

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Melichar

Maticové populační modely dynamiky lesních ekosystémů

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika a její aplikace

Plzeň 2022

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Ing. Jan MELICHAR, Ph.D.**
Osobní číslo: **A17B0013K**
Studijní program: **B1101 Matematika**
Studijní obor: **Matematika a její aplikace**
Téma práce: **Maticové populační modely dynamiky lesních ekosystémů**
Zadávatel: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

Předmětem bakalářské práce jsou maticové populační modely používané pro projekci růstu lesních porostů. Základním východiskem práce bude seznámení se strukturovaným Leslieho maticovým populačním modelem a jeho modifikacemi. Pozornost bude věnována konkrétním variantám, jež jsou používány pro predikci dynamiky lesa, např. Usherův maticový model, který je strukturován podle výčetních tloušťek porostu. V optimálním případě se pokusíme o jednoduchou modifikaci modelu směrem k vnitrodruhové a mezidruhové konkurenci.

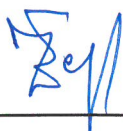
Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

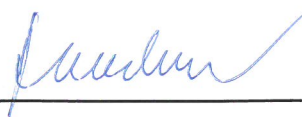
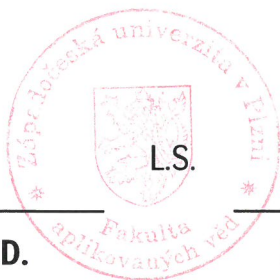
- Allen, L.J.S. (2007). *An Introduction to Mathematical Biology*. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall.
- Buongiorno, J., Peyron, J.-L., Houllier, F., Bruciamacchie, M. (1995). Growth and Management of Mixed-Species, Uneven-Aged Forests in the French Jura: Implications for Economic Returns and Tree Diversity. *Forest Science*. 41(3): 397-429.
- Usher, M.B. (1966). A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests. *Journal of Applied Ecology*. 3(2): 355-367.
- Usher, M.B. (1969). A Matrix Model for Forest Management. *Biometrics*. 25(2): 309-315.
- Virgilietti, P., Buongiorno, J. (1997). Modeling Forest Growth with Management Data: A Matrix Approach for the Italian Alps. *Silva Fennica*. 31(1): 27-42.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2022**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury, která je uvedena v seznamu literatury na konci práce.

V Plzni dne 22. května 2022

.....

Jan Melichar

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval panu docentu Stehlíkovi za možnost nahlédnutí do matematického světa biologických dynamických systému a teorie nezáporných matic a za jeho uvážlivé vedení na mé inspirativní cestě strávené při studiu matematických statí od Lindy J. S. Allen, Hala Caswella, Jima M. Cushinga, Miroslava Fiedlera a mnoha dalších autorů.

Své ženě Jance bych rád poděkoval především za její několikaleté pochopení. Práci bych rád věnoval svým dcerám Marii a Anně.

Abstrakt

Maticové strukturované populační modely jsou příkladem soustav diferenčních rovnic 1. řádu, které patří mezi významné modelové nástroje používané při studiu dynamiky růstu lesních porostů. Dynamika stavu lesa se řídí vlastnostmi Usherovy projekční matice, která patří mezi nezáporné čtvercové matice. Výchozím bodem práce je formulace Perronovy-Frobeniovy věty a dalších významných vět z teorie maticové algebry nezáporných matic, které jsou následně uplatněny při studiu vlastností obecného deterministického lineárního maticového modelu růstu lesa. Stěžejní část práce je věnována sestavení lineárního modelu růstu lesa o dvou růstových třídách, které odpovídají mladým a dospělým jedincům. Hlavním cílem je odvození obecného řešení tohoto modelu a analýza jeho asymptotických vlastností. Dokážeme, že asymptotické chování modelu je možné vyhodnotit na základě čisté míry reprodukce, biologického parametru modelu, který rozhoduje o stabilitě extinkčního rovnovážného bodu. Z výsledků mimo jiné plyne, že les bude dlouhodobě prosperovat i při nižší míře reprodukce, pokud jsou zajištěny vhodné růstové podmínky nebo míra mortality jedinců je na nízké úrovni.

Klíčová slova: maticový populační model, lineární dynamický systém, nezáporná matice, nerozložitelná, primitivní, Perronova-Frobeniova věta, vlastní čísla, čistá míra reprodukce, růst lesa

Abstract

Matrix structured population models are an example of systems of first-order difference equations, which are among the important model tools used when forest growth dynamics is studied. The dynamics of forest stand state is governed by the properties of the Usher projection matrix, which belongs to non-negative square matrices. The starting point of the thesis is the formulation of the Perron-Frobenius theorem and other important theorems of the non-negative matrix theory, which are subsequently used when the properties of the general deterministic linear matrix model of forest growth are examined. The main part of the thesis is devoted to the construction of linear model of forest growth with two growth stages representing juveniles and adults. The main goal is to derive a general solution of the model and analyse its asymptotic properties. We prove that the asymptotic behaviour of the model can be evaluated on the basis of the net reproductive number, a biological parameter of the model, that determines the stability of the extinction equilibrium. The results show, among other things, that the forest will thrive even at a lower reproduction rate in the long run, if suitable growth conditions are ensured or the tree mortality rate is at a low level.

Keywords: matrix population model, linear dynamic system, non-negative matrix, irreducible, primitive, Perron-Frobenius theorem, eigenvalues, net reproductive number, forest growth

Seznam označení

Pro snazší orientaci v textu této práce předkládáme zde přehled použitého označení.

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	množina nezáporných celých čísel
\mathbb{R}_+	množina kladných reálných čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$\mathbb{R}^{m \times n}$	lineární prostor reálných matic řádu (m, n)
$\mathbb{C}^{m \times n}$	lineární prostor komplexních matic řádu (m, n)
$\mathbf{0}$	nulová matice, nulový vektor
\mathbf{I}	jednotková matice
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	kladná matice
$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$	nezáporná matice
\mathbf{A}^T	transponovaná matice k matici \mathbf{A}
\mathbf{A}^C	konjungovaná matice k matici \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	hermitovsky transponovaná matice k matici \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	inverzní matice k matici \mathbf{A}
\mathbf{A}^k	k -tá mocnina čtvercové matice \mathbf{A} , $k \in \mathbb{N}$
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	diagonální matice s diagonálními prvky d_1, \dots, d_n
hod \mathbf{A}	hodnota matice \mathbf{A}
$\text{tr } \mathbf{A}$	stopa matice \mathbf{A}
$\det \mathbf{A}$	determinant matice \mathbf{A}
$p_{\mathbf{A}}(\lambda)$	charakteristický polynom matice \mathbf{A}
$\varrho(\mathbf{A})$	spektrální poloměr matice \mathbf{A}
$\sigma(\mathbf{A})$	spektrum matice \mathbf{A}
$\nu_a(\lambda)$	algebraická násobnost vlastního čísla λ matice \mathbf{A}
$\nu_g(\lambda)$	geometrická násobnost vlastního čísla λ matice \mathbf{A}
$G(\mathbf{A})$	orientovaný graf matice \mathbf{A}
$h(\mathbf{A})$	index imprimitivity čtvercové nezáporné nerozložitelné matice \mathbf{A}
$\ell(G)$	index imprimitivity orientovaného grafu G
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalární součin
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
<i>n.s.d.</i>	největší společný dělitel

Obsah

Prohlášení	iii
Poděkování	iv
Abstrakt	v
Abstract	vi
Seznam označení	vii
1 Úvod	1
2 Maticové modely a lineární algebra	4
2.1 Vlastní čísla a vlastní vektory	4
2.2 Spektrální rozklad diagonalizovatelných matic	9
2.3 Nezáporné a kladné matice	11
2.4 Matice a grafy	12
2.5 Nerozložitelné matice	12
2.6 Primitivní matice	14
2.7 Perronova a Perronova-Frobeniova věta	16
3 Lineární maticový model růstu lesa	22
3.1 Obecný Usherův lineární model	22
3.2 Lineární model dvou růstových tříd	37
4 Závěr	49
Literatura	52

1 Úvod

Matematický pohled na studium dynamiky biologických populací lze datovat do první poloviny 18. století, kdy předmětem zájmu autorů byl potenciální růst lidské populace [8]. Jedním z významných autorů této doby je Thomas Robert Malthus, který ve své stěžejní práci *An Essay on the Principle of Population* z roku 1798 předpokládá, že velikost populace se vyvíjí jako geometrická posloupnost [28]. Pokud není populace kontrolována, velikost populace roste exponenciálně bez omezení. Malthusův diskretní model růstu populace¹ je jednoduchý model růstu a lze ho zapsat ve tvaru lineární homogenní diferenční rovnice 1. řádu

$$N(t+1) = rN(t) = (1 + f - m)N(t), \quad N(0) \geq 0, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

kde $N(t)$ je velikost populace v časovém intervalu $\langle t, t+1 \rangle$. Vitální míry f a m jsou konstanty a představují míru reprodukce, resp. míru mortality, kdy pro ně platí $f > 0$ a $0 < m < 1$. Parametr $r > 0$ se nazývá růstový koeficient a vyjadřuje relativní přírůstek populace za jeden časový interval [32]. Malthusovský koeficient růstu představuje čistou míru reprodukce R_0 , biologický parametr modelu, který vyjadřuje poměr, v jakém generace potomků nahradí generaci svých rodičů [31]. Počáteční stav populace $N(0)$ určuje velikost populace v dalších časových obdobích. Jednoznačné řešení růstového modelu při daném počátečním stavu populace $N(0)$ je dáno

$$N(t) = r^t N(0),$$

na základě kterého pro dynamiku populace platí, je-li $r > 1$, populace exponenciálně roste bez omezení. Je-li $r < 1$, populace vymírá, a pokud $r = 1$, pak velikost populace je v čase konstantní.

Předpoklad neomezeného růstu Malthusova růstového modelu je reálný při modelování dynamiky malých populací pro kratší časová období, které nebudou ovlivněny prostředím s omezenými zdroji, resp. vnitrodruhovou konkurencí. Pro vyhodnocení vývoje velkých populací a dlouhodobé dynamiky je však nevyhovující, proto byly navrženy nelineární modely růstu populace, které respektují omezené prostředí. Vitální míry nejsou považovány za konstantní veličiny, ale mohou být závislé na velikosti populace. Malthusův růstový model lze pak modifikovat zahrnutím růstového koeficientu r , který bude záviset na kapacitě prostředí, resp. bude klesající funkcí velikosti populace. V polovině 19. století první modifikaci Malthusova růstového modelu provedl Pierre-Francois Verhulst [41] se

¹Oproti spojitému modelu, který předpokládá vývoj populace s překrývajícími se generacemi – jedinci v populaci s překrývajícími se generacemi se rozmnožují opakovaně a v následujícím reprodukčním období se mohou rozmnožovat společně s přeživšími jedinci z předchozích reprodukčních období, u diskretního modelu modelujeme vývoj populace s nepřekrývajícími se (oddělenými) generacemi, kdy jedinci u tohoto typu populace mají během svého životního cyklu pouze jedno reprodukční období, a proto růst populace lze vyjádřit v diskretních krocích [21].

zahrnutím parametru (nosné) kapacity prostředí K , tedy nelineární diferenční rovnice je ve tvaru

$$N(t+1) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad r > 0, \quad K > 0,$$

kdy tato diferenční rovnice se nazývá logistická. Parametr r se nyní nazývá vnitřní koeficient růstu a vyjadřuje maximální možný relativní přírůstek velikosti populace za jedno časové období. Verhulstův růstový model popisuje různé způsoby chování populace v závislosti na hodnotě parametru r , např. pro $1 < r < 2$ velikost populace zpočátku exponenciálně roste, poté je růst lineární, následně se zpomalí, a když stav populace dosáhne hodnoty kapacity prostředí, růst se zastaví [32]. Platí tedy $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$.

Malthusův i logistický růstový model má však velmi jednoduchou demografickou strukturu. V těchto modelech platí předpoklad, že populaci tvoří stejní jedinci – populace je homogenní v prostoru a čase, a není uvažována bohatší demografická struktura populace. Pro různě staré jedince, jedince v jiném stádiu vývoje, jiného pohlaví nebo obývající jinou lokalitu lze předpokládat rozdíly ve vitálních mírách. V populaci se mohou vyskytovat jedinci s rozdílnou mírou mortality, budou zde mladí neplodní jedinci, kteří dosud nedospěli, dospělí plodní jedinci, případně také přestárlí jedinci v postreprodukční fázi vývoje, kteří už plodní nejsou [11].

Vitální míry jedinců determinují vývoj celé populace a určují, jak je populační dynamika ovlivněna biotickými a abiotickými podmínkami prostředí. Proto při modelování dynamiky populace je důležité zohlednit specifické vitální míry jednotlivých skupin populace [11]. To umožňují růstové modely strukturované populace, diskrétní či spojité v stavové proměnné, resp. v čase. Strukturovaný populační model, kdy stav populace a čas jsou diskrétními veličinami, je systém diferenčních rovnic, kdy při studiu jeho dynamiky lze využít poznatky z teorie maticové algebry.

Mezi prvními autory, který sestavil a analyzoval diskrétní model růstu populace v podobě maticového modelu, byl ve 40. letech 20. století Patrick Holt Leslie [24, 25]. Jednalo se o lineární maticový model růstu populace strukturované podle věku – Leslieho maticový model, který lze vyjádřit v maticovém tvaru následovně

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(0) \geq \mathbf{0}, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

kde \mathbf{L} je Leslieho projekční matice, vektor $\mathbf{n}(t)$ určuje stav populace podle jednotlivých věkových tříd v čase t a počáteční věková struktura populace je dána vektorem $\mathbf{n}(0)$. Matice \mathbf{L} je nezáporná čtvercová matice s kladnými prvky umístěnými na prvním řádku a dolní subdiagonále.

Michael Barham Usher v 70. letech 20. století navázal na práce Patricka H. Leslieho [24, 25] a sestavil lineární maticový model ke studiu dynamiky růstu lesních ekosystémů [39, 40]. Usher rozpracoval původní Leslieho maticový model věkově strukturované populace a navrhl maticový model populace, která je místo věku strukturována podle její velikosti.

Usherův maticový model růstu lesa je příkladem strukturovaného populačního modelu, ve kterém se dynamika populace – lesního porostu, tak jako v případě Leslieho maticového modelu, řídí vlastnostmi projekční matice. Usherova projekční matice \mathbf{U} ,

kteřá charakterizuje vývoj lesa v čase plynoucím v diskřétních krocích ve struktuře jednotlivých růstových tříd lesního porostu, je příkladem – tak jako Leslieho matice \mathbf{L} – nezáporné matice. Navíc oproti Leslieho matici má Usherova matice umístěné kladné prvky na diagonále.

Leslieho a Usherova matice jsou příkladem nezáporných matic, které při splnění určitých předpokladů se vyznačují vhodnými vlastnostmi – jsou nerozložitelné a primitivní. Primitivitu Leslieho matice dokázal Sykes [38] pomocí *n.s.d* rozdílů hodnot exponentů charakteristického polynomu matice \mathbf{L} v roce 1969, resp. nerozložitelnost a primitivitu matice \mathbf{L} dokázal Demetrius [14] pomocí teorie grafů v roce 1971. Nerozložitelnost a primitivitu Usherovy matice řádu k dokážeme v kapitole 3.1.

Pro Usherovu matici \mathbf{U} , jež je primitivní, resp. nerozložitelná, platí závěry Perronovy, resp. Perronovy-Frobeniovy věty [11]. Tato důležitá tvrzení o spektrálních vlastnostech primitivních, resp. nerozložitelných maticích (kapitola 2) nám pomohou při vyhodnocení asymptotického chování Usherova maticového modelu růstu lesa o k růstových třídách, o kterém pojednáváme v kapitole 3.1.

Dlouhodobou dynamiku lineárního maticového modelu strukturovaného do růstových tříd, resp. vývojových stádií lze vyhodnotit pomocí čisté míry reprodukce R_0 , viz [11]. Vývoj lesního porostu, jako je tomu i u jiných populací a aplikací [6, 30], lze studovat ve struktuře 2 růstových tříd, resp. vývojových fází, kdy první růstová třída odpovídá mladým neplodným jedincům a druhou růstovou třídu tvoří dospělí plodní jedinci. Na základě poznatků z kapitoly 3.1 o vlastnostech obecného Usherova růstového modelu sestavíme v kapitole 3.2 Usherův lineární maticový model 2 růstových tříd a budeme zkoumat jeho asymptotické vlastnosti na základě parametru R_0 .

Projekce lineárního maticového modelu 2 růstových tříd a jejich grafické zobrazení byly v této práci realizovány v programu MATLAB.

2 Maticové modely a lineární algebra

Populační dynamika a chování řešení maticových modelů se řídí vlastnostmi projekční matice, která je příkladem nezáporné matice. Výchozím tvrzením pro studium vlastností nezáporných matic a maticových populačních modelů je Perronova-Frobeniova věta, která shrnuje stěžejní spektrální vlastnosti nezáporných nerozložitelných čtvercových matic. Před vyslovením Perronovy-Frobeniovy věty uvedeme důležité věty a definice výchozích pojmů z teorie maticové algebry.

Výchozí zdroje pro sestavení jednotlivých definic a vět uvedených v této kapitole jsou skripta a knihy o maticové algebře, mimo jiné od M. Donta [15], E. Krajníka [22], J. Holendy [20], M. Fiedlera [16], J. R. Schotta [33], J. E. Gentlea [19], E. Senety [36] a S. Friedlanda [17], maticových populačních modelech od H. Caswella [5] a Z. Pospíšila [31], a matematické biologii od L. J. S. Allen [1].

