FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Cyklické vlastnosti cirkulačních grafů

Plzeň, 2022 Alena Rečková

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů a odborné literatury.

V Plzni dne ..... Podpis autora .....

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph. D. za vedení mé bakalářské práce. Jeho ochota, trpělivost a dobré rady mi byly velkými pomocníky při psaní tohoto textu. Velmi si cením jeho pomoci a času, který mi věnoval.

Abstrakt

Tato práce se věnuje cyklickým vlastnostem cirkulačních grafů. Především je zaměřena na pancyklicitu cirkulantů. Mějme dána kladná celá čísla $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq \frac{n}{2}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Cirkulantem $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf G s množinou vrcholů $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a s množinou hran $E_G = \{\{v_i, v_{(i+a_j) \pmod n}\} : 1 \leq i \leq n \ \wedge \ 1 \leq j \leq k\}$. Graf G řádu n je pancyklický, pokud obsahuje kružnice všech délek (3, 4, ... , n).
V první části jsou shrnuty dosud známé výsledky o hamiltonovských vlastnostech a pancyklicitě cirkulantů a toeplitzovských grafů, které jsou podobné cirkulantům. V šesté kapitole se vlastní výzkum zabývá pancyklicitou a existencí kružnic v cirkulantech se dvěma skoky a libovolným počtem vrcholů.

Abstract

This work deals with cyclic properties of circulant graphs. It is mainly focused on pancyclicity of circulant graphs. Let $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq \frac{n}{2}$ be positive integers and $n \in \mathbb{N}$. The circulant graph $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ is a graph G with the vertex set $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and the edge set $E_G = \{\{v_i, v_{(i+a_j) \pmod n}\} : 1 \leq i \leq n \ \wedge \ 1 \leq j \leq k\}$. A graph G with n vertices is pancyclic if it contains cycles of all lengths (3, 4, ... , n).
In the first part we summarize known results about hamiltonian properties and pancyclicity of circulants and toeplitz graph, that are similar to circulant graphs. In the sixth chapter we deal with the pancyclicity and the existence of cycles in circulant graphs with two jumps and arbitrary number of vertices.

Obsah

1 Úvod **5**

2 Definice pojmů **6**

3 Cirkulanty a základní vlastnosti **8**

4 Hamiltonovské vlastnosti v cirkulantech **13**

5 Pancyklické vlastnosti v cirkulantech **17**
5.1 Souvislé cirkulanty 17
5.2 Rekurzivní cirkulanty 18
5.3 Zobecněné rekurzivní cirkulanty 20

6 Vlastní výsledky **21**

7 Závěr **37**

1 Úvod

V této práci se budeme zabývat především cirkulanty a jejich hamiltonovskými a zobecněnými vlastnostmi, například pancyklicitou. Pojmem cirkulant budeme rozumět graf s předem danou množinou vrcholů a skoků, která nám definuje hrany tohoto grafu. Pancyklickým grafem nazveme graf obsahující kružnice všech délek 3 až n, kde n je řád grafu.

Ve druhé kapitole zavedeme všechny důležité pojmy, které budeme v průběhu této práce používat. Ve třetí kapitole se budeme věnovat základním vlastnostem cirkulantů jako je počet komponent, souvislost a vztah minimálního stupně grafu s vrcholovým stupněm souvislosti. Souvislost cirkulantů je poměrně jednoduchá, proto budeme zkoumat také toeplitzovské grafy. Ty jsou velmi podobné cirkulantům, jejich skoky ovšem nefungují přes první a poslední vrchol a jejich souvislost je tedy složitější. Také v této kapitole zavedeme speciální třídy cirkulantů (rekurzivní a zobecněné rekurzivní cirkulanty) a popíšeme jejich vlastnosti a vzájemné vztahy.

Ve čtvrté kapitole se zaměříme na hamiltonovské vlastnosti. Především budeme řešit hamiltonovskost toeplitzovských grafů. U cirkulantů je tato vlastnost, díky souvislosti jednoduchá. V další části této kapitoly probereme také hamiltonovské dekompozice cirkulantů. Vzhledem k jednoduché situaci s hamiltonovskostí cirkulantů se nabízí řešit zobecněné hamiltonovské vlastnosti jako je pancyklicita, hranová pancyklicita, bipancyklicita a hranová bipancyklicita. Těmto vlastnostem se budeme věnovat v páté kapitole a probereme dosud známé výsledky pro souvislé, rekurzivní a zobecněné rekurzivní cirkulanty. V poslední kapitole uvedeme vlastní tvrzení o cirkulantech se dvěma skoky a jejich pancyklicitě.

2 Definice pojmů

V této práci budeme používat následující pojmy a značení, které byly převzaty z [10]. Základní používanou strukturou v tomto textu je neorientovaný graf. **Neorientovaným grafem** rozumíme dvojici $G = (V_G, E_G)$, kde V_G je konečná množina a $E_G \subseteq \binom{V_G}{2}$. Symbolem $\binom{V_G}{2}$ přitom rozumíme množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V_G. Množinu V_G nazveme množinou vrcholů a její prvky vrcholy. Množinu E_G nazveme množinou hran a její prvky hranami.

Počet hran, se kterými je daný vrchol v incidentní, je označován $\deg(v)$ a nazývá se **stupněm vrcholu** v. **Minimálním stupněm** v grafu G rozumíme $\min\limits_{x \in V_G} \{\deg(x)\}$ a značí se $\delta(G)$. **Maximálním stupněm** v grafu G rozumíme $\max\limits_{x \in V_G} \{\deg(x)\}$ a značí se $\Delta(G)$. Graf, který má všechny vrcholy stejného stupně, nazveme **regulárním**. Pokud jsou všechny jeho vrcholy stupně k nazveme ho **k-regulárním**. Pro regulární graf G platí $\delta(G) = \Delta(G)$. Důležitým parametrem grafu je jeho **řád**, což je počet vrcholů v grafu, který obvykle značíme n.

Velmi často budeme v textu využívat pojmy cesta a kružnice v grafu. Nechť $G = (V_G, E_G)$ je graf. Posloupnost vrcholů $P_n = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ takovou, že $v_i \in V_G$ a $\{v_{i-1}, v_i\} \in E_G$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, nazveme **cestou** v grafu G, pokud jsou vrcholy $v_0, \ldots v_{n-1}$ navzájem různé. Graf G je **souvislý**, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň jedna cesta. **Vrcholovým stupněm souvislosti** grafu G pak rozumíme minimální počet vrcholů, jejichž odebráním z grafu vznikne z G nesouvislý graf nebo graf na jednom vrcholu. Budeme jej značit $\kappa(G)$. Obdobně jako cesta je definována kružnice v grafu G. Posloupnost vrcholů $C_n = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} = v_0)$, kde $v_i \in V_G$ a $\{v_{i-1}, v_i\} \in E_G$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, nazveme **kružnicí** v grafu G, pokud jsou vrcholy $v_0, \ldots v_{n-2}$ navzájem různé. Poznamenejme, že kružnici délky 3 nazveme **trojúhelníkem**.

Definujme vzdálenost dvou vrcholů v grafu. **Vzdálenost mezi vrcholy** u **a** v v grafu G označíme $\mathrm{dist_G(u, v)}$ a budeme jí rozumět délku nejkratší cesty mezi těmito vrcholy. **Excentricitou** vrcholu v budeme rozumět maximální vzdálenost od vrcholu v přes všechny ostatní vrcholy grafu a označíme ji $\mathrm{ecc(v)}$. Vlastností celého grafu je **průměr** $\mathrm{diam(G)}$, kterým rozumíme největší excentricitu v grafu G.

Další strukturou, kterou si zavedeme, je podgraf, indukovaný podgraf a doplněk grafu. Nechť $G = (V_G, E_G)$ je graf. Graf $H = (V_H, E_H)$ nazveme **podgrafem** grafu G pokud platí $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ a pro každou hranu $\{x, y\} \in E_H$ je $x,\ y \in V_H$. Pokud pro každé dva vrcholy $x, y \in V_H$, kde $\{x, y\} \in E_G$, platí $\{x, y\} \in E_H$, pak graf H nazveme **indukovaným podgrafem** grafu G. Zaveďme pojem doplněk grafu. Graf $\overline{G}$, pro který platí $V_{\overline{G}} = V_G$ a $E_{\overline{G}} = \binom{V_G}{2} \setminus E_G$ nazveme **doplňkem** grafu G. Někdy je doplněk označován jako komplement a grafy G a $\overline{G}$ jako komplementární.

V jedné z kapitol se budeme věnovat hamiltonovským vlastnostem. Definujme tedy

následující pojmy. Nechť G je graf s množinou vrcholů V_G. **Hamiltonovská cesta** v grafu G je taková cesta, která prochází každým vrcholem grafu G právě jednou. Graf, který obsahuje hamiltonovskou cestu, pak nazveme **traceable**. Pokud graf G obsahuje kružnici, která prochází každým vrcholem grafu G právě jednou, nazveme ho **hamiltonovským** a příslušnou kružnici **hamiltonovskou**. Hamiltonovský graf G s množinou vrcholů V_G nazveme **hyper-hamiltonovským**, pokud $G - x$ je hamiltonovský pro každé $x \in V_G$.

Poměrně důležitým pojmem pro cyklické vlastnosti bude bipartitnost grafu. Nechť $G = (V_G, E_G)$ je graf. Graf G nazveme **bipartitním**, pokud jeho množinu vrcholů V_G lze rozdělit na dvě podmnožiny A a B takové, že každá hrana v G má jeden konec v A a druhý v B. Důležitým tvrzením se ukáže být to následující.

Tvrzení 2.1. *Nechť $G = (V_G, E_G)$ je graf. Graf G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnice liché délky.*

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že největší společný dělitel reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k$ označíme $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Konvexní posloupností budeme rozumět posloupnost prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pro kterou platí $a_{i+1} \leq \frac{1}{2}(a_i + a_{i+2})$ pro všechna $1 \leq i \leq n - 2$.

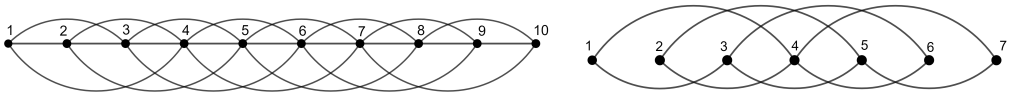
3 Cirkulanty a základní vlastnosti

Vzhledem k tomu, že různí autoři používají různé definice a značení, jsou výsledky z těchto článků v této práci převedeny do našeho značení.

V této kapitole se budeme zabývat základními vlastnostmi toeplitzovských grafů a přejdeme k cirkulantům. Toeplitzovský neboli konečný distanční graf je velmi podobný cirkulantu. Distanční množina u distančních grafů je ekvivalentem množiny skoků u cirkulantu. Zásadním rozdílem je, že skoky u cirkulantu fungují i přes poslední a první vrchol, tj. vrcholy jsou uspořádány do kružnice, zatímco u toeplitzovského grafu jsou vrcholy pomyslně narovnány pouze do cesty.

Definice 3.1. Mějme dánu množinu vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ a distanční množinou $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, $D \subseteq \mathbb{N}$. **Toeplitzovským grafem** $G_n(D)$ rozumíme graf G s množinou vrcholů V a množinou hran $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : \exists d_i \in D : |y - x| = d_i\}$.

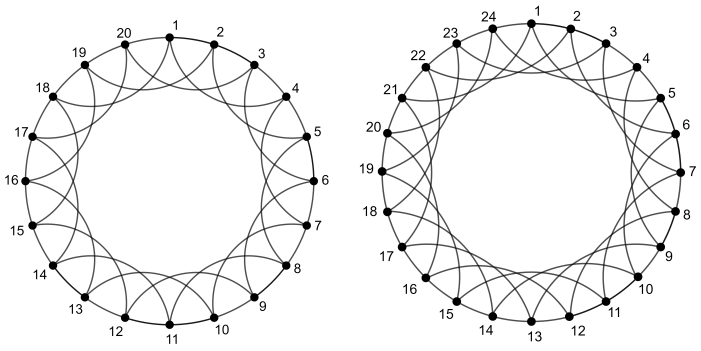
Příklady toeplitzovských grafů ilustruje následující obrázek.



Obrázek 1: Graf $G_{10}(1, 2, 3)$ a $G_7(2, 3)$

Definice 3.2. Mějme dána kladná celá čísla $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq \frac{n}{2}$, kde $n \in \mathbb{N}$. **Cirkulantem** $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf G s množinou vrcholů $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a s množinou hran $E_G = \{\{v_i, v_{(i+a_j) \pmod n}\} : 1 \leq i \leq n \ \wedge \ 1 \leq j \leq k\}$. Číslo a_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, nazveme **skokem**.

Pro účely této práce budeme vrcholy grafu značit postupně pouze pomocí čísel po řadě ve směru hodinových ručiček, tedy $V_G = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n\}$, hrany pak budou vypadat následovně $\{i, (i + a_j) \pmod n\}$, kde $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq j \leq k$.



Obrázek 2: Graf $C_{20}(1, 3)$ a $C_{24}(1, 4)$

Začneme se souvislostí toeplitzovských grafů. Následující věta řeší počet komponent toeplitzovského grafu a plyne z ní podmínka na souvislost.

