídá laminárnímu proudění. Pro dostatečně velká Reynoldsova čísla se proudění stane turbulentním. Proudová pole pro turbulentní proudění nelze takto z Navierových-Stokesových rovnic najít. Bohužel ani numerickými metodami není snadné najít alespoň přibližné řešení Navierových-Stokesových rovnic přímou simulací. Místo toho je nutné přejít k modelům turbulence popsaným v následující podkapitole.

## 2.4.2 Reynoldsovy rovnice

Při turbulentním proudění, vznikají mikroskopické víry, které v rychlostním a tlakovém poli vytvářejí nežádoucí fluktuace. Existují dva způsoby, jak tyto víry zachytit. První je modelovat turbulentní proudění Navierovými-Stokesovými rovnicemi se sítí tak jemnou, že zachytí tyto mikroskopické víry, tzv. Direct Numerical Simulation (DNS). Tento způsob je ale výpočetně velmi náročný a proto se využívá způsob druhý, založený na Reynoldsových rovnicích, tzv. Reynolds-averaged Navier–Stokes equations (RANS).

Reynoldsovy rovnice popisující turbulentní proudění jsou odvezeny z Navierových-Stokesových rovnic (2.16) a (2.15). Stavové veličiny jako tlak  $p$ , nebo rychlost  $\mathbf{u}$  charakterizující turbulentní proudové pole lze chápat jako náhodné veličiny, na které lze pak uplatnit statistické nástroje. Rychlost a tlak jsou rozloženy na středovanou a flukтуаční složku:

<sup>8</sup>V našem případě se rovnice kontinuity redukuje na  $u_x = 0$ , protože ostatní složky vektorového pole rychlosti jsou nulové. Odtud vidíme, že první složka vektorového pole rychlosti není závislá na proměnné  $x$ , tj.  $u(x, y) \equiv u(y)$ , proto můžeme rovnici řešit jako obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu.

<sup>9</sup>Na obrázku 2.5 je znázorněno i proudění turbulentní, kde můžeme vidět, že pro turbulentní proudění se rychlostní profil zplošťuje.

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t).$$

Středovaná složka stavové veličiny je určena jako střední hodnota souboru hodnot veličiny o velikosti  $N^{10}$ , tj.

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Rozklad stavových veličin je dosazen do Navierových-Stokesových rovnic (2.16) a (2.15), ze kterých jsou následně odvozeny Reynoldsovy rovnice:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot \{\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}\} = -\nabla \frac{\bar{p}}{\rho} + \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}}{\rho} - \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \right) \right] + \bar{\mathbf{f}} \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot [\bar{\mathbf{u}}] = 0, \quad (2.25)$$

kde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  je středovaný tenzor napětí. Podrobné vysvětlení lze nalézt v [31].

### $k - \omega$ SST ("Shear-Stress Transport")

$k - \omega$  SST je RANS model, který řeší Reynoldsovy rovnice a přidává k nim dvě dodatečné transportní rovnice. Rovnici pro **kinetickou energii turbulence**  $k$ :

$$\frac{D}{Dt}(\rho k) = \nabla \cdot (\rho D_k \nabla k) + \rho G - \frac{2}{3} \rho k (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \rho \beta^* \omega k + S_k \quad (2.26)$$

a rovnici pro **specifickou disipaci energie**  $\omega$ :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \omega) = \nabla \cdot (\rho D_\omega \nabla \omega) + \frac{\rho \gamma G}{\nu} - \frac{2}{3} \rho \gamma \omega (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \rho \beta \omega^2 - \rho (F_1 - 1) C D_{k\omega} + S_\omega. \quad (2.27)$$

Kinetická turbulentní energie je definována

$$k = \frac{3}{2} (|\mathbf{U}| I)^2,$$

kde  $I$  je intenzita turbulence<sup>11</sup>. Specifická disipace energie je definována

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k},$$

kde  $\varepsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$  je disipace energie a  $L$  je charakteristická délka. Turbulentní viskozita je pak vypočtena jako funkce  $k$  a  $\omega$

$$\nu_t = a_1 \frac{\rho k}{\max(a_1 \omega, b_1 F_{23} S)}.$$

Konstanty rovnic a turbulentní viskozity patří mezi pevné hodnoty modelu, nebo jsou určeny na základě výpočtu ze zbylých rovnic. Jednotlivé konstanty modelu byly určeny z experimentů pro základní typy turbulentního proudění a jejich hodnoty jsou uvedeny na stránkách [32].

Model používá stěnové funkce (teorie stěnových funkcí je popsána v následující kapitole 2.4.3) pro  $k$ ,  $\omega$ ,  $\nu_t$ . Konkrétní stěnové funkce použité pro simulace v této práci viz Přílohy.

Podrobnější popis modelu  $k - \omega$  SST je uveden například v [31].

<sup>10</sup>Středování veličin pro Reynoldsovy rovnice může být provedeno třemi způsoby viz [31], OpenFoam v řešiči simpleFoam, který je využit v této práci dle [23] využívá právě tento.

<sup>11</sup>Ve všech modelech v této práci je pro počáteční aproximaci  $k$  volena intenzita turbulence 1% a počáteční hodnoty  $k$  a  $\omega$  jsou stanoveny podle uvedených vzorců v této kapitole.



### 2.4.3 Stěnový zákon

Jisté potíže nastávají při modelování turbulentního proudění rovnoběžného se stěnou v její těsné blízkosti. Tyto problémy řeší **stěnový zákon**, popisující chování proudění pro vyšší Reynoldsova čísla v blízkosti stěn, nebo-li v **mezní vrstvě** (boundary layer). Mezní vrstva se dělí na tři podvrstvy. **Viskózní podvrstvu** (viscous sublayer), **přechodovou vrstvu** (buffer layer) a **oblast plně vyvinutého turbulentního proudění** (log-law region inner layer). Vzdálenost těchto podvrstev od stěny určujeme pomocí bezrozměrné veličiny

$$y^+ = \frac{y_{\perp} u_{\tau}}{\nu},$$

kde  $y_{\perp}$  je normálová vzdálenost od stěny,  $\nu$  kinetická viskozita a  $u_{\tau} = \sqrt{|\tau_w|/\rho}$  je třecí rychlost, kde  $\rho$  je hustota a  $|\tau_w|$  je velikost tenzoru stěnového napětí. Pro podvrstvy mezní vrstvy platí:

- viskózní podvrstva:  $0 < y^+ < 5$ ,
- přechodová vrstva:  $5 < y^+ < 30$ ,
- oblast plně vyvinutého turbulentního proudění:  $30 < y^+ < 200$ .

Při vyšších Reynoldsových číslech, tedy při turbulentním proudění, je turbulence u stěn potlačena (téměř laminární proudění - viskózní podvrstva) a se zvětšující se vzdáleností od stěny se rychle turbulence vyvíjí (turbulentní proudění - oblast plně vyvinutého turbulentního proudění). Přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním nastává ve vrstvě přechodové.

Modelovat proudění v mezní vrstvě můžeme dvěma způsoby. Prvním způsobem je dostatečné zhustění výpočetní sítě u stěn tak, aby přechod mezi laminárním prouděním k turbulentnímu proudění (se zvětšující se vzdáleností od stěny) byl řádně aproximován. Tento způsob vyžaduje pečlivou přípravu výpočetní sítě a může být pro vyšší celkový počet buněk v síti výpočetně náročnější. Druhým způsobem je využití tzv. **stěnových funkcí**.

Stěnové funkce, nevyžadují zvýšenou jemnost výpočetní sítě u stěn. Vycházejí z empirických poznatků podle kterých modelují proudění v mezní vrstvě. Podle empirických poznatků modelujeme rychlostní profil na základě bezrozměrné rychlosti  $u^+$  ve viskózní podvrstvě, který je lineární

$$u^+ = y^+,$$

kde  $u^+ = \frac{u}{u_{\tau}}$ . A v oblasti plně vyvinutého turbulentního proudění podle logaritmického zákona

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+,$$

kde  $\kappa$  je von Kármánova konstanta a  $C^+$  je konstanta. Problematická je přechodová vrstva, kde se rychlostní profil pomocí empirických vztahů nedá přesně určit. Turbulentní modely se proto přechodové vrstvě vyhýbají. Proto centroid první buňky u stěny umísťujeme buď do viskózní podvrstvy, nebo oblasti s plně vyvinutým turbulentním prouděním viz [31]. Každý RANS model využívá jinou sadu stěnových funkcí a podvrstvu mezní vrstvy pro umístění první buňky sítě. Například model  $k - \epsilon$  využívá oblast s plně vyvinutým turbulentním prouděním a proto preferuje síť se vzdáleností od stěny centroidu prvních buňek  $y^+ \in (30, 200)$ . Model využívaný v této práci,  $k - \omega$  SST využívá umístění centroidu první buňky do viskózní podvrstvy, tj.  $y^+ \in (0, 5)$  s preferencí  $y^+ \simeq 1$ , neboť empirické vztahy byly stanovovány na případech proudění v rovných kanálech a není zcela jisté jak vypadá přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním v mezní vrstvě (především přechodové vrstvě) stěny s mnoha zakřiveními, jako jsou systémy puklin.

## 2.5 Disperze

Je-li proudění vody kontaminováno rozpustnou látkou dochází k její disperzi v proudu a to molekulární difúzí a unášením proudem. Tento jev byl teoreticky studován pro případy rozvinutého

laminárního proudění v rovném potrubí G. Taylorem [40] již v roce 1953. V tomto článku byly studovány dva případy. První bral v úvahu jen disperzi proudem a zanedbával molekulární difúzi a druhý případ bral do úvahy oba tyto jevy současně.

Z roustoucího významu puklinových zvodní vzešel i zájem o studium disperze v puklinových prostředích. Předmětem studia je především podélná disperze tj., jak se vyvíjí koncentrace kontaminantu směrem po proudu. Studovány jsou i nerozpustné kontaminanty, protože v puklinách se mohou dobře šířit například suspenze (rozptýlený jíl, rozptýlené bakterie). Jedná se čistě o disperzi proudem tekoucí vody nikoliv o molekulární difúzi. Tyto procesy byly studovány pomocí fyzikálních i numerických experimentů viz např. [11, 12, 24, 43]. Úvod do problematiky se nachází v článcích [12, 24], které obsahují rozsáhlou citovanou literaturou k danému tématu.

V této práci se pro jednoduchost zaměřujeme jen na disperzní jevy (bez vlivu difúze) ve směru proudění (ve směru osy  $x$ ) v uvažovaném výřezu puklinového prostředí, viz. obr. 2.4.

Jedním z nejrozšířenějších modelů transportu rozpuštěných látek (případně i suspenzí) je **transportně disperzní rovnice** vycházející z Fickova zákona. Budeme-li uvažovat jen disperzi po proudu, tj. ve směru osy  $x$ , lze tuto rovnici zapsat (viz např. [9]) ve tvaru

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u_{avr} \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2.28)$$

kde  $c(x, t)$  je koncentrace dané látky,  $u_{avr}$  je střední rychlost a  $D_L$  je disperzní koeficient podélné disperze, který (obecně) závisí na střední rychlosti proudu  $D_L = D_L(u_{avr})$  (viz např. [4, 9]). Fickův zákon předpokládá, že difúzní (nebo disperzní tok) rozpuštěné látky  $q_d$  lze vyjádřit jako

$$q_d = - \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.29)$$

Problematika je podrobněji popsána např. v [4]. V článku [8] je uvedeno kritérium, podle kterého lze určit, zda disperze probíhá nebo neprobíhá podle Fickova zákona tj. jedná se o tzv. anomální disperzi, která není řešením rovnice typu (2.28). Toto kritérium je založeno na průběhu variance  $\langle r^2 \rangle$  souřadnic jednotlivých nehmotných částic v čase, pomocí kterého definujeme takzvaný **časově závislý disperzní koeficient**

$$D(t) := \frac{\langle r^2 \rangle}{t}. \quad (2.30)$$

Pokud je  $D(t)$  konstantní, disperze probíhá podle Fickova zákona. Pokud  $D(t) \sim t^{\phi-1}$ , tj.  $D(t)$  se asymptoticky chová jako mocninná funkce s exponentem  $\phi > 0, \phi \neq 1$ , pak se jedná o tzv. anomální disperzi.

V závěru této práce provedeme na jednom z 2D modelů puklinového systému experiment, kdy budeme sledovat několik nehmotných částic v rychlostním vektorovém poli puklinového systému. Ze získaných dat ověříme, zda proudění v puklinovém systému nepodléhá Fickovu zákonu.

# Kapitola 3

## Numerické simulace

Jako první je provedena simulace proudění mezi rovnoběžnými deskami. Jedná se o 2D případ, který popisují zjednodušené Navierovy-Stokesovy rovnice a je známé analytické řešení. Tato úloha nám slouží pro kontrolu nastavení numerických simulací. Výsledky numerických simulací můžeme porovnat s analytickým řešením. Následně pak stejná nastavení používáme pro simulaci proudění v puklinových systémech.

Všechny numerické simulace v této práci jsou prováděny dvěma modely. **Laminárním modelem**, který řeší Navierovy-Stokesovy rovnice a **turbulentním modelem**, který řeší Reynoldsovy rovnice a dodatečné transportní rovnice modelu  $k$ -omega SST. Model  $k$ -omega SST byl vybrán protože je kombinací modelu  $k$ -omega a  $k$ -epsilon. Model  $k$ -omega je vhodný k modelování proudění u stěn, v mezní vrstvě a  $k$ -epsilon naopak ve vnitřní oblasti dále od stěn. Model  $k$ -omega SST mezi těmito modely přepíná, podle toho jak daleko se nechází od stěn a kombinuje tak jejich silné stránky.

Simulace 2D proudění jsou prováděny pro škálu rychlostí v  $ms^{-1}$  (nebo její podmnožinu)

$$S^2 = \{(u, 0) : u \in V\}$$

a 3D proudění jsou prováděny pro škálu rychlostí v  $ms^{-1}$  (nebo její podmnožinu)

$$S^3 = \{(u, 0, 0) : u \in V\},$$

kde  $V = \{0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.0007, 0.0009, 0.001, 0.003, 0.005, 0.007, 0.009, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$ .

### 3.1 Technické parametry numerických simulací

Všechny numerické simulace byly řešeny v OpenFoam 9 ("Open-source Field Operation And Manipulation"), sadě knihoven C++ určených k řešení numerických simulací, specializovaný na řešení úloh dynamiky tekutin, nebo-li CFD (computational fluid dynamics). OpenFoam je založený na metodě konečných objemů (FVM). Výpočty byly prováděny na počítači MacBook Air (M1, 2020) s pamětí 16 GB.

- Složitější geometrické útvary, jako systémy puklin jsou vytvořeny v programu 3Dsharp, ze kterého jsou vyexportovány ve formátu STL.
- Základní výpočetní sítě jsou v OpenFoam tvořeny pomocí knihovny blockMesh a v případě složitějších geometrií je využita knihovna snappyHexMesh.
- Laminární i turbulentní modely jsou na sítích simulovány v OpenFoam za využití řešiče simpleFoam. SimpleFoam je řešič pro nestlačitelné, stacionární proudění využívající algoritmu SIMPLE ("Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations").

- Z výsledných řešení simulací v OpenFoam byly získány pomocí nástrojů postProcess, jako například: yPlus, mag(U), totalPressureIncompressible, patchIntegrate, patchFlowRate, potřebná dodatečná data.
- Výsledky simulací jsou zobrazovány v ParaView, open-source aplikaci určené k vizualizaci a analýze dat numerických simulací.
- Výsledná data všech simulací jsou zpracovány v Pythonu.

Použité výpočetní sítě jsou přiloženy na CD a dokumenty k jejich generaci v kapitole Přílohy. Soubory nastavující parametry simulací v OpenFoam jsou rovněž přiloženy na CD a v kapitole Přílohy.

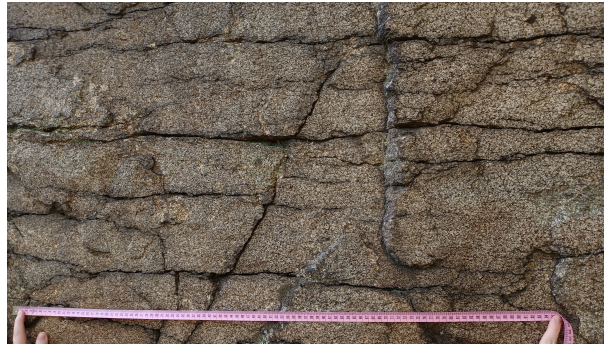
## 3.2 Tvorba sítě puklinového systému

Pro vytvoření modelu žulového puklinového systému využíváme puklinový systém, který se nachází v zatopeném žulovém lomu Špic u Něčína, který můžete vidět na obrázku 3.1. Pro účely této práce byl v lomu vybrán systém puklin viz obrázek 3.2, který je svým tvarem typický pro žulové masivy. Vytvoření 2D i 3D geometrie puklin bylo provedeno v aplikaci 3DSharp<sup>1</sup> v reálném měřítku. Geometrie puklin jsou uloženy ve formátu STL, ze kterých následně v OpenFoam pomocí knihovny snappyHexMesh generujeme výpočetní síť pro metodu konečných objemů.