2.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 2.1. *Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je komplexní matice typu (m, n) . Řekneme, že matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu (m, n) je konjugovanou maticí k matici \mathbf{A} právě tehdy, když $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$, kde \bar{a}_{ij} je číslo komplexně sdružené k číslu a_{ij} pro $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$. Píšeme*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^C.$$

Definice 2.2. *Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je komplexní matice typu (m, n) . Matici $\mathbf{B} = (b_{ji})$ typu (m, n) nazveme maticí hermitovskey transponovanou k matici \mathbf{A} právě tehdy, když $b_{ji} = \bar{a}_{ij}$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$. Píšeme*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^H.$$

Poznámka 2.1. Matice \mathbf{A}^C je komplexně sdružená k matici \mathbf{A} . Matice \mathbf{A}^H je transponovaná a komplexně sdružená k matici \mathbf{A} . Zřejmě je $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^C)^T = (\mathbf{A}^T)^C$.

Poznámka 2.2. Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, je zřejmě $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$.

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou definovány pro čtvercové matice a jsou obecně komplexní, a to i pro reálné matice.

Definice 2.3. *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je čtvercová matice řádu n a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ jsou nenulové vektory. Vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} nazveme pravým, resp. levým vlastním (charakteristickým) vektorem matice \mathbf{A} , jestliže platí*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}^H\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^H \tag{2.2}$$

pro nějaké číslo $\lambda \in \mathbb{C}$. Číslo λ nazveme *vlastním (charakteristickým) číslem matice \mathbf{A} odpovídající pravému vlastnímu vektoru \mathbf{x} , resp. levému vlastnímu vektoru \mathbf{y} .*

Poznámka 2.3. Levý vlastní vektor \mathbf{y} odpovídající vlastnímu číslu λ matice \mathbf{A} je pravým vlastním vektorem matice \mathbf{A}^H . Platí tedy

$$\mathbf{A}^H \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}.$$

Poznámka 2.4. Vlastní čísla λ matice \mathbf{A} jsou stejná pro pravé a levé vlastní vektory. Odpovídá-li pravý vlastní vektor \mathbf{x}_i vlastnímu číslu λ_i a levý vlastní vektor \mathbf{y}_j vlastnímu číslu λ_j a zároveň $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i, j = 1, 2, \dots, n$, pak platí

$$\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0.$$

Vlastní vektory \mathbf{x}_i a \mathbf{y}_j jsou v tomto případě ortogonální.

Normované pravé a levé vlastní vektory jsou vzájemně ortonormální, tedy platí

$$\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Poznámka 2.5. Pokud \mathbf{x}_i a \mathbf{y}_i jsou pravé a levé vlastní vektory matice \mathbf{A} odpovídající vlastnímu číslu λ_i , potom plynou z definice 2.3 rovnosti

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{2.3}$$

$$\mathbf{y}_i^H \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{y}_i^H \tag{2.4}$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka 2.6. Nebude-li uvedeno jinak, budeme v dalším textu o pravém vlastním vektoru \mathbf{x} hovořit jako o vlastním vektoru.

Definice 2.4. *Nechť matice \mathbf{A} je řádu n a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou její vlastní čísla. Pak matici $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ nazveme *spektrální maticí matice \mathbf{A} . Množina všech vlastních čísel matice \mathbf{A} se nazývá *spektrum matice \mathbf{A} a značíme ho $\sigma(\mathbf{A})$. Spektrální poloměr matice \mathbf{A} se nazývá číslo***

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\lambda_i|, \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})\}. \tag{2.5}$$

Poznámka 2.7. Spektrální poloměr je poloměr nejmenšího kruhu v Gaussově rovině komplexních čísel, který má střed v počátku a obsahuje na hranici nebo uvnitř všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Poznámka 2.8. Absolutní hodnota (obecně komplexního) vlastního čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ matice \mathbf{A} se rovněž nazývá modul vlastního čísla.

Rovnost (2.1) můžeme pomocí ekvivalentních úprav přepsat do tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2.6}$$

Podle definice 2.3 je λ vlastní číslo matice \mathbf{A} právě tehdy, když je splněna rovnost (2.1) pro nějaké $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Jinak řečeno, λ je vlastní číslo matice \mathbf{A} právě tehdy, když má soustava (2.6) netriviální řešení.

Věta 2.1. [22, Věta 6.2; 16, Věta 1.30] Číslo λ je vlastním číslem matice \mathbf{A} právě tehdy, když je matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ singulární, nebo-li když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.7)$$

Definice 2.5. Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n . Matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ závislou na parametru λ nazýváme charakteristickou maticí matice \mathbf{A} , polynom n -tého stupně v proměnné λ

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad (2.8)$$

nazýváme charakteristickým polynomem matice \mathbf{A} a vztah

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (2.9)$$

nazýváme charakteristickou rovnicí matice \mathbf{A} .

Poznámka 2.9. Protože charakteristický polynom n -tého stupně $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ má celkem n komplexních kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (z nichž některé mohou splývat – jsou vícenásobné), proto čtvercová matice \mathbf{A} n -tého řádu má právě n vlastních čísel.

Definice 2.6. Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice, λ je kořen charakteristického polynomu $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ matice \mathbf{A} násobnosti k . Potom řekneme, že vlastní číslo λ matice \mathbf{A} má algebraickou násobnost k . Algebraickou násobnost vlastního čísla λ budeme značit $\nu_a(\lambda)$.

Definice 2.7. Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n , $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Potom množina všech (komplexních) řešení \mathbf{x} soustavy (2.6) se nazývá charakteristický podprostor matice \mathbf{A} s vlastním číslem λ . Dimenze tohoto podprostoru se nazývá geometrická násobnost vlastního čísla λ . Geometrickou násobnost vlastního čísla λ budeme značit $\nu_g(\lambda)$.

Poznámka 2.10. Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice \mathbf{A} je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů \mathbf{x} s vlastním číslem λ .

Poznámka 2.11. Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice \mathbf{A} řádu n je rovna číslu

$$\nu_g(\lambda) = n - \text{hod}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}). \quad (2.10)$$

Následující věta ukazuje na důležitý vztah mezi algebraickou a geometrickou násobností vlastního čísla matice.

Věta 2.2. [15, Věta 2.1.17; 33, Theorem 3.3] Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n a $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ je vlastní číslo s $\nu_a(\lambda) \geq 1$. Geometrická násobnost vlastního čísla λ je nejvýše rovna algebraické násobnosti tohoto vlastního čísla λ , tedy platí

$$1 \leq \nu_g(\lambda) \leq \nu_a(\lambda). \quad (2.11)$$

Z věty 2.2 plyne následující důsledek.

Důsledek 2.1. [15, Věta 2.1.18] Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n , $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ je charakteristický polynom matice \mathbf{A} , a nechť λ_0 je k -násobný kořen $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Potom existuje nejvýše k lineárně nezávislých vlastních vektorů matice \mathbf{A} s vlastním číslem λ_0 .

Příklad 2.1. Rozhodneme o algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice určíme pomocí charakteristického polynomu matice \mathbf{A} , nebo-li

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

Charakteristický polynom $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Vlastní číslo $\lambda_{1,2}$ má algebraickou násobnost $\nu_a(1) = 2$.

Vlastnímu číslu $\lambda_{1,2}$ odpovídá jeden lineárně nezávislý vlastní vektor např. $\mathbf{x} = (1, 0)^T$. Podle vztahu (2.10) je geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_{1,2} = 1$ rovna

$$\nu_g(1) = n - \text{hod}(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) = 2 - 1 = 1$$

a podle věty 2.2 platí

$$\begin{aligned} 1 &\leq \nu_g(1) \leq \nu_a(1) \\ 1 &\leq 1 \leq 2. \end{aligned}$$

△

Věta 2.3. [15, Věta 2.1.19; 33, Theorem 3.7] *Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou vlastní vektory matice \mathbf{A} řádu n a platí $k \leq n$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou vlastní čísla odpovídající těmto vlastním vektorům taková, že platí $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro všechna $i \neq j$, pak jsou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé.*

Poznámka 2.12. Pokud charakteristický polynom matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má n různých kořenů, pak podle věty 2.3 matice \mathbf{A} má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Věta 2.4. [15, Věta 2.1.22] *Bud' $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potom existuje báze \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice \mathbf{A} právě tehdy, když pro každé vlastní číslo λ matice \mathbf{A} je geometrická násobnost λ rovna algebraické násobnosti λ .*

Poznámka 2.13. Pokud $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů, pak matice \mathbf{A} se nazývá jednoduchá. Podle věty 2.4 je čtvercová matice \mathbf{A} jednoduchá právě tehdy, když pro každé vlastní číslo λ matice \mathbf{A} je geometrická násobnost λ rovna algebraické násobnosti λ . Pokud $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má n různých vlastních čísel, pak každé vlastní číslo matice \mathbf{A} má stejnou geometrickou a algebraickou násobnost (rovnou 1) a matice \mathbf{A} je jednoduchá.

Příklad 2.2. Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

určíme vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost.

Charakteristický polynom matice \mathbf{A} je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Matice \mathbf{A} má dvě různá jednoduchá vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -1$, jejichž algebraická násobnost je 1.

Daným vlastním číslům přísluší vždy jeden lineárně nezávislý vektor. Vlastnímu číslu λ_1 odpovídá vektor např. $\mathbf{x}_1 = (1, 1)^T$ a vlastnímu číslu λ_2 přísluší vektor např. $\mathbf{x}_2 = (-3, 2)^T$. Geometrická násobnost vlastních čísel λ_1 a λ_2 je rovna 1.

Matice \mathbf{A} řádu 2 má dvě různá vlastní čísla, tedy jejich algebraická násobnost je rovna geometrické násobnosti. Matice \mathbf{A} je jednoduchou maticí. \triangle

Definice 2.8. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla čtvercové matice \mathbf{A} řádu n . Vlastní číslo λ_i takové, pro které platí $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$ pro všechna $j \neq i$, se nazývá dominantní vlastní číslo. Pokud platí ostrá nerovnost, $|\lambda_i| > |\lambda_j|$ pro všechna $j \neq i$, pak λ_i se nazývá ostře dominantní vlastní číslo.*

Poznámka 2.14. Vlastní číslo se nazývá ostře dominantní, pokud je rovno spektrálnímu poloměru matice a modul všech ostatních vlastních čísel je menší než spektrální poloměr.

Příklad 2.3. Nechť je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice určíme pomocí charakteristického polynomu matice \mathbf{A} , nebo-li

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou kořeny charakteristického polynomu $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$, tedy vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = -1$.

Spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{A})$ je největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice \mathbf{A} , tedy

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max \{2, 1, |-1|\} = 2.$$

Protože platí

$$\varrho(\mathbf{A}) = 2 > 1 = |-1|,$$

je $\lambda_1 = 2$ ostře dominantní vlastní číslo matice \mathbf{A} . \triangle

2.2 Spektrální rozklad diagonalizovatelných matic

Definice 2.9. Řekneme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou podobné, právě když existuje regulární matice \mathbf{P} řádu n taková, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}. \quad (2.12)$$

Věta 2.5. [15, Věta 2.2.1] Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou podobné matice. Potom $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$.

Definice 2.10. Řekneme, že matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici, tj. existuje-li regulární matice $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taková, že (pro nějaké $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$) je

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (2.13)$$

Věta 2.6. [15, Věta 2.2.5] Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potom tři následující podmínky jsou ekvivalentní.

- (1) \mathbf{A} je diagonalizovatelná.
- (2) Existuje báze \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů matice \mathbf{A} .
- (3) $\nu_g(\lambda_i) = \nu_a(\lambda_i)$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka 2.15. Jednoduchá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná své spektrální matici Λ . Sloupce matice \mathbf{X} jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice \mathbf{A} . Má-li matice \mathbf{A} pouze jednoduchá vlastní čísla, je diagonalizovatelná. S pomocí spektrální matice Λ lze rovnost (2.13) přepsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.14)$$

Mluvíme pak o spektrálním rozkladu matice \mathbf{A} .

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Nechť vlastní vektor \mathbf{x}_i matice \mathbf{A} odpovídá vlastnímu číslu λ_i pro $i = 1, 2, \dots, n$, tj. podle vztahu (2.3) platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

Mějme spektrální matici Λ matice \mathbf{A} a matici $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, jejíž sloupce jsou vlastní vektory \mathbf{x}_i matice \mathbf{A}

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Vztah (2.3) lze následně zapsat ve tvaru maticové rovnosti

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Lambda. \quad (2.15)$$

Nyní předpokládejme, že matice \mathbf{A} má n různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ matice \mathbf{A} odpovídající těmto vlastním číslům budou

lineárně nezávislé. Matice \mathbf{A} je tedy jednoduchá. Podle věty 2.6 platí, že matice \mathbf{A} je diagonalizovatelná. Matice vlastních vektorů \mathbf{X} je regulární a má inverzní matici \mathbf{X}^{-1} . Přenásobením rovnosti (2.15) inverzní maticí \mathbf{X}^{-1} zprava získáme spektrální rozklad matice \mathbf{A} podle vztahu (2.14)

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^{-1}.$$

Přenásobením rovnosti (2.14) inverzní maticí \mathbf{X}^{-1} zleva získáme $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A} = \Lambda\mathbf{X}^{-1}$ a po hermitovské transpozici dostaneme

$$\mathbf{A}^H (\mathbf{X}^{-1})^H = (\mathbf{X}^{-1})^H \Lambda. \quad (2.16)$$

Sloupce matice $(\mathbf{X}^{-1})^H$ jsou pravé vlastní vektory matice \mathbf{A}^H a v souvislosti s poznámkou 2.3 se jedná o levé vlastní vektory matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{A}^H má tedy stejná vlastní čísla jako matice \mathbf{A} . Jinak řečeno, řádky matice \mathbf{X}^{-1} jsou hermitovsky transponované levé vlastní vektory matice \mathbf{A} [5, 31].

Nechť $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je matice, jejíž sloupce jsou levé vlastní vektory \mathbf{y}_i odpovídající n různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matice \mathbf{A}

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n).$$

Pak matici \mathbf{A} lze pomocí spektrálního rozkladu vyjádřit ve tvaru [33]

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{Y}^H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^H. \quad (2.17)$$

Příklad 2.4. Matice z příkladu 2.2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní vektory např.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

kteří přísluší jednoduchým vlastním číslům $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -1$. Vlastní vektory jsou lineárně nezávislé a podle věty 2.6 je matice \mathbf{A} diagonalizovatelná.

Matice vlastních vektorů je

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a k ní inverzní matice, resp. hermitovsky transponovaná matice levých vlastních vektorů je

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{Y}^H = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Řádky matice \mathbf{Y}^H jsou levé vlastní vektory příslušné vlastním číslům $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -1$ matice \mathbf{A}

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Spektrální matice odpovídající matici \mathbf{A} je

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spektrální rozklad matice \mathbf{A} je

$$\mathbf{X}\Lambda\mathbf{Y}^H = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Spektrální rozklad matice \mathbf{A} lze rovněž zapsat následovně

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^H + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^H = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

△

Lemma 2.7. [20, Věta 3.1] *Nechť je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a \mathbf{x} jsou vlastní vektory příslušné danému vlastnímu číslu λ matice \mathbf{A} , pak platí*

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}, \tag{2.18}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.

S využitím lemmatu 2.7 lze spektrální rozklad (2.17) použít pro k -tou mocninu diagonalizovatelné jednoduché matice \mathbf{A} , tedy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{X}\Lambda^k\mathbf{Y}^H = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^H. \tag{2.19}$$

2.3 Nezáporné a kladné matice

V této podkapitole se budeme zabývat nezápornými, resp. kladnými maticemi. Nezáporná matice, jak její název naznačuje, je reálná matice, jejíž všechny prvky jsou nezáporné. Kladná matice je reálná matice, kdy jsou všechny její prvky kladné.

Definice 2.11. *Řekneme, že $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je nezáporná matice, když pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ platí $a_{ij} \geq 0$. Značíme $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.*

Definice 2.12. *Řekneme, že $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je kladná matice, právě když jsou všechny prvky a_{ij} matice \mathbf{A} kladné. Značíme $\mathbf{A} > \mathbf{0}$.*

Důsledek 2.2. Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nezáporná matice a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor, o němž platí $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, pak $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$. Naopak, pokud pro jakýkoliv $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ platí $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, pak \mathbf{A} je nezápornou maticí.

Důsledek 2.3. Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kladná matice a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor, o němž platí $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$. Naopak, pokud pro jakýkoliv $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, platí $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$, pak \mathbf{A} je kladnou maticí.

2.4 Matice a grafy

Problematika matic úzce souvisí s teorií grafů. Strukturu nenulových prvků čtvercové matice lze charakterizovat orientovaným grafem (také digrafem, zkratka z angl. *directed graph*).

Definice 2.13. *Orientovaným grafem $G = (V, H)$ rozumíme uspořádanou dvojici konečných množin V , H , kde množina H je tvořena některými uspořádanými dvojicemi prvků z $V : H \subseteq V \times V$. Prvky množiny V se nazývají vrcholy, prvky množiny H hrany.*

Definice 2.14. *Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Grafem matice \mathbf{A} rozumíme orientovaný graf $G(\mathbf{A}) = (V, H)$ s množinou vrcholů $V = \{1, 2, \dots, n\}$ a množinou orientovaných hran $H = \{(i, j) \mid i, j \in V, a_{ij} \neq 0\}$.*

Definice 2.15. *Orientovaný graf $G = (V, H)$ se nazývá silně souvislý, pokud pro každou dvojici jeho vrcholů $x, y \in V$ existuje v G orientovaná cesta z vrcholu x do vrcholu y a existuje orientovaná cesta z vrcholu y do vrcholu x .*

2.5 Nerozložitelné matice

Definice 2.16. *Čtvercová matice \mathbf{A} řádu n se nazývá rozložitelná, je-li ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad n \geq 2, \quad (2.20)$$

kde \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 jsou čtvercové matice řádů alespoň jedna, anebo existuje-li permutační matice \mathbf{P} taková, že lze matici \mathbf{A} převést na tvar (2.20) simultánní permutací řádků a sloupců

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{PAP}^T. \quad (2.21)$$

Čtvercová matice se nazývá nerozložitelná, není-li rozložitelná.

