Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Bakalářská práce

S-pakovací hranové barvení grafů

2022

Karolína Baborová

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Karolína BABOROVÁ**
Osobní číslo:	**A19B0423P**
Studijní program:	**B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce:	**S-pakovací hranové barvení grafů**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

Tématem této bakalářské práce je studium S-pakovacího hranového barvení grafů, tj. zobecnění známého přípustného barvení. Cílem této práce je zkoumání S-pakovacího chromatického indexu rovinných sítí pro sekvence obsahující pouze 1 a 2. Další část práce by pak měla být věnována hledání známých výsledků z této oblasti.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- J.L. Gross, J. Yellen, Handbook of Graph Theory. Reading (Massachusetts): CRC Press LLC, 2004, ISBN-13 978-1584880905.
- N. Gastineau, O. Togni: On S-packing edge-colourings of cubic graphs. Discrete Applied Mathematics 259 (2019), 63-75.
- H. Hocquard, D. Lajou, B. Lužar: Between proper and strong edge-colorings of subcubic graphs. Lecture Notes in Computer Science 12126 (2020), 355-367.

Další literatura (především časopiseckého charakteru) bude upřesněna v průběhu práce.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Přemysl Holub, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2022**

L.S.

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně s použitím literatury, jejíž úplný seznam je uveden na konci práce.

V .... dne .... Podpis autora ....

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala panu doc. RNDr. Přemyslu Holubovi Ph.D. za vedení mé práce a za veškerou pomoc a čas, který mi věnoval při přípravě mé bakalářské práce.

Abstrakt

Práce se zabývá S-pakovacím hranovým barvením grafů. Nechť $S = (s_1, s_2, s_3, ...)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. S-pakovacím hranovým barvením grafu se rozumí funkce f, která přiřazuje hranám grafu G barvy z množiny $\{1, 2, 3, \dots\}$ v závislosti na dané sekvenci S tak, že každé dvě hrany obarvené barvou i jsou ve vzájemné vzdálenosti alespoň s_i. S-pakovacím chromatickým indexem, který náleží tomuto barvení, se rozumí minimální počet použitých barev k obarvení grafu právě tímto typem hranového barvení. Část práce je věnována rešerši pro sekvenci $S = (1, 1, \dots, 1)$, nebo-li pro přípustné hranové barvení, dále pro sekvenci $S = (2, 2, \dots, 2)$, nebo-li pro silné hranové barvení, pro sekvenci $S = (d, d, \dots, d)$, nebo-li pro distanční hranové barvení a nakonec obecně pro S-pakovací hranové barvení. Přípustnému hranovému barvení se práce věnuje jen letmo. V této práci byly dále dokázány nové výsledky S-pakovacího chromatického indexu pro sekvence obsahující pouze hodnoty 1 a 2 pro čtvercovou a hexagonální síť.

Klíčová slova

Hranové barvení; přípustné hranové barvení; silné hranové barvení; distanční hranové barvení; S-pakovací hranové barvení

Abstract

The thesis deals with S-packing edge colorings of graphs. For a non-decreasing sequence of positive integers $S = (s_1, s_2, s_3, ...)$, an S-packing edge coloring of a graph is a function f that assigns colors from $\{1, 2, 3, \dots\}$ to the edges of the graph depending on the sequence S so that the distance between two edges that have color i is at least s_i. The S-packing chromatic index of G is the smallest number of colors needed to color the edges of G by an S-packing edge coloring. First part of the thesis summarizes some known results for sequences $S = (1, 1, \dots, 1)$ (proper edge coloring), $S = (2, 2, \dots, 2)$ (strong edge coloring), $S = (d, d, \dots, d)$ (distance edge coloring) and finally for S-packing edge coloring. This thesis brings new results on the S-packing edge coloring of square and hexagonal grids for sequences S that contains only the values 1 and 2.

Keywords

Edge coloring; proper edge coloring; strong edge coloring; distance edge coloring; S-packing edge coloring

Obsah

1 Úvod

Barvení grafů je jedním ze základních problémů v teorii grafů. Vrcholové i hranové barvení grafů má v praxi mnoho uplatnění, ať už se jedná o sestavování rozvrhů, plánování různých procesů, uskladňování nebezpečných látek nebo například obarvování map. Zde je známý tzv. „problém čtyř barev," který řeší otázku, zda na obarvení libovolné mapy tak, aby žádné dva sousedící státy nebyly obarveny stejnou barvou, stačí pouze čtyři barvy. Tento problém poprvé vyslovil F. Guthrie v roce 1852 a v roce 1977 byl vyřešen Kenneth Appelem a Wolfgang Hakenem.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s hranovým barvením grafů, speciálně s S-pakovacím hranovým barvením. Nejprve jsou v této práci uvedeny základní pojmy z teorie grafů, které budou v průběhu práce zmíněny. Dále ve třetí kapitole jsou definovány jednotlivé druhy hranových barvení - přípustné hranové barvení, silné hranové barvení, distanční hranové barvení a S-pakovací hranové bravení, které zobecňuje předchozí typy hranových barvení. Tato kapitola je rozdělená na 4 podkapitoly a právě v každé z nich se věnujeme jednomu z již zmíněných druhů hranových barvení. Dále jsou v této kapitole uvedeny již známé výsledky k těmto druhům hranových barvení. Ve čtvrté kapitole uvádíme vlastní výsledky pro S-pakovací hranové barvení sítí. Tato kapitola je rozdělena na 2 podkapitoly. V první podkapitole zkoumáme S-pakovací hranové barvení čtvercové sítě a ve druhé podkapitole se věnujeme S-pakovacímu hranovému barvení šestiúhelníkové sítě.

S-pakovacímu hranovému barvení věnovali především pozornost N. Gastineau a O. Togni [14] ve svém článku, kde uvádějí nové výsledky pro S-pakovací chromatický index kubických grafů a dále pak H. Hocquard, D. Lajou a B. Lužar [16], kteří na ně navázali a zaměřili se na S-pakovací hranové barvení subkubických grafů.

2 Základní pojmy z teorie grafů

V této práci používáme pojmy a definice, z nichž většina byla převzata z [7]. Nejprve ze všeho uvedeme definici grafu. Omezíme se zde na neorientované prosté grafy. *Prostým grafem* je myšlen graf bez násobných hran a smyček. *Graf* G je uspořádaná dvojice množin $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je množina vrcholů grafu G a $E(G)$ je jeho množina hran. Množina hran je podmnožinou množiny všech možných neuspořádaných dvojic různých vrcholů, tedy $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$. *Stupeň vrcholu* v v grafu G je počet hran v grafu, které obsahují vrchol v, značíme $d_G(v)$. *Izolovaným vrcholem* nazýváme vrchol v grafu G, pro který platí, že $d_G(v) = 0$. *Maximálním stupněm grafu* G rozumíme číslo $\max\limits_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$, značíme ho $\Delta(G)$. Graf G nazveme k*-regulární*, pokud každý vrchol má stupeň právě k. *Kubický graf* je takový graf, v němž každý vrchol má stupeň právě 3 a *subkubický graf* je takový graf, v němž každý vrchol má stupeň nejvýše 3.

Podgraf grafu G je graf H, který vznikl tak, že byly odebrány některé vrcholy a hrany původního grafu G. Při odebrání vrcholu je nezbytné smazat všechny hrany incidentní s tímto vrcholem. Podgraf se nazývá indukovaný, pokud byly odebrány pouze tyto hrany. Pokud byly odebrány i jiné hrany, jedná se o podgraf grafu G. Podgraf grafu G, který obsahuje všechny jeho vrcholy se nazývá *faktor grafu* G. Faktor grafu G, v němž každý vrchol je stupně 2, nazveme *2-faktorem* grafu G.

Cesta v grafu G je posloupnost vrcholů $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, pro kterou platí, že $\forall i = 1, ..., n-1 : \{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ a žádné dva vrcholy (a tedy ani hrany) se přitom neopakují. O grafu G řekneme, že je *souvislý*, jestliže pro každé jeho dva vrcholy u a v existuje v G cesta mezi u a v. *Komponenta grafu* je maximální souvislý podgraf grafu G. Pro vrcholy u, v definujeme číslo $\mathrm{dist}_G(u, v)$, které značí délku nejkratší cesty mezi u a v v grafu G. Číslo $\mathrm{dist}_G(u, v)$ se nazývá *vzdálenost vrcholů* u a v v grafu G, pro $u = v$ klademe $\mathrm{dist}_G(u, v)$ rovno nule. *Vzdáleností dvou hran* v grafu G je myšlen počet hran v nejkratší cestě z vrcholu náležejícího jedné hraně do vrcholu náležejícího hraně druhé. *Most* je hrana grafu G, jejímž odstraněním se počet komponent zvýší o jednu.

Kružnice v grafu G je posloupnost vrcholů $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, pro kterou platí, že $\forall i = 1, ..., n-1 : \{x_i, x_{i+1}\} \cup \{x_n, x_1\}$, kde $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$. Nyní definujme další třídu grafů, a to třídu stromů. Graf G nazveme *stromem*, pokud je souvislý a neobsahuje kružnici. Strom T, který je faktorem grafu G, nazýváme *kostrou* grafu G. Graf G nazveme *les*, pokud je neorientovaný a pro libovolné dva vrcholy platí, že jsou spojeny nejvýše jednou cestou. *Obvod grafu* G (značí se $g(G)$) je délka jeho nejkratší kružnice. Pro stromy platí, že mají nekonečný obvod.

Nyní zmíníme speciální třídy grafů. *Rovinný graf* je graf, který je možné nakreslit do roviny tak, že se žádné hrany nekříží. *Bipartitním grafem* označujeme takový graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě disjunktní množiny tak, že žádné dva vrcholy, které náleží stejné množině, nejsou spojeny hranou. *Hranový graf* neorientovaného grafu G je graf $L(G)$, který reprezentuje sousednost mezi hranami grafu G. V hranovém grafu $L(G)$ vrcholy odpovídají hranám původního grafu G a dva vrcholy v grafu $L(G)$ jsou spojeny hranou, pokud odpovídající hrany v G mají společný koncový vrchol. Řekněme, že *cesta na* n *vrcholech* je graf $P_n = (V(P_n), E(P_n))$, kde $V(P_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a $E(P_n) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_{n-1}, x_n\}\}$. Délka cesty P_n je počet hran v cestě P_n a to je tedy $n - 1$. *Nekonečná cesta* je graf

$P_\infty = (V(P_\infty), E(P_\infty))$, kde $V(P_\infty) = \mathbb{Z}$ a $E(P_\infty) = \{i, i+1\}, i \in \mathbb{Z}$. *Kružnice na n vrcholech* pro $n \geq 3$ je graf $C_n = (V(C_n), E(C_n))$, kde $V(C_n) = V(P_n)$ a $E(C_n) = E(P_n) \cup \{\{x_n, x_1\}\}$.