Věta 3.3 [11]. *Nechť G je toeplitzovský graf $G_n(d_1, d_2, \ldots, d_k)$. Potom má graf G alespoň* $\gcd(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ *komponent.*

Z této věty 3.3 plyne následující důsledek pro nutnou podmínku souvislosti toeplitzovkého grafu.

Důsledek 3.4 [13]. *Nechť G je toeplitzovský graf $G_n(d_1, d_2, \ldots, d_k)$. Pokud platí* $\gcd(d_1, d_2, \ldots, d_k) > 1$, *potom graf G není souvislý.*

Následující věta již dává postačující podmínku na souvislost toeplitzovského grafu.

Věta 3.5 [13]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2, \ldots, d_k)$. Pokud platí* $\gcd(d_1, \ldots, d_k) = 1$ *a $d_1 + d_m \leq n + 1$, potom je graf G souvislý.*

Nyní plynule přejdeme od toeplitzovských grafů k cirkulantům. Věta 3.6 vyjadřuje vztah mezi těmito dvěma typy grafů.

Věta 3.6 [18]. *Nechť G je graf. Pak G je cirkulantem právě tehdy, když G je regulárním toeplitzovským grafem.*

Stejně jako u toeplitzovských grafů vyřešme počet komponent cirkulantu a jeho souvislost.

Věta 3.7 [15]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Graf G má r komponent právě tehdy, když* $\gcd(n, a_1, a_2, \ldots, a_k) = r$.

Na rozdíl od věty 3.5 mají cirkulanty nutnou a postačující podmínku podobnou postačující podmínce toeplitzovských grafů.

Věta 3.8 [6]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Graf G je souvislý právě tehdy, když* $\gcd(n, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$.

Zaměřme se na další vlastnosti cirkulantů. Zajímavým tvrzením je, že doplněk cirkulantu je také cirkulant.

Tvrzení 3.9 [8]. *Nechť G je cirkulant. Pak doplněk $\overline{G}$ grafu G je také cirkulant.*

Nyní budeme věnovat pozornost vztahu minimálního stupně a vrcholového stupně souvislosti cirkulantu. Následující věta nám dává rovnost pro cirkulanty, které jsou 4- a 6-regulární. Tedy minimální stupeň grafu je stejný jako minimální počet vrcholů, které musíme odebrat, aby byl cirkulant nesouvislý.

Věta 3.10 [23]. *Pokud $G = C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je souvislý d-regulární cirkulant, kde d je 4 nebo 6, pak $\kappa(G) = \delta(G)$.*

Dále se ukáže, že třída cirkulantů z předchozí věty není jediná, pro kterou rovnost mezi $\kappa(G)$ a $\delta(G)$ platí.

Věta 3.11 [22]. *Pro cirkulant $C_n(a, 1+a, 2+a, \ldots, k+a)$, kde $a, k \in \mathbb{N}$, platí $\kappa(G) = \delta(G)$.*

Věta 3.12 [5]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Pokud $a_1 = 1$ a posloupnost $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je konvexní, potom platí $\kappa(G) = \delta(G)$.*

Následující věta je vylepšením věty předchozí.

Věta 3.13 [22]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Je-li $(0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ konvexní posloupnost, potom platí $\kappa(G) = \delta(G)$.*

Dále se zaměříme na spodní a horní hranice průměru cirkulantů. Připomeňme, že průměrem ($\mathrm{diam}(G)$) grafu rozumíme největší excentricitu v grafu. Následující věta vyjadřuje dolní mez průměru cirkulantu, který má jeden skok 1.

Věta 3.14 [24]. *Pro graf $G = C_n(1, a_2, \ldots, a_k)$ platí*

$$\mathrm{diam}(G) \geq \frac{1}{2}(k!n)^{1/k} - \frac{1}{2}(k+1).$$

Zaveďme $\mathrm{LB}(n)$ jako spodní hranici pro průměr cirkulantu C_n se dvěma skoky, následovně:

$$\mathrm{LB}(n) = \lceil(-1 + \sqrt{2n-1})/2\rceil.$$

Následující věta uvádí horní mez pro průměr cirkulantu se dvěma skoky z nichž jeden je jedna.

Věta 3.15 [12]. *Nechť G je graf $C_n(1, s)$, $b = \lfloor n/s \rfloor$ a $m = n - bs$. Pak $\mathrm{diam}(G) \leq \max\{b+1, m-2, s-m-1\}$.*

Zúžením výběru druhého skoku dostáváme následující větu, kde průměr grafu je přesně o jedna větší než spodní hranice průměru.

Věta 3.16 [12]. *Nechť $n = 2t^2 + 6t + 4$ a graf G je $C_n(1, 2t+3)$. Pak má G průměr $\mathrm{diam}(G) = t + 2 = \mathrm{LB}(n) + 1$.*

Věta 3.17 [15]. *Nechť G je graf $C_n(m, m+1)$, kde $n > 6$ a $m = \lceil(-1 + \sqrt{2n-1})/2\rceil$. Pak $\mathrm{diam}(G) = m$.*

Do teď jsme se zabývali obecnými cirkulanty. Cirkulanty mají své speciální případy, které mají určitým způsobem provázány skoky s počtem vrcholů. Čím více vrcholů mají, tím více mají skoků a tedy i hran.

Definice 3.18 [1]. *Mějme dvě kladná celá čísla n a d.* ***Rekurzivní cirkulant*** *je graf $RC(n,\ d)$, který má množinu vrcholů $V_{RC}\{0, 1, \ldots, n-1\}$, a dva vrcholy x a y jsou spojeny hranou právě tehdy, když $x - y = \pm d^i \pmod n$ pro $0 \leq i \leq \lceil \log_d n \rceil - 1$.*

Dále se budeme zabývat pouze speciálním případem rekurzivních cirkulantů, které mají $n = cd^m$, kde $c \in \mathbb{N}$ a platí $1 \leq c < d$. Mají tedy počet vrcholů provázaný se skoky a budeme je značit $RC(cd^m, d)$. Následující věta tvrdí, že takové grafy mají vrcholový stupeň souvislosti roven minimálnímu stupni grafu.

Věta 3.19 [17]. *Nechť G je graf $RC(cd^m, d)$. Pak platí $\kappa(G) = \delta(G)$.*

Nyní se zaměřme na průměr rekurzivních cirkulantů $RC(cd^m, d)$.

Věta 3.20 [17]. *Nechť G je graf $RC(cd^m, d)$.*

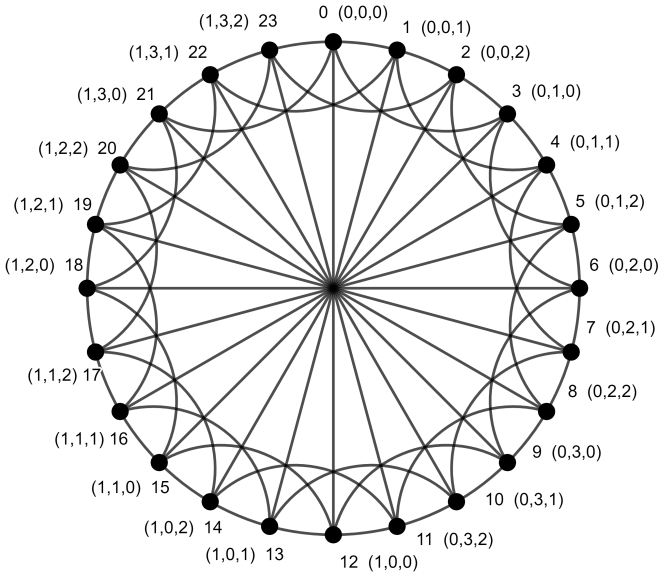
1. *Je-li d liché, pak* $\operatorname{diam}(G) = \lfloor d/2 \rfloor m + \lfloor c/2 \rfloor$.
2. *Je-li d sudé, pak* $\operatorname{diam}(G) = \begin{cases} \lfloor \frac{d-1}{2} m \rfloor + \lfloor c/2 \rfloor, & \text{pokud } c \text{ je sudé} \\ \lceil \frac{d-1}{2} \rceil + \lfloor c/2 \rfloor, & \text{pokud } c \text{ je liché} \end{cases}$

Následující definice zavádí další speciální třídu cirkulantů, která zahrnuje rekurzivní cirkulanty a další případy.

Definice 3.21 [14]. *Mějme daná přirozená čísla $m_h, m_{h-1}, \ldots, m_1$, kde $h \in \mathbb{N}$.* ***Zobecněný rekurzivní cirkulant*** *je graf $GRC(m_h, m_{h-1}, \ldots, m_1)$, který má $n = \prod_{i=1}^{h} m_i$ vrcholů, kde $m_i \geq 2$ je velikost indexu i pro $i = 1, 2, \ldots, h$. Každému vrcholu je přiřazen vektor dimenze h $(x_h, x_{h-1}, \ldots, x_1)$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots, h$. Množina hran je definována tak, že vrchol $(x_h, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_1)$ je spojen hranou s vrcholem $(x_h, \ldots, x_{i+1}, x_i + 1, \ldots, x_1)$ a rovněž s vrcholem $(x_h, \ldots, x_{i+1}, x_i - 1, \ldots, x_1)$. Složky vektorů reprezentující vrcholy jsou navíc počítány takto:*

- *je-li $x_i + 1 = m_i$, pak $x_i = 0$ a $x_{i+1} = x_{i+1} + 1$*
- *je-li naopak $x_i = 0$, pak $x_i - 1 = m_i - 1$ a $x_{i+1} = x_{i+1} - 1$.*

Někdy se takový cirkulant nazývá h-rozměrný zobecněný rekurzivní cirkulant.
Provázání mezi definicí zobecněného rekurzivního cirkulantu a klasického cirkulantu se skoky, jak jsme ho definovali my, je dáno následovně [19]. Cirkulant $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je $GRC(h_k, h_{k-1}, \ldots, h_1)$ právě tehdy, když $a_i = n / \prod_{j=i}^{k} h_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Příklad zobecněného rekurzivního cirkulantu i s jednotlivými vektory je na následujícím obrázku.



Obrázek 3: Graf $GRC(2, 4, 3)$

Všimněme si, které vrcholy jsou propojené hranou. Například vrchol 21 s vektorem $(1, 3, 0)$ je propojen s vrcholy odpovídající vektorům $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$ a $(0, 3, 0)$. V definici je zavedeno, že vrchol je incidentní s takovým vrcholem, který je v jedné souřadnici o jedna vyšší resp. nižší. Poznamenejme, že pořadí souřadnic ve vektoru je opačné (značí se zprava doleva). Pokud přičteme k první souřadnici (x_i) vektoru $(1, 3, 0)$ jedničku dostaneme vektor $(1, 3, 1)$, s jehož odpovídajícím vrcholem je vrchol 21 incidentní. Pokud bychom chtěli jedničku odečíst, dostali bychom v první souřadnici -1 a to není přípustné. Vektor se tedy musí přepočíst podle pravidel v definici. První souřa- dnice se nastaví na 2 a druhá souřadnice se o jedna sníží. Vektor bude tedy vypadat následovně $(1, 2, 2)$.

Dále se přesuneme do druhé souřadnice vektoru $(1, 3, 0)$. Chtěli bychom k ní přičíst jedničku. Dostaneme ovšem 4, což je m_2. Postupujeme tedy podle prvního pravidla v definici. Druhou souřadnici nastavíme na 0 a o jedna vyšší souřadnici zvýšíme o jedna. Tím ovšem hodnota třetí souřadnice nabyde hodnoty m_3, tedy ji nastavíme na 0. Dostáváme vektor $(0, 0, 0)$ s jehož vrcholem je vrchol 21 rovněž incidentní. Pokud od druhé souřadnice odečteme jedničku dostaneme vektor $(1, 2, 0)$.

Zbývá vyřešit třetí souřadnice vektoru $(1, 3, 0)$. Prvně opět budeme přičítat jedničku. Dostáváme číslo 2, což je rovno m_3. Tedy bychom měli od následující souřadnice odečíst 1 a třetí nastavit na nulu. Třetí souřadnici nastavíme na nulu, ale další souřadnice již není, tedy se neděje nic dalšího. Výsledný vektor bude $(0, 3, 0)$. Nakonec od třetí souřadnice odečteme 1 a dostaneme opět $(0, 3, 0)$.

Tento proces se provádí u každého vektoru pro zjištění incidentních vrcholů.

4 Hamiltonovské vlastnosti v cirkulantech

V této kapitole se budeme zabývat hamiltonovskými vlastnostmi toeplitzovských grafů a cirkulantů. Prvně se zaměřme na hamiltonovskost a traceabilitu toeplitzovských grafů.

Následující věta ukáže, kdy toeplitzovský graf se dvěma kroky není hamiltonovský a není ani traceable.

Věta 4.1 [11]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2)$ řádu $n \geq 5$. Pokud platí $d_1 + d_2 < n < 3d_1 + d_2$, potom G není hamiltonovský. Dále pokud $d_1 > 3$ a platí $d_1 + d_2 + 2 < n < 3d_1 + d_2$, potom G není traceable.*

Dále se zaměříme na případ, kdy toeplitzovský graf je traceable, ale není hamiltonovský. Uvažujme případ, kdy $d_1 = 2$.

Věta 4.2 [11]. *Nechť G je graf $G_n(2, d_2)$, kde d_2 je liché číslo takové, že $d_2 \geq \frac{n-1}{2}$. Pokud je n sudé, potom je graf G traceable, ale není hamiltonovský. Pokud je n liché, tak G je hamiltonovský právě tehdy, když $\frac{n-d_2}{2}$ je liché.*

Obecně pro graf $G_n(d_1, d_2)$ platí následující podmínky, podle kterých pak graf je traceable, ale není hamiltonovský.