Poznámka 2.16. Permutační matice \mathbf{P} je čtvercová matice, která vznikla z jednotkové matice \mathbf{I} přerováním sloupců nebo řádků. Jinak řečeno, permutační matice je čtvercová matice, která v každém řádku a každém sloupci má jednu jedničku a na ostatních místech nuly.

Platí tato důležitá věta, která dává do vztahu ekvivalence nerozložitelnost matice \mathbf{A} a silnou souvislost orientovaného grafu $G(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} .

Věta 2.8. [16, Věta 3.6] *Čtvercová matice \mathbf{A} je nerozložitelná právě tehdy, když je její orientovaný graf $G(\mathbf{A})$ silně souvislý.*

Uvedeme ještě další nutnou a postačující podmínku nerozložitelnosti, nyní pro nezáporné matice.

Věta 2.9. [20, Věta 2.11] *Nezáporná, nenulová matice \mathbf{A} řádu n je nerozložitelná právě tehdy, když matice*

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^n \quad (2.22)$$

je kladná.

Příklad 2.5. Na příkladě ukážeme, jak lze rozhodnout, zda je čtvercová matice rozložitelná. Máme dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro matici \mathbf{A} existuje permutační matice \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

taková, že matici \mathbf{A} lze simultánní permutací řádků a sloupců převést na tvar (2.20)

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

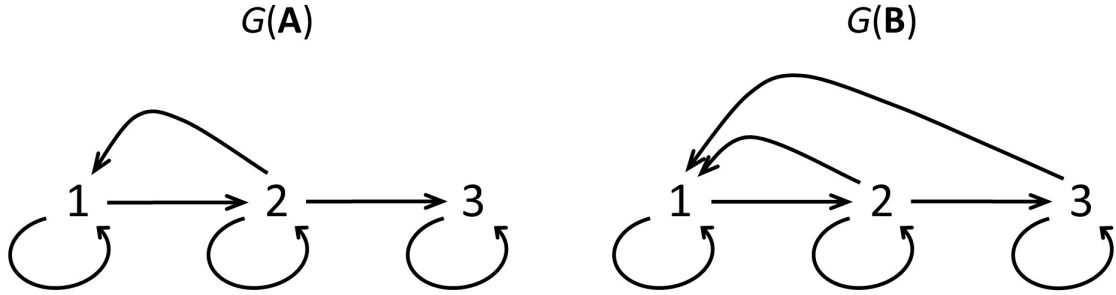
a z definice 2.16 plyne, že matice \mathbf{A} je rozložitelná. Stejně pozorování lze učinit z orientovaného grafu $G(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} , který je zachycen na obrázku 2.1. Orientovaný graf $G(\mathbf{A})$ není silně souvislý, proto matice \mathbf{A} je rozložitelná.

Matice \mathbf{B} je shodná s maticí \mathbf{A} ve všech prvcích až na prvek b_{13} , který je kladný. Oproti tomu prvek a_{13} je nulový. Orientovaný graf $G(\mathbf{B})$ matice \mathbf{B} , který je zachycen na obrázku 2.1, je nyní silně souvislý. Jak plyne z věty 2.8, matice \mathbf{B} je nerozložitelná.

Nerozložitelnost matice \mathbf{B} ověříme rovněž na základě tvrzení věty 2.9. Vypočteme matici

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3$$

a ověříme, je-li kladná.



Obrázek 2.1: Orientovaný graf $G(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} a orientovaný graf $G(\mathbf{B})$ matice \mathbf{B} z příkladu 2.5.

Tedy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 20 & 7 \\ 14 & 17 & 6 \\ 12 & 14 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 28 & 10 \\ 20 & 23 & 8 \\ 16 & 20 & 7 \end{pmatrix}.$$

Protože platí $\mathbf{M} > \mathbf{0}$, je matice \mathbf{B} podle věty 2.9 nerozložitelná. \triangle

Věta 2.10. [34, Theorem 1] *Nechť \mathbf{A} je nerozložitelná matice a \mathbf{B} je libovolná nezáporná matice stejného řádu jako matice \mathbf{A} , pak matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je nerozložitelná.*

2.6 Primitivní matice

Definice 2.17. *Nechť \mathbf{A} je nezáporná nerozložitelná matice n -tého řádu. Počet různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ matice \mathbf{A} , jejichž modul je roven $\rho(\mathbf{A})$, označme $h = h(\mathbf{A})$. Matici \mathbf{A} nazveme primitivní, pokud $h = 1$ a imprimitivní, je-li $h > 1$. Hodnota h se nazývá index imprimitivity.*

Poznámka 2.17. Index imprimitivity vyjadřuje počet vlastních čísel čtvercové nezáporné nerozložitelné matice, které leží na spektrální kružnici této matice. Čtvercová nezáporná nerozložitelná matice je tedy primitivní, pokud má pouze jediné vlastní číslo, které leží na spektrální kružnici této matice.

Index imprimitivity h lze určit na základě tvrzení následující věty.

Věta 2.11. [16, Věta 4.9; 38, Theorem 3] *Nechť \mathbf{A} je nerozložitelná nezáporná matice řádu n a $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ je její charakteristický polynom*

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n_1} + \dots + a_k \lambda^{n_k}, \quad (2.23)$$

pro který platí $n > n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$ a $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Potom index imprimitivity h matice \mathbf{A} je n.s.d. rozdílu $\{n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{k-1} - n_k\}$.

Pro silně souvislý orientovaný graf v souvislosti s jeho primitivitou platí následující věta.

Věta 2.12. [17, Theorem 6.1.5] *Nechť $G = (V, H)$ je silně souvislý orientovaný graf. Předpokládáme, že pro počet vrcholů grafu platí $|V| > 1$. Nechť $\ell = \ell(G)$ je n.s.d. délky všech cyklů v G a označuje index imprimitivity grafu G . Potom platí jedna ze dvou podmínek:*

- (1) $\ell = 1$. Pak G je primitivní. Nechť s je délka nejkratšího cyklu v G . Pak pro index imprimitivity grafu platí $\ell \leq |V| + s (|V| - 2)$.
- (2) $\ell > 1$. Pak G je imprimitivní.

V souvislosti s orientovaným grafem lze tvrzení výše uvedené věty 2.11 uvést následovně. Pokud \mathbf{A} je nerozložitelná nezáporná matice s indexem imprimitivity h a $G(\mathbf{A})$ je orientovaný graf odpovídající matici \mathbf{A} s indexem imprimitivity ℓ , pak h je roven n.s.d. délky všech cyklů v grafu $G(\mathbf{A})$, tedy $h = \ell$.

Brualdi a Ross [2] a Sedláček [35] uvádějí, že věty o primitivních orientovaných grafech mají ekvivalentní formulace ve vztahu k nezáporným nerozložitelným maticím. Tedy nezáporná nerozložitelná matice \mathbf{A} je primitivní tehdy a jen tehdy, pokud $G(\mathbf{A})$ je primitivní orientovaný graf.

Následující věta 2.13 a lemma 2.14 nabízí jednoduché kritérium, které lze použít při kontrole, zda nezáporná nerozložitelná matice je primitivní či nikoliv.

Věta 2.13. [38, Theorem 4; 18, Theorem 8, str. 80] *Čtvercová nezáporná nerozložitelná matice \mathbf{A} je primitivní, existuje-li takové $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, že k -tá mocnina matice \mathbf{A} je kladná matice, $\mathbf{A}^k > \mathbf{0}$.*

Lemma 2.14. [37, Corollary, str. 40] *Pokud má čtvercová nezáporná nerozložitelná matice \mathbf{A} pozitivní stopu ($\text{tr } \mathbf{A} > 0$), pak je matice \mathbf{A} primitivní.*

Věta 2.15. [34, Theorem 1a] *Nechť \mathbf{A} je primitivní matice a \mathbf{B} je libovolná nezáporná matice stejného řádu jako matice \mathbf{A} , pak matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je primitivní.*

Věta 2.16. [13, Theorem V] *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pak posloupnost mocnin této matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^k, \dots$ konverguje právě tehdy, když*

- (1) pro každé vlastní číslo λ matice \mathbf{A} platí $|\lambda| < 1$ nebo $\lambda = 1$, a
- (2) pokud platí $\lambda = 1$, pak $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$.

Poznámka 2.18. Posloupnost mocnin čtvercové matice konverguje, pokud je její spektrální poloměr menší než 1. Tedy nechť matice \mathbf{A} je řádu n . Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$$

právě tehdy, když $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Pokud je spektrální poloměr roven 1, pak posloupnost mocnin konverguje, pokud je matice primitivní. To je předmětem tvrzení důsledku 2.4 a věty 2.22.

Důsledek 2.4. [13, Corollary, str. 605] Nechť $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ je nerozložitelná matice řádu n s vlastním číslem $\lambda = \varrho(\mathbf{A}) = 1$. Posloupnost mocnin \mathbf{A}^k matice \mathbf{A} konverguje právě tehdy, když je matice \mathbf{A} primitivní.

Poznámka 2.19. Jeli λ vlastní číslo matice \mathbf{A} , pak $c\lambda$ je vlastní číslo matice $c\mathbf{A}$, pro $c \in \mathbb{R}_+$. Nechť λ_1 je dominantní vlastní číslo matice \mathbf{A} , tedy platí $|\lambda_1| = \varrho(\mathbf{A})$. Pak $\frac{\mathbf{A}}{\varrho(\mathbf{A})}$ je normovaná matice, jejíž spektrální poloměrem je roven 1.

2.7 Perronova a Perronova-Frobeniova věta

Dříve než vyslovíme Perronovu, resp. Perronovu-Frobeniovu větu, uvedeme tři tvrzení o spektrálních vlastnostech kladných a nezáporných nerozložitelných maticích, které se týkají počtu vlastních čísel ležících na hranici kruhu o spektrálním poloměru matice.

Věta 2.17. [20, Věta 12.3] *Nechť \mathbf{A} je kladná matice řádu n , pak spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{A})$ je vlastním číslem matice \mathbf{A} a modul všech ostatních vlastních čísel je menší než spektrální poloměr.*

Věta 2.18. [17, Theorem 6.2.1] *Nechť \mathbf{A} je nezáporná nerozložitelná imprimitivní matice řádu $n > 1$ s indexem imprimitivity $h = h(\mathbf{A})$, pak existuje právě $h - 1 \geq 1$ různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h-1}$ různých od $\varrho(\mathbf{A})$, pro něž platí $|\lambda_i| = \varrho(\mathbf{A})$, pro $i = 1, 2, \dots, h - 1$.*

Věta 2.19. [20, Věta 12.8] *Nechť \mathbf{A} je nezáporná nerozložitelná primitivní matice. Je-li $\lambda_1 = \varrho(\mathbf{A})$, pak $|\lambda_i| < \varrho(\mathbf{A})$, pro $i = 2, 3, \dots, n$.*

Nyní můžeme vyslovit Perronovu větu o kladných maticích a následně vyslovíme Perronovu-Frobeniovu větu o nezáporných maticích.

Věta 2.20 (Perronova [20, Věta 12.1; 19, str. 301; 36, Theorem 1.1]). *Nechť \mathbf{A} je kladná matice n -tého řádu, $n > 1$, $\varrho(\mathbf{A})$ je její spektrální poloměr*

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\lambda_i|\},$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} . Označíme $r = \varrho(\mathbf{A})$. Potom platí

- (1) r je vlastním číslem matice \mathbf{A} .
- (2) r je reálné a platí $r > 0$.
- (3) K vlastnímu číslu r existuje pravý vlastní vektor \mathbf{v} a levý vlastní vektor \mathbf{w} , pro které platí $\mathbf{v}, \mathbf{w} > \mathbf{0}$, kdy $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.
- (4) Algebraická násobnost vlastního čísla r je rovna jedné.
- (5) Geometrická násobnost vlastního čísla r je rovna jedné.

- (6) *Vlastní číslo r je ostře dominantním vlastním číslem matice \mathbf{A} , tj. je-li $\lambda_1 = r$, pak $|\lambda_i| < r$, pro $i = 2, 3, \dots, n$.*

Poznámka 2.20. Vlastní číslo r se nazývá Perronův kořen charakteristické rovnice matice \mathbf{A} nebo též Perronovo vlastní číslo. Perronův kořen je reálný, ostatní vlastní čísla matice \mathbf{A} reálná být nemusejí.

Poznámka 2.21. Vlastní číslo r je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice matice \mathbf{A} . Dimenze podprostoru Perronova vlastního čísla je 1, tedy vlastní vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} příslušné vlastnímu číslu r jsou dány jednoznačně až na nenulový konstantní násobek. Vlastní vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} se nazývají Perronovy vlastní vektory. Perronův vektor je reálný, ačkoliv ostatní vlastní vektory matice \mathbf{A} být reálné nemusejí. Všechny prvky Perronova vektoru mají stejné znaménko, bez újmy na obecnosti se považují za kladné, tedy $\mathbf{v}, \mathbf{w} > \mathbf{0}$.

Poznámka 2.22. Vlastní číslo r je jediné vlastní číslo, které leží na spektrální kružnici matice \mathbf{A} .

Pro nezápornou matici \mathbf{A} , která je nerozložitelná, platí stejné vlastnosti (1) až (5) z Perronovy věty 2.20 o kladných maticích, nicméně neplatí vlastnost (6).

Věta 2.21 (Perronova-Frobeniova [20, Věta 12.7; 19, str. 304; 36, Theorem 1.5; 17, Theorem 6.2.1]). *Nechť \mathbf{A} je nezáporná nerozložitelná matice n -tého řádu, $n > 1$. Označíme $r = \rho(\mathbf{A})$. Potom platí*

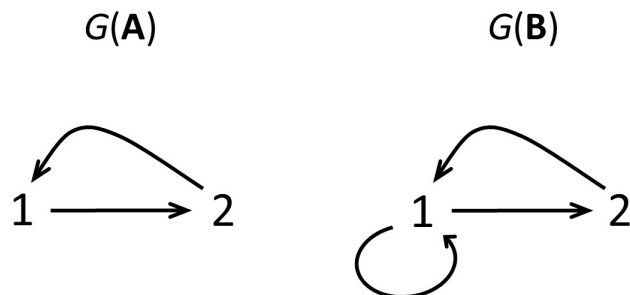
- (1) *r je vlastním číslem matice \mathbf{A} .*
- (2) *r je reálné a kladné.*
- (3) *K vlastnímu číslu r existuje kladný pravý a levý vlastní vektor $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.*
- (4) *Algebraická násobnost vlastního čísla r je rovna jedné.*
- (5) *Geometrická násobnost vlastního čísla r je rovna jedné.*
- (6) *Pro vlastní číslo r platí $r \geq |\lambda_i|$, pro $i = 2, 3, \dots, n$.*

Poznámka 2.23. Vlastní číslo r se nazývá Perronův-Frobeniův kořen a je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice matice \mathbf{A} . Vlastní číslo r je dominantním vlastním číslem. Vlastní vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} příslušné vlastnímu číslu r se nazývají Perronovy-Frobeniovy vlastní vektory a jsou dány jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

Perronova-Frobeniova věta 2.21 má v bodě (6) oproti Perronově větě 2.20 slabší vlastnost, kdy nezáporná nerozložitelná matice má kladné jednoduché vlastní číslo (jež je spektrální poloměr matice \mathbf{A}), které je větší nebo rovno modulu jakéhokoliv jiného vlastního čísla matice \mathbf{A} .

Příklad 2.6. Nechť je dána čtvercová nezáporná matice 2. řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 2.2: Orientovaný graf $G(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} z příkladu 2.6 a orientovaný graf $G(\mathbf{B})$ matice \mathbf{B} z příkladu 2.7.

Potom charakteristický polynom matice \mathbf{A} je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 10 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5$$

a matice \mathbf{A} má dvě vlastní čísla $\lambda_1 = \sqrt{5}$ a $\lambda_2 = -\sqrt{5}$.

Nyní rozhodneme, zda matice \mathbf{A} je nerozložitelná a primitivní. Nerozložitelnost matice \mathbf{A} ověříme na základě tvrzení věty 2.9

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} > \mathbf{0}.$$

Protože $\mathbf{M} > \mathbf{0}$, je matice \mathbf{A} nerozložitelná. Nerozložitelnost matice \mathbf{A} rovněž vyplývá z orientovaného grafu $G(\mathbf{A})$ na obrázku 2.2, který je silně souvislý.

O primitivitě matice \mathbf{A} rozhodneme na základě věty 2.11. Index imprimitivity h matice \mathbf{A} je roven *n.s.d.* rozdílů hodnot exponentů charakteristického polynomu $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 5$, tedy

$$h = n.s.d. \{2 - 0\} = 2.$$

Protože $h > 1$, matice \mathbf{A} je imprimitivní. Stejný závěr lze vyslovit na základě tvrzení věty 2.12. Index imprimitivity ℓ orientovaného grafu $G(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} , tedy *n.s.d.* délky všech cyklů v $G(\mathbf{A})$, je roven 2. Orientovaný graf $G(\mathbf{A})$ má jediný cyklus $(1, 2, 1)$ o délce 2 a je tedy imprimitivní. Rovněž matice \mathbf{A} je imprimitivní.

Na základě Perronovy-Frobeniovy věty 2.21 bude mít nerozložitelná a imprimitivní matice \mathbf{A} kladné reálné jednoduché vlastní číslo, které je rovno spektrálnímu poloměru, a bude větší nebo rovno modulu ostatních vlastních čísel. Z věty 2.18 vyplývá, že bude existovat právě $h-1$ různých vlastních čísel různých od $\rho(\mathbf{A})$ s modulem rovným spektrálnímu poloměru.