Nyní se zaměříme na barvení grafu. *Vrcholové barvení* grafu definujeme jako zobrazení $f : V(G) \to \mathbb{N}$. Nejznámější vrcholové barvení je přípustné vrcholové barvení. *Přípustné vrcholové barvení* je takové barvení, že pro každé dva sousední vrcholy platí, že nesmí být obarveny stejnou barvou. *Chromatické číslo grafu G* označuje minimální počet barev potřebných pro přípustné vrcholové barvení grafu G a značí se $\chi(G)$. Tato práce se zabývá různými typy hranových barvení, a proto takové barvení grafu definujme. *Hranové barvení grafu G* je zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$.

3 Vybrané typy hranových barvení

V této kapitole jsou popsány typy hranového barvení, které budou v této práci zmíněny. Konkrétně se jedná o přípustné hranové barvení, silné hranové barvení, distanční hranové barvení a S-pakovací hranové barvení, které zobecňuje předchozí typy hranového barvení.

3.1 Přípustné hranové barvení

Prvním a nejvíce zkoumaným typem hranového barvení je přípustné hranové barvení. Stejně jako barvení vrcholů v grafu, má také barvení hran svůj původ v problému „čtyř barev," který řeší, zda každá mapa může být obarvena čtyřmi barvami tak, aby sousední země byly obarveny jinou barvou. Tento problém poprvé nastolil Francis Guthrie v roce 1852. Nyní přípustné hranové barvení definujme.

Definice 3.1. *Přípustným hranovým barvením grafu G* budeme rozumět hranové barvení, kdy každé dvě sousední hrany (hrany se společným vrcholem) mají různé barvy. *Chromatický index grafu G* označuje minimální počet barev potřebných pro přípustné hranové barvení grafu G. Značíme ho $\chi'(G)$.

O tomto typu hranového barvení je už známo spoustu informací a není cílem této práce. Z tohoto důvodu zmíníme jen pár základních poznatků, které se tohoto typu hranového barvení týkají. Jedním ze základních poznatků v této oblasti je Vizingova věta [36].

Věta 3.2. **[36]** *Nechť G je graf, $\Delta(G)$ jeho maximální stupeň. Potom $\chi'(G) = \Delta(G)$ nebo $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

Obecně grafy můžeme rozdělit do dvou tříd. O grafu G řekneme, že je třídy I, pokud $\chi'(G) = \Delta(G)$ a třídy II, jestliže $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Další výsledek dává postačující podmínku pro to, aby byl graf třídy I.

Věta 3.3. **[13]** *Pokud G je graf, kde žádné dva vrcholy maximálního stupně nejsou sousedící, pak G je třídy I.*

Jak uvádí následující věta, známá jako Kőnigova věta [28] o barvení hran, každý bipartitní graf je rovněž třídy I.

Věta 3.4. **[28]** *Nechť G je bipartitní graf, $\Delta(G)$ jeho maximální stupeň. Potom $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

3.2 Silné hranové barvení

Dalším zkoumaným typem hranového barvení je silné hranové barvení. V souvislosti s tímto barvením jsou především známá dvě jména Erdős a Nešetřil, kteří v roce 1985 položili jednu z nejznámějších otázek týkajících se silného chromatického indexu grafů. O tomto barvení je známo mnoho výsledků, ale i přesto je v této oblasti ještě mnoho nezodpovězených otázek. Nejprve ale toto hranové barvení definujme. Tato podkapitola byla inspirována články [8], [31] a [38].

Definice 3.5. *Silným hranovým barvením grafu* je myšleno takové barvení, kdy žádné dvě hrany ve vzdálenosti nejvýše 1 nejsou obarveny stejnou barvou. *Silný chromatický index* označuje minimální počet barev potřebných pro silné hranové obarvení grafu G. Značíme ho $\chi'_s(G)$.

Nejprve se zaměříme na horní odhad pomocí maximálního stupně, podobně jako u Vizingovy věty pro přípustné hranové barvení. Erdős a Nešetřil [10, 11] vyslovili následující hypotézu.

Hypotéza 3.6. [10, 11] *Je-li G graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$, potom platí:*

- $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta(G)^2$, *pokud $\Delta(G)$ je sudý,*
- $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta(G)^2 - 2\Delta(G) + 1)$, *pokud $\Delta(G)$ je lichý.*

Navzdory mnoha snahám je tato hypotéza stále široce otevřená. Jedním z prvních výsledků ve směru této hypotézy je následující tvrzení Molloy a Reed [32] z roku 1997.

Věta 3.7. [32] *Pro každý graf s dostatečně velkým $\Delta(G)$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 1.998\Delta(G)^2$.*

V roce 2015, Bruhn a Joos [5] dokázali silnější hranici pro silný chromatický index. Pro každý graf s dostatečně velkým $\Delta(G)$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 1.93\Delta(G)^2$. Bonamy, Perrett a Postle [3] v roce 2018 dokázali hranici pro silný chromatický index zlepšit a dokázali tak, že pro každý graf s dostatečně velkým $\Delta(G)$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 1.835\Delta(G)^2$. Nejnovější známý výsledek pro horní hranici silného chromatického indexu pro graf s dostatečně velkým maximálním stupněm dokázali Hurley a spol. [24].

Věta 3.8. [24] *Pro každý graf s dostatečně velkým $\Delta(G)$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 1.772\Delta(G)^2$.*

Nyní uvedeme známé výsledky pro malé $\Delta(G)$, tj. $\Delta(G) \in \{3, 4\}$. Andersen a Horák [1, 20] nezávisle na sobě dokázali první z následujících vět, a tím dokázali i hypotézu 3.6 pro subkubické grafy.

Věta 3.9. [1, 20] *Pro každý graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \leq 3$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 10$.*

V roce 1990 Horák [19] dokázal horní hranici silného chromatického indexu pro grafy s maximálním stupněm nejvýše čtyři.

Věta 3.10. [19] *Pro každý graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \leq 4$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 23$.*

Tento výsledek byl později vylepšen Cranstonem [6] v roce 2006, který ukázal, že pro silné hranové obarvení grafu s maximálním stupněm nejvýše čtyři stačí pouze 22 barev. Nejnovější známý výsledek silného chromatického indexu pro grafy s maximálním stupněm nejvýše 4 dokázali Huang, Santana a Yu [21]. Přiblížili se tak hranici 20 barev, kterou uvádí hypotéza 3.6.

Věta 3.11. [21] *Pro každý graf s maximálním stupněm $\Delta(G) \leq 4$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 21$.*

Další věta uvádí horní hranici pro silný chromatický index grafu pomocí maximálního průměrného stupně, který se značí $\mathrm{mad}(G)$ a platí: $\mathrm{mad}(G) = \max\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G\}$.

Věta 3.12. **[37]** *Je-li G graf s obvodem alespoň $2\Delta(G)$ a $\mathrm{mad}(G) < 2 + \frac{1}{3\Delta(G)-2}$, kde $\Delta(G) \geq 4$, potom platí: $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.*

Dále zmíníme výsledky týkající se rovinných grafů. Faudree a spol. [12] dokázali následující větu.

Věta 3.13. **[12]** *Je-li G rovinný graf s maximálním stupěm $\Delta(G)$, potom platí: $\chi'_s(G) \leq 4\Delta(G) + 4$.*

Pokud navíc G je rovinný graf s obvodem alespoň 7, Hudák, Lužar, Soták a Škrekovski [23] dokázali, že $\chi'_s(G) \leq 3\Delta(G)$.

Dále se budeme zabývat poznatky v oblasti silného hranového barvení pro subkubické grafy. Faudree a spol. [12] vyslovili následující hypotézu.

Hypotéza 3.14. **[12]** *Pro každý subkubický graf G platí:*

- $\chi'_s(G) \leq 10$,
- *pokud G je bipartitní, potom $\chi'_s(G) \leq 9$,*
- *pokud G je rovinný, potom $\chi'_s(G) \leq 9$,*
- *pokud G je bipartitní a součet stupňů každé hrany je nejvýše 5, potom $\chi'_s(G) \leq 6$,*
- *pokud G je bipartitní s obvodem alespoň 6, potom $\chi'_s(G) \leq 7$,*
- *pokud G je bipartitní a má dostatečně velký obvod, potom $\chi'_s(G) \leq 5$.*

První čtyři případy z této hypotézy už byly dokázány a budou v této práci ještě zmíněny. Poslední dva případy jsou ale stále otevřené.

Následující věta poskytuje horní hranici silného chromatického indexu v závislosti na velikosti obvodu grafu a na velikosti maximálního průměrného stupně.

Věta 3.15. **[9]** *Pro každý subkubický graf G platí:*

- *pokud obvod je alespoň 7 a $\mathrm{mad}(G) < 2 + \frac{2}{13}$, potom $\chi'_s(G) \leq 7$,*
- *pokud G je rovinný s obvodem alespoň 28, potom $\chi'_s(G) \leq 7$.*

Další věta poskytuje také horní hranici silného chromatického indexu v závislosti na velikosti obvodu grafu a na velikosti maximálního průměrného stupně. Připouští ale grafy s větším obvodem a s menším maximálním průměrným stupněm než věta předchozí.

Věta 3.16. **[37]** *Pro každý subkubický graf G s obvodem alespoň 9 a $\mathrm{mad}(G) < \frac{48}{23}$ platí, že $\chi'_s(G) \leq 5$.*

Nyní zmíníme poslední dvě věty, které uvádějí horní hranice silného chromatického indexu v závislosti na velikosti maximálního průměrného stupně. Hocquard a Valicov [18] dokázali následující větu.

Věta 3.17. [18] *Nechť G je subkubický graf*

- *a* $\mathrm{mad}(G) < 15/7$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 6$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 27/11$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 7$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 13/5$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 8$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 36/13$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 9$.

Další věta uvádí v této oblasti lepší výsledky, než věta předchozí.

Věta 3.18. [17] *Nechť G je subkubický graf*

- *a* $\mathrm{mad}(G) < 7/3$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 6$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 5/2$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 7$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 8/3$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 8$,
- *a* $\mathrm{mad}(G) < 20/7$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 9$.

V důsledku toho Hocquard a Valicov [18] získali následující výsledky týkající se subkubických rovinných grafů.

Věta 3.19. [18] *Nechť G je subkubický rovinný graf*

- *a* $g(G) \geq 30$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 6$,
- *a* $g(G) \geq 11$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 7$,
- *a* $g(G) \geq 9$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 8$,
- *a* $g(G) \geq 8$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 9$.

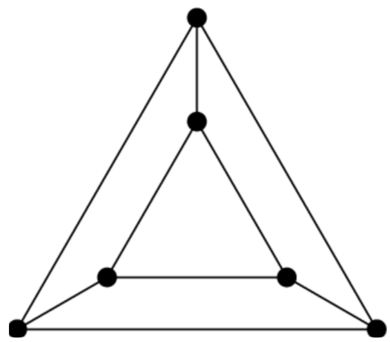
Později byly tyto výsledky vylepšeny na následující.

Věta 3.20. [17] *Nechť G je subkubický rovinný graf*

- *a* $g(G) \geq 14$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 6$,
- *a* $g(G) \geq 10$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 7$,
- *a* $g(G) \geq 8$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 8$,
- *a* $g(G) \geq 7$, *potom* $\chi'_s(G) \leq 9$.

Další věta platící pro subkubické rovinné grafy dokazuje jeden z případů zmíněných v hypotéze 3.14.