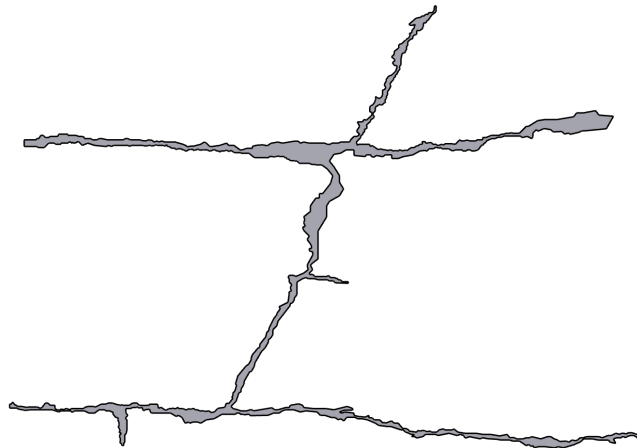
Obrázek 3.1: Zatopený žulový lom Špic, nacházející se u Něčína ve Středočeském kraji.

<sup>1</sup>3Dsharp je designerský CAD program (computer-aided design) využívaný pro 3D modelování.



Obrázek 3.2: Fotografie puklinového systému v žulovém lomu Špic.

**Tvorba 2D sítě puklinového systému:** Fotka puklinového systému 3.2 byla importována do programu 3Dsharp, kde byl vytvořen jeho obrys za dodržení měřítka, které udává metr na fotografii. Následně byl vyextrahován STL soubor zobrazený na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Obrys puklinového systému zvoleného k provádění 2D simulací.

Voda puklinovým systémem protéká horizontálně, tedy do puklinového systému vstupuje dvěma vstupy po levé straně a odtéka dvěma výpustmi po straně pravé.

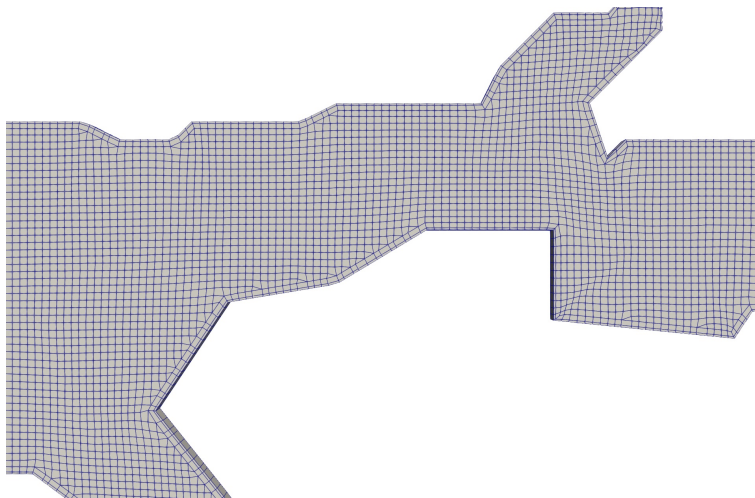
Tato geometrie je umístěna do kvádrové<sup>2</sup> sítě vytvořené pomocí knihovny blockMesh a samotné generování sítě provádí knihovna snappyHexMesh. Specifikace obou procesů jsou uvedeny v souborech blockMeshDict, surfaceFeaturesDict, snappyHexMeshDict a extrudeMeshDict na konci práce v Přílohách. Správnost sítě musí být ověřena pomocí kontroly geometrie a topologie checkMesh. Tato kontrola sítě odhalí závažné nedostatky sítě, ale nezaručuje, že síť je vhodná pro daný model a jeho konvergenci. Metodika tvoření výpočetních sítí je podrobněji popsána například v [20].

Jak bylo popsáno v kapitole 2.4.3 při simulaci turbulentních modelů je nutné brát v potaz stěnový zákon. První centroid buněk sítě přilehlých u stěn puklin musí být umístěný ve viskózní vrstvě, tzn. hodnota  $y^+ < 5$ . Bezrozměrná veličina  $y^+$  je získávána v průběhu simulace modelu<sup>3</sup>, tudíž ji při tvorbě sítě neznáme a pro každý model je jiná. Musíme se tedy pokusit odhadnout

<sup>2</sup>OpenFoam řeší obecně 3D případy, pokud modelujeme 2D případ, volíme výpočetní síť tak, aby ve třetí souřadnici ( $z$ ) měla vždy jen jednu buňku viz [20].

<sup>3</sup>Honota  $y^+$  je pro každou buňku jiná, standardně se uvažuje jejich průměrná hodnota.

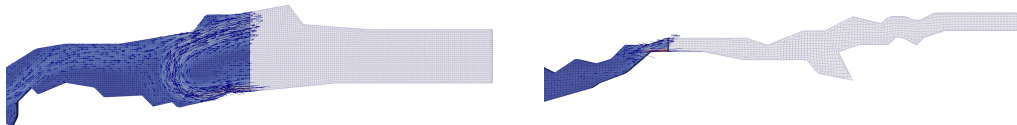
šířku prvních buněk u stěn puklin tak, aby vyhovovala všem modelům, které budeme testovat na turbulentní proudění. Z tohoto důvodu jsou v síti přidány dvě hraniční vrstvy u stěn, viz obrázek 3.4 (specifikace jsou v souboru `snappyHexMesh` v Přílohy.)



Obrázek 3.4: Přiblížení na část výpočetní sítě 2D modelu puklinového systému.

Při simulacích proudění s vyšší rychlostí dochází ve výpustech puklin k **zpětnému proudění**, takzvanému "Back Flow". Tento jev se vyskytuje u některých studovaných modelů z našeho pohledu nepředvídatelně<sup>4</sup> a projevuje se jako vírová oblast na výpusti viz obrázek 3.5. K odstranění tohoto problému jsou potřeba dvě úpravy.

První úprava spočívá v prodloužení a upravení geometrie výpustí tak, aby výpust neležela v místě pukliny, kde by mohlo dojít k vírové oblasti viz [33]. Prodloužení puklinového systému je provedeno tak, aby co nejvíce zachovávalo tvar reálných puklin, ale konečná část puklin je v obou koncových puklinách lehce vyrovnána. Výslednou geometrii lze ohraničit oblastí  $0.55 \times 0.45 \text{ m}$  a je zobrazena na obrázku 3.9 (výšek porézního prostředí).

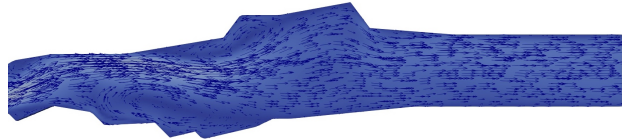


Obrázek 3.5: Prodloužení horní (vlevo) a dolní (vpravo) výpustí 2D puklinového systému. Na obrázcích je vidět rychlostní pole pro původní krátké výpustě bez úpravy a síť prodloužených výpustí.

Druhá úprava spočívá v použití okrajové podmínky pro rychlostní pole, která zamezí zpětnému proudění. Takovou podmínkou je například podmínka `inletOutlet`, která na výstupu buňkám, přiřazuje rychlosti homogenní Neumannovu podmínku, až na buňky ve kterých dochází ke zpětnému

<sup>4</sup>Nepředvídatelností rozumíme fakt, že nejsme schopni předem pro danou vstupní rychlost a daný model určit, zda k tomuto jevu dojde či nikoliv. Zjistíme to až z provedené numerické simulace.

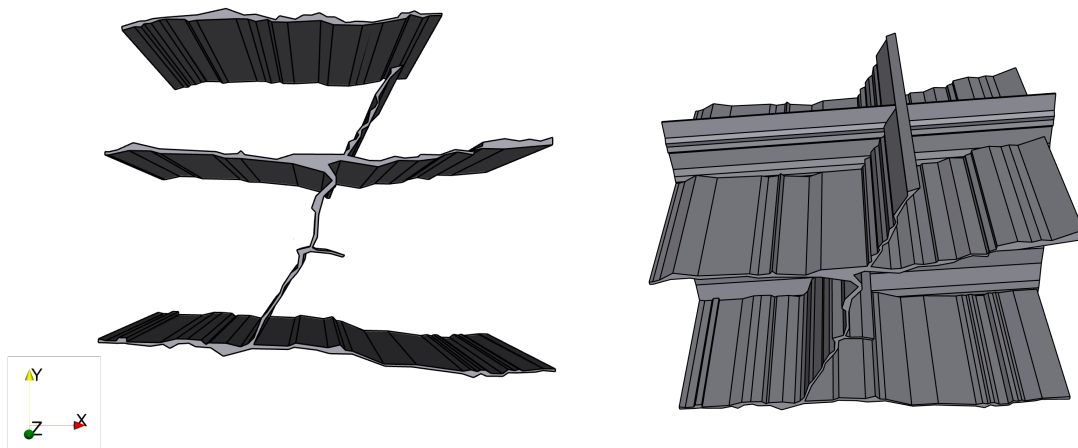
proudění, těm přiřadí homogenní Dirichletovu podmínku viz [20]. Sama o sobě je tato úprava z fyzikálního pohledu nežádoucí. Ale v kombinaci s výše popsaným prodloužením výpusti v žádném modelu nedojde k přiřazení nulové rychlosti, nebo zpětnému proudění ve výpusti. Tekutina tak vždy proudí výpustí ze systému puklin podobně jako je zobrazeno na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Horní výpust puklinového systému s prodlouženou geometrií a vyznačeným vektorovým rychlostním polem stabilního stavu.

Finální verze sítě použité pro všechny 2D modely puklinového systému v této práci byla na výše uvedeném počítači generována 51 *min* a 28 *s*.

**Tvorba 3D sítě puklinového systému:** Pro tvorbu 3D geometrie systému puklin jsme opět využili fotku puklin z obrázku 3.2 importovanou do programu 3Dsharp. Z důvodu časové náročnosti generování 3D sítě je obrys puklin zjednodušený. Zanedbány jsou jemné hrubosti stěn puklin. Obrisy puklin jsou pak protáhnuty ve směru osy  $z$  o  $0.55\text{ m}$ . Aby 3D model více odpovídal realitě je do geometrie zapracována puklina mimo zvolený systém z obrázku 3.2. Puklina je protažena o  $0.55\text{ m}$  ve směru osy  $z$  a s rotací o  $90^\circ$  okolo osy  $y$  a  $90^\circ$  okolo osy  $x$  vložena do puklinového systému viz obrázek 3.7.

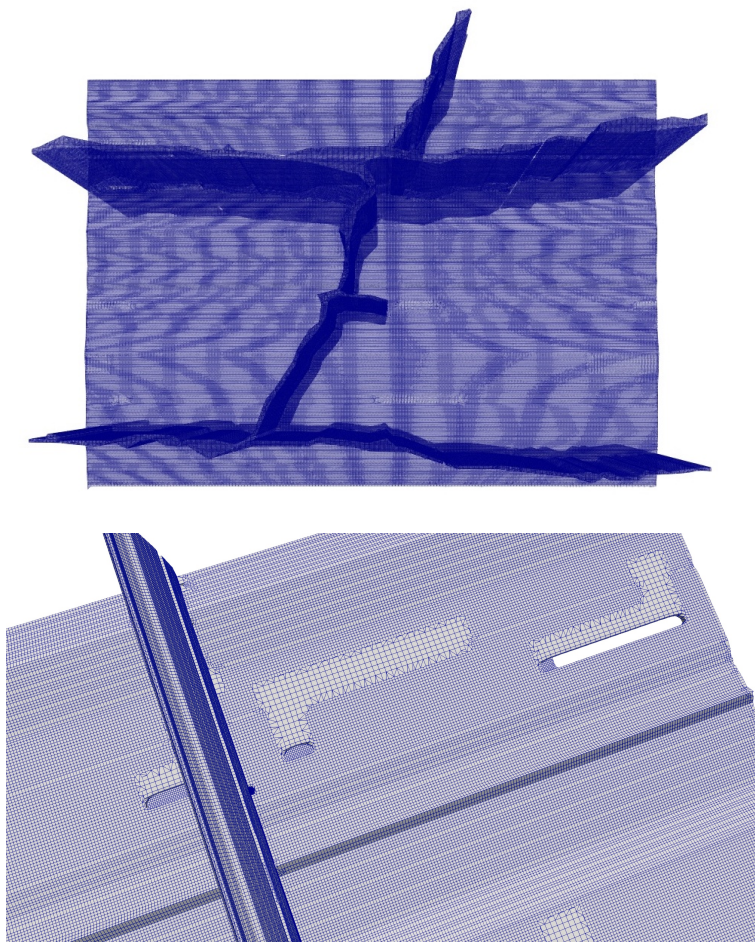


Obrázek 3.7: Vlevo základní puklinový systém s dodatečnou puklinou pro tvorbu 3D modelu (rozložení odpovídá fotografii na obr. 3.2). Vpravo hotový 3D model puklinového systému pro 3D simulace proudění.

Vygenerování sítě pro 3D model pomocí knihovny snappyHexMesh je velice časově a paměťově náročné. Probíhá ve třech procesech.

- `castellatedMesh`, proces který vytvoří hrubou síť importované geometrii,
- `snap` proces při kterém je hrubá síť změněna, tak aby přilnula k importované geometrii
- `addLayers`, proces při kterém jsou zahuštěny buňky v mezní vrstvě (u stěn importované geometrie).

Z důvodu výpočetní náročnosti výpočetní síť v prvním procesu generování sítě nedošlo k pokrytí sítí celé importované geometrie. Pro pokrytí celé geometrie z důvodu příliš úzkých puklin je síť potřeba generovat velmi jemnou, tím pádem hustou s mnoha buňkami. To nebylo možné uskutečnit pravděpodobně z důvodu nízké výpočetní paměti. Vzniklé chyby ale nenarušují celistvost sítě. Na obrázku 3.8 je uvedený příklad, po provedení druhého procesu zjemňování, jak vypadají nedostatky v počtu buněk. Z pohledu přiblížení se modelem puklin k realitě, můžeme tyto nedostatky brát, jako kameny a kontaktní plochy, kterými jsou ve skutečnosti pukliny proloženy a brání kolapsu puklin. Z toho důvodu síť pro simulace proudění využijeme. Z důvodu časové náročnosti, nebyl proveden třetí proces generování sítě, zhušťování sítě v mezní vrstvě pro správné fungování turbulentních modelů (viz Stěnový zákon kapitola 2.4.3). Model 3D puklin proto testujeme pouze na laminární modely. Při kontrole sítě (`checkMesh`) síť nevykazuje žádné závažné nedostatky, které by mohli bránit konvergenci modelu. Laminární modely testované na 3D síti konvergují a nevykazují žádné zřetelné potíže.



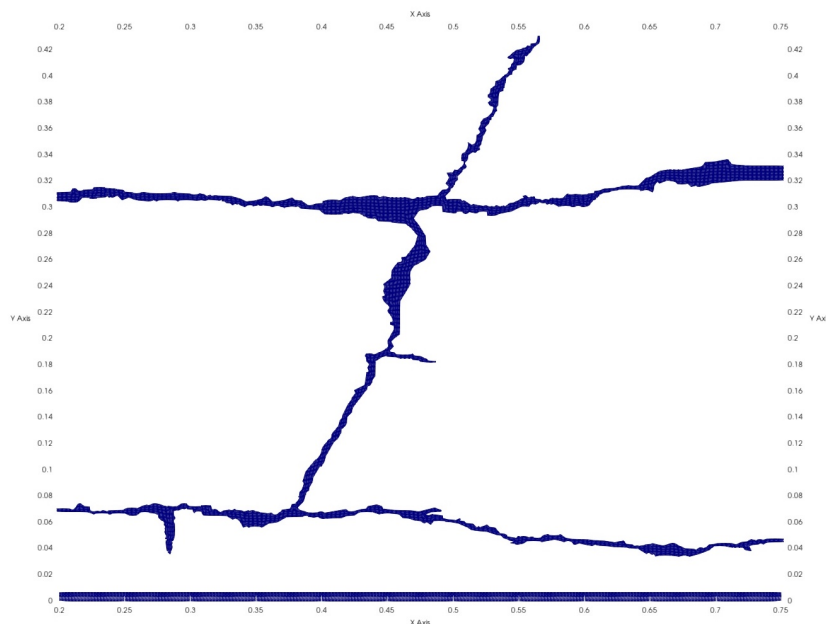
Obrázek 3.8: Výpočetní síť pro 3D simulace proudění (nahore) s detailem otvory v síti (dole).



Finální verze sítě použité pro všechny 3D modely puklinového systému v této práci byla na výše uvedeném počítači generována 5 h 37 min a 17 s.