Určeme tedy spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ a spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} . Spektrum matice \mathbf{A} je

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{ \sqrt{5}, -\sqrt{5} \}.$$

Spektrální poloměr je roven vlastnímu číslu λ_1

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max \left\{ \left| \sqrt{5} \right|, \left| -\sqrt{5} \right| \right\} = \sqrt{5}$$

a protože platí

$$\varrho(\mathbf{A}) = \sqrt{5} \geq \left| -\sqrt{5} \right|,$$

je $\lambda_1 = \sqrt{5}$ dominantní vlastní číslo matice \mathbf{A} . Vlastní číslo λ_1 je Perronovo-Frobeniovo vlastní číslo matice \mathbf{A} . Pro matici \mathbf{A} platí $h = 2$, tedy $\sigma(\mathbf{A})$ obsahuje právě dvě různá vlastní čísla s modulem rovným $\varrho(\mathbf{A})$. První je dominantní vlastní číslo λ_1 a druhé je $\lambda_2 = -\sqrt{5}$. \triangle

Aby v Perronově-Frobeniově větě 2.21 v bodě (6) platila u vlastního čísla $r = \varrho(\mathbf{A})$ ostrá nerovnost, musí být dané vlastní číslo ostře dominantní. To nastane v případě, pokud bude nezáporná nerozložitelná matice \mathbf{A} splňovat dodatečnou vlastnost – bude primitivní. To je předmětem tvrzení věty 2.19. Je-li v Perronově-Frobeniově větě 2.21 doplněna podmínka požadující primitivitu matice, mluvíme o silné verzi Perronovy-Frobeniovy věty [36].

Příklad 2.7. Uvažujme čtvercovou nezápornou matici 2. řádu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

která je shodná s maticí \mathbf{A} z příkladu 2.6 až na prvek b_{11} , který je oproti nulovému prvku a_{11} kladný.

Charakteristický polynom matice \mathbf{B} je

$$p_{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 10 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0,5\lambda - 5$$

a vlastní čísla matice \mathbf{B} jsou $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ a $\lambda_2 = -2$.

Orientovaný graf $G(\mathbf{B})$ matice \mathbf{B} , který je zobrazený na obrázku 2.2, je silně souvislý. Matice \mathbf{B} je tedy, jak vyplývá z tvrzení věty 2.8, nerozložitelná.

Stopa matice \mathbf{B} je kladná, $\text{tr } \mathbf{B} = \frac{1}{2}$. Matice \mathbf{B} je nezáporná nerozložitelná matice a tedy podle lemmatu 2.14 je primitivní. Primitivitu matice \mathbf{B} lze rovněž ověřit pomocí věty 2.13. Jelikož pro druhou mocninu matice \mathbf{B} platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & 5 \\ \frac{1}{4} & 5 \end{pmatrix} > \mathbf{0},$$

je matice \mathbf{B} primitivní. Stejný závěr lze vyslovit na základě tvrzení věty 2.12. Orientovaný graf $G(\mathbf{B})$ má dva cykly, první cyklus $(1, 2, 1)$ o délce 2 a druhý cyklus $(1, 1)$ o délce 1. Tedy *n.s.d.* délky těchto dvou cyklů v orientovaném grafu $G(\mathbf{B})$ je roven 1 a $\ell = 1$. Proto $G(\mathbf{B})$ a \mathbf{B} jsou primitivní.

Jelikož matice \mathbf{B} je nerozložitelná a primitivní, platí pro ní závěry Perronovy věty 2.20. Matice \mathbf{B} bude mít kladné reálné jednoduché vlastní číslo, které je rovno $\varrho(\mathbf{B})$ a je ostře dominantním vlastním číslem. Neexistuje již žádné jiné vlastní číslo matice \mathbf{B} , jehož modul by byl větší nebo roven, než je $\varrho(\mathbf{B})$.

Spektrum matice \mathbf{B} je

$$\sigma(\mathbf{B}) = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}.$$

Spektrální poloměr matice \mathbf{B} je roven vlastnímu číslu λ_1

$$\varrho(\mathbf{B}) = \max \left\{ \left| \frac{5}{2} \right|, |-2| \right\} = \frac{5}{2}$$

a protože platí

$$\varrho(\mathbf{B}) = \frac{5}{2} > |-2|,$$

je $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ostře dominantní vlastní číslo matice \mathbf{B} . Vlastní číslo λ_1 je Perronovo vlastní číslo matice \mathbf{B} . \triangle

Důsledkem silné verze Perronovy-Frobeniovy věty 2.21 s využitím tvrzení věty 2.16 o konvergenci posloupnosti mocnin čtvercové matice je věta o existenci limity primitivní matice.

Věta 2.22. [33, Theorem 8.50] *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je nezáporná primitivní matice s vlastními vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} , pro které platí $\mathbf{A}\mathbf{v} = \varrho(\mathbf{A})\mathbf{v}$, $\mathbf{w}^H \mathbf{A} = \varrho(\mathbf{A})\mathbf{w}^H$, $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ a $\mathbf{w}^H \mathbf{v} = 1$. Pak platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{\varrho(\mathbf{A})} \right)^k = \mathbf{v} \mathbf{w}^H. \quad (2.24)$$

Příklad 2.8. Z příkladu 2.7 víme, že matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

je primitivní matice. Na základě tvrzení věty 2.22 víme, že existuje k normované matici $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}}{\varrho(\mathbf{B})}$ limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{B}}{\varrho(\mathbf{B})} \right)^k = \mathbf{v} \mathbf{w}^H,$$

kde \mathbf{v} a \mathbf{w} je normovaný pravý a levý vektor odpovídající $\varrho(\mathbf{B}) = \lambda_1 = \frac{5}{2}$. Takové vlastní vektory určitě existují, protože λ_1 je jednoduché vlastní číslo. Na základě Perronovy-Frobeniovy věty 2.21 plyne, že tyto vlastní vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} jsou kladné a reálné, tedy

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Příslušná normovaná matice \mathbf{A} je

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}}{\varrho(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 4 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

kdy vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou $\varrho(\mathbf{A}) = \lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -\frac{4}{5}$.

Potom limita normované matice \mathbf{A} je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{A})^k = \mathbf{v} \mathbf{w}^H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

△

3 Lineární maticový model růstu lesa

3.1 Obecný Usherův lineární model

3.1.1 Výchozí podmínky a struktura Usherova modelu

Výchozím pro sestavení lineárního maticového růstového modelu lesa je Usherův maticový model [39, 40], který je uplatňován v různých modifikacích [27] ke studiu dynamiky růstu lesních porostů. Usherův model je modifikací Leslieho populačního modelu [24, 25] ve smyslu strukturování populace na základě její velikosti místo věku. Důvod je ten, že při modelování dynamiky rostlin je vhodné populaci strukturovat podle vývojových stádií, protože věk není příliš vhodným indikátorem vlastností jedince [3, 9, 12, 23, 27]. Usher strukturuje populaci jedinců (stromů) podle jejich velikosti, resp. růstové fáze¹.

Usherův velikostně strukturovaný maticový model představuje lineární systém diferenčních rovnic 1. řádu, který popisuje vývoj populace strukturované do diskretních velikostních tříd, kdy čas je rovněž uvažován jako diskretní veličina. Tento model předpokládá neměnnost reprodukce (obnovy), růstu, dospívání (maturace) a úhynu (mortality) stromů v čase, proto se jedná o model s konstantní projekční maticí. Vývoj populace je reprezentován v modelu všemi jedinci² a populace je uvažována jako uzavřená, tj. nedochází k migraci jedinců mezi lokalitami.

Usherův model předpokládá seskupení stromů podle jejich velikosti do k diskretních tříd, resp. růstových skupin ($i = 1, 2, \dots, k$), kdy růstová třída i odpovídá velikosti stromů z intervalu $\langle i - 1, i \rangle$. Vzhledem k tomu, že čas t je uvažován jako diskretní veličina, k demografickým událostem jako je vyklíčení semene stromu, přechod jedince mezi růstovými fázemi, dosažení plodnosti nebo uhynutí stromu dochází v průběhu časového intervalu $\langle t, t + \Delta t \rangle$.

Časová jednotka Δt se nazývá projekčním intervalem a obvykle volíme $\Delta t = 1$. Usherův model projektuje stav lesa (např. hustotu porostu) z časového okamžiku t do $t + 1$, kdy čas nabývá pouze nezáporných celočíselných hodnot $t \in \mathbb{N}_0$. Časová jednotka obvykle volena u maticových růstových modelů lesa je jeden rok, 5 či 10 let.

¹Nejčastěji používaným kritériem pro strukturování lesa je výčetní tloušťka stromu (také DBH, zkratka z angl. *diameter at breast height*), tedy průměr kmene stromu ve výčetní výšce 1,3 m měřené od paty kmene.

²Na rozdíl od Leslieho věkově strukturovaného modelu, který popisuje dynamiku samičí části populace a samčí část není v modelu zahrnuta – samčí část populace lze odvodit např. na základě poměru obou pohlaví v populaci, jsou stromy ve většině případů rostliny jednodomé, kdy každý jedinec vytváří oddělené samčí a samičí generativní orgány na téže jedinci.

Usherův maticový růstový model je vektorová lineární diferenční rovnice, kterou lze zapsat kompaktně v maticovém tvaru následovně

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{U}\mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(0) \geq \mathbf{0}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{U} je Usherova projekční matice, která je čtvercová řádu k a je konstantní, $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t))^T$ je sloupcový vektor, který reprezentuje stav lesa (např. počty stromů nebo hustotu stromů) podle jednotlivých růstových tříd i pro $i = 1, 2, \dots, k$ v čase t a vektor $\mathbf{n}(t+1)$ představuje stav lesa podle růstových tříd v čase $t+1$. Počáteční stav lesa je reprezentován vektorem $\mathbf{n}(0)$.

Usherova projekční matice \mathbf{U} je obvykle vyjadřována jako součet reprodukční matice \mathbf{F} a růstové (též přechodové) matice \mathbf{G} , tedy $\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$. Diferenční rovnici (3.1) přepíšeme jako

$$\mathbf{n}(t+1) = (\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{n}(t). \quad (3.2)$$

Reprodukční matice \mathbf{F} je čtvercová matice řádu k a představuje v modelu přirozenou obnovu lesního porostu, tedy

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

kdy prvek matice f_i označuje koeficient reprodukce, resp. počet zmlazených stromků v 1. růstové třídě díky semenné obnově stromů z mateřského porostu i -tých růstových tříd ($i = 1, 2, \dots, k$). Koeficienty reprodukce dle růstových tříd v modelu odpovídají prvnímu řádku reprodukční matice, tedy zmlazené stromky odpovídají růstové třídě $i = 1$. Koeficienty reprodukce mohou nabývat pouze nezáporných hodnot, $f_i \geq 0$.

Růstová matice \mathbf{G} je čtvercová matice řádu k a charakterizuje v modelu růst a mortalitu lesního porostu, tedy

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

kdy prvky matice a_i, b_i ($i, j = 1, 2, \dots, k$) označují koeficienty přežívání. Tyto míry představují pravděpodobnost přežívání, tj. podíl jedinců j -té růstové třídy v čase t , kteří za časový interval jednotkové délky přežijí a dorostou v čase $t+1$ do i -té růstové třídy.

Prvek a_i ležící na diagonále matice představuje pravděpodobnost, že jedinci i -té růstové třídy přežijí během projekčního intervalu $\langle t, t+1 \rangle$ a zůstanou na jeho konci

ve stejné růstové třídě i . Prvek b_i ležící na subdiagonále matice představuje pravděpodobnost, že jedinci i -té růstové třídy během projekčního intervalu $(t, t + 1)$ přežijí a dorostou do následující růstové třídy $i + 1$.

Prvek a_i nabývá nezáporných hodnot z intervalu $0 \leq a_i < 1$ a prvek b_i nabývá kladných hodnot z intervalu $0 < b_i \leq 1$. Navíc předpokládáme $a_i + b_i \leq 1$.

Usherovu projekční matici \mathbf{U} pro k růstových tříd jako součet reprodukční matice \mathbf{F} (3.3) a růstové matice \mathbf{G} (3.4) budeme definovat následovně. Pro koeficient reprodukce k -té růstové třídy budeme požadovat $f_k > 0$.

Definice 3.1. *Nezápornou matici $\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \geq \mathbf{0}$ řádu k , kdy \mathbf{F} je dána (3.3) a \mathbf{G} je dána (3.4), nazveme Usherovou maticí, právě když pro její prvky platí*

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_1 + f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

a zároveň

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ 0 < b_i \leq 1, \quad a_i + b_i \leq 1, \quad 0 \leq f_i \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1), \\ f_k > 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

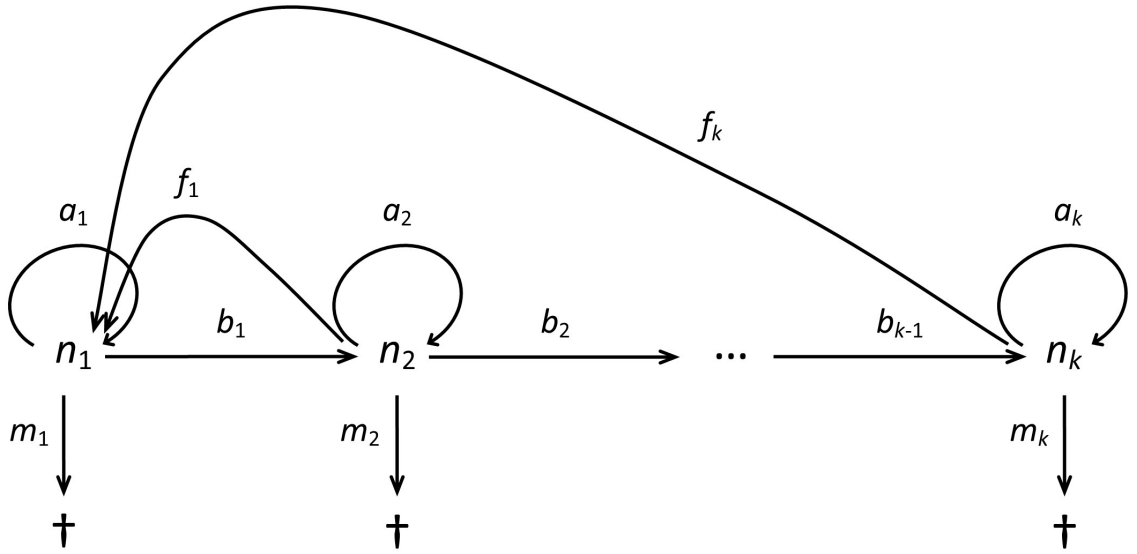
Koeficienty reprodukce a přežívání Usherovy matice (3.5) se nazývají rovněž vitální míry. Jednotlivé prvky této projekční matice – jedná se o konstantní projekční matici – se nazývají též přechodové prvky nebo také projekční koeficienty. Mimo první řádek, diagonálu a subdiagonálu jsou tyto prvky vždy nulové.

Usherova matice \mathbf{U} je reprezentovaná grafem životního cyklu, resp. orientovaným grafem $G(\mathbf{U})$, který je zobrazen na obrázku 3.1. Pro Usherovu matici \mathbf{U} danou podmínkami definice 3.1 bude graf $G(\mathbf{U})$ silně souvislý. Silná souvislost $G(\mathbf{U})$ je zajištěna požadavkem na kladné hodnoty koeficientů přežívání b_i a koeficientu reprodukce k -té růstové třídy f_k . Usherova matice \mathbf{U} bude podle věty 2.8 nerozložitelnou maticí. Silně souvislý orientovaný graf $G(\mathbf{U})$ je podle věty 2.12 primitivním grafem, pokud *n.s.d.* délky všech cyklů grafu $\ell = 1$. Potom Usherova matice \mathbf{U} má podle Perronovy věty 2.20 největší kladné reálné jednoduché vlastní číslo, které je rovno spektrálnímu poloměru matice.

Nerozložitelnost projekční matice dokázal Sykes [38] pro Leslieho matici \mathbf{L} , která má koeficienty přežívání pouze na dolní subdiagonále. V souvislosti s nerozložitelností Usherovy matice lze formulovat následující větu.

Věta 3.1. *Nechť \mathbf{U} je Usherova matice řádu k splňující podmínky podle definice 3.1. Pak je Usherova matice \mathbf{U} nerozložitelná.*

Důkaz. Mějme Usherovu matici \mathbf{U} , která je řádu k a splňuje podmínky (3.5) a (3.6) požadované na její prvky podle definice 3.1. Uvažujme rovněž Leslieho matici $\mathbf{L} \geq \mathbf{0}$



Obrázek 3.1: Graf životního cyklu $G(\mathbf{U})$ Usherovy matice \mathbf{U} řádu k (3.5) s odpovídajícími stavy porostu dle růstových tříd n_i a vitálními mírami f_i , a_i a b_i . Upraveno podle [29, Fig. 1].

řádu k , pro jejíž prvky platí

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots & \rho_{k-1} & \rho_k \\ \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

a kde $0 < \beta_i \leq 1$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$, $\rho_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$ a $0 < \rho_k$.

Dále máme matici $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ řádu k s prvky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

kde $0 \leq \alpha_i < 1$ pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Z věty [38, Theorem 1] plyne, že Leslieho matice \mathbf{L} je nerozložitelná. Podle předpokladu jsou \mathbf{L} a \mathbf{A} nezáporné matice stejného řádu, zároveň matice \mathbf{L} je nerozložitelná, proto podle věty 2.10 je součet matic $\mathbf{L} + \mathbf{A}$ nerozložitelná matice. Protože platí $\mathbf{U} = \mathbf{L} + \mathbf{A}$, je Usherova matice \mathbf{U} nerozložitelná. \square

Sykes rovněž formuloval a dokázal tvrzení o primitivitě Leslieho projekční matice [38]. Pro Usherovu matici lze uvést následující podmínky primitivity.