Věta 3.21. [29] *Pro každý subkubický rovinný graf platí,že* $\chi'_s(G) \leq 9$.



Obrázek 1: Kubický rovinný graf bez mostu, který potřebuje devět barev pro silné obarvení hran.

Horní hranice je těsná a existuje nekonečně mnoho kubických grafů (bez mostu), které potřebují devět barev pro silné obarvení hran. Příkladem je graf na obrázku 1 [16]. Důvod je takový, že vzdálenost každých dvou hran v tomto grafu je rovna 1.

Nyní uvedeme několik známých výsledků ohledně subkubických bipartitních grafů. Následující věty opět dokazují některé případy zmíněné v hypotéze 3.14. První větu ve svém článku dokázali Steger a Yu [35].

Věta 3.22. **[35]** *Pokud G je subkubický bipartitní graf, potom platí, že* $\chi'_s(G) \leq 9$.

Lin a Wu [30] dokázali další větu, ve které je uvedena horní hranice silného chromatického indexu pro subkubické bipartitní grafy se součtem stupňů každé hrany nejvýše 5.

Věta 3.23. **[30]** *Pokud G je subkubický bipartitní graf a součet stupňů každé hrany je nejvýše 5, potom platí, že* $\chi'_s(G) \leq 6$.

V roce 1990 Faudree a spol. [12] vyslovili následující hypotézu pro bipartitní grafy, která už se netýká jen subkubických grafů.

Hypotéza 3.24. **[12]** *Nechť G je bipartitní graf. Potom* $\chi'_s(G) \leq \Delta(G)^2$.

Nyní se zmíníme o bipartitních množinách X a Y grafu G. Symbolem $\Delta(X)$ (popřípadě $\Delta(Y)$) míníme $\max\limits_{v \in X}\{d_G(v)\}$ (popřípadě $\max\limits_{v \in Y}\{d_G(v)\}$). Brualdi a Massey [4] domněnku 3.24 posílili.

Hypotéza 3.25. **[4]** *Nechť G je bipartitní graf s bipartitními množinami X a Y, potom* $\chi'_s(G) \leq \Delta(X)\Delta(Y)$.

Připomeňme, že Steger a Yu hypotézu 3.25 vyřešili pro $\Delta(X) = \Delta(Y) = 3$ ve větě 3.22. Brualdi a Massey dokázali tuto hypotézu pro graf, který neobsahuje kružnici délky 4 a $\Delta(X) = 2$.

Věta 3.26. **[4]** *Nechť G je bipartitní graf s bipartitními množinami X a Y, nechť $\Delta(X) = 2$, $\Delta(Y) = \Delta$ a G neobsahuje kružnici délky 4. Potom* $\chi'_s(G) \leq 2\Delta$.

Domnívali se také, že v předchozí větě lze 2Δ nahradit $\Delta + 2$.

V roce 2008, Nakprasit [33] dokázal hypotézu 3.25 pro $\Delta(X) = 2$.

Věta 3.27. [33] *Nechť G je bipartitní graf s bipartitními množinami X a Y, nechť $\Delta(X) = 2$, $\Delta(Y) = \Delta$. Potom $\chi'_s(G) \leq 2\Delta$.*

Bensmail, Lagoutte a Valicov [2] dokázali výsledek pro $\Delta(X) = 3$ takový, že pokud G je bipartitní graf s bipartitními množinami X a Y, $\Delta(X) = 3$, $\Delta(Y) = \Delta$, potom $\chi'_s(G) \leq 4\Delta$. Nedokazuje to ovšem hypotézu 3.25. Lepší výsledek uvádějí Huang a spol [22]. Ve svém článku dokázali hypotézu 3.25 pro $\Delta(X) = 3$.

Věta 3.28. [22] *Nechť G je bipartitní graf s bipartitními množinami X a Y, nechť $\Delta(X) = 3$, $\Delta(Y) = \Delta$. Potom $\chi'_s(G) \leq 3\Delta$.*

3.3 Distanční hranové barvení

Další hranové barvení, které zmíníme je distanční hranové barvení, které zahrnuje již zmíněné přípustné hranové barvení a silné hranové barvení. O distančním chromatickém indexu poprvé uvažoval Skupien na počátku 90. let. Narozdíl od distančního barvení vrcholů, o distančním barvení hran toho mnoho dokázáno není. Nyní distanční hranové barvení a distanční chromatický index definujme. Tato podkapitola byla inspirována články [15], [25] a [27].

Definice 3.29. *Distančním hranovým barvením* s parametrem d, kde $d \in \mathbb{N}$, (zkráceně d-distančním hranovým barvením) míníme funkci f, která přiřazuje množině hran barvy (hodnoty) z množiny $\mathbb{N}$ tak, že hrany obarvené stejnou barvou jsou ve vzájemné vzdálenosti alespoň d. *Distanční chromatický index* označuje minimální počet barev potřebných pro distanční hranové obarvení grafu G. Značíme ho $\chi'_d(G)$.

Konkrétně pro $d = 1$ se jedná o přípustné hranové barvení zmíněné výše. Pro $d = 2$ se jedná o silné hranové barvení grafu, které bylo výše také zmíněno. Distanční chromatický index je spojen s vrcholovým barvením mocnin grafu. Poznamenejme, že $\chi'_d(G) = \chi((L(G))^d)$, kde $\chi(.)$ značí chromatické číslo grafu, $L(.)$ značí hranový graf a t-tá mocnina grafu je graf získaný přidáním hran mezi dvojicemi vrcholů ve vzdálenosti nejvýše t. Pokud graf G má maximální stupeň $\Delta(G)$, potom $\chi'_d(G) \leq 2\sum_{j=1}^{d}(\Delta(G)-1)^j + 1$ je triviální horní hranicí d-distančního chromatického indexu grafu G, kde maximální stupeň $(L(G))^d$ je nejvýše $2\sum_{j=1}^{d}(\Delta(G)-1)^j$.

Kaiser a Kang [26] se ve svém článku zaměřili na horní hranici distančního chromatického indexu v závislosti na maximálním stupni grafu. Ukázali dvě horní hranice pro distanční chromatický index. První z následujících vět uvádí hranici distančního chromatického indexu, která je analogií hranice silného chromatického indexu uvedené Molloy a Reedem [32] (viz věta 3.7).

Věta 3.30. [26] *Nechť $\varepsilon = 0.00008$ a nechť $d \geq 2$. Pro graf G s dostatečně velkým maximálním stupněm $\Delta(G)$ platí, že $\chi'_d(G) \leq (2-\varepsilon)\Delta(G)^d$.*

Druhá věta uvádí horní hranici pro grafy s velkým obvodem.

Věta 3.31. [26] *Nechť $d \geq 2$. Pro graf G s dostatečně velkým maximálním stupněm $\Delta(G)$ a s obvodem alespoň $2d+1$ platí, že $\chi'_d(G) = O(\Delta(G)^d/\log\Delta(G))$.*

Nyní se zaměříme na tvrzení, které uvádí dolní hranici pro distanční chromatický index regulárního grafu G. Kang a Manggala [27] poznamenali, že existují grafy (zejména některé specifické Hammingovy grafy), které jsou regulární, libovolně velkého maximálního stupně a platí pro ně následující tvrzení.

Tvrzení 3.32. [27] *Nechť $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Existuje regulární graf G s libovolně velkým maximálním stupněm $\Delta(G)$ takový, že $\chi'_d(G) > \frac{\Delta(G)^d}{(2(d-1)^{d-1})}$.*

Následující tvrzení je pro parametr $d = 3$, které ve svém článku dokázali Kang a Manggala [27].

Tvrzení 3.33. [27] *Existuje regulární bipartitní graf G s libovolně velkým maximálním stupněm $\Delta(G)$ takový, že $\chi'_3(G) = \Delta(G)^3 - \Delta(G)^2 + \Delta(G)$.*

Dále uvedeme známé výsledky v oblasti distančního hranového barvení stromů. Nechť T je strom. Symbolem S_d značíme maximální podstrom T s množinou vrcholů $V(S_d)$ a množinou hran $E(S_d)$ takový, že vzdálenost mezi libovolnými dvěma hranami S_d je nejvýše rovna d.

Tvrzení 3.34. [15] *Nechť $d \in \mathbb{N}$ a T je strom o průměru* $\mathrm{diam}(T)$ *takový, že* $\mathrm{diam}(T) \leq (d+2)$. *Pak $\chi'_d(T) = |E(T)|$.*

Věta 3.35. [15] *Nechť $d \in \mathbb{N}$ a T je strom o průměru* $\mathrm{diam}(T)$ *takový, že* $\mathrm{diam}(T) > (d+2)$. *Pak $\chi'_d(T) = |E(S_d)|$.*

Nyní uvedeme známé výsledky v oblasti distančního hranového barvení pro tzv. „n-dimenzionální mřížku,“ značíme L_n, tj. kartézský součin n nekonečných cest. Například L_2 je čtvercová síť. Předpokládáme, že máme n-rozměrnou mřížku L_n s obvyklým kartézským systémem souřadnic takovým, že euklidovská vzdálenost libovolných dvou sousedních vrcholů je 1. Následující věta se týká silného chromatického indexu n-dimenzionální mřížky.

Věta 3.36. [25] *Pro $n \geq 2$ platí, že $\chi'_2(L_n) = 4n$.*

Následující větu dokázali Tian a Chen [25]. Věta platí pro $d \geq 2$ a rozděluje výsledky pro distanční chromatický index čtvercové sítě na případ, kdy d je liché a na případ, kdy d je sudé.

Věta 3.37. [25] *Nechť $d \geq 2$. Pokud d je liché, potom $\chi'_d(L_2) = (d+1)^2$. Pokud d je sudé, potom $\chi'_d(L_2) = d(d+2)$.*

3.4 S-pakovací hranové barvení

Posledním zmíněným hranovým barvením grafu je tzv. S-pakovací hranové barvení. Pojem S-pakovacího hranového barvení byl zaveden Goddardem a Xu jako zobecnění S-pakovacího chromatického čísla a byl tak motivován S-pakovacím vrcholovým barvením. Nyní se zaměříme na zápis sekvence S. Pro zjednodušení lze opakování čísla v sekvenci S zapsat i pomocí mocnin. Např. $S = (1, 2, 2)$ lze zapsat pomocí mocnin jako $S = (1, 2^2)$. Nejprve definujeme barvu typu t a poté už se zaměříme na samotné S-pakovací hranové barvení a S-pakovací chromatický index.

Definice 3.38. *Barvou typu t* je myšlena barva, pro niž platí, že každé dvě hrany obarvené touto barvou musejí být od sebe ve vzdálenosti nejméně t.

Definice 3.39. Nechť $S = (s_1, s_2, s_3, ...)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. Pojmem *S-pakovací hranové barvení* grafu se rozumí funkce f, která přiřazuje hranám grafu G barvy z množiny $\{1, 2, 3, ...\}$ v závislosti na dané sekvenci S tak, že každé dvě hrany obarvené barvou i jsou ve vzájemné vzdálenosti alespoň s_i. Nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje S-pakovací hranové barvení grafu G barvami $1, 2, ..., k$, nazveme *S-pakovacím chromatickým indexem* a značíme ho $\chi'_S(G)$.