Věta 4.3 [13]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2)$, kde $1 \leq d_1 < d_2 \leq n - 1$. Pokud $\gcd(d_1, d_2) = 1$ a $d_1 + d_2 = n + 1$, pak je graf G traceable, ale není hamiltonovský.*

V další části se budeme zabývat případy, kdy jsou toeplitzovské grafy hamiltonovské. Následující dvě věty se zabývají grafem se dvěma skoky, z nichž jeden je roven 2.

Věta 4.4 [11]. *Nechť G je graf $G_n(2, d_2)$, kde d_2 je liché číslo. Pokud $d_2 < \frac{n+3}{4}$, potom je graf G hamiltonovský.*

Věta 4.5 [11]. *Nechť G je graf $G_n(2, d_2)$, kde $d_2 \equiv \epsilon \pmod 4$ pro $\epsilon = \pm 1$. Pokud je n sudé a $d_2 \leq \frac{n+\epsilon}{3}$, potom je graf hamiltonovský. Pokud je n liché a $d_2 \leq \frac{n+2+\epsilon}{4}$, potom je graf G hamiltonovský.*

Zaměřme se nyní na případ $G_n(d_1, d_2)$ a na to, kdy je takový graf hamiltonovský.

Věta 4.6 [11]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2)$, kde n je násobkem $d_1 + d_2$. Potom je graf G hamiltonovský.*

Věta 4.7 [13]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2)$. Pokud n, d_1, d_2 jsou různé parity a platí $d_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2d_1)$, $n \geq 5d_2$ a n je sudé nebo $n \geq 6d_2 + d_1$ pro n liché, pak je graf G hamiltonovský.*

Následující věta je doplňkem té předchozí. Řeší případ, kdy n, d_1, d_2 jsou stejné parity. Tato věta ukáže, že takový graf není hamiltonovský.

Věta 4.8 [13]. *Nechť G je graf $G_n(d_1, d_2)$. Pokud $d_1 \equiv d_2 \equiv n \pmod 2$, pak graf G není hamiltonovský.*

Nyní rozšíříme množinu skoků, kde jeden z nich bude roven 1. Následující věta říká, kdy je takový graf hamiltonovský.

Věta 4.9 [11]. *Nechť G je graf $G_n(1, d_2, \ldots, d_k)$. Potom je graf G hamiltonovský právě tehdy, když buď alespoň jedna z hodnot $n, d_2, \ldots, d_n$ má jinou paritu než ostatní, nebo jsou všechny sudé a $d_2 \leq \frac{n}{2}$.*

Změní-li se první skok z 1 na 2, změní se i podmínky na hamiltonovskost grafu $G_n(2, d_1, d_2, \ldots, d_k)$.

Věta 4.10 [11]. *Nechť G je graf $G_n(2, d_2, d_3, \ldots, d_k)$, kde n je sudé, $d_2 > \frac{n}{2}$ a prvky $d_2, \ldots, d_k$ jsou liché. Potom je graf G hamiltonovský právě tehdy, když alespoň jedno z čísel $\frac{n-d_i+1}{2}$, $i = 2, \ldots, k$ má jinou paritu než ostatní.*

Na rozdíl od toeplitzovských grafů je hamiltonovskost u cirkulantů poměrně jednoduchá - viz následující věta.

Věta 4.11 [15]. *Každý souvislý cirkulant je hamiltonovský.*

Přidáme-li k této větě větu 3.8 dostaneme, že pokud platí $\gcd(n, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, pak je cirkulant hamiltonovský. Hamiltonovskost souvislých cirkulantů je vyřešena a nemá smysl se jí více zabývat. Podívejme se tedy na hyper-hamiltonovskost cirkulantů. Připomeňme, že hamiltonovský graf G je hyper-hamiltonovský, když graf $G-x$ je hamiltonovský pro každé $x \in V_G$. Následující věta dává nutnou a postačující podmínku na hyper-hamiltonovskost cirkulantů.

Věta 4.12 [6]. *Nechť G je souvislý graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, kde $k \geq 2$. Graf G je hyper-hamiltonovský právě tehdy, když buď n je liché nebo alespoň jedno a_i je sudé.*

Mějme graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Řekneme, že skok a_i $(1 \leq i \leq k)$ generuje hamiltonovskou kružnici, pokud podgraf grafu $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ obsahující pouze všechny hrany vytvořené skokem a_i je hamiltonovskou kružnicí grafu $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Nyní uveďme lemma, které nám dává postačující podmínku na existenci hamiltonovské kružnice generované skokem a_1.

Lemma 4.13 [16]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2)$. Pokud $\gcd(n, a_1) = 1$, pak v G existuje hamiltonovská kružnice generovaná pouze skokem a_1.*

Poznamenejme, že toto lemma platí i obecně pro graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ a libovolný skok a_i. Podmínka totiž nezávisí na žádném z dalších skoků, pouze na počtu vrcholů grafu, a případná hamiltonovská kružnice také nepotřebuje ostatní skoky. Následující větou se dostaneme k hamiltonovské dekompozici grafu $C_n(a_1, a_2)$. Zaveďme si tedy prvně pojem hamiltonovské dekompozice.

Definice 4.14. Nechť G je k-regulární graf. Graf G má **hamiltonovskou dekompozici**, pokud jej lze rozdělit na $k/2$ hranově disjunktních hamiltonovských kružnic pro k sudé nebo na $(k-1)/2$ hranově disjunktních hamiltonovských kružnic a perfektní párování pro k liché.

Následující věta úzce souvisí s lemmatem 4.13.

Tvrzení 4.15 [16]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2)$. Pokud $\gcd(n, a_1, a_2) = 1$, pak lze graf G rozložit na dvě hamiltonovské kružnice. Tedy graf G má hamiltonovskou dekompozici.*

Nyní se zaměřme na hamiltonovskou dekompozici rekurzivních cirkulantů. Nejprve uvažujme případ, kdy $d = 2$. Tedy budeme zkoumat hamiltonovskou dekompozici grafu $RC(2^m, 2)$. Hamiltonovskou kružnici v grafu $RC(2^m, 2)$ nazveme λ-kružnicí, pokud obsahuje vrcholy x_1 a x_2 zvané λ-sekvence takové, že $x_1 - x_2 = 1$ a $x_1 \equiv 0 \pmod 2$. Všimněme si, že dvě λ-sekvence musí být buď stejné nebo disjunktní. Tedy dvě hranově disjunktní λ-kružnice obsahují vrcholově disjunktní λ-sekvence.

Lemma 4.16 [4]. *Mějme k hranově disjunktních hamiltonovských λ-kružnic v grafu $RC(2^{m-1}, 2)$, potom lze zkonstruovat $k + 1$ hranově disjunktních hamiltonovských λ-kružnic v grafu $RC(2^m, 2)$.*

Toto lemma je využito v důkazu následující věty.

Věta 4.17 [4]. *Pro všechna m má graf $RC(2^m, 2)$ hamiltonovskou dekompozici skládající se z $m - 1$ hranově disjunktních hamiltonovských λ-kružnic a jednoho perfektního párování.*

Zaměřme se na případ $d = 3$. Hamiltonovskou kružnici v grafu $RC(c \cdot 3^m, 3)$ nazveme μ-kružnicí, pokud obsahuje tři po sobě jdoucí vrcholy x_1, x_2, x_3, tyto vrcholy nazveme μ-sekvencí, a platí pro ně $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 1$. Všimněme si, že dvě μ-sekvence musí být buď stejné nebo disjunktní nebo mají právě jeden vrchol společný. Tedy dvě hranově disjunktní λ-kružnice obsahují vrcholově disjunktní λ-sekvence.

Lemma 4.18 [4]. *Předpokládejme $m \geq 3$ nebo $m = c = 2$. Mějme k hranově disjunktních hamiltonovských μ-kružnic v grafu $RC(c \cdot 3^{m-1}, 3)$, potom lze zkonstruovat $k + 1$ hranově disjunktních Hamiltonovských μ-kružnic v grafu $RC(c \cdot 3^m, 3)$*

Toto lemma je využito v důkazu následující věty.

Věta 4.19 [4]. *Pro všechna m má graf $RC(c \cdot 3^m, 3)$ hamiltonovskou dekompozici skládající se z m hranově disjunktních hamiltonovských μ-kružnic (a jednoho prefektního párování, pokud $c = 2$).*

Nakonec se zaměříme na případ $d \geq 4$, pro který už platí obecnější věta, která nefunguje pro předchozí rozebírané případy. Zaveďme si opět značení. Hamiltonovskou kružnici v grafu $RC(cd^m, d)$ nazveme γ-kružnicí, pokud obsahuje tři po sobě jdoucí vrcholy x_1, x_2, x_3. Tyto vrcholy nazveme γ-sekvencí a musí pro ně platit $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 1$ a $x_1 \equiv 0 \pmod{d}$. Všimněme si, že dvě γ-sekvence musí být buď stejné nebo disjunktní. Tedy dvě hranově disjunktní γ-kružnice obsahují vrcholově disjunktní γ-sekvence.

Lemma 4.20 [4]. *Mějme k hranově disjunktních hamiltonovských γ-kružnic v grafu $RC(cd^{m-1}, d)$, potom lze zkonstruovat $k+1$ hranově disjunktních hamiltonovských γ-kružnic v grafu $RC(cd^m, d)$.*

Lemma 4.21 [4]. *Pro všechny $d \geq 4$ má graf $RC(3d^2, d)$ hamiltonovskou dekompozici skládající se z tří hamiltonovských γ-kružnic.*

Následující věta byla dokázána pomocí předchozích lemmat 4.20 a 4.21.

Věta 4.22 [4]. *Pro všechna $d \geq 4$ a $0 < c < d$ má graf $RC(cd^m, d)$ hamiltonovskou dekompozici skládající se z hamiltonovských γ-kružnic (a perfektního párování, pokud $RC(cd^m, d)$ je lichého stupně). Navíc graf $G(3d, d)$ má také hamiltonovskou dekompozici.*

Na závěr se zaměříme na hamiltonovské dekompozice zobecněných rekurzivních cirkulantů.

Věta 4.23 [9]. *Nechť $k \geq 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom zobecněný rekurzivní cirkulant $GRC(h_k, h_{k-1}, \ldots, h_1)$ má hamiltonovskou dekompozici, pokud*

1. *$k = 1, 2$,*
2. *nebo pro $k \geq 3$, h_i je buď 2 nebo liché pro všechna $1 \leq i \leq k-2$,*
3. *nebo pro $k \geq 3$ a nějaké j $(1 \leq j \leq k-2)$, $h_k = 2$, $h_i > 2$ je sudé pro všechna $j \leq i \leq k-2$ a h_i je buď 2 nebo liché pro všechna $1 \leq i \leq j-1$,*
4. *nebo pro $k \geq 3$ a nějaké j $(1 \leq j \leq k-1)$, $h_k > 2$, $h_i > 2$ je sudé pro všechna $j \leq i \leq k-1$ a h_i je buď 2 nebo liché pro všechna $1 \leq i \leq j-1$.*

Důsledek 4.24 [9]. *Rekurzivní cirkulant $RC(1, d, r) = GRC(\overbrace{d, d, \ldots, d}^{r})$ nebo $RC(c, d, r) = GRC(\overbrace{c, d, d, \ldots, d}^{r})$ pro $2 \leq c < d$ má hamiltonovskou dekompozici.*

5 Pancyklické vlastnosti v cirkulantech

V této kapitole se budeme zabývat pancyklickými vlastnostmi, které navazují na hamiltonovské. Pancyklicita je vlastně zobecněním hamiltonovskosti. Požadujeme existenci kružnic všech možných délek na rozdíl od hamiltonovskosti, kde požadujeme existenci pouze kružnice délky n.

Definice 5.1. Graf G řádu n je **pancyklický**, pokud obsahuje kružnice všech délek (3, 4, ... , n).

Důležitým pojmem dále bude bipancyklicita, která je zavedena pro bipartitní grafy. Poznamenejme, že v bipartitních grafech neexistují kružnice lichých délek.

Definice 5.2. Graf G je **bipancyklický**, pokud je bipartitní a obsahuje kružnice všech sudých délek.

Dále definujeme hranovou pancyklicitu a bipancyklicitu.

Definice 5.3. Graf G je **hranově pancyklický** jestliže je každá jeho hrana obsažena v kružnici libovolné délky.

Definice 5.4. Graf G je **hranově bipancyklický** jestliže je bipartitní a každá jeho hrana je obsažena v kružnici libovolné sudé délky.

Poznamenejme, že hranová pancyklicita je zobecněním pancyklicity. Pokud je graf hranově pancyklický, pak v něm musí existovat kružnice všech délek, tedy je pancyklický. Obdobný vztah platí i pro hranovou bipancyklicitu a bipancyklicitu.

5.1 Souvislé cirkulanty

Dále budeme uvažovat pouze souvislé cirkulanty. Připomeňme, že každý souvislý cirkulant je hamiltonovský viz věta 4.11. Nejprve se zaměříme na pancyklicitu a bipancyklicitu těchto grafů.