### 3.3 Proudění mezi rovnoběžnými deskami

Prvním testovaným modelem je 2D proudění mezi rovnoběžnými deskami ve směru osy  $x$ , které je teoreticky popsáno v kapitole 2.4.1 Abychom se s teoretickým modelem proudění mezi deskami co nejvíce přiblížili ke konkrétnímu modelu puklin a mohli modely testovat na jednotnou škálu rychlostí, stanovíme vzdálenost mezi deskami jako průměrnou šířku puklin v celém systému. Modelem systému puklin vedeme každých 5cm řezy kolmé na osu  $x$  a změřené šířky puklin zprůměrujeme, za využití aritmetického průměru. Výsledná vzdálenost mezi deskami je stanovena  $h = 0.007\text{ m}$  a délku desek volíme stejnou jako charakteristickou délku puklinového systému, tedy  $\Delta L = 0.55\text{ m}$ .



Obrázek 3.9: Sít' modelu rovnoběžných desek v dolní části obrázku. V horní části obrázku pro porovnání měřítko sít' 2D modelu puklinového systému.

Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami modelujeme na oblasti

$$\Omega_D = (0.2, 0.75) \times (0, 0.007)$$

viz obrázek 3.9<sup>5</sup>. Na oblasti  $\Omega_D$  jsou vytvořeny dvě neuniformní výpočetní sítě, jejichž detaily jsou na obrázku 3.10. První sít' je určena pro laminární a druhá turbulentní modely<sup>6</sup>. Tato úprava sítě pro turbulentní modely je provedena, aby modely podléhaly stěnovému zákonu viz kapitola 2.4.3. Pro turbulentní modely je sít' u stěn zhuštěna. V obou případech byla sít' vytvořena pomocí knihovny blockMesh, specifikace pro tvorbu sítí jsou uvedeny v souborech blockMeshDict viz Přílohy.

<sup>5</sup>Puklinový systém je kvůli reálnému měřítku zasazen v kartézské soustavě souřadnic do  $x \in [0.2, 0.75]$ , kvůli usnadnění zpravování dat ze simulací jsou rovnoběžné desky umístěny na stejné pozici.

<sup>6</sup>Laminární modely na rozdíl od turbulentních lze modelovat na obou sítích, ale není pro ně zhušťování sítě u stěn potřeba, proudění je laminární a nepodléhá stěnovému zákonu.



Obrázek 3.10: Detaily výpočetních sítí pro model proudění mezi deskami. Síť pro laminární modely (vlevo), síť pro turbulentní modely (vpravo).

Proudění mezi rovnoběžnými deskami numericky modelujeme dvěma způsoby:

1. Proudění plně rozvinuté v celé délce oblasti  $\Omega_D$ . Výsledné vektorové pole odpovídá analytickému řešení na celé oblasti  $\Omega_D$ , viz (3.2) a (3.5).
2. Proudění mezi deskami postupně se rozvíjející. Na vstupu uvažujeme konstantní Dirichletovu podmínku pro rychlosti  $\mathbf{u}(0.2, y) = (u_{inlet}, 0)$ . Konstantní rychlostní profil se ve směru osy  $x$  rozvine v profil parabolický.

*Poznámka:* Příklad plně rozvinutého proudění se v literatuře často označuje jako proudění mezi nekonečnými deskami, protože řešení Navierových-Stokesových rovnic není ohraničeno délkou rovnoběžných desek. Prakticky ale při nastavení vhodných okrajových podmínek a počáteční aproximaci rychlostního pole je možné tento případ simulovat na deskách konečné délky.

### 3.3.1 Proudění mezi rovnoběžnými deskami s plně rozvinutým prouděním

Laminární rozvinuté proudění mezi rovnoběžnými deskami popisují Navierovy-Stokesovy rovnice. Jedná se o zjednodušený případ, který rovnice převede na okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \mu u_{yy} = -P_x \\ u(x, 0) = u(x, h) = 0, \forall x \in [0.2, 0.75], \\ u(x, y) = u(y), \forall x \in [0.2, 0.75], \end{cases} \quad (3.1)$$

která má analytické řešení

$$u(y, x) = 4u_{max} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h}, \forall (x, y) \in \Omega_D, \quad (3.2)$$

kde  $\mathbf{u}(x, y, z) \equiv (u(x, y), 0, 0) \equiv u(x, y)$  a  $P_x$  je konstantní modifikovaný tlakový gradient. Pro  $P_x$  platí vztah

$$P_x = \frac{p_{inlet} - p_{outlet}}{\Delta L} = \frac{8\mu}{h^2} u_{max}, \quad (3.3)$$

kde  $\mu$  je dynamická viskozita,  $p_{inlet}$  je statický tlak na vstupu a  $p_{outlet}$  na výstupu rovnoběžných desek viz kapitola 2.4.1. Pokud přidáme nulovou podmínku pro tlak  $p(x, y, z) \equiv p(x, y)$  na výstupu rovnoběžných desek

$$p(0.75, y) = p_{outlet} = 0, \text{ pro } \forall y \in [0, 0.007], \quad (3.4)$$

můžeme odvodit funkci vyjadřující lineární pokles tlaku v oblasti  $\Omega_D$  jako

$$p(x, y) = \frac{8\mu}{h^2} u_{max} (0.75 - x), \forall (x, y) \in \Omega_D. \quad (3.5)$$

OpenFoam defaultně udává pro nestlačitelné stacionární proudění výsledné tlakové pole jako tlakové pole kinetické. Pro kinetický tlak  $p_k$  a statický tlak  $p$  platí vztah

$$p = \rho p_k,$$

kde  $\rho = 10^3$  je konstantní hustota (nestlačitelné) proudící tekutiny. Abychom mohli porovnávat numerické výsledky s analytickým vyjádřením tlaku převedeme funkci (3.5) na

$$p_k(x, y) = \frac{8\mu}{\rho h^2} u_{max} (0.75 - x), \forall (x, y) \in \Omega_D \quad (3.6)$$

vyjadřující kinetický tlak  $p_k$  na oblasti  $\Omega$ .

Proudění mezi rovnoběžnými deskami s plně vyvinutým prouděním simulujeme laminárním modelem s okrajovými podmínkami

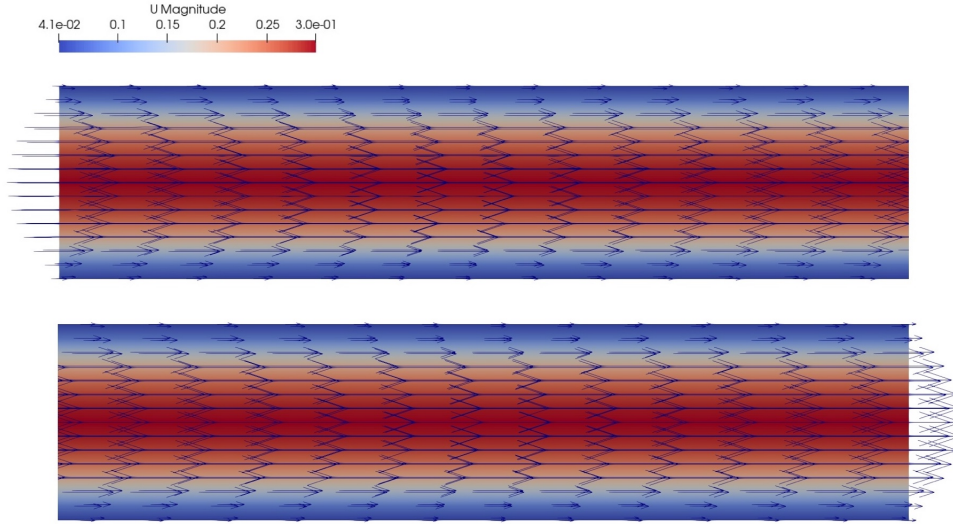
$$\begin{cases} u(x, 0) = u(x, h) = 0, \forall x \in [0.2, 0.75], \\ p(0.75, y) = 0, \forall y \in [0, 0.007], \end{cases} \quad (3.7)$$

s počáteční aproximací rychlostního pole  $\mathbf{u}_0$ , která má podobu

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, 0), \forall (x, y) \in \Omega_D,$$

definování v OpenFoam viz Přílohy.

Zvolíme  $\mathbf{u}_0 = (0.2, 0)$  a provedeme simulaci pomocí laminárního modelu. Z výsledného objemového průtoku  $Q$  přes  $h$  a kinetické viskozity  $\nu$  vypočteme Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{Q}{\nu} = 1407$ , jehož hodnota je nižší než kritická hodnota Reynoldsova čísla  $Re_{crit} \sim 2000$  pro proudění v potrubí, nebo mezi rovnoběžnými deskami. Vypočtená maximální rychlost proudění je  $u_{max} \doteq 0.299$ . Stabilní stav a jeho výsledné rychlostní vektorové pole je znázorněno na obrázku 3.11.



Obrázek 3.11: Detaily rychlostního pole ustáleného stavu laminárního modelu ( $u_0 = 0.2$ ). Vstupní oblast mezi rovnoběžné desky (nahore), výstupní oblast (dole).

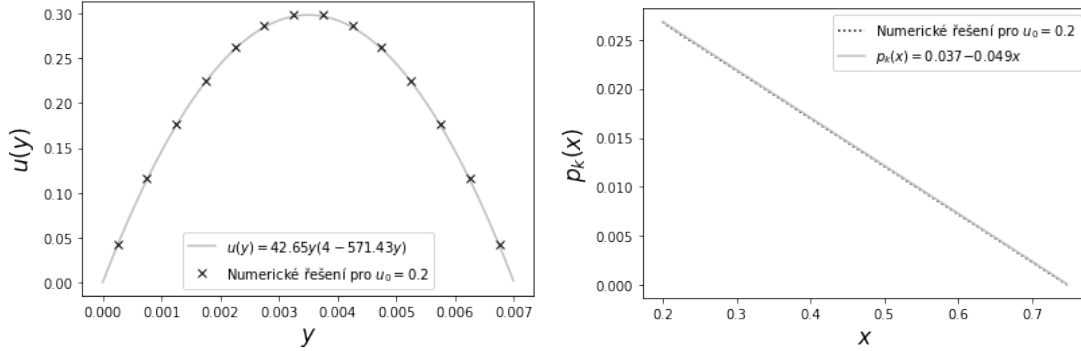
Analytické řešení pro proudění s maximální rychlostí  $u_{max} \doteq 0.299$  má tvar

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 4 \cdot 0.299 \left(1 - \frac{y}{0.007}\right) \frac{y}{0.007} \\ &= 42.65y(4 - 571.43y), \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Průběh kinetického tlaku vyjadřuje funkce

$$p_k(x, y) = 0.037 - 0.049x, \forall (x, y) \in \Omega. \quad (3.9)$$

Analytické řešení (3.8) a vyjádření kinetického tlaku (3.9) jsou společně s výsledky numerické simulace zobrazeny na obrázku 3.12.



Obrázek 3.12: Porovnání numerických výsledků s analyticky získanými vztahy. Rychlostní profil proudění vlevo (shodný  $\forall x \in (0.2, 0.75)$ ) a průběh kinetického tlaku vpravo (shodný  $\forall y \in (0, 0.007)$ ).

Po dosazení  $\mu = 10^{-3}$  a  $h = 0.007$  do vztahu (3.3) získáme analytický vztah vyjadřující lineární závislost poklesu statického tlaku  $\Delta P = p_{inlet} - p_{outlet}$  za jednotku délky na maximální rychlosti  $u_{max}$  ve tvaru

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} \doteq 163.28 u_{max}. \quad (3.10)$$

Abychom mohly porovnat výsledky numerických simulací převedeme vztah (3.10) na

$$\frac{\Delta P_k}{\Delta L} \doteq 0.16328 u_{max}, \quad (3.11)$$

kde  $\Delta P_k = p_{kinlet} - p_{koutlet}$  je rozdíl kinetického tlaku na vstupu a výstupu mezi rovnoběžné desky.

Numerické simulace laminárních modelů provádíme pro škálu počátečních aproximací rychlostního vektorového pole

$$U_0^2 = \{\mathbf{u}_0 \in S^2 : u_0 \leq 0.3\},$$

tj. pro modely s Reynoldsovým číslem  $Re \leq 2136$  viz tabulka 3.1. Pro každý model je v rámci post-processingu spočten v OpenFoam za použití funkce `patchIntegrate` výsledný kinetický tlakový gradient jako

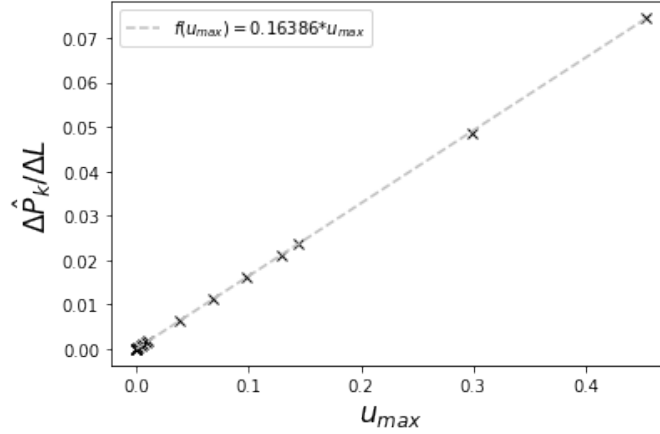
$$\frac{\Delta \hat{P}_k}{\Delta L} = \frac{1}{0.55} \left( \sum_{j=0}^N \hat{p}_{kinlet,j} - \sum_{j=0}^N \hat{p}_{koutlet,j} \right) = \frac{1}{0.55} \sum_{j=0}^N \hat{p}_{kinlet,j}, \quad (3.12)$$

kde  $N$  je počet buněk na výstupu i vstupu výpočetní sítě,  $\hat{p}_{koutlet,j} = 0$ , tj. na výstupu a  $\hat{p}_{kinlet,j}$  jsou vypočtené hodnoty kinetického tlaku na vstupu pro  $j = 0, 1, \dots, N$ . Vypočtené kinetické tlakové gradienty  $\frac{\Delta \hat{P}_k}{\Delta L}$  získané numerickými simulacemi jsou zapsány v tabulce 3.1 a jejich závislost na maximální rychlosti proudění je zaznamenána v grafu na obrázku 3.13. Hodnoty jsou aproximovány lineární funkcí

$$f(u_{max}) \doteq 0.16386 u_{max},$$

s chybou od analytického vyjádření (3.11)

$$e \doteq \max_{\forall u_0 \in U_0^2} \left| \frac{\Delta P_k}{\Delta L} - \frac{\Delta \hat{P}_k}{\Delta L} \right| \doteq 5.929 \cdot 10^{-4}.$$



Obrázek 3.13: Lineární závislost kinetického tlakového gradientu na maximální rychlosti proudění.

$u_0$	$u_{max}$	$Re$	$\Delta \hat{P}_k / \Delta L$
0.0001	$1 \cdot 10^{-5}$	<1	$8.31 \cdot 10^{-7}$
0.0003	$2 \cdot 10^{-5}$	<1	$3.66 \cdot 10^{-6}$
0.0005	$5 \cdot 10^{-5}$	<1	$8.25 \cdot 10^{-6}$
0.0007	$9 \cdot 10^{-5}$	<1	$1.50 \cdot 10^{-5}$
0.0009	0.00014	<1	$2.35 \cdot 10^{-5}$
0.001	0.00018	<1	$2.87 \cdot 10^{-5}$
0.003	0.00161	7	$2.63 \cdot 10^{-4}$
0.005	0.00387	18	$6.33 \cdot 10^{-4}$
0.007	0.00634	29	$1.04 \cdot 10^{-3}$
0.009	0.00889	41	$1.45 \cdot 10^{-3}$
0.01	0.01019	48	$1.66 \cdot 10^{-3}$
0.03	0.03829	180	$6.25 \cdot 10^{-3}$
0.05	0.06816	321	$1.11 \cdot 10^{-2}$
0.07	0.09853	464	$1.61 \cdot 10^{-2}$
0.09	0.12908	608	$2.11 \cdot 10^{-2}$
0.1	0.14442	680	$2.36 \cdot 10^{-2}$
0.2	0.29859	1407	$4.87 \cdot 10^{-2}$
0.3	0.45312	2136	$7.45 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 3.1: Výsledky laminárních modelů rozvinutého proudění mezi rovnoběžnými deskami.