Věta 3.2. *Usherova matice \mathbf{U} řádu k je primitivní právě tehdy, když je splněna alespoň jedna ze dvou podmínek:*

- (1) *Největší společný dělitel indexů všech koeficientů reprodukce s kladnou hodnotu je roven 1, tedy*

$$n.s.d. \{i \mid f_i > 0\} = 1.$$

- (2) *Existuje alespoň jeden prvek a_i , pro který platí $0 < a_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$).*

Důkaz.

- (1) Uvažujme Usherovu matici \mathbf{U} řádu k . Nechť matice \mathbf{U} má takové prvky $f_i > 0$, jejichž *n.s.d.* indexů těchto prvků je roven 1. Mějme Leslieho matici \mathbf{L} řádu k , která splňuje podmínky (3.7) a zároveň má shodné koeficienty reprodukce s \mathbf{U} , tedy platí $\rho_i = f_i$ pro ($i = 1, 2, \dots, k$). Dále mějme nezápornou matici \mathbf{A} řádu k , která splňuje podmínky (3.8).

Protože pro \mathbf{L} platí *n.s.d.* $\{i \mid \rho_i > 0\} = 1$, je podle věty [38, Theorem 6] Leslieho matice \mathbf{L} primitivní. Víme, že matice \mathbf{L} a \mathbf{A} jsou nezáporné matice stejného řádu a zároveň matice \mathbf{L} je primitivní a proto podle věty 2.15 je součet matic $\mathbf{L} + \mathbf{A}$ primitivní matice. Protože platí $\mathbf{U} = \mathbf{L} + \mathbf{A}$, je Usherova matice \mathbf{U} primitivní.

- (2) Nechť \mathbf{U} je Usherova matice řádu k . Předpokládejme, že matice \mathbf{U} má alespoň jeden prvek a_i takový, že $0 < a_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Víme, že matice \mathbf{U} je nerozložitelná. Protože alespoň jeden prvek a_i je kladný – prvky a_i jsou umístěny na diagonále matice \mathbf{U} , je $\text{tr } \mathbf{U} > 0$. Matice \mathbf{U} je nezáporná nerozložitelná matice s pozitivní stopou. Z lemmatu 2.14 pak plyne, že matice \mathbf{U} je primitivní.

□

Příklad 3.1. Uvedeme si dva příklady, při kterých je splněna podmínka (1) věty 3.2 a Usherova matice je primitivní. Z definice 3.1 víme, že pro prvky matice \mathbf{U} platí $b_i, f_k > 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Matice \mathbf{U} je nerozložitelná a orientovaný graf $G(\mathbf{U})$ je silně souvislý.

Pokud současně pro \mathbf{U} platí $f_1 > 0$, je *n.s.d.* $\{1, k\} = 1$, tedy $\ell = 1$. Orientovaný graf $G(\mathbf{U})$ je primitivním grafem a \mathbf{U} je primitivní maticí.

Pokud v Usherově matici \mathbf{U} platí $f_k > 0$ a zároveň jsou dva libovolné sousední koeficienty reprodukce kladné, $f_i > 0$ a $f_{i+1} > 0$, pak *n.s.d.* $\{i, i + 1, k\} = 1$ a $G(\mathbf{U})$ je primitivním grafem a \mathbf{U} je primitivní maticí [1]. △

3.1.2 Usherovy vlastnosti růstové matice \mathbf{G}

Vlastnosti růstové matice \mathbf{G} vychází ze struktury Usherovy matice \mathbf{U} studované v kapitole 3.1.1.

Definice 3.2. Čtvercovou nezápornou maticí $\mathbf{G} = (g_{ij})$ řádu k nazveme růstovou maticí Usherova maticového modelu (3.1) pokud splňuje:

- (1) $0 \leq g_{ii} < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$
- (2) $0 < g_{i+1,i} \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1),$
- (3) $g_{ij} = 0$ pro $i - j > 1$ nebo $j - i > 0.$

Vlastnosti (1) až (3) zajišťují, že všechny prvky růstové matice \mathbf{G} , kromě prvků na její diagonále a dolní subdiagonále, jsou nulové.

Na základě uvedených vlastností růstové matice z definice 3.2 nastane pro strom během uplynutí jedné časové jednotky jedna ze tří možností [27]:

- (1) strom v čase t až $t + 1$ přežije a zůstane v původní růstové třídě i . Tato možnost odpovídá koeficientu přežívání a_i matice \mathbf{G} (3.4). Nebo
- (2) strom v čase t až $t + 1$ přežije a doroste do následující růstové třídy $i + 1$. Tato možnost odpovídá koeficientu přežívání b_i matice \mathbf{G} (3.4). Nebo
- (3) strom v čase t až $t + 1$ uhynie. Tato možnost odpovídá míře mortality, kterou označíme m_i .

Pro koeficienty přežívání (3.6) a míru mortality pak platí následující podmínky

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ 0 < b_i \leq 1, \quad a_i + b_i \leq 1, \quad a_i + b_i = 1 - m_i \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Míra mortality m_i představuje pravděpodobnost, že strom i -té růstové třídy v čase t až $t + 1$ nepřežije. Suma prvků ve sloupcích matice \mathbf{G} je rovna nebo menší jedné, protože počet stromů i -té růstové třídy, které v čase t až $t + 1$ zůstanou v původní i -té růstové třídě nebo se posunou do následující $(i + 1)$ -ní růstové třídy, nemůže být větší, než je počet stromů v i -té třídě v čase t . Dále platí, že žádný strom se nemůže za časovou jednotku zmenšit ve velikosti, např. dorůst do růstové třídy $i - 1$, a ani nemůže růst o více než jednu růstovou třídu, např. dorůst do růstové třídy $i + 2$.

3.1.3 Reparametrizace Usherova modelu

Růstovou maticí \mathbf{G} (3.4) lze rovněž sestavit s využitím parametrů s_i a p_i , kde s_i označuje koeficient přežívání a p_i podmíněnou míru růstu jedince i -té růstové třídy [6]. Koeficient přežívání s_i odpovídá sumě prvků ve sloupcích matice \mathbf{G} a představuje celkovou pravděpodobnost přežití stromu i -té růstové třídy v čase t až $t + 1$

$$s_i = a_i + b_i = 1 - m_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3.10)$$

Růstovou matici \mathbf{G} lze vyjádřit následovně [27]

$$\mathbf{G} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}, \quad (3.11)$$

kde \mathbf{S} je čtvercová diagonální matice s koeficienty přežívání s_i pro k růstových tříd v čase t až $t + 1$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_k \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

a \mathbf{P} je stochastická matice s podmíněnými mírami růstu p_i pro k růstových tříd v čase t až $t + 1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 - p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 - p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - p_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{k-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

kdy p_i lze interpretovat jako pravděpodobnost, že strom i -té růstové třídy doroste v čase t až $t + 1$ do $(i + 1)$ -ní růstové třídy za předpokladu, že v čase t až $t + 1$ strom neuhyne. Pro p_i platí

$$p_i = \frac{b_i}{1 - m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1). \quad (3.14)$$

Pro nejvyšší růstovou třídu $i = k$ platí $p_k = 1$.

S využitím vztahu (3.11) pro růstovou matici \mathbf{G} lze diferenční rovnici (3.2) přepsat následovně

$$\mathbf{n}(t + 1) = (\mathbf{F} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{P})\mathbf{n}(t). \quad (3.15)$$

Usherova projekční matice \mathbf{U} má následně podobu

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} s_1(1 - p_1) + f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 p_1 & s_2(1 - p_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 p_2 & s_3(1 - p_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{k-1}(1 - p_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{k-1} p_{k-1} & s_k \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

a zároveň platí

$$\begin{aligned} 0 < s_i &\leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ 0 < p_i &\leq 1, \quad 0 \leq f_i \quad (i = 1, 2, \dots, k-1), \\ p_k &= 1, \quad f_k > 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.1.4 Řešení Usherova maticového lineárního modelu

Uvažujeme Usherův lineární maticový růstový model (3.1) s Usherovou projekční maticí $\mathbf{0} \leq \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ (3.5), resp. (3.16), jejíž přechodové prvky jsou v čase konstantní. O chování Usherova dynamického systému (3.1) vypovídají vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{U} . Matice \mathbf{U} je čtvercová matice řádu k a existuje tedy k vlastních čísel vyhovující řešení rovnice (2.3), resp. (2.4), tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{v}_i &= \lambda_i\mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i^H\mathbf{U} &= \lambda_i\mathbf{w}_i^H \end{aligned}$$

kde λ_i je vlastní číslo matice \mathbf{U} a \mathbf{v}_i a \mathbf{w}_i je pravý, resp. levý vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ_i pro $i = 1, 2, \dots, k$. Nechtě vektory \mathbf{v}_i a \mathbf{w}_i jsou normované a tedy vzájemně ortonormální, jak vyplývá z poznámky 2.4. Vlastní čísla odpovídají kořenům charakteristické rovnice matice \mathbf{U} (2.9)

$$\det(\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Dále předpokládáme, že Usherova matice \mathbf{U} má k různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Tento předpoklad, jak dále uvidíme při studiu asymptotického chování lineárního modelu s primitivní projekční maticí, která má ostře dominantní vlastní číslo, nebude omezující a je platný pro většinu aplikací. Podle věty 2.3 matice \mathbf{U} má k lineárně nezávislých pravých a levých vlastních vektorů a na základě věty 2.4 pro každé vlastní číslo λ platí $\nu_a(\lambda_i) = \nu_g(\lambda_i)$. Matice \mathbf{U} je jednoduchá.

Předpokládáme, že známe počáteční stav lesa $\mathbf{n}(0)$, kdy $\mathbf{n}(0) \in \mathbb{R}_+^k$. Protože vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^k a počáteční stav lesa $\mathbf{n}(0)$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci

$$\mathbf{n}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k, \tag{3.18}$$

kde c_i jsou konstanty, které jsou určeny jednoznačně. Označme $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T$ vektor, jehož prvky jsou konstanty c_i , a \mathbf{V} matici, jejíž sloupce jsou pravé vlastní vektory \mathbf{v}_i matice \mathbf{U} . Rovnici (3.18) lze přepsat

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{V}\mathbf{c}. \tag{3.19}$$

Matice \mathbf{V} je regulární a má inverzní matici $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{W}^H$, jejíž řádky jsou hermitovskými transponovanými levými vlastními vektory \mathbf{w}_i matice \mathbf{U} . Pak pro vektor konstant \mathbf{c} platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{n}(0) = \mathbf{W}^H\mathbf{n}(0). \tag{3.20}$$

Stav lesa v kterékoli čas t je determinován opakovanou substitucí rovnice (3.1)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(1) &= \mathbf{U}\mathbf{n}(0), \\ \mathbf{n}(2) &= \mathbf{U}^2\mathbf{n}(0), \\ &\vdots\end{aligned}$$

což lze zapsat v obecné formě následovně

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{U}^t\mathbf{n}(0), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (3.21)$$

kde $\mathbf{n}(0)$ je vektor stavu lesa v počátečním stavu $t = 0$.

Víme, že matice \mathbf{U} je jednoduchá. Podle věty 2.6 je diagonalizovatelná a je tedy podobná své spektrální matici. Pomocí spektrálního rozkladu (2.17) matice \mathbf{U} a s využitím lemmatu 2.7 pro mocninné matice lze obecné řešení Usherova lineárního dynamického systému (3.21) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(t) &= \mathbf{U}^t\mathbf{n}(0) \\ &= \mathbf{V}\Lambda^t\mathbf{W}^H\mathbf{n}(0) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^t \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{n}(0),\end{aligned} \quad (3.22)$$

kde Λ je spektrální matice Usherovy matice \mathbf{U} , matice \mathbf{V} a \mathbf{W} je matice pravých vlastních vektorů \mathbf{v}_i , resp. levých vlastních vektorů \mathbf{w}_i . Součinu levého vlastního vektoru a vektoru počátečního stavu lesa $\mathbf{w}_i^H \mathbf{n}(0)$ odpovídá skalár, který je podle rovnice (3.20) shodný s konstantou c_i . Výsledkem součinu vlastních vektorů $\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^H$ je idempotentní matice [5].

Výše uvedené výsledky shrneme do následující věty.

Věta 3.3. [31, Věta 1] *Nechť $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ je Usherova matice, která má k různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Pravý a levý vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ_i označíme \mathbf{v}_i , resp. \mathbf{w}_i . Pro vlastní vektory \mathbf{v}_j a \mathbf{w}_i platí $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \dots, k$. Pak řešení Usherova lineárního dynamického systému (3.1) je ve tvaru*

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t \mathbf{v}_i = c_1 \lambda_1^t \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \lambda_k^t \mathbf{v}_k, \quad (3.23)$$

kde $c_i = \mathbf{w}_i^H \mathbf{n}(0)$.

Obecné řešení (3.23) je díky principu superpozice kombinací k lineárně nezávislých řešení $\{\lambda_i^t \mathbf{v}_i\}_{i=1}^k$ daného systému. Dlouhodobá dynamika stavu lesa $\mathbf{n}(t)$ závisí na vlastních číslech λ_i matice \mathbf{U} , která mohou být reálná i komplexní. Příspěvek jednotlivých vlastních čísel λ_i k asymptotickému chování obecného řešení je následující [5]:

- Pokud je $\lambda_i > 0$, pak λ_i^t přispívá k dynamice obecného řešení exponenciálním růstem pro $\lambda_i > 1$ a exponenciálním poklesem pro $\lambda_i < 1$.
- Pokud je $-1 < \lambda_i < 0$, pak λ_i^t vykazuje tlumené oscilace s periodou rovnou 2.

- Pokud je $\lambda_i < -1$, pak λ_i^t vykazuje divergující oscilace s periodou rovnou 2.
- Pokud je λ_i komplexní číslo, pak λ_i^t přispívá k dynamice systému exponenciálně rostoucími nebo klesajícími oscilacemi, podle toho, zda $|\lambda_i|$ je větší nebo menší než 1.

Absolutní hodnota vlastního čísla $|\lambda_i| = 1$ je tedy mezní hodnotou určující, zda velikost lesa bude růst nebo klesat. Rovnice (3.23) rozkládá celkový růst lesa na kombinaci exponenciálních příspěvků, vždy jeden pro každé vlastní číslo. Spektrum matice \mathbf{A} tedy vypovídá o výsledné dynamice stavu lesa.

3.1.5 Asymptotické vlastnosti řešení lineárního modelu

Budeme uvažovat Usherův lineární dynamický systém (3.1) s Usherovou projekční maticí \mathbf{U} řádu k , která je nerozložitelná a primitivní, a vektorem $\mathbf{n}(0)$, který reprezentuje počáteční stav lesa. Podle Perronovy věty 2.20 bude matice \mathbf{U} mít ostře dominantní číslo r . Jedná se o jednoduché kladné reálné vlastní číslo, pro které platí $r = \lambda_1 > |\lambda_i|$, kde λ_i jsou vlastní čísla pro $i = 2, 3, \dots, k$. Pravý a levý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu r je reálný a kladný, $\mathbf{v}, \mathbf{w} > 0$, a je jediným pravým a levým nezáporným vlastním vektorem. Nechť vektory \mathbf{v} a \mathbf{w} jsou normované. Prvky normovaného vlastního vektoru \mathbf{v} představují relativní zastoupení jednotlivých růstových tříd, jedná se o stabilní růstovou strukturu lesa.

Pro asymptotické chování lineárního dynamického systému (3.1) s primitivní projekční maticí platí následující věta o silné ergodicitě, která vychází z poznatků věty 2.22 o existenci limity primitivní matice [7].

Věta 3.4. [38, Theorem 8] *Mějme lineární růstový maticový model (3.1) s projekční maticí \mathbf{U} řádu k , která splňuje podmínky (3.5) a (3.6), a nechť je dán počáteční stav lesa $\mathbf{n}(0)$. Nechť matice \mathbf{U} je primitivní s ostře dominantním vlastním číslem r a příslušným pravým a levým vlastním vektorem $\mathbf{v} > 0$, resp. $\mathbf{w} > 0$, které jsou normované. Pak existuje limita*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}(t)}{r^t} = \mathbf{w}^H \mathbf{n}(0) \mathbf{v} = c \mathbf{v}, \quad (3.24)$$

kde vektor \mathbf{v} je nezávislý na počátečním stavu $\mathbf{n}(0)$ a pro prvky vektoru \mathbf{v} platí $\sum_{i=1}^k v_i = 1$. Konstanta c je závislá na $\mathbf{n}(0)$ a matici \mathbf{U} .

Ze vztahu (3.24) vyplývá, že stavový vektor $\mathbf{n}(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ konverguje ke stavu lesa o stabilní růstové struktuře, která odpovídá konstantnímu násobku vlastního vektoru \mathbf{v} . Řešení Usherova modelu (3.23) pro $t \rightarrow \infty$ je pak dominováno členem rovnice s ostře dominantním vlastním číslem r , tedy řešení odpovídá

$$\mathbf{n}(t) \approx c r^t \mathbf{v}, \quad (3.25)$$

kde $c = \mathbf{w}^H \mathbf{n}(0) \geq 0$. Pokud $\mathbf{0} \leq \mathbf{n}(0) \neq \mathbf{0}$, pak $c > 0$.

Z výrazu (3.25) vyplývá, pokud je projekční matice \mathbf{U} primitivní, pak dlouhodobá dynamika stavu lesa závisí na ostře dominantním vlastním čísle r a na stabilní růstové

struktúre lesa dané vlastním vektorem \mathbf{v} . Asymptotické chování modelu nezávisí na počáteční růstové struktúre $\mathbf{n}(0)$, růstová rovnice (3.1) je tak ergodická.

Pokud je počáteční stav lesa nenulový, tedy platí $\mathbf{0} \leq \mathbf{n}(0) \neq \mathbf{0}$, pak stav lesa pro $t \rightarrow \infty$ roste exponenciálně podle vztahu (3.25) a relativní zastoupení jednotlivých růstových tříd je úměrné složkám vlastního vektoru \mathbf{v} , tj. stabilní růstové struktúre. Jelikož pro c platí $c = \mathbf{w}^H \mathbf{n}(0)$, je celkový stav lesa po dostatečně dlouhém vývoji úměrný váženému součtu velikostí složek počátečního stavu lesa $\mathbf{n}(0)$, kdy jednotlivé váhy jsou dány prvky levého vlastního vektoru \mathbf{w} .