V této části uvedeme známé výsledky o S-pakovacím hranovém barvení (sub)kubických grafů. Pro subkubické grafy podle věty 3.2 platí, že $3 \leq \chi'(G) \leq 4$, proto se budeme zabývat sekvencemi obsahujícími nejvýše tři jedničky. Jako první uvažujme sekvenci $(1, 1, 1, k, k, \ldots, k)$, tedy $(1, 1, 1, k, k, \ldots, k)$-pakovací hranové barvení grafu. Začněme větou pro $k = 2$.

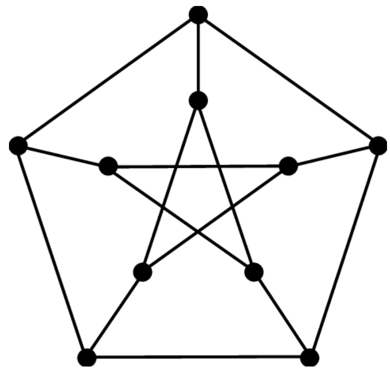
Věta 3.40. **[34]** *Pro každý subkubický graf existuje jeho* $(1, 1, 1, 2)$*-pakovací hranové barvení.*

Ve větě 3.40 nelze 2 změnit na 3 kvůli dvěma speciálním grafům. Jedná se o Petersenův graf (znázorněn na obrázku 2 [16]) a Tietzeho graf (znázorněn na obrázku 3 [16]). Gastineau a Togni [14] však věří, že jejich následující hypotéza je pravdivá.

Hypotéza 3.41. **[14]** *Pro každý kubický graf kromě Petersenova grafu a Tietzeho grafu existuje jeho* $(1, 1, 1, 3)$*-pakovací hranové barvení.*

Dále uvedeme větu pro $k = 3$, kterou Gastineau a Togni [14] dokázali ve svém článku. Tato věta se týká kubických grafů s 2-faktorem.

Věta 3.42. **[14]** *Pro každý kubický graf s 2-faktorem existuje jeho* $(1, 1, 1, 3, 3)$*-pakovací hranové barvení.*

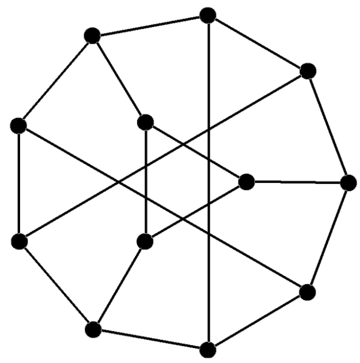


Obrázek 2: Petersenův graf.

Pro $k = 4$ je také snaha minimalizovat počet požadovaných čtyřek tak, aby pro všechny kubické grafy mající 2-faktor existovalo jeho $(1, 1, 1, 4, \ldots, 4)$-pakovací hranové barvení. Nyní uvedeme první výsledek, který platí pro kubické grafy obsahující 2-faktor.

Věta 3.43. **[14]** *Pro každý kubický graf s 2-faktorem existuje jeho* $(1, 1, 1, 4^5)$*-pakovací hranové barvení.*

V tom samém článku Gastineau a Togni [14] také uvedli následující hypotézu.



Obrázek 3: Tietzeův graf.

Hypotéza 3.44. [14] *Pro každý kubický graf existuje jeho* $(1, 1, 1, 4, 4)$*-pakovací hranové barvení.*

Nyní se zaměříme na sekvenci, která obsahuje dvě jedničky, tedy na $(1, 1, k, k, \ldots, k)$-pakovací hranové barvení grafu. Začneme tvrzeními platnými pro $k = 2$. První z těchto tvrzení se týká S-pakovacího hranového barvení kubických grafů obsahující 2-faktor. Pokud je kubický graf s 2-faktorem navíc 3-hranově obarvitelný (je ve třídě I), potom je snížen počet potřebných barev o jednu barvu.

Tvrzení 3.45. [14] *Pro každý kubický graf obsahující 2-faktor existuje jeho* $(1, 1, 2^5)$*-pakovací hranové barvení. Pro každý 3-hranově obarvitelný kubický graf obsahující 2-faktor existuje jeho (1, 1,* 2^4*)-pakovací hranové bravení.*

V následujícím tvrzení jsou uvedeny výsledky týkající se subkubických grafů s obvodem alespoň 7, které jsou podgrafem rovinného grafu obsahující 2-faktor. Výsledky se o jednu barvu zlepšují, pokud rovinný graf neobsahuje most.

Tvrzení 3.46. [14] *Jestliže subkubický graf G s obvodem alespoň 7 je podgrafem rovinného grafu G' obsahující 2-faktor, potom G je obarvitelný* $(1, 1, 2^4)$*-pakovacím hranovým barvením. Navíc pokud G' je graf bez mostu, potom G je obarvitelný* $(1, 1, 2^3)$*-pakovacím hranovým barvením.*

V témže článku Gastineau a Togni vznesli následující domněnku, která se týká kubických a 3-hranově obarvitelných kubických grafů.

Hypotéza 3.47. [14] *Pro každý kubický graf G existuje jeho* $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$*-pakovací hranové barvení. Navíc, je-li G 3-hranově obarvitelný, pak existuje jeho* $(1, 1, 2, 2, 2)$*-pakovací hranové barvení.*

Gastineau a Togni ve svém článku vznesli první tři případy z následující hypotézy. Hocquard, Lajou a Lužar se touto hypotézou zabývali a přidali poslední případ, týkající se S-pakovacího hranového barvení subkubických grafů pro $S = (1, 2^6)$.

Hypotéza 3.48. [14, 16] *Pro každý subkubický graf G existuje jeho*

- $(1, 1, 2^4)$*-pakovací hranové barvení,*

- $(1,1,2^3)$-*pakovací hranové barvení, pokud G je ve třídě I,*
- $(1,2^7)$-*pakovací hranové barvení,*
- $(1,2^6)$-*pakovací hranové barvení, pokud G je ve třídě I.*

Hocquard, Lajou a Lužar [16] ve směru této hypotézy dokázali horní meze o 1 horší (připouštějí jednu barvu navíc).

Tvrzení 3.49. **[16]** *Pro každý subkubický graf G existuje jeho*

- $(1,1,2^5)$-*pakovací hranové barvení,*
- $(1,1,2^4)$-*pakovací hranové barvení, pokud G je ve třídě I,*
- $(1,2^8)$-*pakovací hranové barvení,*
- $(1,2^7)$-*pakovací hranové barvení, pokud G je ve třídě I.*

Dokončíme tuto část uvedením obecných výsledků o požadovaném počtu trojek pro $k=3$ a čtyřek pro $k=4$ tak, aby pro všechny kubické grafy s 2-faktorem existovalo jejich $(1,1,3,...,3)$-pakovací hranové barvení a $(1,1,4,...,4)$-pakovací hranové barvení. Nejprve uvedeme tvrzení, které dokázali Gastineau a Togni ve svém článku a je platné pro $k=3$.

Tvrzení 3.50. **[14]** *Pro každý kubický graf G, který má 2-faktor, existuje jeho $(1,1,3^{11})$-pakovací hranové barvení. Navíc, pokud graf G je 3-hranově obarvitelný, pak existuje jeho $(1,1,3^9)$-pakovací hranové barvení. Také existuje 3-hranově obarvitelný kubický graf, pro který neexistuje jeho $(1,1,3^6)$-pakovací hranové barvení.*

Následující tvrzení bylo dokázáno v téže článku jako předchozí tvrzení, ale je platné pro $k=4$.

Tvrzení 3.51. **[14]** *Pro každý kubický graf G, který má 2-faktor, existuje jeho $(1,1,4^{26})$-pakovací hranové barvení. Navíc, pokud graf G je 3-hranově obarvitelný, pak existuje jeho $(1,1,4^{21})$-pakovací hranové barvení. Také existuje 3-hranově obarvitelný kubický graf, pro který neexistuje jeho $(1,1,4^{14})$-pakovací hranové barvení.*

Nyní se zaměříme na $(1,k,k,\dots,k)$-pakovací hranové barvení grafu, tj. na sekvenci obsahující pouze jednu jedničku. Pro $k=2$ Gastineau a Togni poznamenali, že díky použití hranice silného chromatického indexu, pro každý kubický graf obsahující 2-faktor existuje jeho $(1,2^9)$-pakovací hranové barvení. Pro $k=2$ dokázali i následující tvrzení.

Tvrzení 3.52. **[14]** *Pokud subkubický graf G s obvodem alespoň 7 je podgrafem rovinného kubického grafu G' obsahující 2-faktor, potom pro G existuje jeho $(1,2^7)$-pakovací hranové barvení. Navíc, pokud G' neobsahuje most, existuje pro G jeho $(1,2^6)$-pakovací hranové barvení.*

Na závěr uvedeme tvrzení platné pro sekvence $S=(1,3,...,3)$ nebo $S=(1,4,...,4)$, které přichází s následujícími výsledky.

Tvrzení 3.53. [14] *Pro každý kubický graf G, který má 2-faktor, existuje jeho $(1, 3^{20})$-pakovací hranové barvení a $(1, 4^{47})$-pakovací hranové barvení. Navíc, pokud graf G je 3-hranově obarvitelný, pak existuje jeho $(1, 3^{18})$-pakovací hranové barvení a $(1, 4^{42})$-pakovací hranové barvení. Také existují dva 3-hranově obarvitelný kubické grafy G' a G'' takové, že pro G' neexistuje jeho $(1, 3^{13})$-pakovací hranové barvení a pro G'' neexistuje jeho $(1, 4^{29})$-pakovací hranové barvení.*

4 Vlastní výsledky v oblasti S-pakovacího hranového barvení

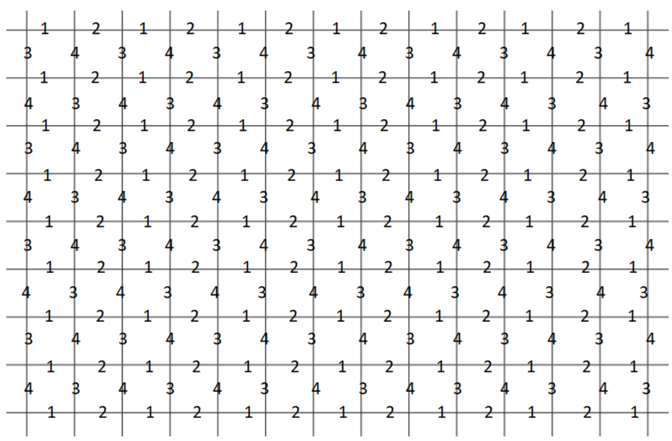
V této kapitole se budeme zabývat S-pakovacím hranovým barvením pro sekvence S obsahující pouze hodnoty 1 a 2, tedy budeme používat barvy typu 1 a 2. Připomeňme - je-li $S = (1, 1, 1, ..., 1)$, jedná se o přípustné hranové barvení, je-li $S = (2, 2, 2, ..., 2)$, jedná se o silné hranové barvení. Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, barvou typu t je myšlena barva, pro níž platí, že každé dvě hrany obarvené touto barvou musejí být od sebe ve vzdálenosti nejméně t.