### 3.3.2 Proudění mezi rovnoběžnými deskami s postupně se rozvíjejícím prouděním

Případ proudění mezi rovnoběžnými deskami tj. na oblasti

$$\Omega_D = (0.2, 0.75) \times (0, 0.007).$$

Tento případ proudění mezi rovnoběžnými deskami nemá obecné analytické řešení. Simulace v OpenFoam provádíme laminárním modelem, nebo turbulentním modelem s okrajovými podmínkami

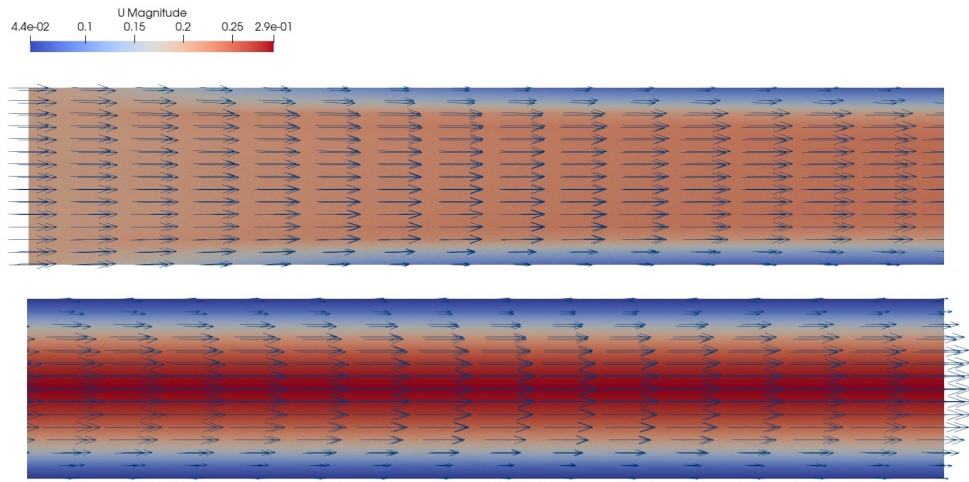
$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, h) = 0, \forall x \in [0.2, 0.75] \\ \mathbf{u}(0.2, y) = \mathbf{u}_{inlet} = (u_{inlet}, 0), \forall y \in [0, 0.007] \\ p(0.75, y) = p_{outlet} = 0, \forall y \in [0, 0.007]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Model se od předchozího modelu liší rychlostní okrajovou podmínkou na vstupu mezi rovnoběžné desky. Není potřeba volit nenulovou počáteční aproximaci rychlostního pole, tj. platí

$$\mathbf{u}_0 = (0, 0), \text{ pro } \forall(x, y) \in \Omega_D.$$

definování v OpenFoam viz Přílohy.

Zvolíme  $u_{inlet} = 0.2$  a provedeme simulaci pomocí laminárního modelu. Z výsledného objemového průtoku  $Q$  přes  $h$  a kinetické viskozity  $\nu$  vypočteme Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{Q}{\nu} = 1400 < 2000$ . Vypočtená maximální rychlost proudění je  $u_{max} \doteq 0.292$ . Stablní stav rychlostního vektorového pole s rozvíjejícím se prouděním ve směru osy  $x$  je znázorněno na obrázku 3.14.



Obrázek 3.14: Vstup do oblasti  $\Omega_D$  s konstantním rychlostním profilem na inletu (nahore), tj. z hydrodynamické vstupní oblasti. Výstup z oblasti  $\Omega_D$  s rozvinutým parabolickým profilem rychlosti (dole), tj. z plně vyvinuté oblasti.

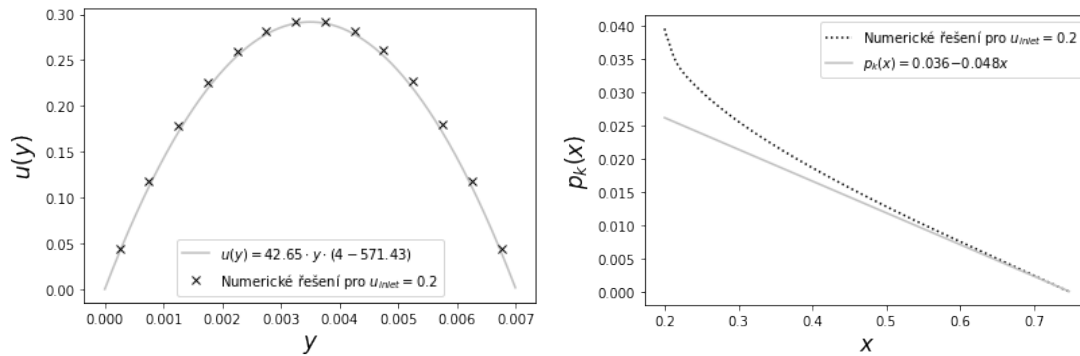
Část ve které proudění není plně vyvinuté se nazývá **hydrodynamická vstupní oblast**. Část kde proudění již plně vyvinuté je se nazývá **plně vyvinutá oblast** viz [1]. V oblasti plně vyvinutého proudění numerické řešení splňuje analytické řešení (3.2), které má pro příslušnou maximální rychlost  $u_{max} \doteq 0.292$  tvar

$$\begin{aligned} u(y, x) &= 4 \cdot 0.292 \left(1 - \frac{y}{0.007}\right) \frac{y}{0.007} \\ &= 42.65y(4 - 571.43y), \forall(x, y) \in \Omega_D \end{aligned} \quad (3.14)$$

V hydrodynamické vstupní oblasti rychlostní profil tomuto analytickému řešení neodpovídá. Podobně funguje i vyjádření kinetického tlaku. V plně vyvinuté oblasti se numerické řešení shoduje s vyjádřením kinetického tlaku (3.6) pro příslušnou maximální rychlost  $u_{max} \doteq 0.292$ , tvaru

$$p_k(x, y) = 0.036 - 0.048x, \forall(x, y) \in \Omega_D. \quad (3.15)$$

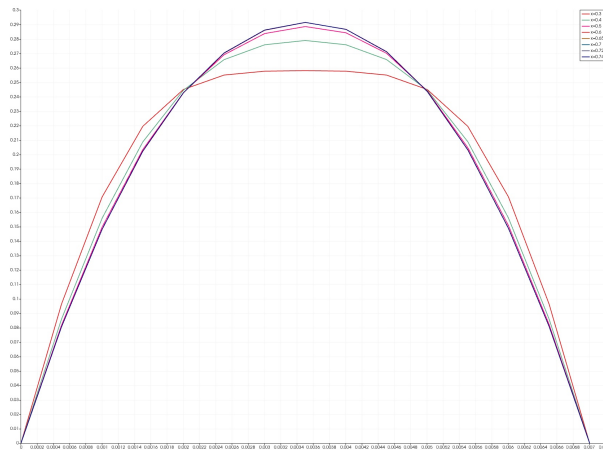
V hydrodynamické vstupní oblasti, kde proudění není plně rozvinuté kinetický tlak (3.15) neodpovídá. Analytické řešení (3.14) a vyjádření kinetického tlaku (3.15) jsou společně s výsledky numerické simulace zobrazeny na obrázku 3.15.



Obrázek 3.15: Porovnání numerických výsledků s analyticky získanými vztahy. Rychlostní profil proudění vlevo (shodný v oblasti s plně rozvinutým prouděním) a průběh kinetického tlaku vpravo (shodný  $\forall y \in (0, 0.007)$ ).

Shoda analytického a numerického řešení v oblasti s rozvinutým prouděním nám indikuje správnost numerického modelu na celé oblasti  $\Omega$ . Proto tento model použijeme pro simulace proudění v puklinových systémech.

Porovnáním tlaku a rychlosti mezi deskami u numerického modelu a u analytického řešení můžeme odhadnout, kde se nachází hranice mezi hydrodynamickou oblastí a oblastí plně vyvinutého proudění. V druhé oblasti je v obou případech rychlostní profil parabolický a dále se podél osy  $x$  nemění. Na obrázku 3.16 můžeme vidět že se parabolické rychlostní profily začínají překrývat pro  $x \geq 0.4$ . Zároveň se tlaky numerického a analytického řešení shodují od  $x \geq 0.49$  s chybou  $10^{-3}$  a od  $x \geq 0.7$  s chybou  $10^{-4}$ . Hranici  $x_b$  přechodu mezi oblastí hydrodynamickou a plně vyvinutou tak nachází v intervalu  $x_b \in [0.49, 0.7]$ . Víme tedy, že desky jsou dostatečně dlouhé na to, aby se proudění v nich plně rozvinulo.



Obrázek 3.16: Rychlostní profil ve svislých řezech na osu  $x$ .

Ztrátu totální mechanické energie na jednotku objemu tekutiny proteklé rovnoběžnými deskami stanovíme jako rozdíl průměrných totálních tlaků na vstupu a výstupu na jednotku délky  $\Delta L$ <sup>7</sup>

$$\frac{\Delta P_t}{\Delta L}$$

a aproximujeme jí jako funkci  $f(u_{inlet})$  viz kapitola 2.3.1. Pro každý model je v rámci post-processingu spočten v OpenFoam za použití funkce `patchIntegrate` výsledný průměrný totální

<sup>7</sup>Nebo-li průměrný totální tlakový gradient.

tlakový gradient jako

$$\frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \left( \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N \hat{p}_{t_{inlet},j} - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N \hat{p}_{t_{outlet},j} \right), \quad (3.16)$$

kde  $N$  je počet buněk na vstupu i výstupu a  $\hat{p}_{t_{inlet},j}$  a  $\hat{p}_{t_{outlet},j}$  vypočtené hodnoty totálního tlaku na vstupu a výstupu pro  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Proudění simulujeme pro škálu rychlostí  $S^2$ , tj.  $\forall \mathbf{u}_{inlet} \in S^2$ . Modelu se vstupní rychlostí  $u_{inlet} = 0.3$  přísluší Reynoldsovo číslo  $Re \doteq 2100$ , což je nejbližší kritické hodnotě  $Re_{crit} = 2000$ , ze všech testovaných modelů viz tabulky 3.3.2 a 3.3.2. Tento model považujeme za model přechodový mezi laminárním a turbulentním prouděním. Laminární modely budeme tedy testovat pro škálu rychlostí

$$L_{inlet}^2 = \{\mathbf{u}_{inlet} \in S^2 : u_{inlet} \leq 0.3\}$$

a turbulentní pro škálu rychlostí

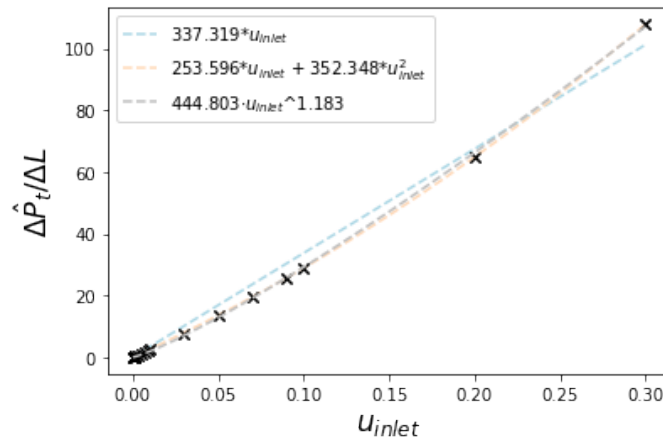
$$T_{inlet}^2 = \{\mathbf{u}_{inlet} \in S^2 : u_{inlet} \geq 0.3\}.$$

Získané tlakové gradienty v závislosti na vstupní rychlosti aproximují funkcí  $f(u_{inlet})$ , která vždy odpovídá jednomu ze tří zákonů zákonů viz kapitola 2.3.1 a 2.2. Chybu získaných dat od aproximace  $f$  uvádíme ve tvaru

$$e = \max_{\forall \mathbf{u}_{inlet} \in M} \left( |f(u_{inlet})| - \left| \frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} \right| \right).$$

Totální průměrné tlakové gradienty pro laminární modely ( $\mathbf{u}_{inlet} \in L_{inlet}^2$ ) jsou uvedeny v tabulce 3.3.2, jejich hodnoty spolu s aproximacemi  $f$  jsou zobrazeny na obrázku 3.17. A  $f(u_{inlet})$  pro jednotlivé zákony nabývají tvaru:

- **lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 337.319 u_{inlet}$ , s chybou  $e \doteq 6.498$
- **kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 253.596 u_{inlet} + 352.348 u_{inlet}^2$ , s chybou  $e \doteq 0.241$
- **mocninná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 444.803 u_{inlet}^{0.845}$ , s chybou  $e \doteq 1.201$



Obrázek 3.17: Laminární modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in L_{inlet}^2$ .

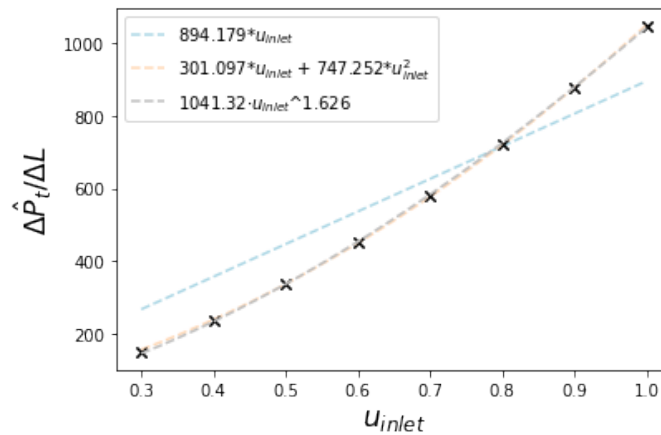


$u_{inlet}$	$u_{max}$	$Re$	$\Delta\hat{P}_t/\Delta L$
0.0001	0.00015	<1	0.025
0.0003	0.00045	2	0.074
0.0005	0.00074	3	0.123
0.0007	0.00104	4	0.172
0.0009	0.00134	6	0.222
0.001	0.00148	7	0.247
0.003	0.00445	21	0.742
0.005	0.00741	35	1.242
0.007	0.01037	49	1.745
0.009	0.01334	63	2.250
0.01	0.01482	70	2.505
0.03	0.04435	210	7.788
0.05	0.07368	350	13.437
0.07	0.10288	490	19.412
0.09	0.13219	630	25.644
0.1	0.14674	700	28.886
0.2	0.2916	1400	65.055
0.3	0.43523	2100	107.694

Tabulka 3.2: Laminární modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in L_{inlet}^2$ .

Totální průměrné tlakové gradienty pro turbulentní modely ( $\mathbf{u}_{inlet} \in T_{inlet}^2$ ) jsou uvedeny v tabulce 3.3.2, jejich hodnoty spolu s aproximacemi  $f$  jsou zobrazeny na obrázku 3.18. A  $f(u_{inlet})$  pro jednotlivé zákony nabývají tvaru:

- **lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 894.179 u_{inlet}$ , s chybou  $e \doteq 152.538$
- **kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 301.097 u_{inlet} + 747.252 u_{inlet}^2$ , s chybou  $e \doteq 4.545$
- **mocninná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 1041.320 u_{inlet}^{0.615}$ , s chybou  $e \doteq 6.038$

Obrázek 3.18: Turbulentní modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in T_{inlet}^2$ .

V tabulce 3.3.2 jsou uvedeny průměrné hodnoty  $y^+$  turbulentních modelů. Pro všechny modely platí  $y^+ < 5$ , viz kapitola Stěnový zákon 2.4.3.

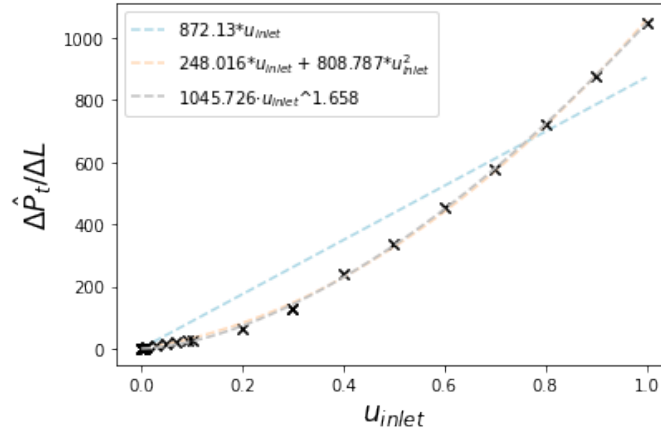
$u_{inlet}$	$u_{max}$	$Re$	$y^+$	$\Delta\hat{P}_t/\Delta L$
0.3	0.39001	2100	0.687	153.037
0.4	0.50786	2800	0.859	238.340
0.5	0.62518	3499	1.027	337.352
0.6	0.74226	4200	1.193	453.265
0.7	0.85892	4899	1.352	578.886
0.8	0.97524	5600	1.511	719.948
0.9	1.09153	6299	1.669	875.670
1.0	1.20762	6999	1.827	1046.717

Tabulka 3.3: Turbulentní modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in T_{inlet}^2$ .

Abychom dostali jednotný tvar zákonů, pro celou testovanou škálu rychlostí  $S^2$  aproximujeme funkcí  $f$  všechny získané průměrné totální tlakové gradienty. Pro přechodový model  $u_{inlet} = 0.3$  průměrný totální tlakový gradient laminárního a turbulentního modelu zprůměrujeme pomocí aritmetického průměru. Získáváme aproximace jsou zobrazené na obrázku 3.19.

A pro  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^2$  nabývají jednotlivé zákony tvaru:

- **lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 872.130 u_{inlet}$ , s chybou  $e \doteq 174.587$
- **kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 248.016 u_{inlet} + 808.787 u_{inlet}^2$ , s chybou  $e \doteq 16.900$
- **mocninná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 1045.726 u_{inlet}^{0.603}$ , s chybou  $e \doteq 11.717$



Obrázek 3.19: Laminární i turbulentní modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^2$ .