Rovnovážným stavem dynamického systému (3.1) je počátek, $\mathbf{n}_e^* = \mathbf{0}$, tzv. extinkční rovnovážný bod³, ve kterém les odumírá. Při počátečním stavu $\mathbf{n}(0) = \mathbf{0}$ dynamický systém setrvává vždy v tomto triviálním rovnovážném bodě. V souvislosti s jeho stabilitou platí tzv. základní věta demografie.

Věta 3.5. [11, Theorem 1.1.2; 26, Theorem 2.4] *Nechť \mathbf{U} je projekční matice (3.5) lineárního dynamického systému daného rovnicí (3.1) a podmínkami (3.6). Předpokládáme, že \mathbf{U} je nezáporná matice, která je nerozložitelná a primitivní, se spektrálním poloměrem $\rho(\mathbf{U}) = r$ a příslušným pravým a levým vlastním vektorem, $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, resp. $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, pro které předpokládáme, že jsou normované a platí $\mathbf{w}^H \mathbf{v} = 1$. Nechť $\mathbf{n}(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, je řešení lineárního systému (3.1) s počáteční podmínkou splňující $\mathbf{0} \leq \mathbf{n}(0) \neq \mathbf{0}$ a nechť $|\mathbf{n}(t)|$ představuje celkovou velikost populace v čase t . Pak*

(1) *platí (3.24), a*

(2) *následně platí*

(a) *pokud $r < 1$, pak $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{n}(t)| = 0$ a počátek \mathbf{n}_e^* je (globálně) asymptoticky stabilní,*

(b) *pokud $r > 1$, pak $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{n}(t)| = \infty$ a počátek \mathbf{n}_e^* je nestabilní,*

(c) *pokud $r = 1$, pak $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{n}(t)| = |(\mathbf{w}^H \mathbf{n}(0)) \mathbf{v}|$ a existuje kladný rovnovážný bod $\mathbf{n}_p^* = c \mathbf{v}$, kde $c \in \mathbb{R}_+$.*

Poznámka 3.1. Z pohledu biologické interpretace lineárního dynamického modelu představuje ostře dominantní vlastní číslo r koeficient růstu lesa. Pokud je $r > 1$, stav lesa v čase exponenciálně roste bez omezení. Pokud je $r < 1$, les v čase odumírá. Je-li $r = 1$, bude rovnovážným bodem systému netriviální kladný rovnovážný bod \mathbf{n}_p^* , který bude odpovídat konstantnímu násobku vlastního vektoru \mathbf{v} a stav lesa bude odpovídat stabilní růstové struktúre.

Z věty 3.5 plyne, že při zvětšení ostře dominantního vlastního čísla přes hodnotu $r = 1$ dochází ke změně stability počátku, rovnovážný bod \mathbf{n}_e^* ztrácí svojí stabilitu. Při $r = 1$ existuje rovněž nekonečně dalších netriviálních rovnovážných bodů. Bod $(r, \mathbf{n}(t)) = (1, \mathbf{0})$ je bodem bifurkace, ve kterém dochází ke střetu dvou větví rovnovážných bodů. Větev extinkčního rovnovážného bodu zde mění stabilitu a vzniká zde větev neasymptoticky stabilních netriviálních rovnovážných stavů. Mluvíme o tzv. vertikální bifurkaci [11].

³Shodně s [1], [30] nebo [11] budeme řešení dynamického systému nazývat rovnovážným bodem. Rovnovážný bod je v literatuře označován též jako pevný či stacionární bod.

3.1.6 Čistá míra reprodukce

Asymptotické chování lineárního dynamického systému (3.1) lze analyzovat rovněž pomocí biologické veličiny nazývané čistá míra reprodukce R_0 . Čistá míra reprodukce⁴ je jedna ze standardních charakteristik populace, kterou lze odvodit z koeficientů reprodukce a koeficientů přežívání projekční matice \mathbf{U} . Čistá míra reprodukce vyjadřuje poměr, v jakém generace potomků nahradí generaci svých rodičů. Pokud je $R_0 < 1$, nestačí následující generace nahradit předchozí generaci a populace vymírá [31].

Příklad 3.2. Uvažujme lineární diferenční model o jedné růstové třídě $n(t+1) = rn(t)$ s počátečním stavem lesa $n(0) = n_0$, kdy $n(t)$ vyjadřuje velikost stavu lesa (např. počet stromů) v čase $t \in \mathbb{N}_0$ a dále platí $r, n_0 \geq 0$. Řešení růstového modelu je $n(t) = r^t n_0$ pro $t \in \mathbb{N}_0$ a r značí koeficient růstu lesa.

Koeficient r lze vyjádřit jako $r = f + s$, kde $f \geq 0$ označuje koeficient reprodukce a $s \in (0, 1)$ je pravděpodobnost přežití jedince. Necht' v čase $t = 0$ dojde k zmlazení nového jedince. Pravděpodobnost, že zmlazený jedinec bude v čase $t = 1, 2, \dots$ naživu, bude s, s^2, \dots , a v daném čase bude tento zmlazený jedinec generovat fs, fs^2, \dots potomků. Odtud pravděpodobnost, že jedinec přežije t projekčních intervalů je s^t , a jeho reprodukční příspěvek, resp. očekávaný počet jeho potomků v čase t od jeho zmlazení bude fs^t .

Dále budeme považovat délku projekčního intervalu za jednotkový čas. Očekávanou dobu dožití zmlazeného jedince lze vyjádřit geometrickou řadou

$$\begin{aligned} N &= 1 + s + s^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

Produkcí potomků nově zmlazeného jedince během jeho života lze reprezentovat následně geometrickou řadou

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{t=0}^{\infty} fs^t \\ &= f + fs + fs^2 + \dots \\ &= f(1 + s + s^2 + \dots) \\ &= \frac{f}{1-s} \\ &= fN. \end{aligned}$$

Součet geometrické řady R_0 vyjadřuje očekávaný počet potomků nově zmlazeného jedince během jeho celého života. Číslo R_0 nazýváme čistou mírou reprodukce [12]. \triangle

⁴Čistá míra reprodukce je vhodným parametrem pro analýzu asymptotického chování dynamických systémů, které mají projekční matice vyšších řádů a pro které není znám analytický postup pro výpočet ostře dominantního čísla. Oproti tomu předpis pro výpočet čisté míry reprodukce, pokud je znám, je aplikovatelný pro populační modely libovolné dimenze.

Pro strukturované populační modely, jako je Usherův růstový model, je výpočet čisté míry reprodukce do jisté míry podobný příkladu populačního modelu jedné dimenze. Nechť \mathbf{U} je Usherova projekční matice (3.5), která je součtem reprodukční matice \mathbf{F} , jejíž prvky jsou koeficienty reprodukce (3.3), a růstové matice \mathbf{G} s koeficienty přežívání (3.4). V čase $t = 0$ dojde k zmlazení nových jedinců, vzniku nové generace. Pravděpodobnost jejich přežití v časech $t = 1, 2, \dots$ bude dána $\mathbf{G}, \mathbf{G}^2, \dots$. Produkce potomků této generace zmlazených jedinců, kteří v daných časech $t = 1, 2, \dots$ zůstanou naživu, bude určena $\mathbf{FG}, \mathbf{FG}^2, \dots$.

Produkcí potomků zmlazených jedinců během celého života této generace lze vyjádřit následovně [5]

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{F} + \mathbf{FG} + \mathbf{FG}^2 + \dots \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{I} + \mathbf{G} + \mathbf{G}^2 + \dots) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \\ &= \mathbf{FN},\end{aligned}$$

kde prvky matice $\mathbf{T} = (t_{ij})$ představují očekávaný počet všech potomků zmlazených v i -té růstové třídě, které byly vygenerovány jedincem, jež byl v čase $t = 0$ v j -té růstové třídě. Matici $\mathbf{N} = (n_{ij})$ nazýváme fundamentální maticí a její prvky vyjadřují očekávanou dobu, kterou jedinec, jež byl v čase $t = 0$ v j -té růstové třídě, stráví v i -té růstové třídě.

Matice \mathbf{T} se nazývá maticí následující generace, protože projektuje stav populace z jedné generace do té následující. Pokud matice \mathbf{T} má ostře dominantní vlastní číslo, je toto číslo čistou mírou reprodukce. Ostře dominantní číslo představuje míru růstu populace z jedné generace do druhé, je to mezigenerační koeficient růstu populace. Platí tedy

$$R_0 = \varrho(\mathbf{T}) = \varrho(\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}).$$

V případě Usherovy matice je první růstová třída jedinou třídou, v níž se vyskytují nově zmlazení jedinci. Proto matice \mathbf{T} má pouze první řádek s nenulovými nezápornými prvky. Ostatní řádky jsou nulové. Ostře dominantním číslem je pak prvek $R_0 = t_{11}$. Pro výpočet čisté míry reprodukce Usherovy projekční matice řádu k byl odvozen následující analytický předpis [10, 11]

$$R_0 = \sum_{i=1}^k f_i \prod_{j=1}^i \frac{b_{j-1}}{1 - a_j} \quad (3.26)$$

pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Poznámka 3.2. Výraz $1/(1 - a_j)$ v rovnici (3.26) lze interpretovat jako očekávanou dobu – počet projekčních intervalů, kterou jedinec zmlazený v čase $t = 0$ setrvá v růstové třídě j . Následně výraz $b_{j-1}/(1 - a_j)$ představuje pravděpodobnost, že jedinec, který byl zmlazen v čase $t = 0$ a dorostl přeživší do $(j - 1)$ -ní růstové třídy, během následujícího projekčního intervalu přežije a doroste do j -té růstové třídy.

Výraz $b_{j-1}/(1 - a_j)$ odpovídá Masonovu pravidlu při redukci grafu životního cyklu $G(\mathbf{U})$, které eliminuje v grafu smyčky. Smyčky reprezentují v Usherově matici \mathbf{U} koeficienty přežívání a_j . Příklad Masonova pravidla pro eliminaci smyčky je přiblížen na obrázku 3.2.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} n_1 & \xrightarrow{b_1} & n_2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ a_2 \neq 1 \end{array} & \equiv & n_1 & \xrightarrow{b_1(1-a_2)^{-1}} & n_2 \\ n_2 = b_1 n_1 + a_2 n_2 & & & & n_2 = b_1(1-a_2)^{-1} n_1 & & \end{array}$$

Obrázek 3.2: Masonovo pravidlo redukce grafu. Příklad eliminace smyčky u vrcholu n_2 grafu životního cyklu $G(\mathbf{U})$ Usherovy matice \mathbf{U} se 3 růstovými třídami. Upraveno podle [4, Fig. A.1].

Dále v rovnici (3.26) představuje člen

$$\frac{1}{1-a_1} \cdot \frac{b_1}{1-a_2} \cdots \frac{b_{j-1}}{1-a_j} = \prod_{j=1}^i \frac{b_{j-1}}{1-a_j} = \pi_i$$

kumulativní pravděpodobnost přežití π_i . Vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec nově zmlazený v čase $t = 0$ přežije i projekčních intervalů, tj. doroste alespoň do růstové třídy, kterou měl jeho rodičovský strom v době zmlazení. (Pro koeficient přežívání b_0 platí $b_0 = 1$.) Očekávaný počet potomků, který tento zmlazený jedinec vyprodukuje v růstové třídě i za jeden projekční interval, je součinem kumulativní pravděpodobnosti přežití π_i a koeficientu reprodukce f_i , tedy

$$f_i \prod_{j=1}^i \frac{b_{j-1}}{1-a_j}.$$

Součtem očekávaných potomků jedince za všechny růstové třídy dostaneme R_0 dle vztahu (3.26).

Následující definice vymezuje čistou míru reprodukce pro Usherovu matici na základě výše uvedených poznatků.

Definice 3.3. *Nechť $\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$ je Usherova matice (3.5), která je primitivní. Pokud $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ je regulární matice a matice $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ má kladné jednoduché ostře dominantní vlastní číslo $\varrho(\mathbf{T}) = R_0$, pak vlastní číslo R_0 nazveme čistou mírou reprodukce projekční matice \mathbf{U} . Pro výpočet R_0 matice \mathbf{U} platí vztah daný (3.26).*

Poznámka 3.3. Pro koeficienty přežívání a_i a b_i v růstové matici \mathbf{G} platí $a_i + b_i \leq 1$ (3.6). Je tedy požadováno, aby suma prvků ve sloupcích matice \mathbf{G} byla rovna nebo menší 1, nebo-li $\varrho(\mathbf{G}) \leq 1$. Pokud pro růstovou matici \mathbf{G} platí $\varrho(\mathbf{G}) = 1$, je matice $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ singularní. Proto budeme pro růstovou matici \mathbf{G} požadovat $\varrho(\mathbf{G}) < 1$, tedy aby suma prvků alespoň v jednom sloupci matice \mathbf{G} byla menší 1.

Věta 3.6. [10, Theorem 3] *Nechť \mathbf{U} je projekční matice (3.5) s ostře dominantním vlastním číslem r splňující podmínky (3.6) a matice \mathbf{F} a \mathbf{G} jsou matice vyhovující podmínkám definice 3.3. Pak $r > 1$ (resp. $r < 1$ nebo $r = 1$), právě tehdy, když $R_0 > 1$ (resp. $R_0 < 1$ nebo $R_0 = 1$).*

Důsledek 3.1. Jsou-li splněny podmínky věty 3.6, rovnovážný bod \mathbf{n}_e^* dynamického systému (3.1) je asymptoticky stabilní (resp. nestabilní) právě tehdy, když $R_0 < 1$ (resp. $R_0 > 1$). Pokud $R_0 = 1$, pak existuje kladný rovnovážný bod $\mathbf{n}_p^* = c\mathbf{v}$, kde c je kladná konstanta.

Příklad 3.3. Uvažujme populaci reprezentovanou 2. růstovými třídami s koeficienty reprodukce a koeficienty přežívání dané reprodukční maticí \mathbf{F} a růstovou maticí \mathbf{G}

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Usherova projekční matice $\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$ je nezáporná matice 2. řádu

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Usherova matice \mathbf{U} je nerozložitelná a primitivní matice a podle Perronovy věty 2.20 bude mít kladné ostře dominantní vlastní číslo r rovno spektrálnímu poloměru. Spektrální poloměr matice \mathbf{U} je

$$\varrho(\mathbf{U}) = \max \left\{ \left| \frac{11}{10} \right|, \left| \frac{1}{5} \right| \right\} = \frac{11}{10}$$

a $\varrho(\mathbf{U}) = r = \frac{11}{10}$ je ostře dominantní vlastní číslo matice \mathbf{U} .

Nyní určíme čistou míru reprodukce R_0 projekční matice \mathbf{U} podle definice 3.3. Stanovíme matici $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ a rozhodneme, existuje-li k ní inverzní matice.

Matice $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ je

$$\mathbf{I} - \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Víme, že suma prvků ve sloupcích matice \mathbf{G} je menší než 1, a jak uvádí poznámka 3.2, matice $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ bude regulární. Determinant matice $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ je

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{G}) = \begin{vmatrix} 0,4 & 0 \\ -0,2 & 0,3 \end{vmatrix} = 0,12.$$

Protože $\det(\mathbf{I} - \mathbf{G}) \neq 0$, je matice $\mathbf{I} - \mathbf{G}$ regulární a inverzní matice $(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ je k ní určena jednoznačně.

Odtud matice $\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ je

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrální poloměr matice $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ je roven vlastnímu číslu R_0

$$\varrho(\mathbf{T}) = \max \left\{ \left| \frac{5}{3} \right|, |0| \right\} = \frac{5}{3}$$

a protože platí

$$\varrho(\mathbf{T}) = \frac{5}{3} > |0|,$$

je $R_0 = \frac{5}{3}$ ostře dominantní vlastní číslo nezáporné matice $\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ a odtud R_0 je čistou mírou reprodukce projekční matice \mathbf{U} .

Čistou míru reprodukce R_0 pro Usherovu matici \mathbf{U} lze rovněž vypočítat přímo pomocí vzorce (3.26) na základě hodnot koeficientů reprodukce f_i a koeficientů přežívání a_i a b_i , tedy

$$R_0 = f_1 \cdot \frac{1}{1 - a_1} + f_2 \cdot \frac{1}{1 - a_1} \cdot \frac{b_1}{1 - a_2} = 0 \cdot \frac{1}{1 - 0,6} + 1 \cdot \frac{1}{1 - 0,6} \cdot \frac{0,2}{1 - 0,7} = \frac{5}{3}.$$

△

3.2 Lineární model dvou růstových tříd

3.2.1 Sestavení lineárního modelu 2 růstových tříd

Uvažujeme Usherův lineární maticový růstový model monokulturálního lesa, kdy porost (populace) je reprezentován jedním druhem lesní dřeviny. Předpokládáme, že nová generace lesa vzniká na místě původního porostu přirozenou obnovou pod mateřským porostem. Nová generace vzniká z náletu a opadu semen vlastního mateřského porostu. Nedochází k náletu (disperzi) semen z okolních porostů, ani nedochází k rozptylu semen mateřského porostu do okolních porostů. Neuvažujeme o umělé obnově porostu, tedy výsevem semen nebo výsadbou sazenic. Populace jedinců je v tomto případě uzavřená.