4.1 Čtvercová síť

Uvažujme nekonečnou čtvercovou síť C v rovině s kartézskou soustavou, kterou tvoří dvě vzájemně kolmé osy, které se protínají v počátku. Můžeme tedy jednoznačně popsat polohu všech vrcholů čtvercové sítě pomocí celočíselných souřadnic, které se zapisují ve tvaru $[x, y]$. Uvažujme $C = (\mathbb{Z}^2, E(C))$. Tedy C lze chápat tak, že $V(C) = \mathbb{Z}^2$ a $\{i, j\} \in E(C)$ je-li ($i_x = j_x$ a $i_y = j_y \pm 1$) nebo naopak ($i_x = j_x \pm 1$ a $i_y = j_y$), kde $i = [i_x, i_y]$ a $j = [j_x, j_y]$.

4.1.1 S=(1,1,1,1)

Toto barvení grafu se nazývá přípustné hranové barvení, které je již zmíněno v kapitole 3 (definice 3.1). Nekonečná čtvercová síť C je bipartitní graf, její maximální stupeň je roven 4. Proto podle věty 3.4 platí $\chi'_S(C) = 4$. Toto obarvení je znázorněno na obrázku 4.



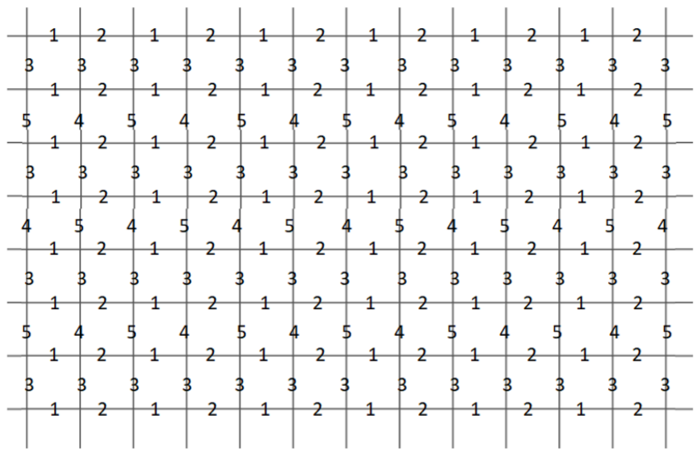
Obrázek 4: Obarvení nekonečné čtvercové sítě pro $S = (1, 1, 1, 1)$.

Má tedy smysl se dále zabývat pouze sekvencemi obsahujícími nejvýše tři jedničky, tj. $S = (1, 1, 1, 2, ..., 2)$, $S = (1, 1, 2, ..., 2)$, $S = (1, 2, ..., 2)$ a $S = (2, 2, ..., 2)$.

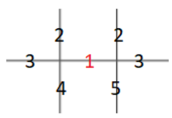
4.1.2 S=(1,1,1,2,...,2)

Platí, že každé dvě sousední hrany musí být obarvené jinou barvou, navíc pokud se jedná o barvy typu 2 (barvy 4, 5, ...), lze dvě hrany obarvit stejnou barvou, jsou-li od sebe ve vzdálenosti nejméně 2.

Tvrzení 4.1. *Nechť C je nekonečná čtvercová síť a $S = (1,1,1,2,...,2)$. Potom $\chi'_S(C) = 5$.*



Obrázek 5: Obarvení nekonečné čtvercové sítě pro $S = (1,1,1,2,2)$.



Obrázek 6: Hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že 5 je minimální možný počet použitých barev. Určitě víme, že v tomto grafu existuje hrana obarvená barvou 1. Uvažujme množinu jejích sousedních hran, kterou označíme N. Zřejmě $|N| = 6$ a každé dvě takové hrany jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 1. Podle podmínek kladených na barvení nelze barvu 1 zopakovat na žádnou hranu z N, barvy 2 a 3 lze na hrany z N použít nejvýše 2x. Protože všechny hrany z N jsou zde od sebe ve vzdálenosti maximálně 1, žádná další barva již nemůže být zopakována (jedná se o barvy typu 2), a proto potřebujeme aspoň 2 další barvy. Tudíž 5 je minimální počet použitých barev na toto obarvení. Na obrázku 6 je ukázána hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

Nyní ukážeme, že 5 barev na příslušné obarvení postačí. Definujme obarvení hran grafu C (viz obrázek 5):

1. Pro vodorovnou hranu $\{i,j\} = \{[i_x,i_y],[i_x+1,i_y]\}$ platí:
   - je-li i_x sudé, tak $c\{i,j\} := 1$.
   - je-li i_x liché, tak $c\{i,j\} := 2$.
2. Pro svislou hranu: $\{i,j\} = \{[i_x,i_y],[i_x,i_y+1]\}$ platí:
   - je-li i_y sudé, tak $c\{i,j\} := 3$.
   - je-li $i_y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i,j\} := 5$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i,j\} := 4$.
   - je-li $i_y \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i,j\} := 4$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i,j\} := 5$.

U hran obarvených barvou 1,2 nebo 3 je z využití sudosti a lichosti patrné, že vzdálenost každých dvou hran obarvených jednou z těchto barev je vždy alespoň 1. Barvami 4 a 5 jsou obarvené pouze svislé hrany. U každých dvou hran obarvených barvou 4, kde první hrana je ve tvaru $\{i_1,j_1\} = \{[i_{x1},i_{y1}],[i_{x1},i_{y1}+1]\}$ a druhá hrana je ve tvaru $\{i_2,j_2\} = \{[i_{x2},i_{y2}],[i_{x2},i_{y2}+1]\}$, mohou nastat tyto případy:

- $|i_{x1} - i_{x2}| \geq 2$, potom vzdálenost hrany $\{i_1,j_1\}$ od hrany $\{i_2,j_2\}$ je alespoň 2,
- $|i_{x1} - i_{x2}| = 1$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 2$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1,j_1\}$ od hrany $\{i_2,j_2\}$ je alespoň 2,
- $i_{x1} = i_{x2}$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 4$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1,j_1\}$ od hrany $\{i_2,j_2\}$ je alespoň 3.

Hrany obarvené barvou 5 jsou analogií hran obarvených barvou 4. Proto popsané hranové barvení je $(1,1,1,2,2)$-pakovacím hranovým barvením.

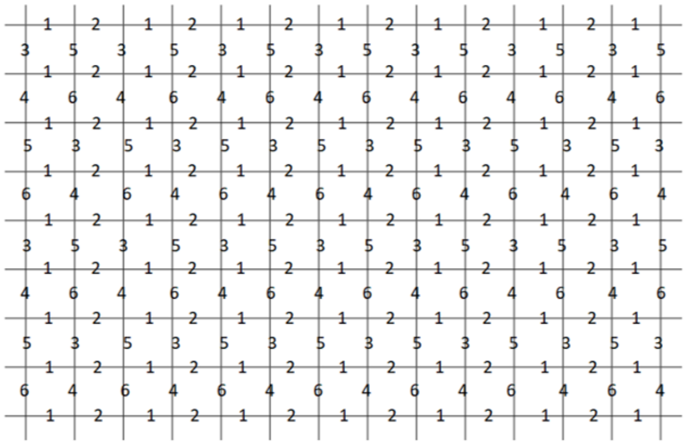
■

4.1.3 S=(1,1,2,...,2)

Platí, že každé dvě sousední hrany musí být obarvené jinou barvou, navíc pokud se jedná o barvu typu 2 (barvy 3,4,...) lze dvě hrany obarvit stejnou barvou, jsou-li od sebe ve vzdálenosti nejméně 2.

Tvrzení 4.2. *Nechť C je nekonečná čtvercová síť a $S = (1,1,2,...,2)$. Potom* $\chi'_S(C) = 6$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že 6 je minimální možný počet použitých barev. Určitě víme, že v tomto grafu existuje hrana obarvená barvou 1. Uvažujme množinu jejích sousedních hran, kterou označíme N. Zřejmě $|N| = 6$ a každé dvě takové hrany jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 1. Podle podmínek kladených na barvení nelze barvu 1 zopakovat na žádnou hranu z N, barvu 2 lze na hrany z N použít nejvýše 2x.



Obrázek 7: Obarvení nekonečné čtvercové sítě pro $S = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$.

Protože všechny hrany z N jsou zde od sebe ve vzdálenosti maximálně 1, žádná další barva již nemůže být zopakována (jedná se o barvy typu 2), a proto potřebujeme aspoň 4 další barvy. Tudíž 6 je minimální počet použitých barev na toto obarvení. Na obrázku 8 je ukázána hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

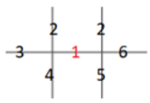
Nyní ukážeme, že 6 barev na příslušné obarvení postačí. Definujme obarvení hran grafu C (viz obrázek 7):

1. Pro vodorovnou hranu $\{i, j\} = \{[i_x, i_y], [i_x + 1, i_y]\}$ platí:
   - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 1$.
   - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 2$.
2. Pro svislou hranu: $\{i, j\} = \{[i_x, i_y], [i_x, i_y + 1]\}$ platí:
   - je-li $i_y \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 6$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 4$.
   - je-li $i_y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 5$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 3$.
   - je-li $i_y \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 4$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 6$.
   - je-li $i_y \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$:
     - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 3$,
     - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 5$.

U hran obarvených barvou 1 a 2 je z využití sudosti a lichosti patrné, že vzdálenost každých dvou hran obarvených jednou z těchto barev je vždy alespoň 1. Barvami 3, 4, 5 a 6 jsou obarvené pouze svislé hrany. U každých dvou hran obarvených barvou 3, kde první hrana je ve tvaru $\{i_1, j_1\} = \{[i_{x1}, i_{y1}], [i_{x1}, i_{y1} + 1]\}$ a druhá hrana je ve tvaru $\{i_2, j_2\} = \{[i_{x2}, i_{y2}], [i_{x2}, i_{y2} + 1]\}$, mohou nastat tyto případy:

- $|i_{x1} - i_{x2}| \geq 2$, potom vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $|i_{x1} - i_{x2}| = 1$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 2$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $i_{x1} = i_{x2}$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 4$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 3.

Hrany obarvené barvou 4, 5 nebo 6 jsou analogií hran obarvených barvou 3. Proto popsané hranové barvení je $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$-pakovacím hranovým barvením.



Obrázek 8: Hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

■

4.1.4 S=(1,2,...,2)

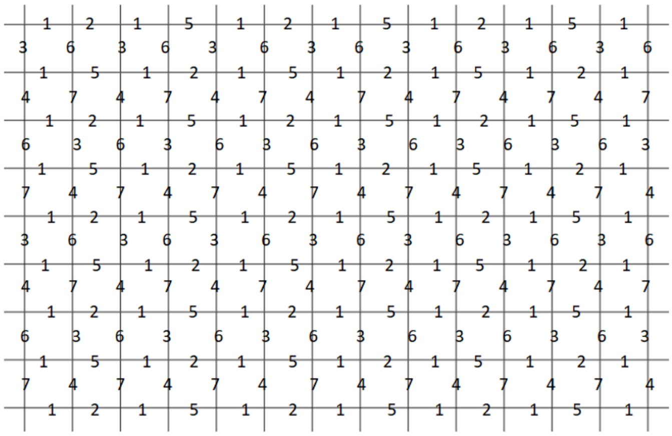
Platí, že každé dvě sousední hrany musí být obarvené jinou barvou, navíc pokud se jedná o barvu typu 2 (barvy 2,3,...), lze dvě hrany obarvit stejnou barvou, jsou-li od sebe ve vzdálenosti nejméně 2.