Lemma 5.5 [7]. *Nechť G je graf $C_n(1, a_2)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $n > 3$. Jestliže G obsahuje trojúhelník s vrcholy i a $i + 1$, pak G obsahuje všechny kružnice lichých délek.*

Toto pomocné tvrzení je využito v důkazu následující věty, která využívá existence trojúhelníku v grafu.

Věta 5.6 [7]. *Nechť G je souvislý cirkulant řádu n a délka nejkratší kružnice je 3. Pak G je pancyklický.*

Následující věta je zaměřena pouze na souvislé bipartitní cirkulanty, tedy neobsahují liché kružnice.

Věta 5.7 [7]. *Souvislé bipartitní cirkulanty obsahují kružnice všech sudých délek. Tj. jsou bipancyklické.*

Tato věta je odvozena pomocí následujících dvou tvrzení a z nich odvozené věty. Díky těmto tvrzením, přejdeme k hranové bipancyklicitě souvislého cirkulantu. Zaměřme se na graf $C_n(1, a_2)$. Připomeňme, že skok a_2 generuje hamiltonovskou kružnici, pokud podgraf grafu $C_n(1, a_2)$ obsahující pouze všechny hrany vytvořené skokem a_2 je hamiltonovskou kružnicí grafu $C_n(1, a_2)$.

Lemma 5.8 [7]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2)$, kde $a_1 = 1$, a_2 generuje hamiltonovskou kružnici a n je sudé. Pak G je hranově bipancyklický.*

Lemma 5.9 [7]. *Nechť G je graf $C_n(a_1, a_2)$, kde $a_1 = 1$, a_2 generuje hamiltonovskou kružnici a n je liché. Pak G je hranově bipancyklický.*

Poznamenejme, že tato dvě pomocná tvrzení lze shrnout pro graf $G = C_n(1, a_2)$ do jedné podmínky. Pokud n a a_2 jsou nesoudělné, pak je graf G hranově bipancyklický. Následující věta se týká již obecného cirkulantu s k kroky.

Věta 5.10 [7]. *Nechť G je souvislý graf $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $k \geq 2$. Pak graf G je hranově bipancyklický.*

5.2 Rekurzivní cirkulanty

Nyní se zaměříme pouze na rekurzivní cirkulanty, které jsme definovali v kapitole 3. Následující věta rozebírá kritéria na parametry rekurzivního cirkulantu, při jejichž splnění graf obsahuje kružnice všech lichých nebo sudých délek.

Věta 5.11 [2]. *Nechť $m, c, d \in \mathbb{N}$.*

1. *Je-li $c \geq 2$ a $m \geq 1$ nebo $c = 1$ a $m \geq 2$, pak $RC(cd^m, d)$ obsahuje kružnice všech sudých délek.*
2. *Je-li $c \geq 3$ a liché a $m \geq 0$, pak $RC(cd^m, d)$ obsahuje všechny liché kružnice délky alespoň c a neobsahuje liché kružnice délky menší než c.*
3. *Je-li $c = 1$ nebo sudé, pak $RC(cd^m, d)$ obsahuje všechny liché kružnice délky alespoň d a neobsahuje liché kružnice délky menší jak d.*

Pokud je cd^m sudé a d liché, pak je rekurzivní cirkulant $RC(cd^m, d)$ bipartirní. Díky tomuto poznatku a prvnímu bodu věty 5.11 dostáváme následující důsledek o bipancyklicitě rekurzivního cirkulantu.

Důsledek 5.12 [2]. *Nechť $m, c, d \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, c je sudé a d je liché. Pak graf $RC(cd^m, d)$ je bipancyklický.*

Z věty 5.11 vyplývají následující nutné a postačující podmínky pancyklicity rekurzivního cirkulantu.

Důsledek 5.13 [2]. *$RC(cd^m, d)$ je pancyklický právě tehdy, když splňuje jednu z následujících podmínek:*

- $d = 2$ a $m \geq 2$,
- $d = 3$, $c = 1$ a $m \geq 1$,
- $c = 2$, $d \geq 4$ *je sudé* a $m \geq 0$,
- $c = 3$, $d \geq 4$ a $m \geq 0$.

Nyní se zaměříme na hranovou pancyklicitu těchto cirkulantů. Pro $c = 1$ a $d = 2$ plyne z věty 5.11 následující tvrzení.

Tvrzení 5.14 [1]. *Nechť $m \geq 2$ graf $RC(2^m, 2)$ je hranově pancyklický.*

Pro $d \geq 3$ neplatí pro graf $RC(cd^m, d)$ ekvivalence mezi pancyklicitou a hranovou pancyklicitou. Pro následující větu zavedeme takzvanou L-hranovou pancyklicitu. Nechť L je množina přirozených čísel. Graf G je L-hranově pancyklický, pokud každá hrana grafu G je obsažena v kružnici délky l, pro každé $l \in L$. Dále pro $c, d, m \in \mathbb{N}$ definujeme množiny L_E a L_{O_i}, kde $i = 1, 2$, následovně:

$L_E = \{l | l \text{ je sudé a } 4 \leq l \leq cd^m\}$
$L_{O_1} = \{l | l \text{ je liché a } c < l \leq cd^m\}$
$L_{O_2} = \{l | l \text{ je liché a } d < l \leq cd^m\}$

Věta 5.15 [1]. *Nechť $c, d, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq c \leq d$.*

1. *Je-li c liché, $c \geq 3$ a $m \geq 1$, pak graf $RC(cd^m, d)$ je $(L_E \cup L_{O_1})$-hranově pancyklický*
2. *Je-li c, d sudé a $m \geq 2$, pak graf $RC(cd^m, d)$ je $(L_E \cup L_{O_2})$-hranově pancyklický.*
3. *Je-li $c = 1$ a $m \geq 2$, pak graf $RC(cd^m, d)$ je $(L_E \cup L_{O_1})$-hranově pancyklický.*

Podobně lze dokázat, že rekurzivní cirkulant je L_E-hranově pancyklický pokud je bipartitní. Přičemž graf $RC(cd^m, d)$ je bipartitní, pokud c je sudé a d je liché. Tato tvrzení shrnuje následující důsledek.

Důsledek 5.16 [1]. *Nechť $m, c, d \in \mathbb{N}$, c je sudé, d je liché a $m \geq 1$. Pak graf $RC(cd^m, d)$ je hranově bipancyklický.*

Pro následující větu zavedeme takzvanou hranovou m-pancyklicitu [1]. Graf G je **hranově m-pancyklický**, pokud každá hrana leží v kružnici všech délek l, kde $m \leq l \leq |V_G|$. Z věty 5.15 a tvrzení 5.14 vyplývá následující důsledek.

Věta 5.17 [1]. *Nechť $c, d, m \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$ a $m \geq 1$ nebo $c = 1$ a $m \geq 2$. Pak graf $RC(cd^m, d)$ je hranově d-pancylický. Speciálně $RC(cd^m, d)$ je hranově c-pancyklický pro liché $c \geq 3$ a $m \geq 1$.*

5.3 Zobecněné rekurzivní cirkulanty

Nakonec se zaměříme na pancyklicitu zobecněných rekurzivních cirkulantů, které zahrnují také třídu rekurzivních cirkulantů s počtem vrcholů $n = cd^m$. Následující věta uvádí postačující podmínku pro existenci kružnic všech sudých délek v zobecněných rekurzivních cirkulantech.

Tvrzení 5.18 [14]. *Nechť $h \in \mathbb{N}$ a $h \geq 2$. Pak $GRC(m_h, m_{h-1}, \ldots, m_1)$ obsahuje kružnice všech sudých délek.*

Dále se zaměříme na liché kružnice v těchto grafech.

Lemma 5.19 [14]. *Pokud zobecněný rekurzivní cirkulant řádu n má kružnici s minimální lichou délkou s, pak obsahuje také kružnice všech lichých délek větší než s a menší než n.*

S využitím předchozího lemmatu byla dokázána následující věta, která uvádí nutnou a postačující podmínku pancyklicity zobecněného rekurzivního cirkulantu.

Věta 5.20 [14]. *Zobecněný rekurzivní cirkulant je pancyklický právě tehdy, když obsahuje kružnici délky 3.*

6 Vlastní výsledky

Budeme se zabývat především cirkulanty se dvěma skoky, z nichž jeden je roven jedné. Mnoho podobného již bylo dokázáno, ovšem pro rekurzivní a zobecněné rekurzivní cirkulanty, kde je počet vrcholů provázán s počtem a velikostí skoků. Cirkulanty, kterými se budeme zabývat jsou obecnější. Máme pevně dané dva skoky a počet vrcholů může být libovolně velký. Tyto grafy jsou tedy řidší co do počtu hran a následující věty nám dají obecnější výsledky. Jakmile počet skoků navýšíme, přidáme tím pouze hrany navíc a případná pancyklicita či bipancyklicita nebude porušena.

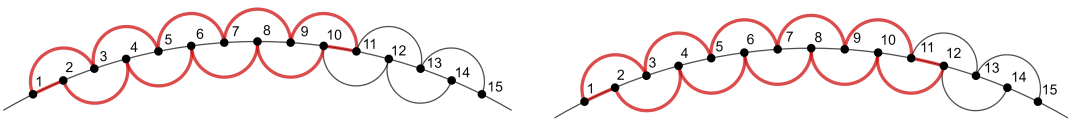
V první řadě uvažujme cirkulant $C_n(1,2)$. Ukážeme, že takovýto graf obsahuje všechny sudé i liché kružnice a tedy je pancyklický. Dokonce budeme schopni napsat předpis pro libovolnou kružnici v grafu. Následující tvrzení plyne z věty 5.5. Pro úplnost ho zde uvádíme i s předpisy kružnic v důkazu.

Tvrzení 6.1. *Nechť G je graf $C_n(1,2)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Pak je G pancyklický.*

Důkaz. Máme graf $C_n(1,2)$. Hledáme kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, $3 \leq m \leq n$. Očíslujeme vrcholy po směru hodinových ručiček čísly $1, 2, 3, \ldots, n$. Nyní máme dvě možnosti podle parity délky m.

- Pokud je m **liché**, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ m,\ m-1,\ m-3,\ m-5,\ m-7,\ \ldots,\ 4,\ 2,\ 1.$
- Pokud je m **sudé**, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ m-1,\ m,\ m-2,\ m-4,\ m-6,\ \ldots,\ 4,\ 2,\ 1.$

Na obrázku 4 je znázorněna ukázka pro $m = 11$ a $m = 12$. ■



Obrázek 4: Části grafů $C_n(1,2)$, kde n je velké, s kružnicí C_{11} a C_{12}.

Pokud bychom množinu skoků tohoto cirkulantu rozšířili o libovolné další skoky, bude vzniklý graf G stále pancyklický. Přidání skoků pancyklicitu neporuší, protože graf G bude obsahovat jako podgraf cirkulant $C_n(1,2)$, který obsahuje kružnice všech délek. Tedy i G bude obsahovat kružnice všech délek.

Nyní trochu odbočíme k cirkulantům se sudým počtem vrcholů a dvěma obecně lichými skoky. Pomocí bipartitnosti ukážeme, že takové cirkulanty nejsou pancyklické, protože v nich neexistují kružnice lichých délek.

Tvrzení 6.2. *Nechť G je graf $C_{2n}(2k-1, 2l-1)$, kde $n, k, l \in \mathbb{N}$ a $n > 1$, $l > k$, $n \geq l$. Pak v něm neexistují kružnice liché délky.*

Důkaz. Ukážeme, že graf $C_{2n}(2k-1, 2l-1) = G$ je bipartitní, tedy neobsahuje liché kružnice. Očíslujme vrcholy postupně od 1 do 2n a dáme liché vrcholy do množiny V_1 a sudé do množiny V_2. Označme x libovolný vrchol v G, y libovolného souseda vrcholu x a uvažujme hranu $\{x, y\}$. Díky lichosti skoků $2k-1$ a $2l-1$ jsou x a y různé parity, tedy každý leží v jiné z množin V_1 a V_2. Tudíž je graf G bipartitní, neexistují v něm liché kružnice. ■

Nyní se zaměříme na cirkulanty se skoky 1 a 3. Ukážeme, že v takovém grafu existují kružnice všech sudých délek.

Tvrzení 6.3. *Nechť G je graf $C_n(1, 3)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$. Pak v grafu G existují kružnice všech sudých délek.*

Důkaz. Hledáme v grafu $C_n(1, 3) = G$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m sudé a $2 < m \leq n$.
Pro $m \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ vypadají kružnice C_m v grafu G následovně:

$C_4 : 1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_6 : 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_8 : 1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 5,\ 6,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_{10} : 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 9,\ 8,\ 5,\ 6,\ 3,\ 2,\ 1.$

Všechny další kružnice mají předpis podle dělitelnosti čísla m šesti, kde $p \in \mathbb{N},\ p > 2$.