Lesní porost je strukturován podle velikosti stromů a jejich plodnosti do 2 růstových tříd ($i = 1, 2$)

$$\mathbf{n}(t + 1) = \mathbf{U}_1 \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(0) \geq \mathbf{0}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (3.27)$$

kde \mathbf{U}_1 je Usherova projekční matice 2×2 . Stav zkoumané populace je reprezentován vektorem

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix},$$

kde $n_1(t)$ a $n_2(t)$ jsou počty mladých, resp. dospělých stromů vyjádřených na jednotku plochy v čase t . První růstová třída odpovídá jedincům, kteří dosud nedospěli a nejsou plodní. Mluvíme o tzv. juvenilních jedincích. Druhá třída představuje jedince, kteří dospěli a jsou plodní. Vektor $\mathbf{n}(0)$ představuje počáteční stav lesa.

První růstová třída odpovídá fázi mladosti, která je vymezena podobou jedince od semene, sazenice, stromku až po mladý strom. Ve fázi mladosti není jedinec schopen dát

vzniku další generaci, tj. generativně se rozmnožovat ze semen. Druhá růstová třída odpovídá fázi dospělosti, do které zahrneme středněvěké, dospělé až přestárlé jedince. V této fázi vývoje je strom schopen vytvářet semena a umožňuje tedy generativní (semennou) reprodukci porostu.

Usherovu projekční matici \mathbf{U}_1 vyjádříme podle (3.5) jako součet reprodukční matice \mathbf{F}_1 a růstové matice \mathbf{G}_1 , kdy u růstové matice budeme podle vztahu (3.11) předpokládat, že je součinem matice s koeficienty přežívání \mathbf{S}_1 a stochastické matice s podmíněnými mírami růstu \mathbf{P}_1 . Tedy pro \mathbf{U}_1 bude platit

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1$$

a diferenční rovnici (3.27) lze následně přepsat

$$\mathbf{n}(t+1) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1)\mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(0) \geq \mathbf{0}, \quad t \in \mathbb{N}_0. \quad (3.28)$$

Reprodukční matice $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je nezáporná matice

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

s jediným nenulovým prvkem f . Jedná se o koeficient reprodukce pro stromy ve fázi dospělosti, kdy pro tuto fázi předpokládáme generativní obnovu porostu. Parametr f udává počet zmlazených stromků na jednotku plochy v 1. růstové třídě díky semenné obnově dospělých stromů ze 2. růstové třídy za jeden projekční interval $(t, t+1)$. Koeficient reprodukce pro jedince ve fázi mladosti je nulový, protože předpokládáme, že mladí jedinci nejsou schopni semenné obnovy.

Matice $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je nezáporná matice

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

s koeficienty přežívání na diagonále matice. Koeficienty přežívání s_1 a s_2 udávají pravděpodobnost přežití mladého, resp. dospělého stromu během projekčního intervalu $(t, t+1)$.

Stochastická matice $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je nezáporná matice

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$$

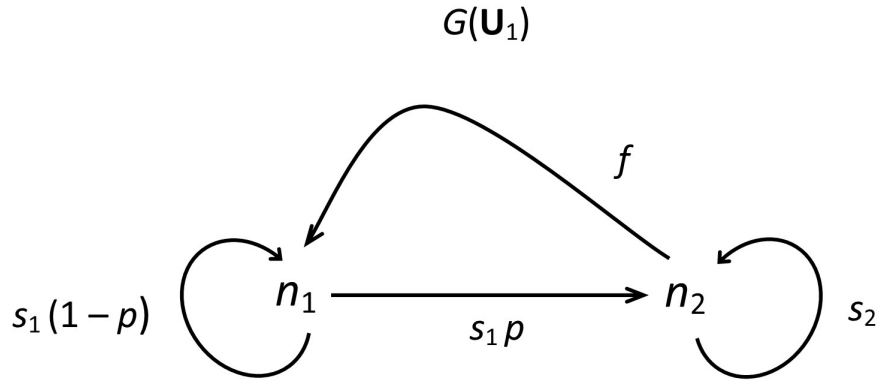
s podmíněnými mírami růstu p_i . Parametr $p = p_1$ vyjadřuje pravděpodobnost, že mladý strom v čase t až $t+1$ dospěje, tj. doroste do fáze dospělosti, a to za předpokladu, že během projekčního intervalu neuhyne. Pro 2. růstovou třídu platí $p_2 = 1$.

Definice 3.4. Nezápornou matici $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ nazveme Usherovou projekční maticí lineárního modelu 2 růstových tříd (3.28), právě když pro její prvky platí

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} s_1(1-p) & f \\ s_1p & s_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

a zároveň

$$0 < f, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < s_i < 1 \quad (i = 1, 2). \quad (3.30)$$



Obrázek 3.3: Graf životního cyklu lineárního modelu 2 růstových tříd s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 podle (3.29). Upraveno podle [30, Fig. 1].

Na jednotlivé vitální míry Usherovy matice \mathbf{U}_1 klademe požadavky (3.30), které respektují reálný vývoj lesního porostu. Dospělí jedinci jsou schopni vytvářet semena, dochází tak k přirozené obnově porostu ($f > 0$). Přežití mladých a dospělých stromů není nikdy jisté ($s_1, s_2 < 1$), pro mortalitu jedinců z obou růstových tříd pak platí $0 < m_1, m_2 < 1$. Zmlazeným stromkům je umožněno, aby dorostly do dospělosti ($s_1, p > 0$). Mladý jedinec může být ve vývoji opožděn ($p < 1$). Dospělý jedinci mohou plodit po delší dobu jejich života ($s_2 > 0$). Usherova projekční matice \mathbf{U}_1 podle (3.29) je reprezentovaná grafem životního cyklu, resp. orientovaným grafem $G(\mathbf{U}_1)$, který je zobrazen na obrázku 3.3.

Věta 3.7. *Nechť je dána Usherova projekční matice \mathbf{U}_1 řádu 2 podle definice 3.4, tj. matice \mathbf{U}_1 je ve tvaru (3.29) a zároveň její prvky splňují podmínky (3.30). Pak je Usherova matice \mathbf{U}_1 nerozložitelná a primitivní.*

Důkaz. Mějme Usherovu matici $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, která splňuje podmínky požadované na její prvky podle definice 3.4. Vzhledem k daným předpokladům (3.30) jsou všechny prvky matice \mathbf{U}_1 kladné, tedy podle definice 2.12 je \mathbf{U}_1 kladná matice.

Nejprve dokážeme sporem, že matice \mathbf{U}_1 je nerozložitelná. Nechť \mathbf{U}_1 je rozložitelná matice řádu 2. Pak podle definice 2.16 lze matici \mathbf{U}_1 vyjádřit ve tvaru (2.21), tedy

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

kde $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ jsou čtvercové matice řádu 1 a $\mathbf{0}$ je nulová matice řádu 1, anebo lze matici \mathbf{U}_1 do tohoto tvaru převést simultánní permutací řádků a sloupců. Matice \mathbf{U}_1 má ve tvaru (3.31) nulový prvek $\mathbf{0}$, což je ve sporu s předpokladem, že \mathbf{U}_1 je kladná matice. To znamená, že matice \mathbf{U}_1 je nerozložitelná.

Dále dokážeme, že matice \mathbf{U}_1 je primitivní. Víme, že matice \mathbf{U}_1 je kladná (tedy

nezáporná) a nerozložitelná. Pro kladnou matici platí $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^1 > \mathbf{0}$. Existuje tedy $k = 1$, $k \in \mathbb{N}$, pro které $\mathbf{U}_1^k > \mathbf{0}$. Podle věty 2.13 je \mathbf{U}_1 primitivní matice. \square

Poznámka 3.4. Uvažujme pro koeficient reprodukce matice \mathbf{U}_1 slabší podmínky, připustíme možnost $f = 0$, tedy bude platit $f \geq 0$. Když nastane $f = 0$, bude matice \mathbf{U}_1 rozložitelná.

3.2.2 Obecné řešení lineárního modelu 2 růstových tříd

Obecné řešení lineárního modelu 2 růstových tříd (3.28) s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 zadanou podle definice 3.4 – jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty – budeme hledat ve tvaru lineární kombinace 2 lineárně nezávislých řešení $\{\mathbf{n}_i(t)\}_{i=1}^2$

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \mathbf{n}_i(t), \quad (3.32)$$

kde c_i jsou libovolné konstanty. Bude-li pro každé vlastní číslo λ_i matice \mathbf{U}_1 platit $\nu_a(\lambda_i) = \nu_g(\lambda_i)$, lze obecné řešení (3.32) pomocí spektrálního rozkladu matice \mathbf{U}_1 vyjádřit ve tvaru (3.22), resp. (3.23), tedy

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^t \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{n}(0) = \sum_{i=1}^2 c_i \lambda_i^t \mathbf{v}_i, \quad (3.33)$$

kde λ_i , \mathbf{v}_i a \mathbf{w}_i jsou vlastní čísla a odpovídající pravé a levé vlastní vektory matice \mathbf{U}_1 . Vektor $\mathbf{n}(0) = (n_1(0), n_2(0))^T$ je počáteční podmínka reprezentující počáteční strukturu lesa.

Vlastní čísla matice \mathbf{U}_1 odpovídají kořenům charakteristického polynomu této matice

$$p_{\mathbf{U}_1}(\lambda) = \det(\mathbf{U}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} s_1(1-p) - \lambda & f \\ s_1 p & s_2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Rozvojem determinantu nalezneme charakteristický polynom $p_{\mathbf{U}_1}(\lambda)$, který položíme 0 a dostaneme charakteristickou rovnici matice \mathbf{U}_1

$$p_{\mathbf{U}_1}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-s_1 - s_2 + s_1 p) + s_1 s_2 - s_1 s_2 p - s_1 p f = 0. \quad (3.34)$$

Diskriminant charakteristické rovnice (3.34) je

$$D = (s_1(1-p) - s_2)^2 + 4s_1 p f \quad (3.35)$$

a hledaná řešení charakteristické rovnice (3.34), tedy vlastní čísla matice \mathbf{U}_1 , jsou

$$\lambda_1 = \frac{s_1(1-p) + s_2}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{s_1(1-p) + s_2}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}. \quad (3.36)$$

Vzhledem k předpokladům (3.30) je $D > 0$, takže λ_1 a λ_2 jsou dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice (3.34). Spektrální poloměr matice \mathbf{U}_1 je roven vlastnímu číslu λ_1 , tedy

$$\varrho(\mathbf{U}_1) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \lambda_1 \quad (3.37)$$

a protože platí

$$\varrho(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 > |\lambda_2|, \quad (3.38)$$

je λ_1 ostře dominantním vlastním číslem matice \mathbf{U}_1 . Protože charakteristický polynom $p_{\mathbf{U}_1}(\lambda)$ má dva různé kořeny, bude matice \mathbf{U}_1 mít podle věty 2.3 dva lineárně nezávislé vlastní vektory, a tedy podle věty 2.4 platí $\nu_a(\lambda_i) = \nu_g(\lambda_i)$. Matice \mathbf{U}_1 je jednoduchou maticí a podle věty 3.3 je možné obecné řešení lineárního modelu 2 růstových tříd hledat ve tvaru (3.33).

K vlastním číslům λ_i matice \mathbf{U}_1 určíme pravé a levé vlastní vektory \mathbf{v}_i , resp. \mathbf{w}_i . Substitucí vlastních čísel λ_1 a λ_2 do (2.6) dostaneme homogenní soustavy

$$\begin{aligned} \lambda_1: \quad (s_1(1-p) - \lambda_1)v_1 + fv_2 &= 0 & \lambda_2: \quad (s_1(1-p) - \lambda_2)v_1 + fv_2 &= 0 \\ s_1pv_1 + (s_2 - \lambda_1)v_2 &= 0 & s_1pv_1 + (s_2 - \lambda_2)v_2 &= 0 \end{aligned}$$

a jejich vyřešením nalezneme pravé vlastní vektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Matice pravých vlastních vektorů je

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} & \frac{\lambda_2 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix}.$$

K matici \mathbf{V} určíme inverzní matici \mathbf{V}^{-1} , tedy hermitovskky transponovanou matici levých vlastních vektorů \mathbf{W}^H , tedy

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{W}^H = \begin{pmatrix} \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{-f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Řádky matice \mathbf{W}^H jsou levé vlastní vektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{-f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Dále určíme spektrální matici Λ_1 odpovídající matici \mathbf{U}_1 , tedy

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení Usherova lineárního modelu 2 růstových tříd s využitím spektrálního

rozkladu matice \mathbf{U}_1 lze zapsat

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &= \mathbf{U}_1^t \mathbf{n}(0) \\
&= \mathbf{V} \Lambda_1^t \mathbf{W}^H \mathbf{n}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} & \frac{\lambda_2 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{-f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n_1(0) \cdot \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + n_2(0) \cdot \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \lambda_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} n_1(0) \cdot \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{\lambda_1 - \lambda_2} - n_2(0) \cdot \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \lambda_2^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

kde $c_1 = n_1(0) \cdot \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + n_2(0) \cdot \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0$ a $c_2 = n_1(0) \cdot \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{\lambda_1 - \lambda_2} - n_2(0) \cdot \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0$ jsou konstanty, jež jsou určeny jednoznačně a vyjadřují vliv počátečních podmínek $\mathbf{n}(0) \geq \mathbf{0}$ v (3.33).

Příklad 3.4. Uvažujme lesní porost strukturovaný do dvou růstových tříd, které odpovídají stromům ve fázi mladosti a fázi dospělosti. Dynamika stavu lesa je charakterizována koeficientem reprodukce dospělých jedinců $f = 4$, koeficienty přežívání mladých a dospělých jedinců $s_1 = 0,4$, resp. $s_2 = 0,6$ a podmíněnou míru růstu mladých jedinců $p = 0,25$. Odpovídající projekční matice je

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot (1 - 0,25) & 4 \\ 0,4 \cdot 0,25 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

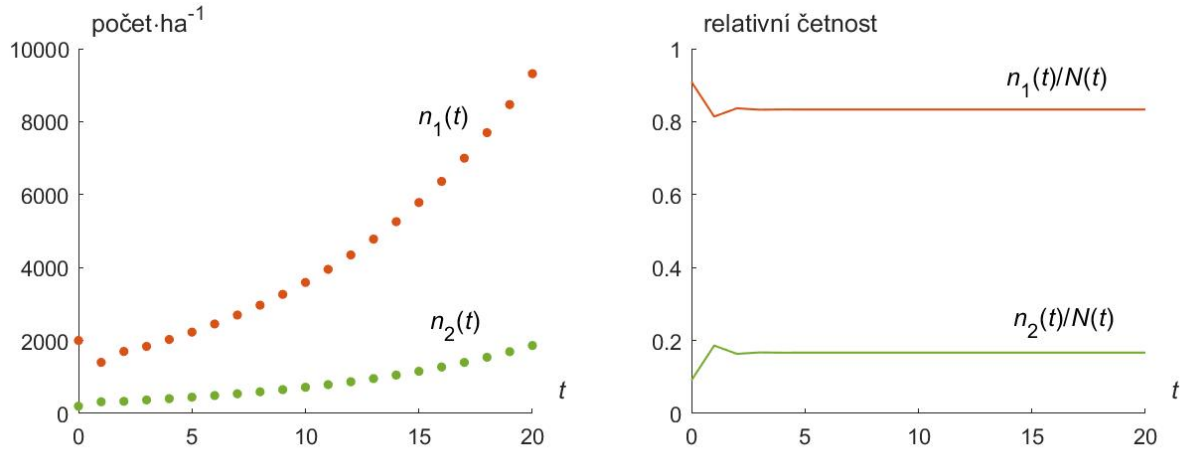
Počáteční stav lesa je dán vektorem $\mathbf{n}(0) = (2000, 200)^T$ s hodnotami počtu mladých a dospělých stromů na jeden hektar.

Vlastní čísla \mathbf{U}_1 vypočtená podle vztahu (3.36) jsou $\lambda_1 = \frac{11}{10}$ a $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$. Těmto vlastním číslům odpovídají příslušné pravé a levé vlastní vektory odvozené na základě vztahu (3.39), resp. (3.40), které jsou $\mathbf{v}_1 = (1, \frac{1}{5})^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -\frac{1}{8})^T$ a $\mathbf{w}_1 = (\frac{5}{13}, \frac{40}{13})^T$, $\mathbf{w}_2 = (\frac{8}{13}, -\frac{40}{13})^T$.

Obecné řešení odvozené podle vztahu (3.41) je

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{11}{10})^t & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{40}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{40}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 200 \end{pmatrix} \\
&= \frac{18000}{13} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \frac{8000}{13} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

a pro prvních 20 projekčních intervalů je průběh řešení vykreslen v grafu na obrázku 3.4a. Dynamika růstu lesa je zobrazena ve struktuře jedinců ve fázi mladosti a fázi dospělosti a je patrné, že velikost obou růstových tříd roste exponenciálně. Vývoj relativních zastoupení jednotlivých růstových tříd je znázorněn v grafu na obrázku 3.4b, ze kterého vyplývá, že relativní četnost mladých a dospělých jedinců zůstává po několika projekčních intervalech konstantní. Růstová struktura porostu konverguje ke stabilní růstové struktuře.



(a) Vývoj počtu mladých stromů $n_1(t)$ a dospělých stromů $n_2(t)$. (b) Vývoj růstové struktury porostu, $N(t) = n_1(t) + n_2(t)$.

Obrázek 3.4: Vývoj lesa strukturovaného na mladé a dospělé jedince na základě projekcí lineárního růstového modelu (3.28) s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 z příkladu 3.4 pro zvolené hodnoty vitálních měř $f = 4$, $s_1 = 0,4$, $s_2 = 0,6$, $p = 0,25$ a počáteční podmínce $n_1(0) = 2000$, $n_2(0) = 200$.

Průběh řešení Usherova růstového modelu se shodnými hodnotami vitálních měř, ale při různých počátečních podmínkách, je znázorněn na obrázku 3.5. Pro jednotlivé počáteční podmínky je celková velikost porostu na počátku vždy stejná, $N(0) = n_1(0) + n_2(0) = 2200$. Podmínky se liší v růstové struktuře. Z výsledků je patrné, že celková velikost porostu ve všech případech exponenciálně roste (obrázek 3.5a) a relativní zastoupení jednotlivých růstových tříd konverguje ke stejné růstové struktuře (obrázek 3.5b). Počáteční struktura porostu ovlivňuje pouze celkovou velikost porostu v čase t .