Tvrzení 4.3. *Nechť C je nekonečná čtvercová síť a $S = (1, 2, ..., 2)$. Potom $\chi'_S(C) = 7$.*

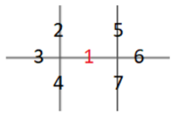
Důkaz. Nejprve dokážeme, že 7 je minimální možný počet použitých barev. Určitě víme, že v tomto grafu existuje hrana obarvená barvou 1. Uvažujme množinu jejích sousedních hran, kterou označíme N. Zřejmě $|N| = 6$ a každé dvě takové hrany jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 1. Podle podmínek kladených na barvení nelze barvu 1 zopakovat na žádnou hranu z N. Protože všechny hrany z N jsou zde od sebe ve vzdálenosti maximálně 1, žádná další barva již nemůže být zopakována (jedná se o barvy typu 2), a proto potřebujeme aspoň 6 dalších barev. Tudíž 7 je minimální počet použitých barev na toto obarvení. Na obrázku 10 je ukázána hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

Nyní ukážeme, že 7 barev na příslušné obarvení postačí. Definujme obarvení hran grafu C (viz obrázek 9):

1. Pro vodorovnou hranu $\{i, j\} = \{[i_x, i_y], [i_x + 1, i_y]\}$ platí:



Obrázek 9: Obarvení nekonečné čtvercové sítě pro $S = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.



Obrázek 10: Hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

- je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 1$.
- je-li $i_x \equiv 1 (\text{mod } 4)$:
  - je-li i_y sudé, tak $c\{i, j\} := 2$,
  - je-li i_y liché, tak $c\{i, j\} := 5$.
- je-li $i_x \equiv 3 (\text{mod } 4)$:
  - je-li i_y sudé, tak $c\{i, j\} := 5$,
  - je-li i_y liché, tak $c\{i, j\} := 2$.

2. Pro svislou hranu: $\{i, j\} = \{[i_x, i_y], [i_x, i_y + 1]\}$ platí:

- je-li $i_y \equiv 0 (\text{mod } 4)$:
  - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 7$,
  - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 4$.
- je-li $i_y \equiv 1 (\text{mod } 4)$:
  - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 6$,
  - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 3$.
- je-li $i_y \equiv 2 (\text{mod } 4)$:
  - je-li i_x sudé, tak $c\{i, j\} := 4$,
  - je-li i_x liché, tak $c\{i, j\} := 7$.

- je-li $i_y \equiv 3 (\bmod 4)$:
  - je-li i_x sudé, tak $c\{i,j\} := 3$,
  - je-li i_x liché, tak $c\{i,j\} := 6$.

U hran obarvených barvou 1 je z využití sudosti patrné, že vzdálenost každých dvou hran obarvených touto barvou je vždy alespoň 1. Barvami 2 a 5 jsou obarvené pouze vodorovné hrany. U každých dvou hran obarvených barvou 2, kde první hrana je ve tvaru $\{i_1, j_1\} = \{[i_{x1}, i_{y1}], [i_{x1}+1, i_{y1}]\}$ a druhá hrana je ve tvaru $\{i_2, j_2\} = \{[i_{x2}, i_{y2}], [i_{x2}+1, i_{y2}]\}$, mohou nastat tyto případy:

- $|i_{y1} - i_{y2}| \geq 2$, potom vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $|i_{y1} - i_{y2}| = 1$, potom z definice barvení je $|i_{x_1} - i_{x_2}| \geq 2$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $i_{y1} = i_{y2}$, potom z definice barvení je $|i_{x_1} - i_{x_2}| \geq 4$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 3.

Hrany obarvené barvou 5 jsou analogií hran obarvených barvou 2. Barvami 3, 4, 6 a 7 jsou obarvené pouze svislé hrany. U každých dvou hran obarvených barvou 3, kde první hrana je ve tvaru $\{i_1, j_1\} = \{[i_{x1}, i_{y1}], [i_{x1}, i_{y1}+1]\}$ a druhá hrana je ve tvaru $\{i_2, j_2\} = \{[i_{x2}, i_{y2}], [i_{x2}, i_{y2}+1]\}$, mohou nastat tyto případy:

- $|i_{x1} - i_{x2}| \geq 2$, potom vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $|i_{x1} - i_{x2}| = 1$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 2$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 2,
- $i_{x1} = i_{x2}$, potom z definice barvení je $|i_{y_1} - i_{y_2}| \geq 4$ a tedy vzdálenost hrany $\{i_1, j_1\}$ od hrany $\{i_2, j_2\}$ je alespoň 3.

Hrany obarvené barvou 4, 6 nebo 7 jsou analogií hran obarvených barvou 3. Proto popsané hranové barvení je $(1,2,2,2,2,2,2)$-pakovacím hranovým barvením.

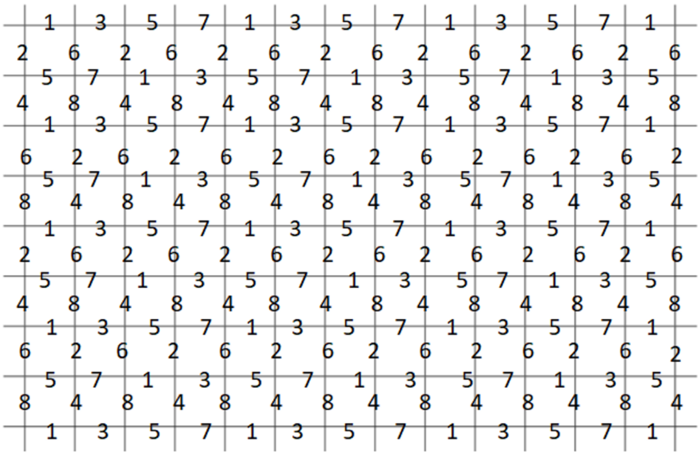
■

4.1.5 S=(2,2,...,2)

Tomuto barvení se říká silné barvení, které je zmíněno v kapitole 3 (definice 3.5).

Tvrzení 4.4. *Nechť C je nekonečná čtvercová síť a existuje její S-pakovací hranové barvení tak, že $S = (2,2,...,2)$. Potom $\chi'_S(C) = 8$.*

Toto tvrzení je v souladu s větou 3.36 uvedenou u distančního hranového barvení v kapitole 3. Obarvení čtvercové sítě pro $S = (2,2,2,2,2,2,2,2)$ je znázorněno na obrázku 11.



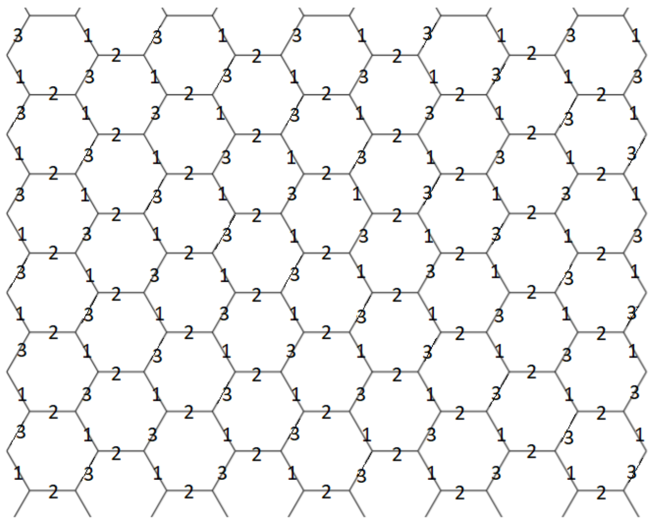
Obrázek 11: Obarvení čtvercové sítě pro $S = (2,2,2,2,2,2,2,2)$.

4.2 Šestiúhelníková síť

Považujme rovinu rozdělenou na pravidelné šestiúhelníky za šestiúhelníkovou síť. Nekonečná šestiúhelníková síť je rovinný graf, v němž každý vrchol má stupeň 3.

4.2.1 S=(1,1,1)

Šestiúhelníková síť H je bipartitní graf, jeho maximální stupeň je roven 3. Proto podle věty 3.4 platí $\chi'_S(H) = 3$. Toto obarvení je znázorněno na obrázku 12. Má tedy smysl se dále zabývat pouze sekvencemi obsahujícími nejvýše dvě jedničky, tj. $S = (1,1,2,...,2), S = (1,2,...,2)$ a $S = (2,2,...,2)$.

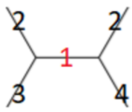


Obrázek 12: Obarvení šestiúhelníkové sítě pro $S = (1,1,1)$.

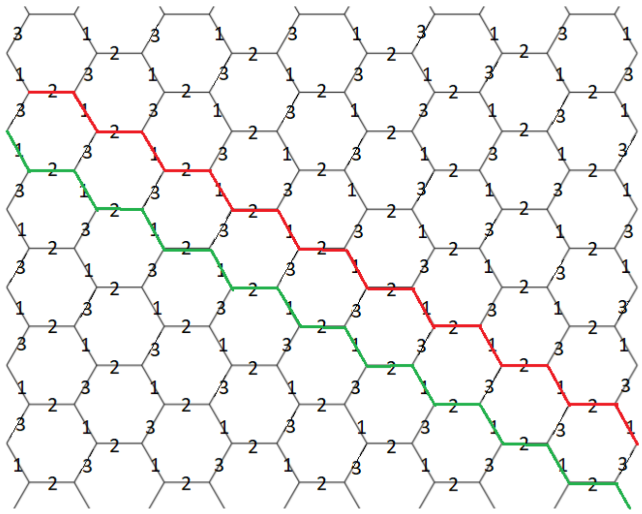
4.2.2 S=(1,1,2,...,2)

Platí, že každé dvě sousední hrany musí být obarvené jinou barvou, navíc pokud se jedná o barvu typu 2 (barvy 3,4,...), lze dvě hrany obarvit stejnou barvou, jsou-li od sebe ve vzdálenosti nejméně 2.

Tvrzení 4.5. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť a $S = (1, 1, 2, ..., 2)$. Potom $\chi'_S(H) = 4$.*



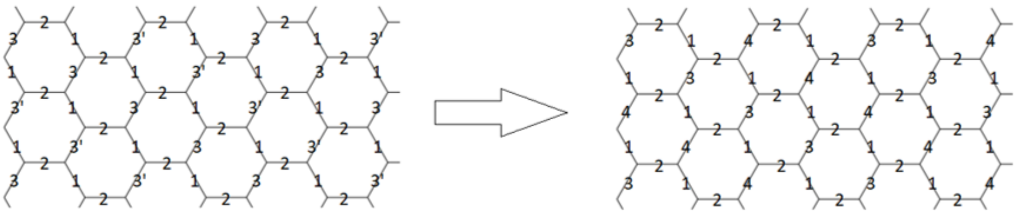
Obrázek 13: Hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.