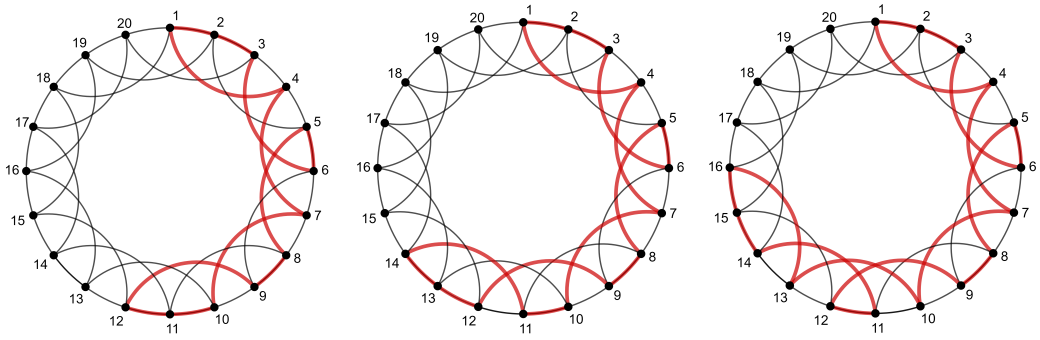
- Pokud je $\mathbf{m = 6p}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ \ldots,\ m-2,\ m-1,\ m,\ m-3,\ m-4,\ m-7,\ m-6,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 6p + 2}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ \ldots,\ m-1,\ m,\ m-3,\ m-2,\ m-5,\ m-6,\ m-9,\ m-8,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 6p + 4}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ \ldots,\ m,\ m-1,\ m-2,\ m-5,\ m-4,\ m-7,\ m-8,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1.$

Ukázky takových kružnic jsou zobrazeny na obrázku 5.

Díky sudosti délek hledaných kružnic nám stačí pouze výše uvedené tři případy a máme všechny takové kružnice v grafu G popsané. Zbývá nám dokázat, že posloupnosti vždy na konci obsahují dvojici po sobě jdoucích vrcholů 3, 2. V každé posloupnosti existují dvojice po sobě jdoucích vrcholů $(i, i-1)$, kde $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$.

- Pro $\mathbf{m = 6p}$ to jsou dvojice $(m-3,\ m-4),\ (m-9,\ m-10)$ atd., tedy dvojice, kdy $i \equiv 3 \pmod 6$ a $i - 1 \equiv 2 \pmod 6$.

- Pro $\mathbf{m = 6p + 2}$ to jsou dvojice $(m-5,\ m-6)$ atd., tedy dvojice, kdy $i \equiv 3 \pmod 6$ a $i - 1 \equiv 2 \pmod 6$.
- Pro $\mathbf{m = 6p + 4}$ to jsou dvojice $(m-1,\ m-2)$, $(m-7,\ m-8)$ atd., tedy dvojice, kdy $i \equiv 3 \pmod 6$ a $i - 1 \equiv 2 \pmod 6$. ■



Obrázek 5: Graf $C_{20}(1,3)$ s kružnicemi C_{12} (vlevo), C_{14} (uprostřed) a C_{16} (vpravo).

Pro liché kružnice obdobné tvrzení neplatí. Problém je s paritou řádu grafu. Protože $C_{2n}(1,3)$ je bipartitní (viz tvrzení 6.2), nemá smysl řešit existenci lichých kružnic. Platí tedy:

Tvrzení 6.4. *Nechť G je graf $C_{2n}(1,3)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Potom je G bipartitní.*

Důsledek 6.5. *Nechť G je graf $C_{2n}(1,3)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Potom je G bipancyklický.*

Poznamenejme, že tento důsledek, je přímým důsledkem věty 5.7. Zaměřme se na cirkulanty se skoky 1, 3 s lichým počtem vrcholů. Připomeňme, že podle tvrzení 6.3 obsahují kružnice všech sudých délek.

Tvrzení 6.6. *Nechť G je graf $C_{2n+1}(1,3)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Pak v grafu G existují kružnice všech lichých délek od C_l do C_{2n+1}, kde*

- $l = \frac{2n+1}{3}$ *pro* $2n + 1 \equiv 0 \pmod 3$,
- $l = \frac{2n+1+2}{3}$ *pro* $2n + 1 \equiv 1 \pmod 3$,
- $l = \frac{2n+1+4}{3}$ *pro* $2n + 1 \equiv 2 \pmod 3$.

Důkaz. Hledáme uvedené liché kružnice v grafu $C_{2n+1}(1,3) = G$. Zřejmě G obsahuje kružnici $C_{2n+1} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1$. Z této kružnice lze postupně vytvořit kratší kružnice odebráním tří po sobě jdoucích hran se skokem jedna a nahrazením těchto hran jednou hranou se skokem 3:

$C_{2n+1} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1,$
$C_{2n-1} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-1,\ 1,$

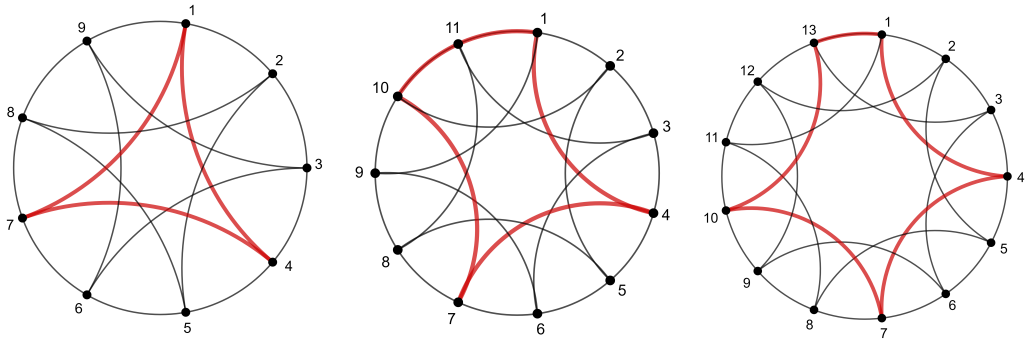
$C_{2n-3} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-4,\ 2n-1,\ 1,$
$C_{2n-5} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-7,\ 2n-4,\ 2n-1,\ 1$
.
.
.

Předpisy pro nejkratší kružnice C_l se pak rozdělí na tři typy podle řádu grafu G.

- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{0}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{3})$, pak je kružnice $C_l = C_{\frac{2n+1}{3}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots,\ 2n-1,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{1}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{3})$, pak je kružnice $C_l = C_{\frac{2n+1+2}{3}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{3})$, pak je kružnice $C_l = C_{\frac{2n+1+4}{3}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots,\ 2n,\ 2n+1,\ 1.$

Příklady nejkratších kružnic v grafu G řádu 9, 11 a 13 jsou uvedeny na obrázku 6.

Tím jsme našli kružnice všech daných lichých délek v grafu G. Zřejmě v G nebudou existovat kružnice, které jsou delší než $2n+1$. Zbývá nám ukázat, že v grafu G neexistují žádné kružnice liché délky kratší než l. Předpokládejme, že v grafu G existuje kratší kružnice. Označme ji $C_{l'}$, kde $l' \in \mathbb{N}$, l' je liché a $2 < l' < l$. Kružnice C_l je určitě nejkratší kružnice v grafu G, která vznikne průchodem "kolem celého"grafu G. Kružnice $C_{l'}$ je kratší, tedy celý graf G určitě neobejde a bude existovat pouze na jeho úseku. Tuto kružnici bude potom určitě obsahovat i podgraf H grafu G indukovaný množinou vrcholů $\{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ 2n-2\}$. Nyní uvažujme graf $C_{2n+2}(1,3)$, zde stejná množina vrcholů indukuje opět podgraf H, u kterého předpokládáme, že obsahuje $C_{l'}$. Potom tedy i graf $C_{2n+2}(1,3)$ musí obsahovat lichou kružnici $C_{l'}$, což je spor s bipartitností grafu $C_{2n+2}(1,3)$ vyplývající z tvrzení 6.4. Tedy žádná kratší lichá kružnice než C_l v grafu G neexistuje. ■



Obrázek 6: Graf $C_9(1,3)$ s kružnicí C_3 (vlevo), graf $C_{11}(1,3)$ s kružnicí C_5 (uprostřed) a graf $C_{13}(1,3)$ s kružnicí C_5 (vpravo).

Nyní vyřešíme třídu cirkulantů se skoky 1 a 4. Prvně se zaměříme na existenci sudých kružnic a opět uvedeme i jejich obecné předpisy.

Tvrzení 6.7. *Nechť G je graf $C_n(1,4)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 7$. Pak v grafu G existují kružnice všech sudých délek.*

Důkaz. Hledáme v grafu $C_n(1,4) = G$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m sudé a $2 < m \leq n$. Pro $m \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$ vypadají kružnice C_m v grafu G následovně:

$C_4 : 1,\ 5,\ 6,\ 2,\ 1,$
$C_6 : 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_8 : 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_{10} : 1,\ 5,\ 9,\ 10,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$
$C_{12} : 1,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1,$
$C_{14} : 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 14,\ 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1.$

Všechny další kružnice mají předpis podle dělitelnosti čísla m osmi, kde $p \in \mathbb{N},\ p > 1$.

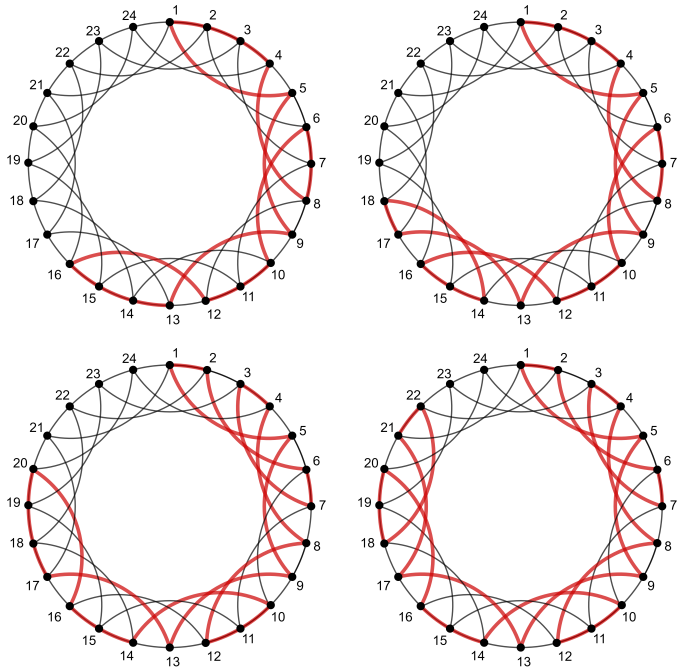
- Pokud je $\mathbf{m = 8p}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 8p-3,\ 8p-2,\ 8p-1,\ 8p,\ 8p-4,\ 8p-5,\ 8p-6,\ 8p-10,\ 8p-9,\ 8p-8,\ 8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14,\ 8p-18,\ 8p-17,\ 8p-16,\ \ldots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 2}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 8p{+}1,\ 8p{+}2,\ 8p{-}2,\ 8p{-}1,\ 8p,\ 8p{-}4,\ 8p{-}5,\ 8p{-}6,\ 8p{-}10,\ 8p{-}9,\ 8p-8,\ 8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14,\ 8p-18,\ 8p-17,\ 8p-16,\ \ldots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 4}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů
  $1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 8p{+}1,\ 8p{+}2,\ 8p{+}3,\ 8p{+}4,\ 8p,\ 8p{-}1,\ 8p{-}2,\ 8p{-}6,\ 8p{-}5,\ 8p{-}4,\ 8p{-}8,\ 8p{-}9,\ 8p{-}10,\ 8p{-}14,\ 8p{-}13,\ 8p{-}12,\ \ldots, 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1.$

- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 6}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 8p+1,\ 8p+5,\ 8p+6,\ 8p+2,\ 8p+3,\ 8p+4,\ 8p,\ 8p-1,\ 8p-2,\ 8p-6,\ 8p-5,\ 8p-4,\ 8p-8,\ 8p-9,\ 8p-10,\ 8p-14,\ 8p-13,\ 8p-12,\ \ldots, 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1$.

Ukázky takových kružnic jsou zobrazeny na obrázku 7.

Díky sudosti délek hledaných kružnic nám stačí pouze výše uvedené čtyři případy a máme všechny takové kružnice v grafu G popsané. Zbývá nám dokázat, že první dvě posloupnosti vždy na konci obsahují trojici po sobě jdoucích vrcholů $4,\ 3,\ 2$ a zbylé dvě posloupností $10,\ 11,\ 12$. V každé posloupnosti existují trojice po sobě jdoucích vrcholů $(i,\ i-1,\ i-2)$, respektive $(i,\ i+1,\ i+2)$, kde $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$.

- Pro $\mathbf{m = 8p}$ a $\mathbf{m = 8p + 2}$ to jsou trojice $(8p-4,\ 8p-5,\ 8p-6)$, $(8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14)$ atd., tedy trojice, kdy $i \equiv 4 \pmod 8$, $i-1 \equiv 3 \pmod 8$ a $i-2 \equiv 2 \pmod 8$.
- Pro $\mathbf{m = 8p + 4}$ a $\mathbf{m = 8p + 6}$ to jsou trojice $(8p-6,\ 8p-5,\ 8p-4)$, $(8p-14,\ 8p-13,\ 8p-12)$ atd., tedy trojice, kdy $i \equiv 2 \pmod 8$, $i+1 \equiv 3 \pmod 8$ a $i+2 \equiv 4 \pmod 8$. ■



Obrázek 7: Graf $C_{24}(1,4)$ s kružnicemi C_{16} (vlevo nahoře), C_{18} (vpravo nahoře), C_{20} (vlevo dole) a C_{22} (vpravo dole).

Další tvrzení řeší existenci lichých kružnic v grafu $C_n(1,4)$. Díky sudému druhému kroku není tento graf pro sudé n bipartitní, tedy nemusíme pro liché kružnice graf rozdělovat podle sudých a lichých n jako u grafu $C_n(1,3)$. Ukážeme, že v grafu $C_n(1,4)$ existují kružnice všech lichých délek kromě kružnice C_3.