### 3.4 Proudění v 2D puklinovém systému

Puklinový systém je reprezentován oblastí  $\Omega_P$ , která je definována výpočetní sítí, je zobrazena na obrázku 3.9 a detail sítě je zobrazen na obrázku 3.4, soubory k jejímu vygenerování viz Přílohy. Hranici oblasti  $\Omega_P$  dělíme na

$\partial\Omega_{P_{inlet}}$  reprezentující vstupy do puklinového systému,

$\partial\Omega_{P_{outlet}}$  reprezentující výstupy puklinového systému,

$\partial\Omega_{P_{fixWall}}$  reprezentující pevné stěny puklinového systému,

$$\partial\Omega_P = \partial\Omega_{P_{inlet}} \cup \partial\Omega_{P_{outlet}} \cup \partial\Omega_{P_{fixWall}}.$$

Proudění na oblasti  $\Omega_P$  je modelováno v OpenFoam laminárním i turbulentním modelem s okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega_{P_{fixWall}}, \\ \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_{inlet} = (u_{inlet}, 0), \forall (x, y) \in \partial\Omega_{P_{inlet}}, \\ p(x, y) = p_{outlet} = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega_{P_{outlet}}, \end{cases} \quad (3.17)$$

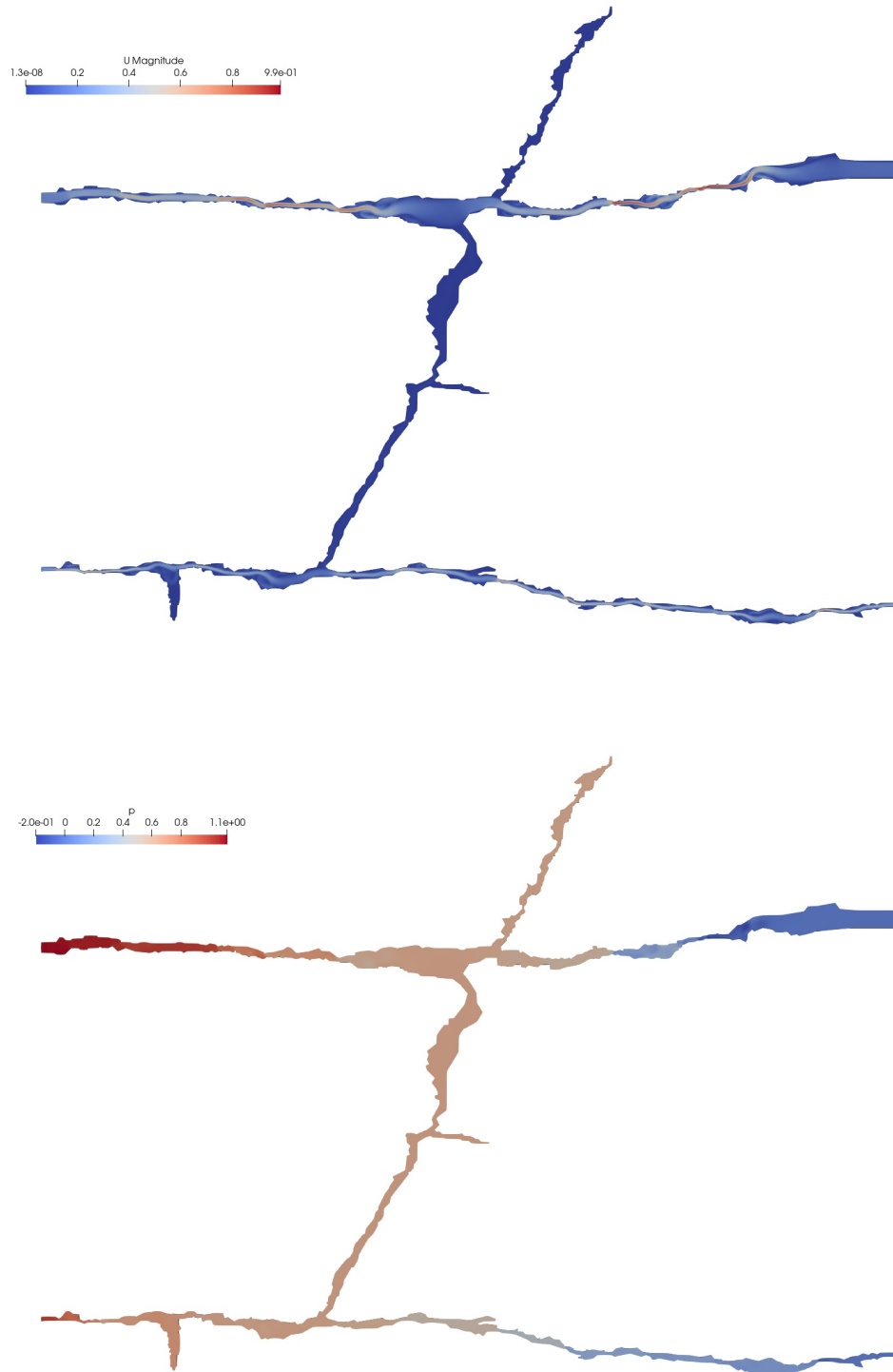
se škálou vstupních rychlostí  $S^2$ .

Na obrázku 3.20 je zobrazen stabilní stav laminárního modelu proudění v puklinovém systému pro vstupní rychlost  $\mathbf{u}_{inlet} = (0.2, 0)$ . V horní části obrázku se nachází rychlostní pole a v dolním pole tlakové (tlak kinetický).

U proudění v systému puklin už není jasné, pro jaké vstupní rychlosti laminární proudění přechází v turbulentní. Reynodsovo číslo je v každé části puklin jiné. V některých úsecích puklin může být proudění laminární a v jiných zase turbulentní. Budeme se snažit odhadnout, pro které modely (tj. pro jaké vstupní rychlosti  $\mathbf{u}_{inlet}$ ) je vhodné použít model laminární a pro které model turbulentní. Učiníme tak až na základě analýzy všech simulací. Proudění v puklinách testujeme pro celou škálu rychlostí  $S^2$ , tj.  $\forall \mathbf{u}_{inlet} \in S^2$  a to laminárním i turbulentním modelem. Pro každý model je v rámci post-processingu spočten v OpenFoam za použití funkce patchIntegrate výsledný průměrný totální tlakový gradient jako

$$\frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \left( \frac{1}{A_{P_{inlet}}} \sum_{\forall c_j \in \partial\Omega_{P_{inlet}}} \hat{p}_{t_{inlet},j} - \frac{1}{A_{P_{outlet}}} \sum_{\forall c_i \in \partial\Omega_{P_{outlet}}} \hat{p}_{t_{outlet},i} \right), \quad (3.18)$$

kde  $A_{P_{inlet}} \doteq 9.9987 \cdot 10^{-3}$  je velikost oblasti  $\partial\Omega_{P_{inlet}}$ ,  $c_j$  jsou buňky náležící oblasti  $\partial\Omega_{P_{inlet}}$ , kdy  $j = 1, 2, \dots, 31$ ,  $\hat{p}_{t_{inlet},j}$  jsou vypočtené hodnoty totálního tlaku v buňkách  $c_j$  a  $A_{P_{outlet}} \doteq 1.3646 \cdot 10^{-2}$  je velikost oblasti  $\partial\Omega_{P_{outlet}}$ ,  $c_i$  jsou buňky náležící oblasti  $\partial\Omega_{P_{outlet}}$ , kdy  $i = 1, 2, \dots, 40$ ,  $\hat{p}_{t_{outlet},j}$  jsou vypočtené hodnoty totálního tlaku v buňkách  $c_j$ . Výsledné hodnoty simulací jsou zobrazeny v tabulce 3.4.

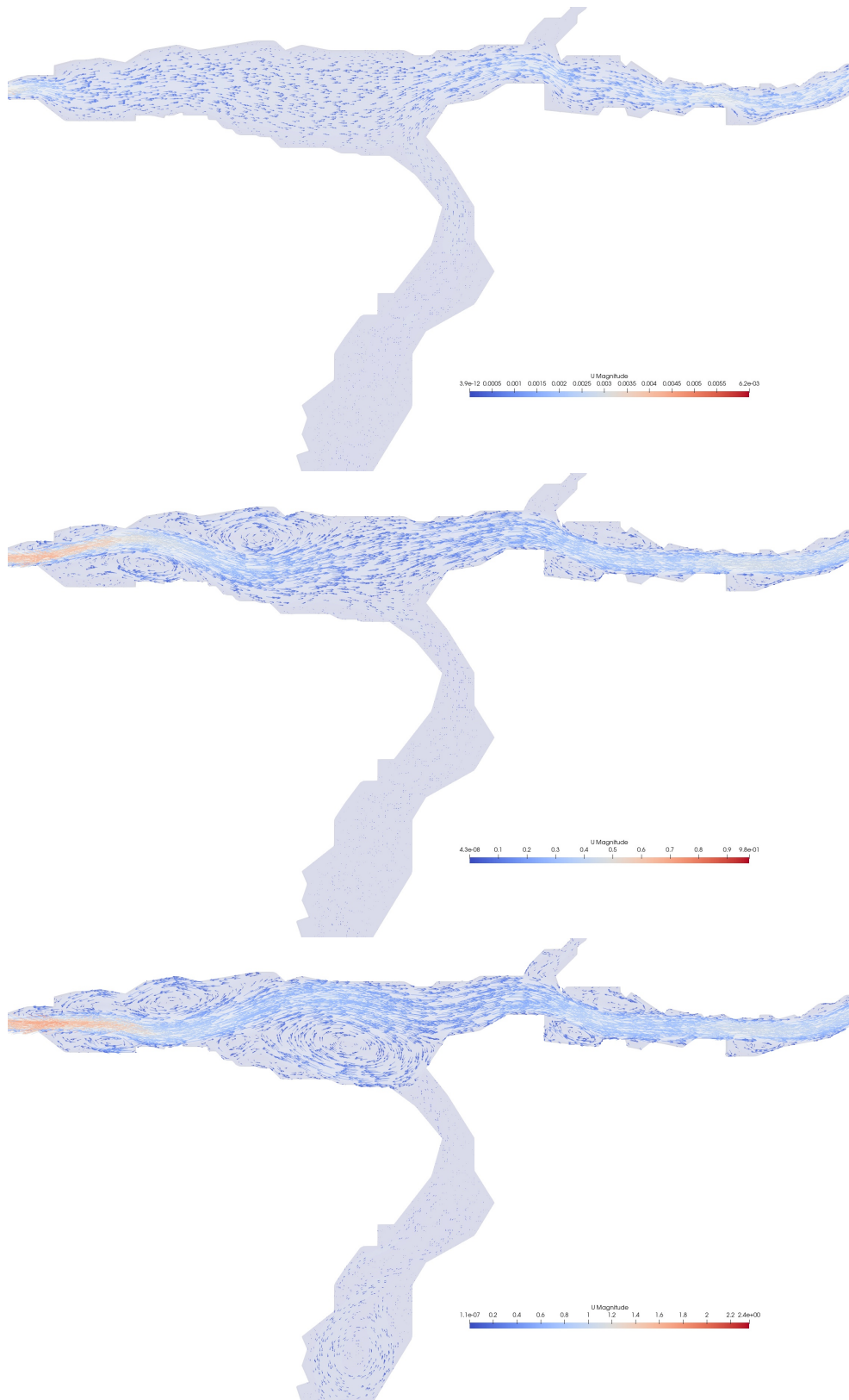


Obrázek 3.20: Rychlostní pole (nahore) a tlakové pole (dole) ustáleného stavu laminárního modelu ( $u_{inlet} = 0.2$ ) proudění v 2D puklinovém systému.

$u_{inlet}$	laminární model		turbulentní model		
	$u_{max}$	$\Delta\dot{P}_t/\Delta L$	$u_{max}$	$y^+$	$\Delta\dot{P}_t/\Delta L$
0.0001	0.00064	0.11832	0.00065	0.013	0.11903
0.0003	0.00193	0.35250	0.00197	0.022	0.35739
0.0005	0.00323	0.59079	0.00331	0.028	0.60467
0.0007	0.00450	0.83353	0.00466	0.033	0.86357
0.0009	0.00578	1.07690	0.00606	0.037	1.12391
0.001	0.00641	1.19945	0.00678	0.039	1.25691
0.003	0.01877	3.79922	0.01918	0.064	3.70050
0.005	0.03071	6.82157	0.03063	0.084	6.84627
0.007	0.04239	9.95944	0.04213	0.102	10.14051
0.009	0.05421	13.71417	0.05493	0.115	13.86938
0.01	0.05937	15.44159	0.05779	0.12	15.50408
0.03	0.16508	69.37591	0.1636	0.215	69.01833
0.05	0.26328	154.31617	0.26165	0.284	151.57954
0.07	0.36253	270.63357	0.36443	0.361	265.33442
0.09	0.45867	408.52049	0.44981	0.437	410.10226
0.1	0.50047	493.65869	0.49375	0.476	505.68309
0.2	1.01350	1971.17391	1.00125	0.776	1809.62693
0.3	1.49967	4057.61605	1.45802	1.087	3929.59836
0.4	1.98597	6960.98874	1.90634	1.407	7183.86765
0.5	2.50464	10507.2326	2.40300	1.663	11123.13827
0.6			2.89783	1.946	15919.21404
0.7			3.39273	2.250	22081.61373
0.8			3.84665	2.442	27562.80176
0.9			4.30624	2.637	34745.91060
1.0			4.69918	2.904	42899.43462

Tabulka 3.4: Laminární a turbulentní modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^2$ .

1. Laminární modely se vstupní rychlostí  $u_{inlet} \leq 0.001$  ve výsledném rychlostním vektorovém poli nevznikají viditelné vírové oblasti a konvergují v nízkém počtem iterací. Budeme tedy předpokládat, že proudění v těchto modelech je laminární viz obrázek 3.21.
2. Laminární modely se vstupní rychlostí  $u_{inlet} \leq 0.2$  začínají vykazovat problémy s konvergencí. Je potřeba upravovat parametry řešiče, aby modely konvergovaly v méně než 1000 iterací. S přibývajícím rychlostí se tyto potíže zvyšují a proto laminární modely se vstupní rychlostí  $u_{inlet} \leq 0.6$  nebereme v potaz a neuvádíme je v tabulce 3.4.
3. Turbulentní modely se vstupní rychlostí  $u_{inlet} \geq 0.2$  se již vyznačují velkými vírovými oblastmi viz obrázek 3.21. Z toho důvodu a důvodu č. 2 budeme předpokládat, že proudění v těchto modelech je převážně turbulentní.
4. Turbulentní modely se vstupní rychlostí  $u_{inlet} \geq 0.5$  se již vyznačují silnými vírovými oblastmi napříč puklinovým systémem viz obrázek 3.21. Budeme předpokládat, že proudění v těchto modelech je silně turbulentní.
5. U modelu proudění mezi rovnoběžnými deskami, jejichž vzdálenost byla stanovena jako průměrná šířka puklin viz kapitola 3.3 laminární proudění přechází v turbulentní pro vstupní rychlost  $u_{inlet} = 0.3$  na základě hodnoty Reynoldsova čísla. Lze tedy očekávat, že proudění bude přecházet v turbulentní i v systému puklin.



Obrázek 3.21: Details vektorového rychlostního pole: laminární model ( $u_{inlet} = 0.001$ ) nahoře, turbulentní model ( $u_{inlet} = 0.2$ ) uprostřed a turbulentní model ( $u_{inlet} = 0.5$ ) dole.

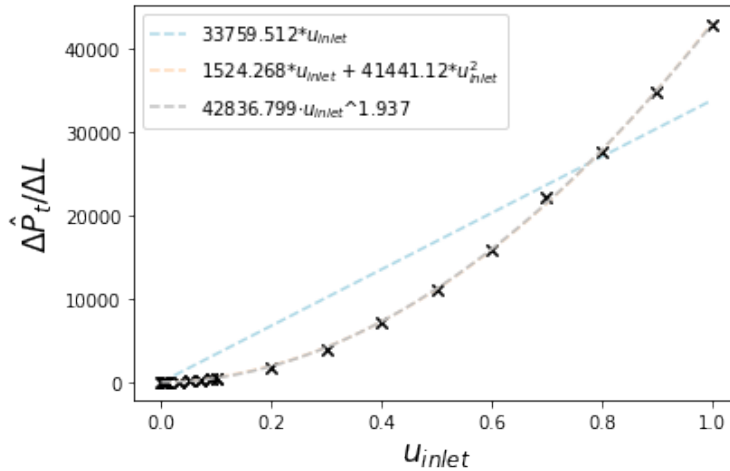
Testované modely na základě výše uvedeného (1.-5.) rozdělíme do tří skupin

- **laminární:**  $L = \{\mathbf{u}_{inlet} \in S^2 : 0.0001 \leq u_{inlet} \leq 0.001\}$ ,
- **přechodové:**  $P = \{\mathbf{u}_{inlet} \in S^2 : 0.003 \leq u_{inlet} \leq 0.1\}$ ,
- **turbulentní:**  $T = \{\mathbf{u}_{inlet} \in S^2 : 0.2 \leq u_{inlet} \leq 1\}$ .