Obrázek 14: Zvýraznění pásu na obarvené nekonečné šestiúhelníkové síti pro $S = (1, 1, 1)$.

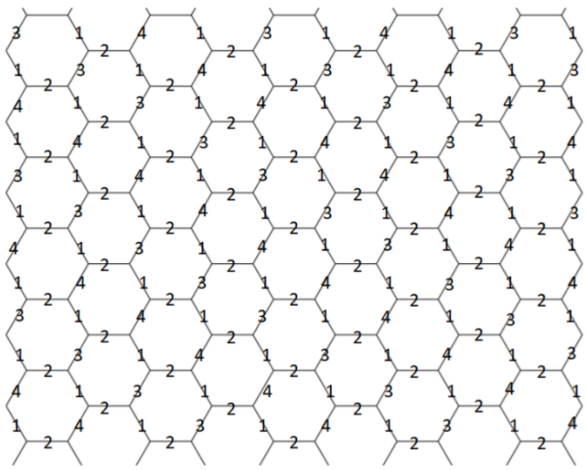
Důkaz. Nejprve dokážeme, že 4 je minimální možný počet použitých barev. Víme, že v tomto grafu existuje hrana obarvená barvou 1. Uvažujme množinu jejích sousedních hran, kterou označíme N. Zřejmě $|N| = 4$ a každé dvě takové hrany jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 1. Podle podmínek kladených na barvení nelze barvu 1 zopakovat na žádnou hranu z N, barvu 2 lze na hrany z N použít nejvýše 2x. Protože všechny hrany z N jsou od sebe ve vzdálenosti maximálně 1, barva 3 už být zopakována nemůže, neboť je typu 2. Proto musí být použita další barva 4. Proto 4 je minimální počet použitých barev na toto barvení. Na obrázku 13 je ukázána hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

Nyní ukážeme, že 4 barvy na příslušné obarvení postačí. Uvažujme obarvení uvedené na obrázku 12 pro $S = (1, 1, 1)$. Víme, že každé dvě hrany obarvené barvou



Obrázek 15: Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě

1,2 nebo 3 jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 1. Považujme červené zvýraznění hran na obrázku 14 za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvou 1 a 2. Dále považujme zelené zvýraznění hran na obrázku 14 také za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvou 1 a 2. Tyto dvě cesty jsou navzájem spojeny hranami obarvenými barvou 3. Tyto dvě cesty spolu se zmiňovanými hranami obarvenými barvou 3 nazveme pásem šestiúhelníkové sítě. Nyní barvu označenou číslem 3 rozložíme na 3 a 3'. Rozložíme ji tak, že pokud v jednom pásu jsou spojující hrany obarvené barvou 3, tak pás nad ním a pás pod ním bude mít spojující hrany obarvené barvou 3'. To znamená, že dva sousedící pásy nemohou mít spojující hrany obarvené stejnou barvou 3 nebo 3'. Tudíž hrany s obarvením 3 budou od sebe ve vzdálenosti alespoň 2 a totéž platí i pro hrany obarvené barvou 3'. Proto barvu 3' můžeme nahradit barvou číslo 4, pro kterou je tedy určitě splněno, že hrany s touto barvou jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 2. Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě tímto postupem, který se na nekonečné šestiúhelníkové síti neustále opakuje je znázorněn na obrázku 15, obarvení většího úseku hexagonální sítě je pak uvedeno na obrázku 16. ■

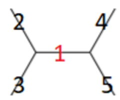


Obrázek 16: Obarvení šestiúhelníkové sítě pro $S = (1, 1, 2, 2)$.

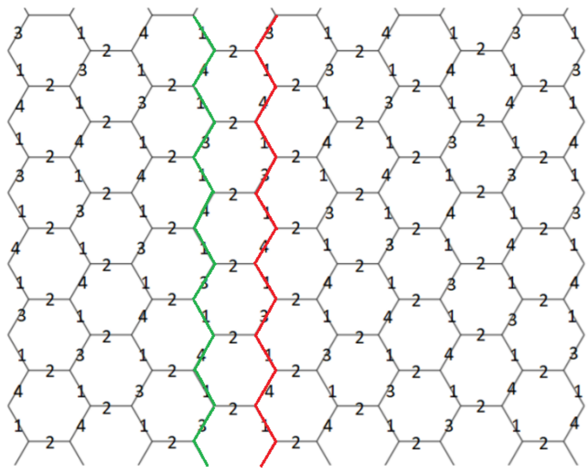
4.2.3 S=(1,2,...,2)

Platí, že každé dvě sousední hrany musí být obarvené jinou barvou, navíc pokud se jedná o barvu typu 2 (barvy 2,3,...), lze dvě hrany obarvit stejnou barvou, jsou-li od sebe ve vzdálenosti nejméně 2.

Tvrzení 4.6. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť a $S = (1, 2, ..., 2)$. Potom $\chi'_S(H) = 5$.*



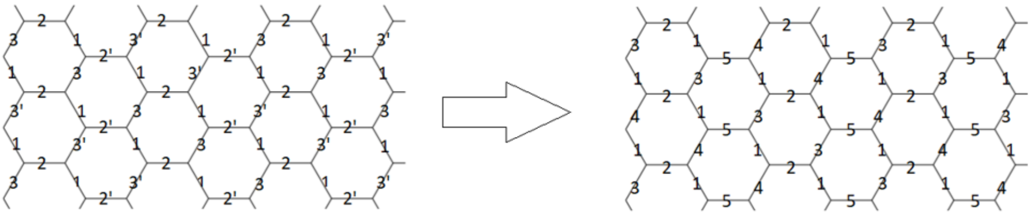
Obrázek 17: Hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.



Obrázek 18: Zvýraznění pásu na obarvené nekonečné šestiúhelníkové síti pro $S = (1, 1, 2, 2)$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že 5 je minimální možný počet použitých barev. Víme, že v tomto grafu existuje hrana obarvená barvou 1. Uvažujme množinu jejích sousedních hran, kterou označíme N. Zřejmě $|N| = 4$ a každé dvě takové hrany jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 1. Podle podmínek kladených na barvení nelze barvu 1 zopakovat na žádnou hranu z N. Protože všechny hrany z N jsou od sebe ve vzdálenosti maximálně 1, žádné další barvy už být zopakovány nemohou, neboť jsou typu 2. Proto musí být použity další 4 barvy. Proto 5 je minimální počet použitých barev na toto barvení. Na obrázku 17 je ukázána hrana s obarvením 1 a její sousední hrany.

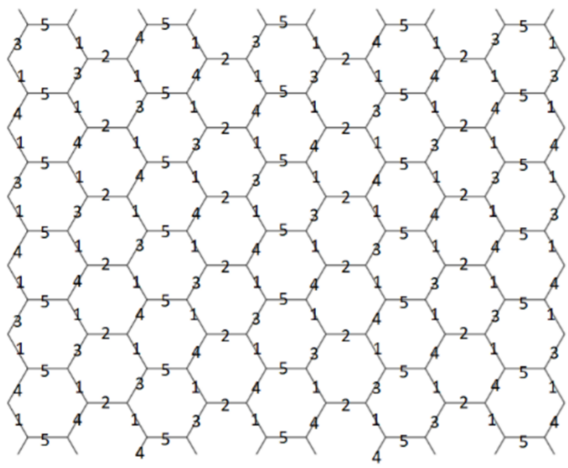
Nyní ukážeme, že 5 barev na příslušné obarvení postačí. Uvažujme obarvení uvedené na obrázku 16 pro $S = (1, 1, 2, 2)$. Víme, že každé dvě hrany obarvené barvou 1 a 2 jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 1 a každé dvě hrany obarvené



Obrázek 19: Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě

barvou 3 a 4 jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 2. Považujme červené zvýraznění hran na obrázku 18 za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvami 1,4,1,3. Dále považujme zelené zvýraznění hran na obrázku 18 také za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvami 3,1,4,1. Tyto dvě cesty jsou navzájem spojeny hranami obarvenými barvou 2. Tyto dvě cesty spolu se zmiňovanými hranami obarvenými barvou 2 nazveme pásem šestiúhelníkové sítě. Nyní barvu označenou číslem 2 rozložíme na 2 a 2'. Rozložíme ji tak, že pokud v jednom pásu jsou spojující hrany obarvené barvou 2, tak pás nad ním a pás pod ním bude mít spojující hrany obarvené barvou 2'. To znamená, že dva sousedící pásy nemohou mít spojující hrany obarvené stejnou barvou 2 nebo 2'. Tudíž hrany s obarvením 2 budou od sebe ve vzdálenosti alespoň 2 a totéž platí i pro hrany obarvené barvou 2'. Proto barvu 2' můžeme nahradit barvou číslo 5, pro kterou je tedy určitě splněno, že hrany s touto barvou jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 2. Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě tímto postupem, který se na nekonečné šestiúhelníkové síti neustále opakuje je znázorněn na obrázku 19, obarvení většího úseku hexagonální sítě je pak uvedeno na obrázku 20.

■

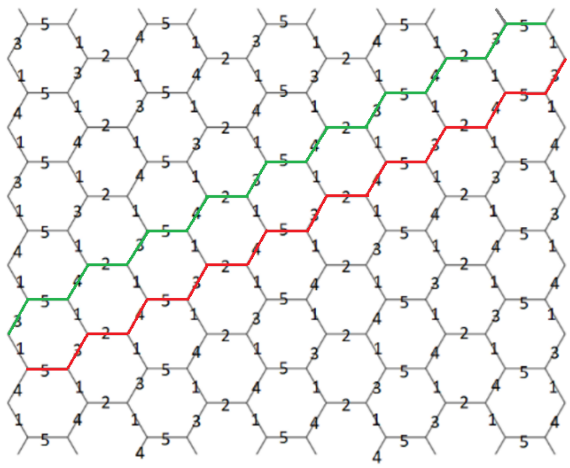


Obrázek 20: Obarvení šestiúhelníkové sítě pro $S = (1, 2, 2, 2, 2)$.

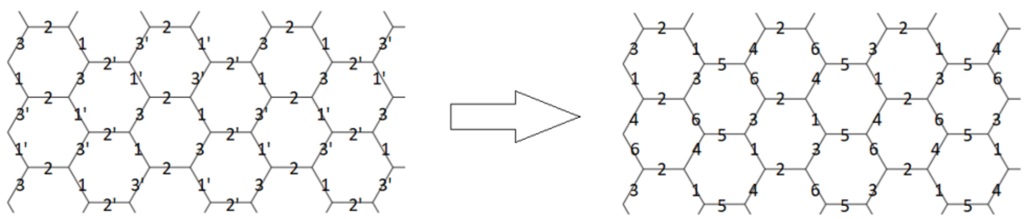
4.2.4 S=(2,2,...,2)

Tomuto barvení se říká silné barvení, které je zmíněno v kapitole 3 (definice 3.5).

Tvrzení 4.7. *Nechť H je nekonečná šestiúhelníková síť a $S = (2, 2, ..., 2)$. Potom* $\chi'_S(H) \leq 6$.



Obrázek 21: Zvýraznění pásu na obarvené nekonečné šestiúhelníkové síti pro $S = (1, 2, 2, 2, 2)$.