Tvrzení 6.8. *Nechť G je graf $C_n(1,4)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 8$. Pak v grafu existují kružnice všech lichých délek mimo C_3.*

Důkaz. Hledáme v grafu $C_n(1,4) = G$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m liché a $3 < m \leq n$. Zřejmě graf G neobsahuje kružnici C_3. Pro $m \in \{5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$ vypadají kružnice C_m v grafu G následovně:

$C_5 : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1$
$C_7 : 1,\ 5,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1$
$C_9 : 1,\ 5,\ 9,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1$
$C_{11} : 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_{13} : 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_{15} : 1,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 15,\ 14,\ 13,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1$

Všechny další kružnice mají předpis podle dělitelnosti čísla m osmi, kde $p \in \mathbb{N},\ p > 1$.

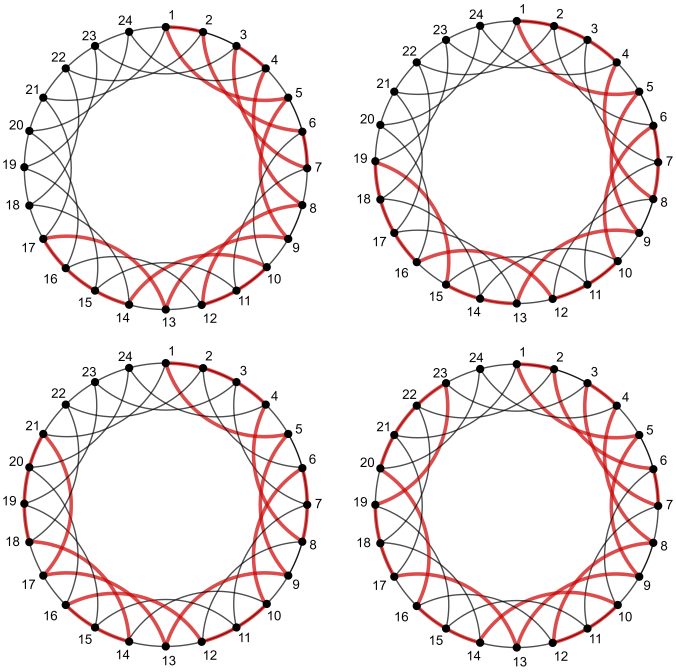
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 1}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 8p+1,\ 8p,\ 8p-1,\ 8p-2,\ 8p-6,\ 8p-5,\ 8p-4,\ 8p-8,\ 8p-9,\ 8p-10,\ 8p-14,\ 8p-13,\ 8p-12,\ \ldots,\ 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 3}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 8p-3,\ 8p-2,\ 8p-1,\ 8p+3,\ 8p+2,\ 8p+1,\ 8p,\ 8p-4,\ 8p-5,\ 8p-6,\ 8p-10,\ 8p-9,\ 8p-8,\ 8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14,\ 8p-18,\ 8p-17,\ 8p-16,\ \ldots,\ 12,\ 11,\ 10,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 5}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 8p+1,\ 8p+5,\ 8p+4,\ 8p+3,\ 8p+2,\ 8p-2,\ 8p-1,\ 8p,\ 8p-4,\ 8p-5,\ 8p-6,\ 8p-10,\ 8p-9,\ 8p-8,\ 8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14,\ 8p-18,\ 8p-17,\ 8p-16,\ \ldots,\ 12,\ 11,\ 10,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$
- Pokud je $\mathbf{m = 8p + 7}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 8p+1,\ 8p+2,\ 8p+3,\ 8p+7,\ 8p+6,\ 8p+5,\ 8p+4,\ 8p,\ 8p-1,\ 8p-2,\ 8p-6,\ 8p-5,\ 8p-4,\ 8p-8,\ 8p-9,\ 8p-10,\ 8p-14,\ 8p-13,\ 8p-12,\ \ldots, 10,\ 11,\ 12,\ 8,\ 4,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2,\ 1.$

Ukázky takových kružnic jsou zobrazeny na obrázku 8.

Díky lichosti hledaných kružnic nám stačí pouze výše uvedené čtyři případy a máme všechny takové kružnice v grafu G popsané. Zbývá nám dokázat, že druhá a třetí posloupnost vždy na konci obsahuje trojici po sobě jdoucích vrcholů $4,\ 3,\ 2$ a zbylé dvě posloupnosti sekvenci $10,\ 11,\ 12$. V každé posloupnosti existují trojice po sobě jdoucích vrcholů $(i,\ i-1,\ i-2)$, respektive $(i,\ i+1,\ i+2)$, kde $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$.

- Pro $\mathbf{m = 8p + 3}$ a $\mathbf{m = 8p + 5}$ to je trojice $(8p-4,\ 8p-5,\ 8p-6)$, $(8p-12,\ 8p-13,\ 8p-14)$ atd., tedy trojice, kdy $i \equiv 4 \pmod 8$, $i-1 \equiv 3 \pmod 8$ a $i-2 \equiv 2 \pmod 8$.

- Pro $\mathbf{m = 8p + 1}$ a $\mathbf{m = 8p + 7}$ to je trojice $(8p - 6,\ 8p - 5,\ 8p - 4)$, $(8p - 14,\ 8p - 13,\ 8p - 12)$ atd., tedy trojice, kdy $i \equiv 2 \pmod 8$, $i + 1 \equiv 3 \pmod 8$ a $i + 2 \equiv 4 \pmod 8$. ■



Obrázek 8: Graf $C_{24}(1, 4)$ s kružnicemi C_{17} (vlevo nahoře), C_{19} (vpravo nahoře), C_{21} (vlevo dole) a C_{23} (vpravo dole).

Cirkulanty $C_n(1, 4)$ podle předchozího tvrzení nejsou pancyklické ani bipancyklické a tedy ani hranově pancyklické a hranově bipancyklické, protože neobsahují kružnici délky 3.

Nyní se zaměříme na cirkulanty se skoky 1 a 5. Ukážeme, že v takovém grafu opět existují kružnice všech sudých délek.

Tvrzení 6.9. *Nechť G je graf $C_n(1, 5)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 9$. Pak v grafu G existují kružnice všech sudých délek.*

Důkaz. Hledáme v grafu $C_n(1, 5) = G$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m sudé a $2 < m \leq n$. Pro $m \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\}$ vypadají kružnice C_m v grafu G následovně:

$C_4 : 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 1$
$C_6 : 1,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_8 : 1,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 8,\ 7,\ 2,\ 1$
$C_{10} : 1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_{12} : 1,\ 6,\ 11,\ 12,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$

$C_{14}: 1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 14,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_{16}: 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 15,\ 14,\ 13,\ 12,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$C_{18}: 1,\ 6,\ 11,\ 12,\ 13,\ 18,\ 17,\ 16,\ 15,\ 14,\ 9,\ 10,\ 5,\ 4,\ 3,\ 8,\ 7,\ 2,\ 1$

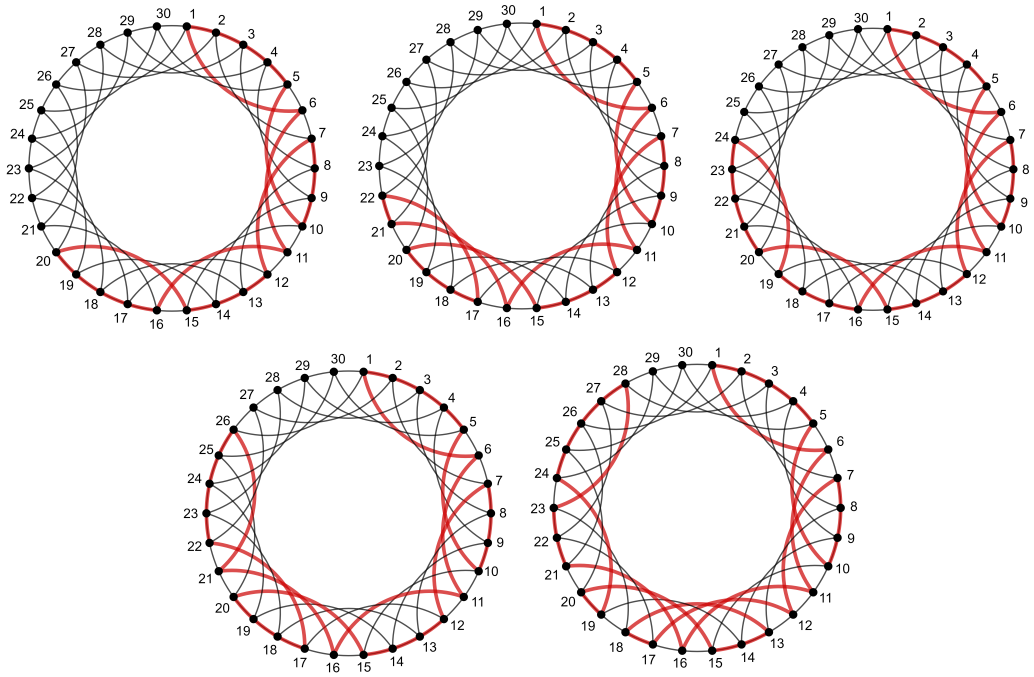
Všechny další kružnice mají předpis podle dělitelnosti čísla m deseti, kde $p \in \mathbb{N},\ p > 1$.

- Pokud je $\mathbf{m = 10p}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 10p-4,\ 10p-3,\ 10p-2,\ 10p-1,\ 10p,\ 10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-8,\ 10p-13,\ 10p-12,\ 10p-11,\ 10p-10,\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.
- Pokud je $\mathbf{m = 10p + 2}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 10p+1,\ 10p+2,\ 10p-3,\ 10p-2,\ 10p-1,\ 10p,\ 10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-8,\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.
- Pokud je $\mathbf{m = 10p + 4}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 10p-4,\ 10p-3,\ 10p-2,\ 10p-1,\ 10p+4,\ 10p+3,\ 10p+2,\ 10p+1,\ 10p,\ 10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-8,\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.
- Pokud je $\mathbf{m = 10p + 6}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 10p+6,\ 10p+5,\ 10p+4,\ 10p+3,\ 10p+2,\ 10p-3,\ 10p-2,\ 10p-1,\ 10p,\ 10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-8\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$.
- Pokud je $\mathbf{m = 10p + 8}$, pak je kružnice C_m dána posloupností vrcholů $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 10p+1,\ 10p+2,\ 10p+3,\ 10p+8,\ 10p+7,\ 10p+6,\ 10p+5,\ 10p+4,\ 10p-1,\ 10p,\ 10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-2,\ 10p-3,\ 10p-8,\ 10p-13,\ 10p-12,\ 10p-11,\ 10p-10,\ 10p-15,\ 10p-16,\ 10p-17,\ 10p-18,\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2\ ,1$.

Ukázky takových kružnic jsou zobrazeny na obrázku 9.

Díky sudosti délek hledaných kružnic nám stačí pouze výše uvedených pět případů a máme všechny takové kružnice v grafu G popsané. Zbývá nám dokázat, že posloupnosti vždy na konci obsahují čtveřici po sobě jdoucích vrcholů $5,\ 4,\ 3,\ 2$. V každé posloupnosti existují čtveřice po sobě jdoucích vrcholů $(i,\ i-1,\ i-2,\ i-3)$, kde $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$.

- Pro $\mathbf{m} \in \{\mathbf{10p},\ \mathbf{10p+2},\ \mathbf{10p+4},\ \mathbf{10p+6}\}$ to je čtveřice $(10p-5,\ 10p-6,\ 10p-7,\ 10p-8)$ atd., tedy čtveřice, kdy $i \equiv 5 \pmod{10}$, $i-1 \equiv 4 \pmod{10}$, $i-2 \equiv 3 \pmod{10}$ a $i-3 \equiv 2 \pmod{10}$.
- Pro $\mathbf{m = 10p + 8}$ to je čtveřice $(10p-15,\ 10p-16,\ 10p-17,\ 10p-18)$ atd., tedy čtveřice, kdy $i \equiv 5 \pmod{10}$, $i-1 \equiv 4 \pmod{10}$, $i-2 \equiv 3 \pmod{10}$ a $i-3 \equiv 2 \pmod{10}$. ■



Obrázek 9: Graf $C_{30}(1,5)$ s kružnicemi C_{20} (vlevo nahoře), C_{22} (uprostřed nahoře), C_{24} (vpravo nahoře), C_{26} (vlevo dole) a C_{28} (vpravo dole).

Protože $C_{2n}(1,5)$ je bipartitní (viz tvrzení 6.2), nemá smysl řešit existenci lichých kružnic. Platí tedy:

Tvrzení 6.10. *Nechť G je graf $C_{2n}(1,5)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. Potom je G bipartitní.*

Důsledek 6.11. *Nechť G je graf $C_{2n}(1,5)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. Potom je G bipancyklický.*

Tento důsledek je opět přímým důsledkem věty 5.7. Následující věta řeší existenci lichých kružnici v cirkulantech se skoky 1 a 5 a lichým počtem vrcholů.