Pro získání konstitutivních vztahů využijeme vypočtené průměrné totální gradienty následujícím způsobem. Pro škálu vstupních rychlostí  $L$  použijeme gradienty získané laminárním modelem. Pro škálu vstupních rychlostí  $P$  vypočteme aritmetický průměr gradientů získaných laminárním a turbulentním modelem

$$\frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} := \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} \right)_{lam} + \left( \frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} \right)_{tur} \right].$$

A pro škálu vstupních rychlostí  $T$  použijeme gradienty získané turbulentním modelem. Abychom dostali jednotné tvar yzákonů pro celou testovanou škálu  $S^2$ , aproximujeme funkcí  $f$  všechny takto získané průměrné tlakové gradienty. Získané aproximace jsou zobrazeny na obrázku 3.22



Obrázek 3.22: Laminární i turbulentní modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^2$ .

A  $f(u_{inlet})$  pro jednotlivé zákony nabývají tvaru:

- **lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 33759 u_{inlet}$ , s chybou<sup>8</sup>  $e \doteq 9140$
- **kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 1524 u_{inlet} + 41441 u_{inlet}^2$ , s chybou  $e \doteq 709$
- **mocninná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 42837 u_{inlet}^{\frac{1}{0.516}}$ , s chybou  $e \doteq 611$

Totální průměrné tlakové gradienty nejlépe aproximuje funkce  $f$  v mocninném tvaru. Využijeme ji proto k určení konstitutivního vztahu ve vektorové podobě, který následně dosadíme do bilanční rovnice viz kapitola 2.3.1. Nejprve funkci  $f$  invertujeme a získáme funkci  $\Phi(s)$  jako

$$f^{-1}(u_{inlet}) = 42837 u_{inlet}^{0.516}$$

$$\Phi(s) = A_{P_{inlet}} 42837 (\rho g s)^{0.516},$$

<sup>8</sup>Chyba  $e$  je stanovena stejně jako v kapitole 3.3

kde  $A_{P_{inlet}} = 9.9987 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varrho = 1000$ ,  $g = 9.81$ . Odtud pro mocninou aproximaci má konstitutivní vztah vektorový tvar:

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pro } \nabla H = \mathbf{0}, \\ -49143.2(|\nabla H|)^{0.516} \frac{\nabla H}{|\nabla H|} & \text{pro } \nabla H \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Efektivní pórovitost 2D pukliného prostředí prostředí:

$$n_e \doteq \frac{0.009543}{0.55 \cdot 0.5} = 0.0347$$

Rovnici popisující výšku hladiny podzemní vody ve zvodni tvořené puklinovým prostředím s puklinami typově jako ve studovaném výřezu lze pak zapsat ve tvaru:

$$0.0347 \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) - 49143.2 \operatorname{div} (H(x, z, t) |\nabla H|^{-0.484} \nabla H) = r(x, z, t), \quad (3.19)$$

kde výraz  $|\nabla H|^{-0.484} \nabla H$  chápeme jako spojitě dodefinovaný nulovým vektorem  $\mathbf{0}$  pro  $\nabla H = \mathbf{0}$ .

### 3.5 Proudění v 3D puklinovém systému

Puklinový systém je reprezentován oblastí  $\Omega_F$ , která je definována výpočetní sítí, která je zobrazena na obrázku 3.8, soubory k jejímu vygenerování viz Přílohy. Oblast  $\Omega_F$  dělíme na

$\partial\Omega_{F_{inlet}}$  reprezentující vstupy do puklinového systému,

$\partial\Omega_{F_{outlet}}$  reprezentující výstupy puklinového systému,

$\partial\Omega_{F_{fixWall}}$  reprezentující pevné stěny puklinového systému,

$$\partial\Omega_F = \partial\Omega_{F_{inlet}} \cup \partial\Omega_{F_{outlet}} \cup \partial\Omega_{F_{fixWall}}.$$

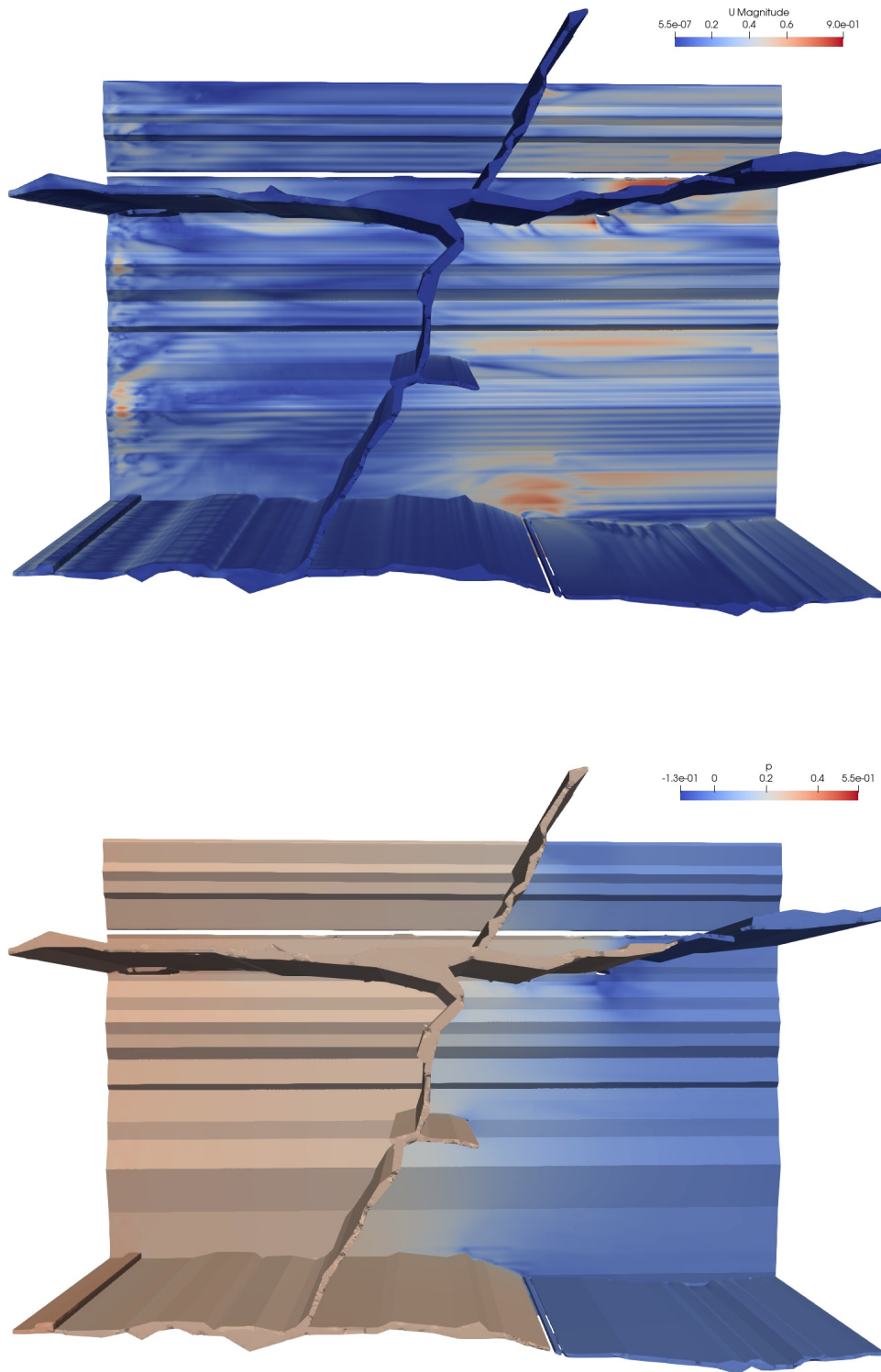
Proudění na oblasti  $\Omega_F$  je modelováno v OpenFoam laminárním modelem s okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z) = 0, \forall (x, y, z) \in \partial\Omega_{F_{fixWall}}, \\ \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_{inlet} = (u_{inlet}, 0, 0), \forall (x, y, z) \in \partial\Omega_{P_{inlet}}, \\ p(x, y, z) = p_{outlet} = 0, \forall (x, y, z) \in \partial\Omega_{P_{outlet}}, \end{cases} \quad (3.20)$$

se škálou vstupních rychlostí  $S^3$ .

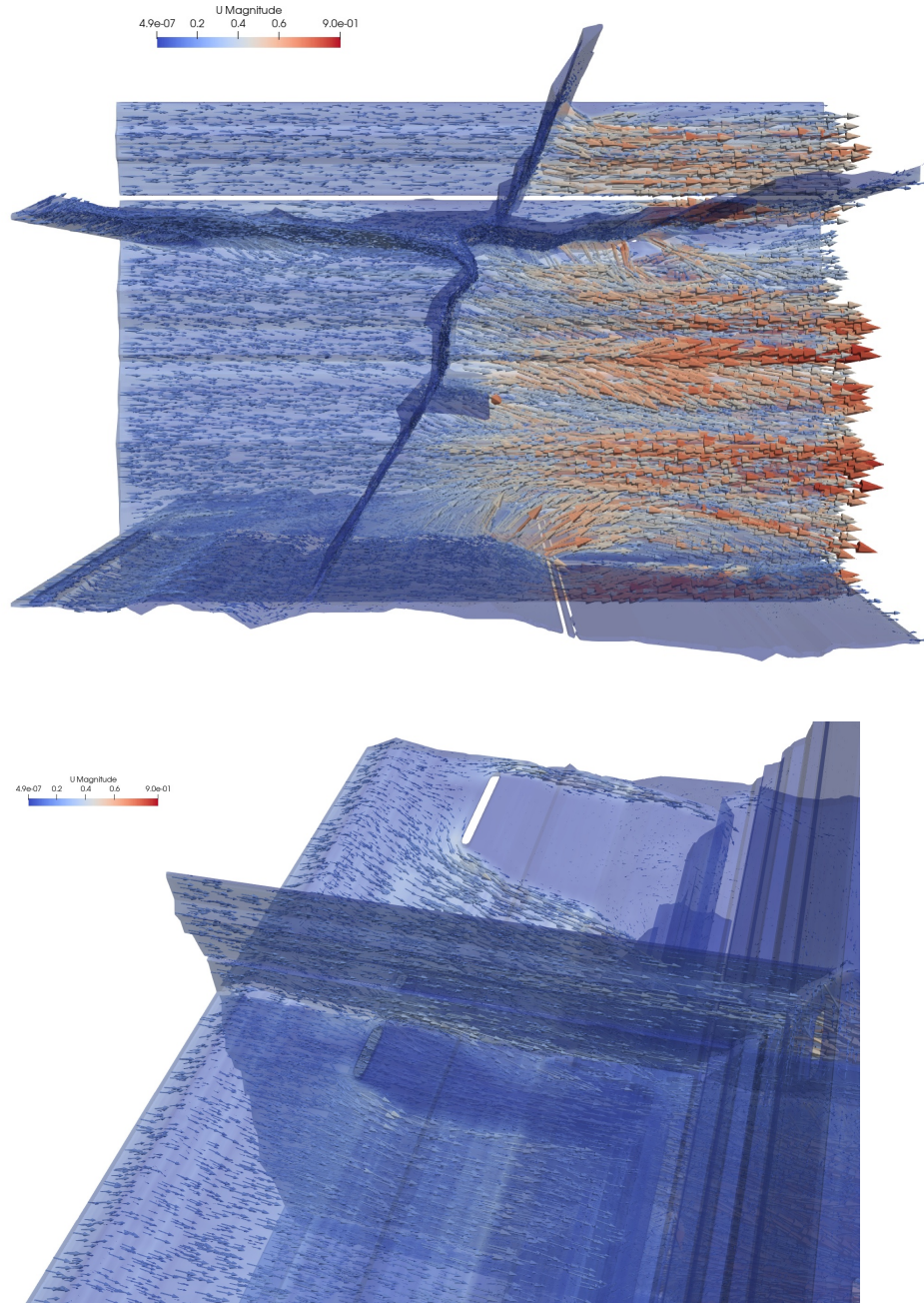
Na obrázku 3.23 je zobrazen stabilní stav laminárního modelu proudění v puklinovém systému pro vstupní rychlost  $\mathbf{u}_{inlet} = (0.2, 0, 0)$ . V horní části obrázku se nechází rychlostní vektorové pole a v dolním pole tlakové (tlak kinetický).





Obrázek 3.23: Rychlostního pole (nahore) a tlakové pole (dole) ustáleného stavu laminárního modelu ( $u_{inlet} = 0.2$ ) proudění v 3D puklinovém systému.

Na obrázku 3.24 můžeme pozorovat zobrazené rychlostní vektorové pole. V horní částku je zobrazeno jak proudění ve směru osy  $x$  prochází puklinovým systémem a soustředí se do středové svislé pukliny. V dolní části obrázku je zobrazena část, kde proudění probíhá přes pomyslné kameny, které podkládají pukliny.



Obrázek 3.24: Rychlostní vektorové pole (nahore) a ustáleného stavu laminárního modelu ( $u_{inlet} = 0.2$ ) proudění v 3D puklinovém systému s detailem na proudění v horní vstupní oblasti systému (dole).

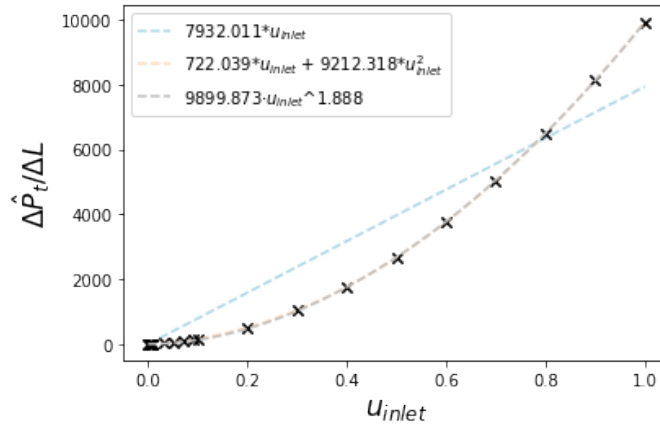
Simulace laminárního modelu byly prováděny pro celou škálu vstupních rychlostí  $S^3$ . Pro každý model je v rámci post-processingu spočten v OpenFoam za použití funkce patchIntegrate výsledný průměrný totální tlakový gradient jako

$$\frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \left( \frac{1}{A_{F_{inlet}}} \sum_{\forall c_j \in \partial \Omega_{F_{inlet}}} \hat{p}_{t_{inlet},j} - \frac{1}{A_{F_{outlet}}} \sum_{\forall c_i \in \partial \Omega_{F_{outlet}}} \hat{p}_{t_{outlet},i} \right), \quad (3.21)$$

kde  $A_{F_{inlet}} \doteq 0.006 \text{ m}^2$  je velikost oblasti  $\partial \Omega_{F_{inlet}}$ ,  $c_j$  jsou buňky náležící oblasti  $\partial \Omega_{F_{inlet}}$ , kdy  $j = 1, 2, \dots, 3202$ ,  $\hat{p}_{t_{inlet},j}$  jsou vypočtené hodnoty totálního tlaku v buňkách  $c_j$  a  $A_{F_{outlet}} \doteq 0.009 \text{ m}^2$  je velikost oblasti  $\partial \Omega_{F_{outlet}}$ ,  $c_i$  jsou buňky náležící oblasti  $\partial \Omega_{F_{outlet}}$ , kdy  $i = 1, 2, \dots, 3760$ ,  $\hat{p}_{t_{outlet},i}$  jsou vypočtené hodnoty totálního tlaku v buňkách  $c_i$ .

Všechny modely se vstupní rychlostí  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^3$  konvergují bez obtíží. Neboť jsme simulace prováděli jen pro laminární modely stanovíme konstitutivní vztah pro všechny simulované modely. Zároveň v žádném z modelů nevznikají výrazné turbulentní oblasti. Předpokládáme, že kdyby proudění bylo turbulentní, turbulence by probíhala na úrovni mikroskopické. Předpokládáme ale, že výrazné mikroskopické turbulence jsou v rozporu s bezproblémovou konvergencí laminárních modelů.

Výsledné hodnoty vypočtených průměrných tlakových gradientů simulací jsou zobrazeny a aproximovány funkcí  $f$  na obrázku 3.25 hodnoty jsou zaznamenány v tabulce 3.5.



Obrázek 3.25: Laminární modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^3$ .

Funkce  $f(u_{inlet})$  pro jednotlivé zákony nabývají tvaru:

- **lineární aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 7932 u_{inlet}$ , s chybou<sup>9</sup>  $e \doteq 1963$
- **kvadratická aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 722 u_{inlet} + 9212 u_{inlet}^2$ , s chybou  $e \doteq 39$
- **mocnná aproximace:**  $f(u_{inlet}) = 9900 u_{inlet}^{\frac{1}{0.530}}$ , s chybou  $e \doteq 26$ .