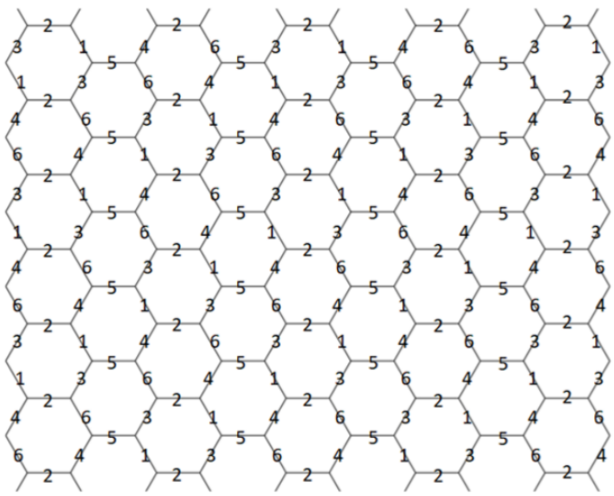


Obrázek 22: Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě.

Důkaz. Nyní ukážeme, že 6 barev na příslušné obarvení postačí. Uvažujme obarvení uvedené na obrázku 20 pro $S = (1, 2, 2, 2, 2)$. Víme, že každé dvě hrany obarvené barvou 1 jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 1 a každé dvě hrany obarvené barvou 2, 3, 4 a 5 jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 2. Považujme červené zvýraznění hran na obrázku 21 za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvami 3,2,4,5. Dále považujme zelené zvýraznění hran na obrázku 21 také za nekonečnou cestu tvořenou hranami, které jsou střídavě obarveny barvami 2,3,5,4. Tyto dvě cesty jsou navzájem spojeny hranami obarvenými barvou 1. Tyto dvě cesty spolu se zmiňovanými hranami obarvenými barvou 1 nazveme pásem šestiúhelníkové sítě. Nyní barvu označenou číslem 1 rozložíme na 1 a 1'. Rozložíme ji tak, že pokud v jednom pásu jsou spojující hrany obarvené barvou 1, tak pás nad ním a pás pod ním bude mít spojující hrany obarvené barvou 1'. To znamená, že dva sousedící pásy nemohou mít spojující hrany obarvené stejnou barvou 1 nebo 1'. Tudíž hrany s obarvením 1 budou od sebe ve vzdálenosti alespoň 2 a totéž platí i pro hrany obarvené barvou 1'. Proto barvu 1' můžeme nahradit barvou číslo 6, pro kterou je tedy určitě splněno, že hrany s touto barvou jsou od sebe ve vzdálenosti nejméně 2. Výstřižek obarvení šestiúhelníkové sítě tímto postupem, který se na nekonečné šestiúhelníkové síti neustále opakuje je znázorněn na obrázku 22, obarvení většího úseku hexagonální sítě je pak uvedeno na obrázku 23.

■

Pokud bychom dosažený výsledek porovnali se známými výsledky uvedenými ve třetí kapitole, dostali bychom pro hexagonální síť o 3 barvy lepší výsledek než uvádí věty 3.21 a 3.22. Také jsme pro hexagonální síť získali hodnotu o 1 nižší, než je uvedeno v pátém podbodu hypotézy 3.14.



Obrázek 23: Obarvení šestiúhelníkové sítě pro $S = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

5 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s některými variantami hranového barvení grafů. Nejprve byly definovány základní pojmy z teorie grafů, které byly v této práci použity. Dále jsme se ve třetí kapitole zaměřili na jednotlivé typy hranových barvení grafů. Tato kapitola byla rozdělena na 4 podkapitoly. První podkapitola byla věnována přípustnému hranovému barvení. Nejprve jsme toto barvení a k němu příslušný chromatický index definovali. Poté jsme se zaměřili na již známé výsledky. O tomto barvení je už známo spoustu informací a nebylo přímo cílem této práce a z tohoto důvodu jsme uvedli pouze pár základních poznatků, které se tohoto typu hranového barvení týkaly. Ve druhé podkapitole jsme představili silné hranové barvení a silný chromatický index. Po definici těchto pojmů zde byly uvedeny obecné výsledky a poté se tato podkapitola zaměřila na výsledky v oblasti silného hranového barvení pro rovinné, (sub)kubické a bipartitní grafy. Ve třetí podkapitole bylo definováno distanční hranové barvení a s ním i distanční chromatický index. Toto barvení zahrnovalo i předchozí typy barvení - přípustné hranové barvení a silné hranové barvení. Nejprve jsme opět uvedli obecně známé výsledky o distančním chromatickém indexu a poté jsme se zaměřili na distanční hranové barvení pro stromy a pro n-dimenzionální mřížky. V poslední podkapitole jsme se seznámili s S-pakovacím hranovým barvením, které zobecňuje předchozí typy hranových barvení. V této podkapitole byla opět uvedena definice S-pakovacího hranového barvení a S-pakovacího chromatického indexu a poté známé výsledky pro (sub)kubické grafy. Některé z těchto výsledků byly následně porovnány s vlastními výsledky. Ve čtvrté kapitole byly uvedeny vlastní výsledky pro S-pakovací hranové barvení sítí. Tato kapitola byla rozdělena na 2 podkapitoly. V první podkapitole bylo zkoumáno S-pakovací hranové barvení pro čtvercové sítě a druhá podkapitole se věnovala S-pakovacímu hranovému barvení šestiúhelníkové sítě.

Reference

[1] L. D. Andersen: The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Mathematics* **108** (1992), 231–252.

[2] J. Bensmail, A. Lagoutte, P. Valicov: Strong edge-coloring of $(3, \Delta)$-bipartite graphs. *Discrete Mathematics* **339** (2016), 391-398.

[3] M. Bonamy, T. Perrett, L. Postle: Colouring Graphs with Sparse Neighbourhoods: Bounds and Applications. *arXiv e-prints*, page arXiv:1810.06704 (2018).

[4] A. T. Brualdi, J. J. Q. Massey: Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics* **122** (1993), 51–58.

[5] H. Bruhn, F. Joos: A stronger bound for the strong chromatic index. *Combinatorics Probability and Computing* **27** (2017), 1-23.

[6] D. W. Cranston: Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Mathematics* **306** (2006), 2772–2778.

[7] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček: Diskrétní matematika *Plzeň: Západočeská univerzita*, 170s. ISBN: 80-7082-939-7 (2004).

[8] S. Dara,S. Mishra,N. Narayanan: Strong Edge Coloring of Cayley Graphs and Some Product Graphs. *Graphs and Combinatorics* **38** (2022).

[9] P. DeOrsey, J. Diemunsch, M. Ferrara, N. Graber, S. G. Hartke, S. Jahanbekam, B. Lidický, L. Nelsen, D. Stolee, E. Sullivan: On the strong chromatic index of sparse graphs, in preparation. *Electronic Journal of Combinatorics* **25** (2018).

[10] P. Erdős: Problems and results in combinatorial analysis and graph theory. *Discrete Mathematics* **72** (1988), 81–92.

[11] P. Erdős, J. Nešetřil: [Problem]. In: G. Halász, V.T. Sós: Irregularities of Partitions. *Springer* (1989), 162-163.

[12] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Z. Tuza: The strong chromatic index of graphs. *Ars Combinatoria* **29** (1990), 205–211.

[13] J. C. Fournier: Coloration des aretes dun graphe. *Cahiers Du CERO* **15** (1973), 311-314.

[14] N. Gastineau, O. Togni: On S-packing edge-colorings of cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics.* **259** (2019), 63–75.

[15] K. Hamamache, S. Hamida, D. Kaouther: Distance-edge-coloring of trees. *International Network Optimization Conference* (2009).

[16] H. Hocquard, D. Lajou, B. Lužar: Between Proper and Strong Edge-Colorings of Subcubic Graphs. *International Workshop on Combinatorial Algorithms*. Springer, Cham (2020), 355-367.

[17] H. Hocquard, M. Montassier, A. Raspaud, P. Valicov: On strong edge-colouring of subcubic graphs. *Discrete Applied Mathematics* **161** (2013), 2467–2479.

[18] H. Hocquard, P. Valicov: Strong edge colouring of subcubic graphs. *Discrete Applied Mathematics* **159** (2011), 1650–1657.

[19] P. Horák: The strong chromatic index of graphs with maximum degree four. *Con-temporary Methods in Graph Theory* (1990), 399–403.

[20] P. Horák, H. Qing, W.T. Trotter: Induced matchings in cubic graphs. *Journal of Graph Theory* **17** (1993), 151–160.

[21] M. Huang, M. Santana, G. Yu: Strong chromatic index of graphs with maximum degree four. *Electronic Journal of Combinatorics* **25** (2018).

[22] M. Huang, G. Yu, X. Zhou: The strong chromatic index of $(3, d)$-bipartite graphs. *Discrete Mathematics* **340** (2017), 1143–1149.

[23] D. Hudák, B. Lužar, R. Soták, R. Škrekovski: Strong edge-coloring of planar graphs. *Discrete Mathematics* **324** (2014), 41–49.

[24] E. Hurley, R. de Joannis de Verclos, R. J. Kang: An improved procedure for colouring graphs of bounded local density. *In Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2021), 135–148.

[25] P. Chen, S. L. Tian: Distance coloring and distance edge-coloring of d-dimensional lattice. *Lecture Notes in Artificial Inteligence* **7390** (2012), 561-568.

[26] T. Kaiser, R. J. Kang: The Distance-t Chromatic Index of Graphs. *Combinatorics, Probability and Computing* **23** (2014), 90-101.

[27] R. J. Kang, P. Manggala: Distance edge-colourings and matchings. *Discrete Applied Mathematics* **160** (2012), 2435-2439.

[28] D. Kőnig: Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok Žs a halmazok elméletére. *Matematikai és Természettudományi Értesítő* **34** (1916), 104-119.

[29] A. V. Kostochka, X. Li, W. Ruksasakchai, M. Santana, T. Wang, G. Yu: Strong chromatic index of subcubic planar multigraphs. *European Journal of Combinatorics* **51** (2016), 380–397.

[30] W. Lin, J. Wu: The strong chromatic index of a class of graphs. *Discrete Mathematics* **308** (2008), 6254–6261.

[31] B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, R. Škrekovski: Strong edge coloring of subcubic bipartite graphs. arXiv preprint arXiv: 1311.668 (2013).

[32] M. Molloy, B. Reed: A bound on the strong chromatic index of a graph. *Journal of Combinatorial Theory* **69** (1997), 103-109.

[33] K. Nakprasit: A note on the strong chromatic index of bipartite graphs. *Discrete Mathematics.* **308** (2008), 3726–3728.

[34] C. Payan: Sur quelques problèmes de couvertures et de couplages en combinatoire. *Thèse d'état* (1977).

[35] A. Steger, M. L. Yu: On induced matchings. *Discrete Mathematics* **120** (1993), 291–295.

[36] V. G. Vizing: On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz* (1964), 25–30.

[37] T. Wang, X. D. Zhao: Odd graph and its application on the strong edge coloring. *Applied Mathematics and Computation* **325** (2018), 246-251.

[38] X. Zhao, X. Zhou: Strong chromatic index of graphs: a short survey. *International Journal of Engineering Research and Science* (2015).