Tvrzení 6.12. *Nechť G je graf $C_{2n+1}(1,5)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. Pak v grafu G existují kružnice všech lichých délek od C_l do C_{2n+1}, kde:*

- $l = \frac{2n+1}{5}$ *pro* $2n+1 \equiv 0 \pmod 5$,
- $l = \frac{2n+1+4}{5}$ *pro* $2n+1 \equiv 1 \pmod 5$,
- $l = \frac{2n+1+8}{5}$ *pro* $2n+1 \equiv 2 \pmod 5$,
- $l = \frac{2n+1+12}{5}$ *pro* $2n+1 \equiv 3 \pmod 5$,
- $l = \frac{2n+1+16}{5}$ *pro* $2n+1 \equiv 4 \pmod 5$.

Důkaz. Hledáme uvedené liché kružnice v grafu $C_{2n+1}(1,5) = G$. Zřejmě G obsahuje kružnici $C_{2n+1} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1$. Z této kružnice lze postupně vytvořit kratší kružnice odebráním pěti po sobě jdoucích hran se skokem jedna a nahrazením těchto hran jednou hranou se skokem pět. Tím získáme pouze každou druhou lichou kružnici:

$C_{2n+1} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1$
$C_{2n-3} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-3,\ 1$
$C_{2n-7} : 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-8,\ 2n-3,\ 1$
.
.
.

Modifikací kružnice C_{2n+1} a vynechání dvou vrcholů z ní získáme kružnici
$C_{2n-1} : 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1$. Z této kružnice lze opět postupně vytvořit menší kružnice odebráním a nahrazením hran. Získáme tím i zbylé liché kružnice:

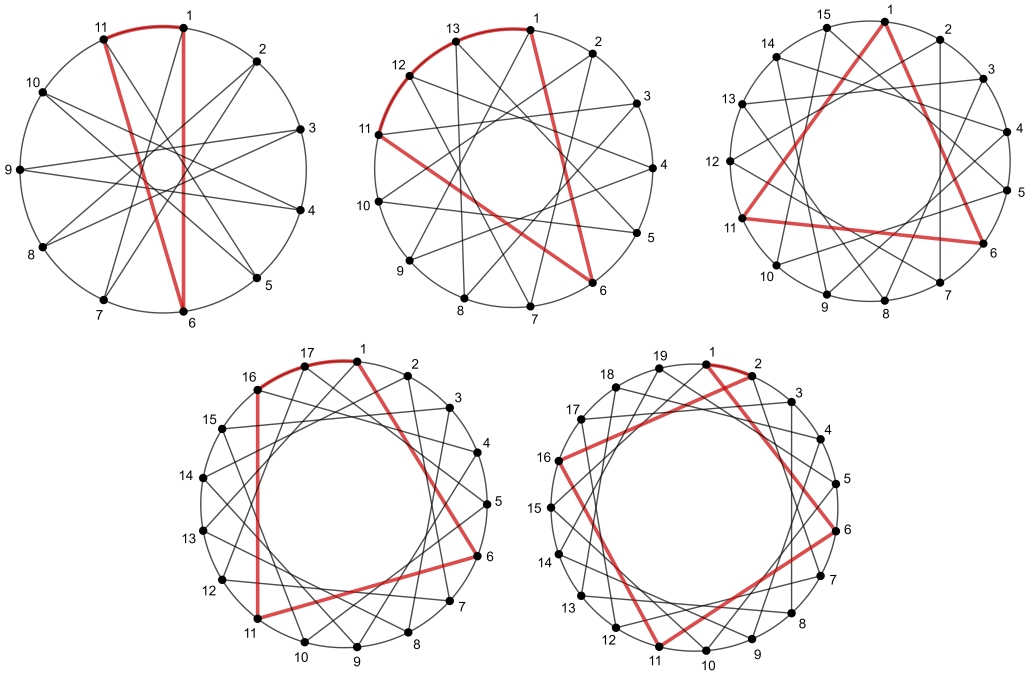
$C_{2n-1} : 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots,\ 2n+1,\ 1$
$C_{2n-5} : 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots,\ 2n-3,\ 1$
$C_{2n-9} : 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots,\ 2n-8,\ 2n-3,\ 1$
.
.
.

Předpisy pro nejkratší kružnice se rozdělí na pět typů řádu grafu G.

- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{0}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{5})$, pak je kružnice $C_{\frac{2n+1}{5}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 6,\ 11, \ldots,\ 2n-3,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{1}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{5})$, pak je kružnice $C_{\frac{2n+1+4}{5}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 6,\ 11, \ldots,\ 2n-4,\ 2n+1,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{5})$, pak je kružnice $C_{\frac{2n+1+8}{5}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 2n,\ 2n+1,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{3}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{5})$, pak je kružnice $C_{\frac{2n+1+12}{5}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n,\ 2n+1,\ 1.$
- Pokud je $(\mathbf{2n+1}) \equiv \mathbf{4}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{5})$, pak je kružnice $C_{\frac{2n+1+6}{5}}$ dána posloupností vrcholů
  $1,\ 6,\ 11,\ \ldots,\ 2n-2,\ 2,\ 1.$

Ukázky takových kružnic jsou zobrazeny na obrázku 10.

Tím jsme našli kružnice všech daných lichých délek v grafu G. Zřejmě v G nebudou existovat kružnice, které jsou delší než $2n+1$. Zbývá nám ukázat, že v grafu G neexistují žádné kružnice liché délky kratší než l. Předpokládejme, že v grafu G existuje kratší kružnice. Označme ji $C_{l'}$, kde $l' \in \mathbb{N}$, l' je liché a $2 < l' < l$. Kružnice C_l je určitě nejkratší kružnice v grafu G, která vznikne průchodem po co největším množství "delších"hran kolem celého grafu G. Kružnice $C_{l'}$ je kratší, tedy celý graf G určitě neobejde a bude existovat pouze na jeho úseku. Tuto kružnici bude potom určitě obsahovat i podgraf H grafu G indukovaný množinou vrcholů $\{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \ 2n-4\}$. Nyní uvažujme graf $C_{2n+2}(1,5)$, zde stejná množina vrcholů indukuje opět podgraf H, u kterého předpokládáme, že obsahuje $C_{l'}$. Potom tedy i graf $C_{2n+2}(1,5)$ musí obsahovat lichou kružnici $C_{l'}$, což je spor s bipartitností grafu $C_{2n+2}(1,5)$ vyplývající z tvrzení 9. Tedy žádná kratší lichá kružnice než C_l v grafu G neexistuje. ■



Obrázek 10: Graf $C_{11}(1,5)$ s kružnicí C_3 (vlevo nahoře), graf $C_{13}(1,5)$ s kružnicí C_5 (uprostřed nahoře), graf $C_{15}(1,5)$ s kružnicí C_3 (vlevo dole), graf $C_{17}(1,5)$ s kružnicí C_5 (vlevo dole) a graf $C_{19}(1,5)$ s kružnicí C_5 (vpravo dole).

Na závěr se zaměřme na obecnější skupinu cirkulantů s jedním skokem jedna a druhým sudým. Ukážeme, že takový cirkulant obsahuje kružnice všech sudých délek.

Věta 6.13. *Nechť G je graf $C_n(1,t)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, t je sudé a $n \geq 2t$. Pak v grafu G existují kružnice všech sudých délek.*

Důkaz. Hledáme v grafu $C_n(1,t) = G$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m sudé, $2 < m \leq n$. Dále platí $m = kt + l$, kde $k,\ l \in \mathbb{N}$, l je sudé a $l < t$. Předpisy kružnic v grafu G pro $mleq2t$ vypadají následovně:

$$\mathbf{C_m = C_{kt+l}} : 1,\ 2, \ldots,\ \tfrac{(kt+l)}{2},\ t + \tfrac{(kt+l)}{2},\ t + \tfrac{(kt+l)}{2} - 1,\ t + \tfrac{(kt+l)}{2} - 2, \ldots,\ t+1,\ 1.$$

Pro větší přehlednost předpisu delších kružnic si zavedeme pomocné cesty v grafu G a nadále budeme dodržovat pořadí jejich vrcholů:

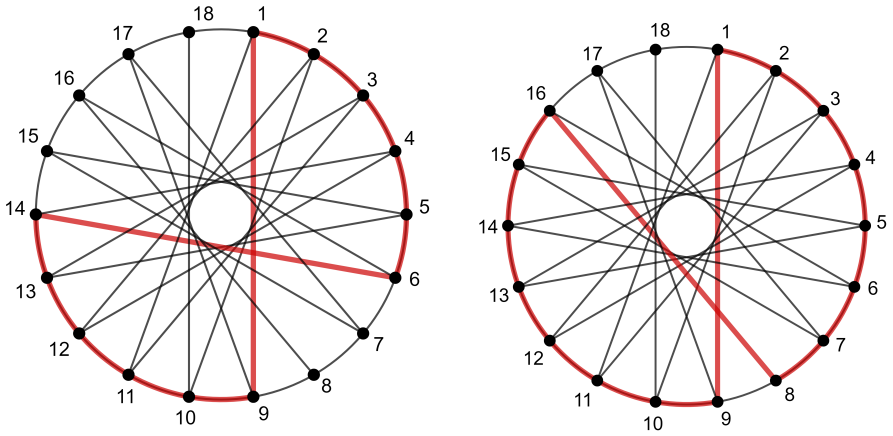
$$\mathbf{P_i} : t + i,\ 2t + i,\ \ldots,\ (k-1)t + i,$$
$$\mathbf{Q_i} : (k-1)t + i,\ (k-2)t + i,\ \ldots,\ t + i.$$

Předpisy ostatních kružnic v grafu G pak vypadají následovně:

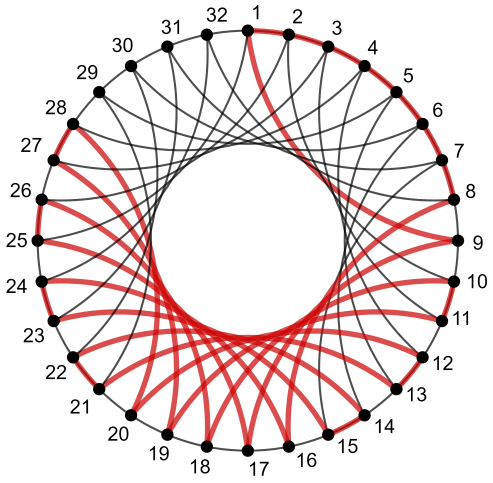
$$\mathbf{C_m = C_{kt+l}} : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ t,\ P_0,\ (k-1)t,\ kt,\ kt-1,\ Q_{t-1},\ 2t-1,\ 2t-2,\ P_{t-2},\ kt-2,\ kt-3,\ Q_{t-3},\ 2t-3,\ \ldots,\ Q_{l+1},\ t+l+1,\ t+l,\ P_l,\ (k-1)t+l,\ kt+l,\ kt+l-1,\ (k-1)t+l-1,\ Q_{l-1},\ t+l-1, \ldots,\ t+2,\ P_2,\ (k-1)t+2,\ kt+2,\ kt+1,\ (k-1)t+1,\ Q_1,\ t+1,\ 1.$$

Ukázky takových kružnic jsou uvedeny na obrázku 11 a 12.

Z uvedeného předpisu je zřejmé, že koncové vrcholy cest Q_i jsou liché a cest P_i jsou sudé, díky tomu na sebe cesty navazují. Navíc jsou použity cesty se všemi indexy od 0 do $t-1$, tedy kružnice projde všechny vrcholy od 1 do $kt + l$. ■



Obrázek 11: Graf $C_{18}(1,8)$ s kružnicí C_{12}, kde $t = 8,\ k = 1$ a $l = 4$ (vlevo), graf $C_{18}(1,8)$ s kružnicí C_{16}, kde $t = 8,\ k = 2$ a $l = 0$ (vpravo).



Obrázek 12: Graf $C_{32}(1,8)$ s kružnicí C_{28}, kde $t = 8,\ k = 3$ a $l = 4$.

Nyní se zaměříme na případ, kdy t je liché. Opět podle tvrzení 6.2 jsou cirkulanty $C_n(1,t)$ pro sudé n bipartitní. Platí tedy následující tvrzení, které je přímým důsledkem věty 5.7.

Tvrzení 6.14. *Nechť G je graf $C_{2n}(1,t)$, kde $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}, t$ je liché a $n \geq t$. Pak je graf G bipancyklický.*

Zbývá poslední případ, kdy t je liché a cirkulant má lichý počet vrcholů.