Totální průměrné tlakové gradienty nejlépe aproximuje funkce  $f$  v mocnném tvaru. Využijeme ji proto k určení konstitutivního vztahu ve vektorové podobě, který následně dosadíme do bilanční rovnice viz kapitola 2.3.1. Nejprve funkci  $f$  invertujeme a získáme funkci  $\Phi(s)$  jako

$$f^{-1}(u_{inlet}) = 9900 u_{inlet}^{0.530}$$

$$\Phi(s) = A_{F_{inlet}} 9900 (\rho g s)^{0.530},$$

<sup>9</sup>Chyba  $e$  je stanovena stejně jako v kapitole 3.3

kde  $A_{Finlet} \doteq 0.006$ ,  $\rho = 1000$ ,  $g = 9.81$ . Pro mocninnou aproximaci má konstitutivní vztahy vektorový tvar:

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pro } \nabla H = \mathbf{0}, \\ -39069.4(|\nabla H|)^{0.530} \frac{\nabla H}{|\nabla H|} & \text{pro } \nabla H \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Efektivní pórovitost prostředí:

$$n_e \doteq \frac{0.006501}{0.55 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \doteq 0.04728$$

Rovnici popisující výšku hladiny podzemní vody ve zvodni tvořené puklinovým prostředím s puklinami typově jako ve studovaném 3D výřezu lze pak zapsat ve tvaru:

$$0.04728 \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) - 39069.4 \operatorname{div} (H(x, z, t) |\nabla H|^{-0.47} \nabla H) = r(x, z, t), \quad (3.22)$$

kde výraz  $|\nabla H|^{-0.47} \nabla H$  chápeme jako spojitě dodefinovaný nulovým vektorem  $\mathbf{0}$  pro  $\nabla H = \mathbf{0}$ .

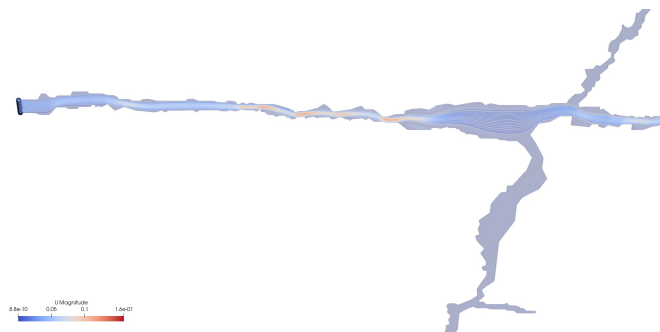
$u_{inlet}$	$u_{max}$	$\frac{\Delta \hat{P}_t}{\Delta L}$
0.0001	0.00075	0.03358
0.0003	0.00223	0.10272
0.0005	0.00369	0.17364
0.0007	0.00512	0.2462
0.0009	0.00652	0.3228
0.001	0.00724	0.36216
0.003	0.02088	1.20726
0.005	0.03384	2.21733
0.007	0.04607	3.3564
0.009	0.05703	4.60464
0.01	0.06242	5.26071
0.03	0.16546	23.40721
0.05	0.2483	50.52472
0.07	0.32515	85.79307
0.09	0.41337	129.60561
0.1	0.45802	154.31271
0.2	0.90684	496.05733
0.3	1.36415	1028.10647
0.4	1.79641	1742.67221
0.5	2.2365	2676.70004
0.6	2.72326	3761.46226
0.7	3.20137	5041.91289
0.8	4.2385	6480.71039
0.9	4.14265	8138.64571
1.0	6.7817	9895.35284

Tabulka 3.5: Laminární modely  $\mathbf{u}_{inlet} \in S^3$ .

### 3.6 Disperze

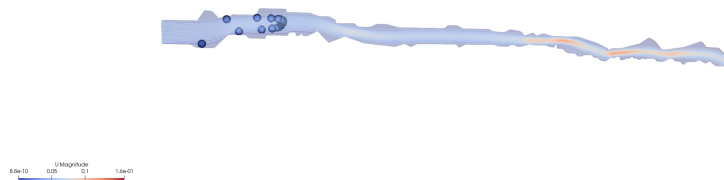
V ParaView pomocí filtrů Stream Tracker a Contour můžeme sledovat pohyb nehmotných částic rozpuštěné látky v puklinovém systému. Zvolíme 2D model proudění v puklinovém systému se vstupní rychlostí  $\mathbf{u}_{inlet} = (0.2, 0)$  řešený laminárním modelem. Ve výsledném rychlostním poli zvolíme nehmotné částice na horním vstupu do puklinového systému a pomocí filtru Stream Tracker

získáme proudnice těchto částic. Následně pomocí filtru Contour, kterým přidáváme vektorovému poli čas  $t$  a Animation View můžeme pozorovat pohyb nehmotných částic vektorovým polem v reálném čase  $t$ . Částic je vybráno 26 (na obrázcích zobrazováno pouze 7) a můžeme je vidět na obrázku 3.26, kde jsou částice seřazeny na vstupu do puklin v čase  $t = 0.009$  s.

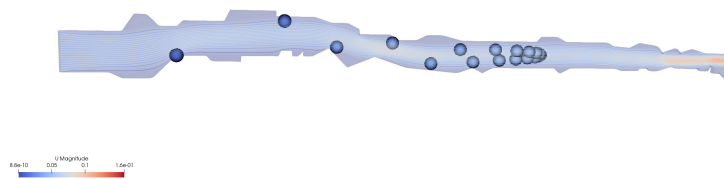


Obrázek 3.26: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 0.009$  s.

Na dalších obrázcích 3.27 a 3.28 už můžeme pozorovat pohyb částic systémem. Je vidět, že částice u stěn pukliny se vlivem nerovných stěn opožďují za ostatními, jejichž proudnice procházejí středem pukliny. Při proudění mezi hladkými deskami by se částice pohybovaly spolu s parabolickým rychlostním profilem.

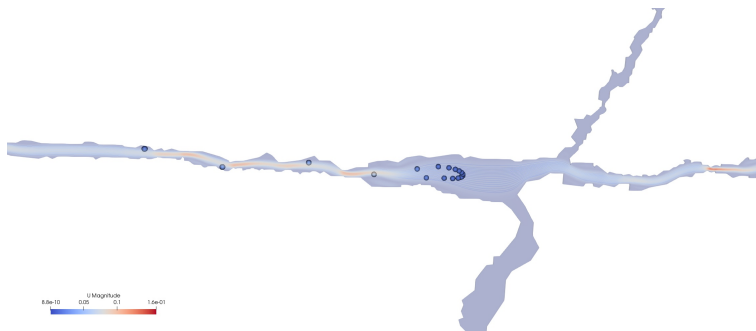
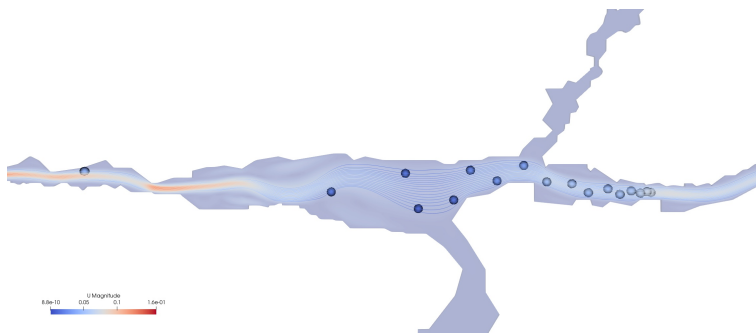
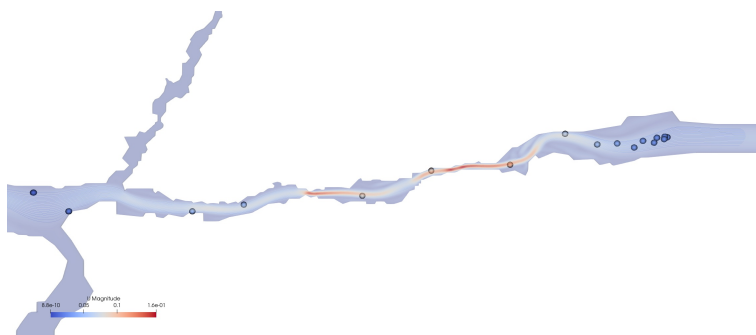


Obrázek 3.27: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 0.865$  s.



Obrázek 3.28: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 1.731$  s.

Na obrázcích 3.29, 3.30 a 3.31 můžeme pozorovat další jev. V zúžených místech pukliny, kde má proudění vyšší rychlost se proudnice částic shlukují, přičemž dochází k dalšímu rozptylu částic podél pukliny.

Obrázek 3.29: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 4.327$  s.Obrázek 3.30: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 6.057$  s.Obrázek 3.31: Poloha nehmotných částic v puklinovém systému v čase  $t = 8.653$  s.

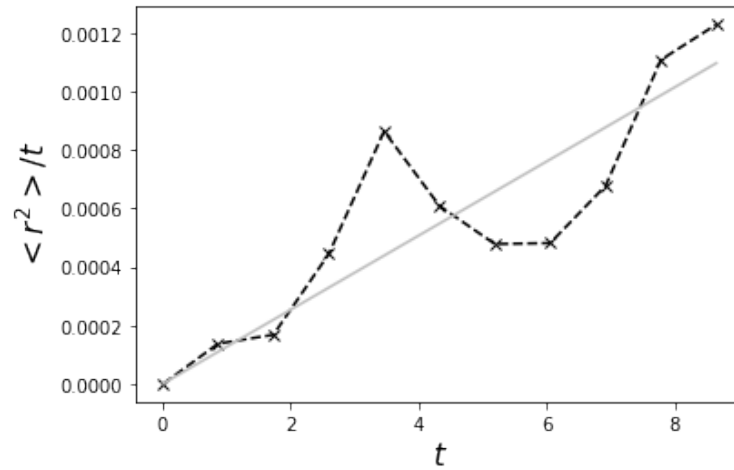
Podobně jako v článku [10] pozorujeme v naší simulaci výrazné opožďování částic nacházejících se v proudnicích u stěn oproti těm, které se nacházejí v proudnicích u středu.

Z dat získaných filtrem Contoure, která zaznamenávají polohu částic v souřadnicích  $x$  a v čase  $t$ , jsme vypočetli časovou závislost variance poloh nehmotných částic pozorovaných v puklině a získali časově závislý disperzní koeficient

$$D(t) = \frac{\langle r^2 \rangle}{t} \approx 0.00012675 t.$$

Pokud bychom očekávali  $D(t)$  ve tvaru  $D(t) = \text{konst.} \cdot t^{\phi-1}$ , pak by  $\phi \approx 2$ . Tato závislost je zobrazena na obrázku 3.32, kde je vidět, že tato závislost není konstantní a má výrazný rostoucí trend. Nejspíše tedy dochází k anomální disperzi viz kapitola 2.5. Abychom tento závěr mohli s

jistotou potvrdit bylo by nutné simulaci opakovat s větším počtem částic a provádět ji i pro další pukliny. Preferovaně pro větší puklinové systémy, abychom mohli sledovat vývoj v delším čase.



Obrázek 3.32: Časově závislý disperzní koeficient  $D(t)$  nehmotných částic pozorovaných v puklině (černě) a aproximace dat lineární funkcí (šedě).





# Kapitola 4

## Závěr

Podarilo se nám simulovat proudění vody ve 2D i 3D puklinovém systému vytvořeného podle předlohy puklin v žulovém polozatopeném lomu Špic u Něžína. Ze simulací byla získána potřebná data ke stanovení konstitutivních zákonů proudění vody v puklinových systémech. Pro oba systémy byly stanoveny konstitutivní vztahy pomocí lineární, kvadratické a mocninné aproximace, kdy mocninná aproximace v obou případech vykazovala nejmenší chybu od naměřených dat. Z toho důvodu byla mocninná aproximace vybrána v obou případech pro dosažení do bilanční rovnice popisující proudění podzemní vody s volnou hladinou.

Rovnice popisující výšku hladiny podzemní vody ve zvodni tvořené puklinovým prostředím s puklinami typově jako ve studovaném výřezu má po dosazení konstitutivního vztahu vytvořeného z 2D simulací puklinového systému tvar:

$$0.0347 \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) - 49143.2 \operatorname{div} (H(x, z, t) |\nabla H|^{-0.484} \nabla H) = r(x, z, t). \quad (4.1)$$

Po dosazení konstitutivního vztahu vytvořeného z 3D simulací puklinového systému dostaneme tvar:

$$0.04728 \frac{\partial H}{\partial t}(x, z, t) - 39069.4 \operatorname{div} (H(x, z, t) |\nabla H|^{-0.47} \nabla H) = r(x, z, t). \quad (4.2)$$

Hodnoty parametrů ve výše uvedených rovnicích se od sebe příliš neliší. Což by mohlo naznačovat správné určení konstitutivního vztahu pro proudění podzemní vody v puklinovém prostředí tohoto typu.

Dle článku [5] je mocninný tvar zákona pro rovnici popisující výšku hladiny podzemní vody výhodnější oproti kvadratickému zákonu a to jak z hlediska teoretického studia tak také výpočetní náročnosti v aplikacích. Proto je tento model obecně preferovaný v literatuře. Kvadratická aproximace nevykazovala chybu od získaných dat o mnoho větší, naopak chyba lineární aproximace byla řádově vyšší. Z toho můžeme vyvodit, že lineární aproximace pro popis proudění v puklinovém systému testovaného typu není vhodná.

Simulace byly prováděny pro jeden konkrétní puklinový systém (ve 2D i 3D provedení). K průkaznosti stanovených konstitutivních vztahů by mohlo být užitečné provádět stejné simulace na vícero puklinových systémech, které se nacházejí ve stejném žulovém masivu, nebo naopak i pro puklinové systémy v žulových masivech na jiných lokacích. Pokud by se podařilo získat konstitutivní vztahy pro vícero puklinových systémů z lomu Špic, dala by se odvodit rovnice popisující výšku hladiny podzemní vody, která by lépe popisovala chování podzemní vody s volnou hladinou v dané lokalitě.

Nakonec byla provedena simulace disperze shluku nehmotných částic s využitím rychlostního pole jednoho z napočtených modelů laminárního proudění v 2D puklinovém systému. Zaměřili jsme se na disperzní jev bez vlivu difúze ve směru proudění v puklinovém systému. Ze získaných dat se potvrdilo, že disperze v testovaném puklinovém systému se nechová podle Fickova zákona. Byly pozorovány podobné efekty opoždění nehmotných částic jako v článku [10]. Lze předpokládat, že se jedná o anomální disperzi, pro kterou není možné použít transportně disperzní rovnici typu (2.28).

Dalším případným budoucím předmětem studia disperze je potvrzení této teze. K získání lepší závislosti na čase bude nutné využít delšího puklinového systému a simulovat disperzi s větším shlukem částic. Dále bychom mohli simulovat disperzi s větším shlukem částic v rozlehlejších puklinovém systému s více puklinami a pro různé rychlostní režimy. Případně toto vše simulovat pro 3D modely.

# Literatura

- [1] AL-NASSRI, S. A., AND UNNY, T. Developing laminar flow in the inlet length of a smooth pipe. Applied Scientific Research 36, 5 (1981), 313–332.
- [2] ALIYU, M. D., AND ARCHER, R. A. Numerical simulation of multifracture hydrate geothermal reservoirs. Renewable Energy 164 (2021), 541–555.
- [3] BATCHELOR, G. K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge: At the University Press 1967. XVIII, 615 p. (1967)., 1967.
- [4] BEAR, J. Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, Inc., New York, 2014.
- [5] BENEDIKT, J., GIRG, P., AND KOTRLA, L. Nonlinear models of the fluid flow in porous media and their methods of study. In Functional differential equations and applications, vol. 379 of Springer Proc. Math. Stat. Springer, Singapore, 2021, pp. 15–42.
- [6] BENEDIKT, J., GIRG, P., KOTRLA, L., AND TAKÁČ, P. Origin of the  $p$ -Laplacian and A. Missbach. Electron. J. Differential Equations (2018), Paper No. 16, 17 pp.
- [7] BERKOWITZ, B. Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review. Advances in water resources 25, 8-12 (2002), 861–884.
- [8] BERKOWITZ, B., AND SCHER, H. On characterization of anomalous dispersion in porous and fractured media. Water Resources Research 31, 6 (1995), 1461–1466.
- [9] BODIN, J., DELAY, F., AND DE MARSILY, G. Solute transport in a single fracture with negligible matrix permeability: 2. mathematical formalism. Hydrogeology Journal 11, 4 (Aug 2003), 434–454.
- [10] BOUTT, D. F., GRASSELLI, G., FREDRICH, J. T., COOK, B. K., AND WILLIAMS, J. R. Trapping zones: The effect of fracture roughness on the directional anisotropy of fluid flow and colloid transport in a single fracture. Geophysical Research Letters 33, 21 (2006).
- [11] CHEN, Z., ZHONG QIAN, J., AND QIN, H. Experimental study of the non-darcy flow and solute transport in a channeled single fracture. Journal of Hydrodynamics, Ser. B 23, 6 (2011), 745–751.
- [12] CHERUBINI, C., GIASI, C., AND PASTORE, N. Evidence of non-darcy flow and non-fickian transport in fractured media at laboratory scale. Hydrology and Earth System Sciences 17, 7 (2013), 2599–2611.
- [13] DAVIDSON, P. Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford University Press, 2015.
- [14] DUPUIT, J. “Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables”. Dunod, Paris, 1863.