Věta 6.15. *Nechť G je graf $C_{2n+1}(1,t)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, t je liché a $n \geq t$. Pak v grafu G existují kružnice všech sudých délek.*

Důkaz. Hledáme v grafu $G = C_{2n+1}(1,t)$ kružnici C_m pro každé $m \in \mathbb{N}$, m sudé, $2 < m \leq n$. Dále platí $m = kt + l$, kde $k,\ l \in \mathbb{N}$, $l < t$. Předpisy kružnic v grafu G pro $m \leq 2t$ vypadají následovně:

$$\mathbf{C_m = C_{kt+l}} : 1,\ 2, \ldots,\ \tfrac{(kt+l)}{2},\ t + \tfrac{(kt+l)}{2},\ t + \tfrac{(kt+l)}{2} - 1,\ t + \tfrac{(kt+l)}{2} - 2, \ldots,\ t+1,\ 1.$$

Pro větší přehlednost předpisu delších kružnic si zavedeme pomocné cesty v grafu G a nadále budeme dodržovat pořadí jejich vrcholů:

$\mathbf{P_i} : t + i,\ 2t + i,\ \ldots,\ (k-1)t + i,$
$\mathbf{Q_i} : (k-1)t + i,\ (k-2)t + i,\ \ldots,\ t + i.$

Předpisy ostatních kružnic v grafu G (pro $k \geq 2$ mimo $kt + l = 2t$) se rozdělí na dva případy, kdy k je liché a k je sudé:

1. k **je liché**, tedy i l je liché.
   Předpisy sudých kružnic pro dané k vypadají následovně:

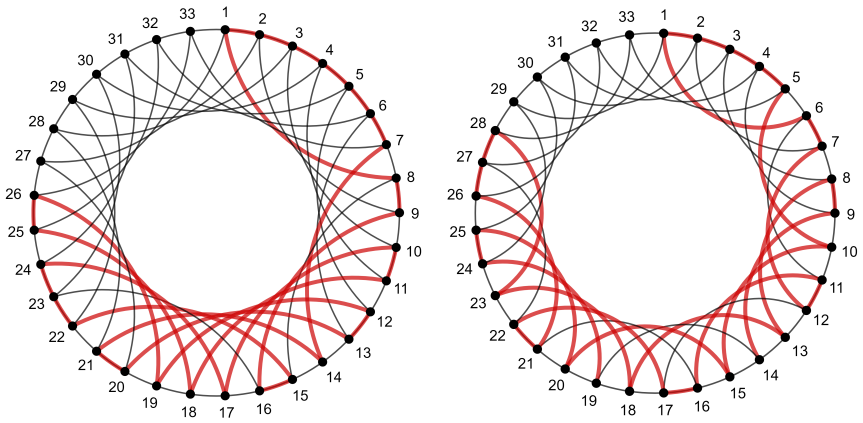
$\mathbf{C_m = C_{kt+l}} : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ t,\ P_0,\ (k-1)t,\ kt,\ kt-1,\ Q_{t-1},\ 2t-1,\ 2t-2,\ P_{t-2},\ kt-2,\ kt-3,\ Q_{t-3},\ 2t-3,\ \ldots,\ Q_{l+1},\ t+l+1,\ t+l,\ P_l,\ (k-1)t+l,\ kt+l,\ kt+l-1,\ (k-1)t+l-1,\ Q_{l-1},\ t+l-1,\ldots,\ t+3,\ P_3,\ (k-1)t+3,\ kt+3,\ kt+2,\ kt+1,\ (k-1)t+1,\ (k-1)t+2,\ (k-2)t+2,\ (k-2)t+1,\ \ldots,\ 2t+1,\ 2t+2,\ t+2,\ t+1,\ 1.$

Ukázky takových kružnic jsou uvedeny na obrázku 13. Z uvedeného předpisu je zřejmé, že koncové vrcholy cest Q_i jsou liché a cest P_i jsou sudé, díky tomu na sebe cesty navazují. Navíc jsou použity cesty se všemi indexy od 0 do $t-1$ až na 1 a 2. Úsek za cestou P_3 popisuje průchod vrcholů $xt+1$ a $xt+2$ ($x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < k$), tedy kružnice projde všechny vrcholy od 1 do $kt+l$.

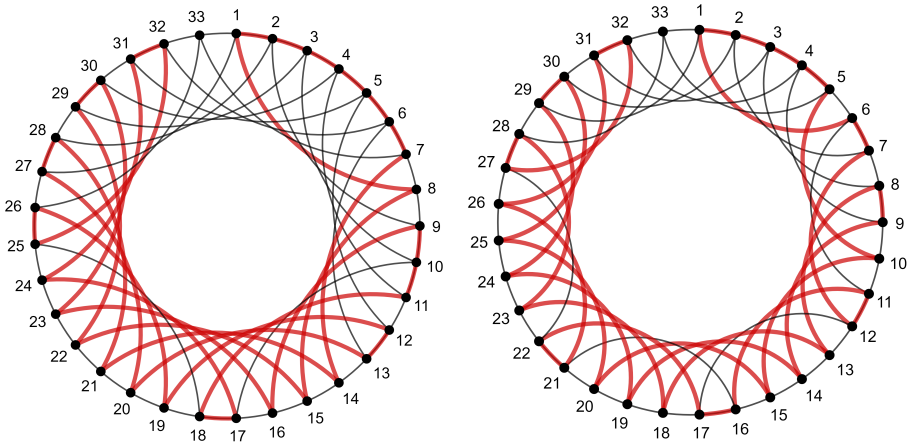
2. k **je sudé**, tedy i l je sudé.
Předpisy sudých kružnic pro dané k vypadají následovně:

$\mathbf{C_m = C_{kt+l}} : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ t,\ P_0,\ (k-1)t,\ kt,\ kt-1,\ Q_{t-1},\ 2t-1,\ 2t-2,\ P_{t-2},\ kt-2,\ kt-3,\ Q_{t-3},\ 2t-3,\ \ldots,\ Q_{l+2},\ t+l+2,\ t+l+1,\ P_{l+1},\ (k-1)t+l+1,\ (k-1)t+l,\ kt+l,\ kt+l-1,\ (k-1)t+l-1,\ (k-2)t+l-1,\ (k-2)t+l,\ (k-3)t+l,\ (k-3)t+l-1,\ (k-4)t+l-1,\ (k-4)t+l,\ (k-5)t+l,\ldots,\ t+l,\ t+l-1,\ t+l-2,\ P_{l-2},\ (k-1)t+l-2,\ kt+l-2,\ kt+l-3,\ (k-1)t+l-3,\ Q_{l-3},\ t+l-3,\ldots,\ t+2,\ P_2,\ (k-1)t+2,\ kt+2,\ kt+1,\ (k-1)t+1,\ Q_1,\ t+1,\ 1.$

Ukázky takových kružnic jsou uvedeny na obrázku 14. Z uvedeného předpisu je zřejmé, že koncové vrcholy cest Q_i jsou sudé a cest P_i jsou liché, díky tomu na sebe cesty navazují. Navíc jsou použity cesty se všemi indexy od 0 do $t-1$ až na l a $l-1$. Úsek za cestou P_{l+1} popisuje průchod vrcholů $xt+l$ a $xt+l-1$ ($x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < k$), tedy kružnice projde všechny vrcholy od 1 do $kt+l$. ■



Obrázek 13: Graf $C_{33}(1,7)$ s kružnicí C_{26}, kde $t=7,\ k=3$ a $l=5$ (vlevo), a graf $C_{33}(1,5)$ s kružnicí C_{28}, kde $t=5,\ k=5$ a $l=3$ (vpravo).



Obrázek 14: Graf $C_{33}(1,7)$ s kružnicí C_{32}, kde $t = 7,\ k = 4$ a $l = 4$ (vlevo), a graf $C_{33}(1,5)$ s kružnicí C_{32}, kde $t = 5,\ k = 6$ a $l = 2$ (vpravo).

Poznamenejme, že uvedené předpisy kružnic nezávisí na paritě počtu vrcholů grafu. Platí tedy i pro sudé kružnice v cirkulantu se sudým počtem vrcholů a lichým skokem t, o němž hovoří tvrzení 6.14.

7 Závěr

V této práci byly shrnuty dosud známé poznatky o cirkulantech, především o jejich hamiltonovských respektive cyklických vlastnostech. Byla prodiskutována hamiltonovskost a traceabilita toeplitzovských grafů a shrnuta hamiltonovská dekompozice souvislých cirkulantů, rekurzivních cirkulantů s počtem vrcholů $n = cd^m$ a zobecněných rekurzivních cirkulantů.

Sepsali jsme dosud známé výsledky o pancyklických vlastnostech cirkulantů. Postačující podmínka na pancyklicitu pro souvislé cirkulanty je existence trojúhelníku v grafu. Souvislé bipartitní cirkulanty jsou vždy bipancyklické a souvislý cirkulant s alespoň dvěma skoky je hranově bipancyklický. Dále jsme vypsaly nutné a postačující podmínky pancyklicity rekurzivního cirkulantu s počtem vrcholů $n = cd^m$ a zaměřili jsme se na hranovou pancyklicitu a bipancyklicitu. Pro zobecněné rekurzivní cirkulanty je nutná a postačující podmínka pancyklicity existence trojúhelníku v grafu.

Vlastní výsledky věnovaly pozornost cirkulantům $C_n(1, a_2)$, kde $n, a_2 \in \mathbb{N}$ a $n \geq a_2$. Hledání pancyklicity takových cirkulantů dává obecnější výsledky, než které byly známy. Rekurzivní a zobecněné rekurzivní cirkulanty, kterým se pozornost v různých článcích věnovala především, jsou podtřídami cirkulantů $C_n(1, a_2)$. Navíc jsme uvažovali libovolně velký počet vrcholů a pevně danou množinu skoků, zatímco u výše zmiňovaných dvou tříd je počet vrcholů provázán se skoky. Nalezli jsme předpisy sudých kružnic všech délek pro grafy $C_n(1, a_2)$, kde $a_2 = \{2, 3, 4, 5\}$. Zjistili jsme, že cirkulant se sudým počtem vrcholů a lichými kroky je bipartitní a tedy neobsahuje liché kružnice. Pro cirkulanty, které bipartitní nebyly, jsme nalezli předpisy lichých kružnic, kde ne všechny kružnice liché délky v grafu existovaly. Nakonec jsme se zaměřili na sudé kružnice obecně pro graf $C_n(1, a_2)$ a nalezli jsme jejich předpisy. Pozornost by šla dále věnovat lichým kružnicím v grafu $C_n(1, a_2)$ nebo také obecně pancyklicitě cirkulantů $C_n(a_1, a_2)$, kde $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ a $a_1 \neq 1$.

Reference

[1] T. Araki, Edge-pancyclicity of recursive circulants. *Information Processing Letters* **88** (2003), 287-292.

[2] T. Araki, Y. Shibata, Pancyclicity of recursive circulant graphs. *Information Processing Letters* **81** (2002), 187-190.

[3] J .L. Berggren, An Algebraic Characterization of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **7** (1972), 131-134.

[4] D. K. Biss, Hamiltonian decomposition of recursive circulant graphs. *Discrete Mathematics* **214** (2000), 89-99.

[5] F. T. Boesch, A. P. Felzer, A General Class of Invulnerable Graphs. *Networks* **2** (1972), 261-283.

[6] Z. R. Bogdanowicz, Hyper-Hamiltonian circulants. *Journal of Graph Theory* **9**(1) (2021), 185-193.

[7] Z. R. Bogdanowicz, Pancyclicity of connected circulant graphs. *Journal of Graph Theory* **22** (1996), 167-174.

[8] C. Y. Chao, On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society* **158** (1971), 247-256.

[9] Y. C. Chen, T. H. Tsai, Hamiltonian decomposition of generalized recursive circulant graphs. *Information Processing Letters* **116** (2016), 585-589.

[10] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček, Diskrátní matematika. *Plzeň: Západočeská univerzita*, 170s. ISBN: 80-7082-939-7 (2004).

[11] R. van Dal, G. Tijssen, Z. Tuza, J. A. A. van der Veen, C. Zamfirescu, T. Zamfirescu, Hamiltonian properties of Toeplitz graphs. *Discrete Mathematics* **159** (1996), 69-81.

[12] D. Z. Du, D. F. Hsu, Q. Li, J. Xu, A Combinatorial Problem Related to Distributed Loop Networks. *Networks* **20** (1990), 173-180.

[13] C. Heuberger, On hamiltonian Toeplitz graphs. *Discrete Mathematics* **245** (2002), 105-125.

[14] C.Y. Li, S. H. Tang, Y. L. Wang, Pancyclicity on Generalized Recursive Circulant Graphs. *Proceedings of the 27th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*, 118-123.

[15] P. T. Meijer, Connectivities and diameters of circulant graphs. *Msc. Thesis, Simon Frazer University*, Vancouver, Canada (1991) online: `https://summit.sfu.ca/system/files/iritems1/3536/b14086475_A.pdf`.

[16] E. A. Monakhova, A Survey on Undirected Circulant Graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* **04(01)** (2012), 1250002 (30 stránek).

[17] J. H. Park, K. Y. Chwa, Recursive Circulant: A New Topology for Multicomputer Networks (Extended Abstract). *Proceedings of the International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks (ISPAN)* (1994), 73-80.

[18] L. D. Penso, D. Rautenbach, J. L. Szwarcfiter, Connectivity and diameter in distance graphs. *Networks* **57**(4) (2011), 310-315.

[19] S. M. Tang, Y. L. Wang, C. Y. Li, Cycle Embedding in Generalized Recursive Circulant Graphs. *IEICE Transactions on Information and Systems* **12** (2018), 2916-1921.

[20] S. M. Tang, Y. L. Wang, C. Y. Li, Generalized Recursive Circulant Graphs. *IEICE Transactions on Information and Systems* **23(1)** (2012), 87-93.

[21] J. Turner, Point-Symmetric Graphs with a Prime Number of Points. *Journal of Combinatorial Theory* **3** (1967), 136-145.

[22] J. F. Wang, An Investigation of the Network Reliability Properties of Circulant Graphs. *Doctoral dissertation, Stevens Institute of Technology*, New Jersey, USA (1983).

[23] M. E. Watkins, Connestivity of Transitive Graphs. *Journal of Combinatorial theory* **8** (1970), 23-29.

[24] C. K. Wong, D. Coppersmith, A Combinatorial Problem Related to Multimodule Memory Organization. *Journal of the Association for Computing Machinery* **21** (1974), 392-402.