- [15] FAO[2018] AQUASTAT DATABASE. <https://www.fao.org/aquastat/en/databases/>, 2018. [Online; poslední přístup 16/07/2022 18:21].
- [16] FEYNMAN, R., LEIGHTON, R., AND SANDS, M. The Feynman Lectures on Physics, Vol. I: The New Millennium Edition: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat. No. sv. 1. Basic Books, 2015.
- [17] FOIAS, C., ROSA, R., MANLEY, O., AND TEMAM, R. Navier-Stokes equations and turbulence, vol. 83 of Encycl. Math. Appl. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [18] FORCHHEIMER, P. Wasserbewegung durch Boden. Zeit. Ver. Deutsch. Ing. 45 (1901), 1736–1741 and 1781–1788.
- [19] GEOSCIENCE AUSTRALIA. <http://www.ga.gov.au/scientific-topics/water/groundwater/groundwater-in-australia/fractured-rocks>, 2014. [Online; poslední přístup 22-07-2022].
- [20] GREENSHIELDS, C. OpenFOAM v10 User Guide. The OpenFOAM Foundation, London, UK, 2022.
- [21] GUSTAFSON, G., AND KRÁSNÝ, J. Crystalline rock aquifers: Their occurrence, use and importance. Applied Hydrogeology 2, 2 (1994), 64–75.
- [22] IZBASH, S. V. O fil'tracii v krupnozernistom materiale. Izvestiya Nauchnoissled. Inst. Gidrotechniki (NIIG). No. 1, Leningrad, USSR, (1931), Rusky.
- [23] JONES, D. A., CHAPUIS, M., LIEFVENDAHL, M., NORRISON, D., AND WIDJAJA, R. Rans simulations using openfoam software.
- [24] LAPCEVIC, P. A., NOVAKOWSKI, K. S., AND SUDICKY, E. A. The interpretation of a tracer experiment conducted in a single fracture under conditions of natural groundwater flow. Water Resources Research 35, 8 (1999), 2301–2312.
- [25] LLOYD, J. W. Water resources of hard rock aquifers in arid and semi-arid zones. UNESCO, 1999. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000115939?posInSet=1queryId=d95fb13c-6cb8-4e65-84c1-5bb18ea4effb> [Online archiv].
- [26] MACDONALD, A., DAVIES, J., AND CALOW, R. African hydrogeology and rural water supply. Applied Groundwater Studies in Africa (2008), 127–148.
- [27] MISSBACH, A. A. Filtrovatelnost čerěných a saturovaných št'áv. IV. Přezkoušení vzorce van Gilse, ... Listy cukrov. 54, 39 (1936), 361 – 368.
- [28] MISSBACH, A. A. Filtrovatelnost čerěných a saturovaných št'áv. V. Vliv tlaku. Listy cukrov. 55, 18 (1937), 169 – 172.
- [29] MISSBACH, A. A. Filtrovatelnost čerěných a saturovaných št'áv. VI. Určování propustnosti hotového koláče kalového. Listy cukrov. 55, 33 (1937), 176 – 180.
- [30] MISSBACH, A. A. Filtrovatelnost čerěných a saturovaných št'áv. VII. Průtok vrstvou kuliček. Listy cukrov. 55, 33 (1937), 293 – 299.
- [31] MOUKALLED, F., MANGANI, L., AND DARWISH, M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics : An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab, vol. 113 of Fluid Mechanics and its Applications. Springer, Cham, 2016.
- [32] OPENFOAM . <https://www.openfoam.com>. [Online; poslední přístup 25/07/2022 19:04].
- [33] PATANKAR, S. V. Numerical heat transfer and fluid flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Washington - New York - London: Hemisphere Publishing Corporation; New York etc.: McGraw-Hill Book Company. XIII, 197 p., 1980.

- [34] PERRIN, J., AHMED, S., AND HUNKELER, D. The effects of geological heterogeneities and piezometric fluctuations on groundwater flow and chemistry in a hard-rock aquifer, southern india. Hydrogeology Journal 19, 6 (2011), 1189–1201.
- [35] REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. Royal Soc. London 174 (1883), 935–982.
- [36] SARKAR, S., TOKSOZ, M. N., AND BURNS, D. R. Fluid flow modeling in fractures. Tech. rep., Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 2004.
- [37] SEN, Z. Applied Hydrogeology for Scientists and Engineers. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [38] SHAPIRO, A. M. Fractured-rock aquifers understanding an increasingly important source of water. <https://toxics.usgs.gov/pubs/FS-112-02/fs-112-02.pdf>, 2002. [Online; naposledy navštíveno 15.07. 2022].
- [39] SMREKER, O. Entwicklung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers. Zeitschr. des Vereines deutscher Ing. 22, 4 and 5 (1878), 117–128 and 193–204.
- [40] TAYLOR, G. I. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 219, 1137 (1953), 186–203.
- [41] VALENTOVÁ, J., AND VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE. STAVEBNÍ FAKULTA, Č. Hydraulika podzemní vody. České vysoké učení technické, 2001.
- [42] WRIGHT, E. The hydrogeology of crystalline basement aquifers in africa. Geological Society Special Publication 66 (1992), 1–27.
- [43] YAN, X., QIAN, J., MA, L., WANG, M., AND HU, A. Non-fickian solute transport in a single fracture of marble parallel plate. Geofluids 2018 (2018).





```

boundaryField
{
    inlet
    {
        type            fixedFluxExtrapolatedPressure;
    }
    outlet
    {
        type            fixedValue;
        value            uniform 0;
    }
    fixedWalls
    {
        type            zeroGradient;
    }
    frontAndBack
    {
        type            empty;
    }
    FC1 //geometrie puklinoveho systemu
    {
        type            zeroGradient;
    }
}
// ***** //

```

### 0/U (rozvinuté proudění)

```

/*-----* C++ *-----*\
=====
\\      /  F ield      |  OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\      /  O peration  |  Website:  https://openfoam.org
\\      /  A nd        |  Version:   dev
\\      /  M anipulation|
=====
/*-----*-----*/
FoamFile
{
    version    2.0;
    format     ascii;
    class      volVectorField;
    object     U;
}
// * * * * * //

dimensions    [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField uniform (<sem_vlozit_U> 0 0);

boundaryField
{
    inlet
    {
        type            zeroGradient;
    }
}

```









```

}
// *****

0/nut

/*-----* C++ *-----*\
=====
\\      /  F i e l d      |  OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\      /  O p e r a t i o n  |  Website:  https://openfoam.org
\\      /  A n d              |  Version:   dev
\\      /  M a n i p u l a t i o n  |
=====
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        volScalarField;
    location     "0";
    object       nut;
}
// ***** //
dimensions      [0 2 -1 0 0 0 0];
internalField   uniform 0;
boundaryField
{
    inlet
    {
        type          calculated;
        value         $internalField;
    }
    outlet
    {
        type          calculated;
        value         $internalField;
    }
    fixedWalls
    {
        type          nutUSpaldingWallFunction;
        value         $internalField;
    }
    frontAndBack
    {
        type          empty;
    }
    FC1 //geometrie puklinoveho systemu
    {
        type          nutUSpaldingWallFunction;
        value         $internalField;
    }
}
// ***** //

```

**constant/transportProperties**

```

/*-----* C++ *-----*\
=====
\\      / F i e l d      |   OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\     / O p e r a t i o n |   Website:  https://openfoam.org
\\    /  A n d             |   Version:   dev
\\   /   M a n i p u l a t i o n |
\\  /
\\ /
=====
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       transportProperties;
}
// ***** //
transportModel  Newtonian;
nu              1e-06;
// ***** //

```

**constant/turbulenceProperties**

```

/*-----* C++ *-----*\
=====
\\      / F i e l d      |   OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\     / O p e r a t i o n |   Website:  https://openfoam.org
\\    /  A n d             |   Version:   dev
\\   /   M a n i p u l a t i o n |
\\  /
\\ /
=====
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       turbulenceProperties;
}
// ***** //
simulationType <sem_vlozit_model>; //laminar , nebo RAS
RAS
{
    RASModel     kOmegaSST;
    turbulence   on;
    printCoeffs  on;
}
// ***** //

```

**system/blockMeshDict (síť pro laminární modely)**

```

/*-----* C++ *-----*\

```

```

=====
\\      / F i e l d
\\     /  O p e r a t i o n
\\    /   A n d
\\   /    M a n i p u l a t i o n
\\  /
\\ /
|
| OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| Website:  https://openfoam.org
| Version:  dev
|
|-----|
/*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       blockMeshDict;
}
// ***** //
convertToMeters 1;
vertices
(
    (0.2 0 0)
    (0.75 0 0)
    (0.75 0.007 0)
    (0.2 0.007 0)
    (0.2 0 0.001)
    (0.75 0 0.001)
    (0.75 0.007 0.001)
    (0.2 0.007 0.001)
);
blocks
(
    hex (0 1 2 3 4 5 6 7) (225 14 1) simpleGrading (1 1 1)
);
edges
(
);
boundary
(
    inlet
    {
        type patch;
        faces
        (
            (0 4 7 3)
        );
    }
    outlet
    {
        type wall;
        faces
        (
            (1 5 6 2)
        );
    }
    fixedWalls
    {
        type wall;
    }
);

```



```

);
blocks
(
    hex (0 1 9 8 4 5 11 10) (225 14 1) simpleGrading (1 10 1)
    hex (8 9 2 3 10 11 6 7) (225 14 1) simpleGrading (1 .1 1)
);
edges
(
);
boundary
(
    inlet
    {
        type patch;
        faces
        (
            (0 4 10 8)
            (8 10 7 3)
        );
    }
    outlet
    {
        type wall;
        faces
        (
            (1 5 11 9)
            (9 11 6 2)
        );
    }
    fixedWalls
    {
        type wall;
        faces
        (
            (0 1 5 4)
            (3 2 6 7)
        );
    }
    frontAndBackU
    {
        type empty;
        faces
        (
            (0 1 9 8)
            (8 9 2 3)
            (4 5 11 10)
            (10 11 6 7)
        );
    }
);
mergePatchPairs
(
);
// ***** //

```











```

        (
            (2 8 9 3)
            (1 7 8 2)
        );
    }
    fixedWalls
    {
        type wall;
        faces
        (
            (0 1 7 6)
            (4 10 9 3)
        );
    }
    front
    {
        type empty;
        faces
        (
            (0 1 2 5)
            (5 2 3 4)
        );
    }
    back
    {
        type empty;
        faces
        (
            (6 7 8 11)
            (11 8 9 10)
        );
    }
);
mergePatchPairs
(
);
// ***** //

```

### system/surfaceFeaturesDict

```

/*-----* C++ *-----*\
=====
  \ \      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
  \ \    / O p e r a t i o n | Website: https://openfoam.org
  \ \  / A n d                | Version: dev
  \ \ / M a n i p u l a t i o n |
  \ \ /
=====
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       surfaceFeaturesDict;
}

```



```
(
  {
    file "FC1.eMesh";
    level 2;
  }
);
refinementSurfaces
{
  FC1
  {
    level (2 2);
    patchInfo
    {
      type wall;
    }
  }
}
resolveFeatureAngle 30;
refinementRegions
{
  refinementBox
  {
    mode inside;
    levels ((1E15 3));
  }
}
locationInMesh (0.695 0.325 0.003);
allowFreeStandingZoneFaces false;
}
snapControls
{
  nSmoothPatch 3;
  tolerance 2.0;
  nSolveIter 30;
  nRelaxIter 5;
  nFeatureSnapIter 10;
  implicitFeatureSnap false;
  explicitFeatureSnap true;
  multiRegionFeatureSnap false;
}
addLayersControls
{
  relativeSizes true;
  layers
  {
    FC1
    {
      nSurfaceLayers 2;
    }
  }
}
expansionRatio 2.5;
finalLayerThickness 0.7;
minThickness 0.1;
nGrow 0;
```

```

    featureAngle 60;
    slipFeatureAngle 30;
    nRelaxIter 20;
    nSmoothSurfaceNormals 5;
    nSmoothNormals 5;
    nSmoothThickness 5;
    maxFaceThicknessRatio 0.5;
    maxThicknessToMedialRatio 0.3;
    minMedianAxisAngle 90;
    nBufferCellsNoExtrude 0;
    nLayerIter 10;
}
meshQualityControls
{
    maxNonOrtho 75;
    maxBoundarySkewness 20;
    maxInternalSkewness 4;
    maxConcave 80;
    minVol 1.00E-33;
    minTetQuality 1e-33;
    minArea -1;
    minTwist 0.01;
    minDeterminant 0.001;
    minFaceWeight 0.05;
    minVolRatio 0.01;
    minTriangleTwist -1;
    minFlatness 0.5;
    nSmoothScale 4;
    errorReduction 0.75;
}
writeFlags
(
    scalarLevels
    layerSets
    layerFields
);
mergeTolerance 1e-6;
// ***** //

```

### system/extrudeMeshDict

```

/*-----* C++ *-----*\
|=====|
|  \\\  /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|  \\\  /  O peration  | Version: 2.2.2
|  \\\  /  A nd        | Web: www.OpenFOAM.org
|  \\\  /  M anipulation|
|=====|
/*-----*/

FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
}

```







```

    (0.75 0 0.56)
    (0.75 0.5 0.56)
    (0.2 0.5 0.56)
);
blocks
(
  hex (0 1 2 3 4 5 6 7) (6 6 6) simpleGrading (1 1 1)
);
edges
(
);
boundary
(
  inlet
  {
    type patch;
    faces
    (
      (0 4 7 3)
    );
  }
  outlet
  {
    type wall;
    faces
    (
      (1 5 6 2)
    );
  }
  fixedWalls
  {
    type wall;
    faces
    (
      (0 1 5 4)
      (3 2 6 7)
    );
  }
  frontAndBack
  {
    type wall;
    faces
    (
      (0 1 2 3)
      (4 5 6 7)
    );
  }
);
mergePatchPairs
(
);
// ***** //

```

**system/snappyHexMeshDict**

```

/*-----* C++ *-----*\
=====
\\      /  F i e l d      |   OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\      /  O p e r a t i o n  |   Website:  https://openfoam.org
\\      /  A n d              |   Version:   dev
\\      /  M a n i p u l a t i o n  |
\*-----*\
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       snappyHexMeshDict;
}
// * * * * * //
castellatedMesh true;
snap           true;
addLayers      false;
geometry
{
    FC1.stl
    {
        type triSurfaceMesh;
        distributedTriSurfaceMesh independent;
        name FC1;
    }
    refinementBox
    {
        type searchableBox;
        min (0.2 0 0);
        max (0.75 0.5 0.55);
    }
};
castellatedMeshControls
{
    maxLocalCells 100000;
    maxGlobalCells 2000000;
    minRefinementCells 10;
    maxLoadUnbalance 0.10;
    nCellsBetweenLevels 1;
    features
    (
        {
            file "FC1.eMesh";
            level 3;
        }
    );
    refinementSurfaces
    {
        FC1
        {
            level (10 10);
        }
    }
}

```

```

        patchInfo
        {
            type wall;
        }
    }
    resolveFeatureAngle 5;
    refinementRegions
    {
        refinementBox
        {
            mode inside;
            levels ((1E15 3)); //3
        }
    }
    locationInMesh (0.43 0.3 0.54);
    allowFreeStandingZoneFaces false;
}
snapControls
{
    nSmoothPatch 10;
    tolerance 1.0;
    nSolveIter 10;
    nRelaxIter 5;
    nFeatureSnapIter 5;
    implicitFeatureSnap false;
    explicitFeatureSnap true;
    multiRegionFeatureSnap false;
}
addLayersControls
{
    relativeSizes true;
    layers
    {
        FC1
        {
            nSurfaceLayers 2;
        }
    }
    expansionRatio 2.5;
    finalLayerThickness 0.7;
    minThickness 0.1;
    nGrow 0;
    featureAngle 60;
    slipFeatureAngle 30;
    nRelaxIter 20;
    nSmoothSurfaceNormals 5;
    nSmoothNormals 5;
    nSmoothThickness 5;
    maxFaceThicknessRatio 0.5;
    maxThicknessToMedialRatio 0.3;
    minMedianAxisAngle 90;
    nBufferCellsNoExtrude 0;
    nLayerIter 10;
}

```

```
}
meshQualityControls
{
    maxNonOrtho 75;
    maxBoundarySkewness 20;
    maxInternalSkewness 4;
    maxConcave 80;
    minVol 1.00E-33;
    minTetQuality 1e-33;
    minArea -1;
    minTwist 0.01;
    minDeterminant 0.001;
    minFaceWeight 0.05;
    minVolRatio 0.01;
    minTriangleTwist -1;
    minFlatness 0.5;
    nSmoothScale 4;
    errorReduction 0.75;
}
writeFlags
(
    scalarLevels
    layerSets
    layerFields
);
mergeTolerance 1e-6;
// ***** //
```