△

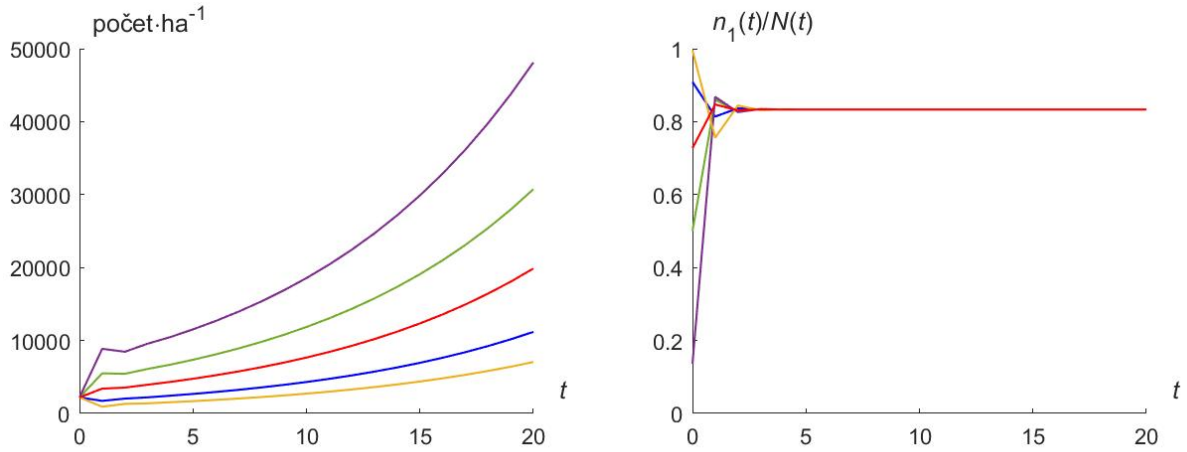
3.2.3 Asymptotické vlastnosti lineárního modelu 2 růstových tříd

Obecné řešení lineárního růstového modelu 2 růstových tříd (3.41) s primitivní projekční maticí \mathbf{U}_1 je podle (3.25) asymptoticky ekvivalentní s jeho limitním tvarem, tedy řešení odpovídá

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t) &\approx c_1 \lambda_1^t \mathbf{v}_1 \\ &\approx \left(n_1(0) \cdot \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + n_2(0) \cdot \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kde $c_1 = \mathbf{w}_1^H \mathbf{n}(0) \geq 0$.

Asymptotické chování lineárního dynamického systému (3.28) s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 danou podmínkami dle definice 3.4, která je podle věty 3.7 primitivní, vyhodnotíme z



(a) Vývoj celkového počtu stromů.

(b) Vývoj relativního zastoupení mladých stromů v porostu.

Obrázek 3.5: Vliv počátečních podmínek na dynamiku růstu lesa. Projekce lineárního růstového modelu (3.28) s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 z příkladu 3.4 pro $f = 4$, $s_1 = 0,4$, $s_2 = 0,6$, $p = 0,25$. Pro počáteční stav vždy platí $N(0) = 2200$. Počáteční podmínky jsou $\mathbf{n}(0) = (2190, 10)^T$ (žlutá), $\mathbf{n}(0) = (2000, 200)^T$ (modrá), $\mathbf{n}(0) = (1600, 600)^T$ (červená), $\mathbf{n}(0) = (1100, 1100)^T$ (zelená), $\mathbf{n}(0) = (300, 1900)^T$ (fialová).

ostře dominantního vlastního čísla λ_1 , resp. s využitím věty 3.6 podle čisté míry reprodukce porostu R_0 .

Podle silné verze Perronovy-Frobeniovy věty 2.21 má Usherova primitivní matice \mathbf{U}_1 reálné kladné jednoduché vlastní číslo r_1 , které je ostře dominantní. V případě matice \mathbf{U}_1 je $r_1 = \lambda_1$, tedy λ_1 je rovno spektrálnímu poloměru (3.37) a je větší, než modul ostatních vlastních čísel (3.38). K Perronovu vlastnímu číslu

$$r_1 = \frac{s_1(1-p) + s_2}{2} + \frac{\sqrt{(s_1(1-p) - s_2)^2 + 4s_1pf}}{2} \quad (3.43)$$

existuje pravý a levý reálný kladný Perronův vlastní vektor, který podle (3.39), resp. (3.40) je

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - s_1(1-p)}{f} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{s_1(1-p) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{f}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Dynamiku lesního porostu o 2 růstových třídách lze charakterizovat pomocí čisté míry reprodukce R_0 . Protože Usherova matice \mathbf{U}_1 je primitivní, lze R_0 vypočítat podle definice 3.3. Určíme matici $\mathbf{I} - \mathbf{G}_1$, resp. $\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1$ a rozhodneme, zda-li k ní existuje inverzní matice.

Matice $\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1$ je

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1(1-p) & 0 \\ s_1p & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s_1(1-p) & 0 \\ -s_1p & 1 - s_2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1$ je

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1) = \begin{vmatrix} 1 - s_1(1-p) & 0 \\ -s_1p & 1 - s_2 \end{vmatrix} = 1 - s_1 - s_2 + s_1s_2 + s_1p - s_1s_2p.$$

Vzhledem k podmínkám (3.30) matice \mathbf{U}_1 danými definicí 3.4 platí $\det(\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1) \neq 0$. Matice $\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1$ je regulární a inverzní matice $(\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1)^{-1}$ je k ní určena jednoznačně.

Odtud matice $\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{I} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{P}_1)^{-1}$ je

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-s_1(1-p)} & 0 \\ \frac{s_1p}{(1-s_2)(1-s_1(1-p))} & \frac{1}{1-s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1pf}{(1-s_2)(1-s_1(1-p))} & \frac{f}{1-s_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{T}_1 je horní trojúhelníková matice a tedy pro ni platí, že všechny její vlastní čísla jsou diagonální prvky. Vlastní čísla matice \mathbf{T}_1 jsou $R_0 = \lambda_1$ a $\lambda_2 = 0$, kde

$$R_0 = \frac{s_1pf}{(1-s_2)(1-s_1(1-p))} > 0. \quad (3.45)$$

Spektrální poloměr matice \mathbf{T}_1 je roven vlastnímu číslu

$$\varrho(\mathbf{T}_1) = \max \{ |R_0|, |0| \} = R_0$$

a protože platí

$$\varrho(\mathbf{T}_1) = R_0 > |0|,$$

je R_0 ostře dominantním vlastním číslem nezáporné matice \mathbf{T}_1 a odtud R_0 je čistou mírou reprodukce projekční matice \mathbf{U}_1 .

Rovnovážným bodem dynamického systému (3.28), jehož projekční maticí je Usherova matice ve tvaru zadaném definicí 3.4, splňující řešení rovnice

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{U}_1 \mathbf{n}^*$$

je počátek $\mathbf{n}_e^* = (0, 0)^T$, tzv. extinkční rovnovážný bod, ve kterém lesní porost odumírá. Při počátečním stavu porostu $\mathbf{n}(0) = \mathbf{0}$ zůstává dynamický systém vždy v tomto triviálním rovnovážném bodě. Pokud pro ostře dominantní vlastní číslo platí $r_1 = 1$, je rovnovážným bodem systému kladný rovnovážný bod \mathbf{n}_p^* , resp. nekonečně mnoho dalších netriviálních bodů, které odpovídají konstantnímu násobku vlastního vektoru \mathbf{v}_1 .

V souvislosti se stabilitou rovnovážných bodů \mathbf{n}_e^* a \mathbf{n}_p^* vyslovíme následující lemma.

Lemma 3.8. *Nechť je dán lineární dynamický model 2 růstových tříd (3.28) s Usherovou projekční maticí \mathbf{U}_1 a počáteční podmínkou $\mathbf{0} \leq \mathbf{n}(0) \neq \mathbf{0}$. Předpokládáme, že \mathbf{U}_1 je kladná matice daná podmínkami dle definice 3.4 s ostře dominantním vlastním číslem r_1 , kterému odpovídá pravý a levý vlastní vektor, $\mathbf{v}_1 > \mathbf{0}$, resp. $\mathbf{w}_1 > \mathbf{0}$. Pak pro každé s_1, s_2, p existuje $f^* \in (0, \infty)$ tak, že rovnovážným bodem modelu je*

- (1) (globálně) asymptoticky stabilní počátek \mathbf{n}_e^* právě tehdy, když $f < f^*$,
- (2) nestabilní počátek \mathbf{n}_e^* právě tehdy, když $f > f^*$,

- (3) kladný rovnovážný bod $\mathbf{n}_p^* = c\mathbf{v}_1$, právě tehdy, když $f = f^*$. Netriviální rovnovážný bod \mathbf{n}_p^* je dán jednoznačně až na konstantu $c \in \mathbb{R}_+$ a platí $c = \mathbf{w}_1^H \mathbf{n}(0)$.

Důkaz. Podle věty 3.5 o stabilitě počátku \mathbf{n}_e^* a existenci netriviálního rovnovážného bodu \mathbf{n}_p^* rozhoduje ostře dominantní číslo r_1 , resp. podle věty 3.6 a jejího důsledku 3.1 čistá míra reprodukce R_0 .

Ostře dominantní číslo r_1 je dané dle vztahu (3.43) a závisí na všech parametrech modelu, $r_1 = r_1(s_1, s_2, p, f)$. Čistá míra reprodukce je určena pro matici \mathbf{U}_1 podle vztahu (3.45) a rovněž závisí na všech parametrech modelu, $R_0 = R_0(s_1, s_2, p, f)$.

Podle věty 3.5, resp. věty 3.6 je počátek asymptoticky stabilní právě tehdy, když $r_1 < 1$ (resp. $R_0 < 1$). Počátek je nestabilní právě tehdy, když $r_1 > 1$ (resp. $R_0 > 1$). Pokud $r_1 = 1$, existuje kladný rovnovážný bod určený jednoznačně až na konstantu.

Z toho lze usoudit, že kritické hodnoty parametrů jsou takové, kdy má Usherova matice \mathbf{U}_1 ostře dominantní číslo, resp. čistou míru reprodukce rovnu 1. Ze vztahu (3.43) pro ostře dominantní číslo r_1 , resp. ze vztahu (3.45) pro čistou míru reprodukce R_0 lze vyjádřit závislost parametru f na ostatních parametrech s_1, s_2, p pro $r_1(s_1, s_2, p, f) = 1$, resp. $R_0(s_1, s_2, p, f) = 1$. Kritické hodnoty parametrů jsou ty, které vyhovují rovnosti

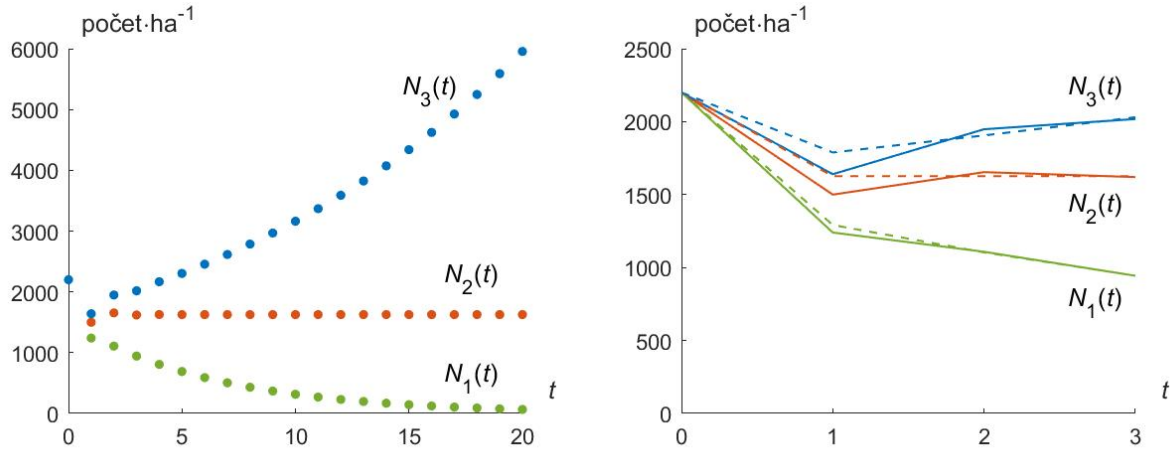
$$f^* = \frac{(1 - s_2)(1 - s_1(1 - p))}{s_1 p}.$$

Jestliže parametry modelu (3.28) splňují nerovnost $f < f^*$ (resp. $f > f^*$) je počátek (globálně) asymptoticky stabilní (resp. nestabilní). Pokud platí rovnost $f = f^*$, existuje kladný rovnovážný bod. \square

Poznámka 3.5. V případě (1) lemmatu 3.8 je počátek \mathbf{n}_e^* stabilní a je globálním atraktorem, dochází k extinkci populace, tedy odumírání porostu. V případě (2) je počátek \mathbf{n}_e^* nestabilní a je repeler, porost roste exponenciálně bez omezení. V případě (3) existují u dynamického systému neasymptoticky stabilní netriviální rovnovážné stavy odpovídající konstantnímu násobku Perronova vlastního vektoru \mathbf{v}_1 daného dle (3.44). Stav porostu bude odpovídat stabilní růstové struktuře. Při tomto rovnovážném stavu určuje konstanta c celkovou velikost porostu, která je úměrná váženému součtu složek počátečního stavu $\mathbf{n}(0)$, kdy váhy jsou dány složkami Perronova levého vlastního vektoru \mathbf{w}_1 dle (3.44).

V grafu na obrázku 3.6a je ilustrována dynamika růstu porostu $N_1(t)$ (zelená trajektorie), pokud je počátek asymptoticky stabilní a dochází k odumírání porostu. Pro $N_3(t)$ (modrá trajektorie) roste porost exponenciálně bez omezení, počátek je nestabilní rovnovážný bod. Dynamika porostu $N_2(t)$ (oranžová trajektorie) je určena neasymptoticky stabilním kladným rovnovážným bodem, stav porostu je neměnný.

Vývoj lesního porostu se po dostatečně dlouhém vývoji chová podle limitního tvaru obecného řešení (3.42), dlouhodobá dynamika stavu lesa je určena r_1 a \mathbf{v}_1 . V grafu na obrázku 3.6b – pro uvedené 3 případy asymptotického chování lineárního růstového modelu – je patrné, že již po 3 projekčních intervalech je stav lesa projektovaný limitním tvarem řešení (3.42) na stejných hodnotách jako při projekci obecným řešením (3.41).



(a) Dynamika obecného řešení lineárního modelu 2 růstových tříd (3.41). (b) Porovnání dynamiky obecného řešení (3.41) (plná čára) a asymptoticky ekvivalentního limitního tvaru řešení (3.42) (přerušovaná čára).

Obrázek 3.6: Vývoj celkového stavu lesa $N(t)$ na základě projekcí lineárního růstového modelu (3.28) s Usherovou maticí \mathbf{U}_1 pro zvolené hodnoty vitálních měř $s_1 = 0,4$, $s_2 = 0,5$, $p = 0,3$ a počáteční podmínce $n_1(0) = 2000$, $n_2(0) = 200$ v závislosti na hodnotě f . Koefficient reprodukce je $f = 1,7$ (zelená), $f = 3$ (oranžová), $f = 3,7$ (modrá). Grafická ilustrace k poznámce 3.5.

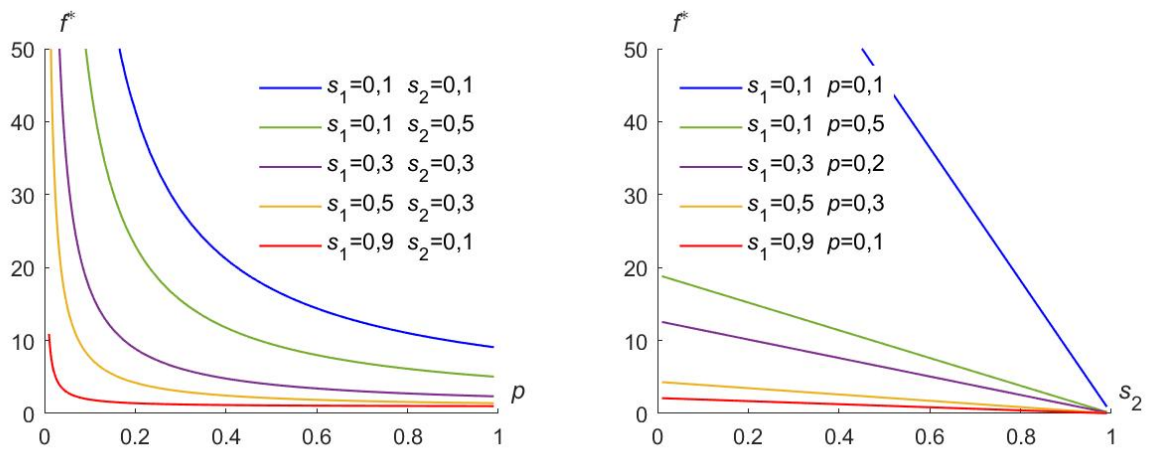
Poznámka 3.6. Předpis pro kritické hodnoty parametrů určující hraniční hodnotu koeficientu reprodukce f^* plyne z důkazu lemmatu 3.8, tedy

$$f^* = \frac{(1 - s_2)(1 - s_1(1 - p))}{s_1 p}, \quad s_1, s_2, p \in (1, 0). \quad (3.46)$$

Vztah mezi f^* a podmíněnou mírou růstu p při daných hodnotách koeficientů přežívání s_1 a s_2 je ilustrován v grafu na obrázku 3.7a. Při vhodných růstových podmínkách – podmínky ovlivňující míru mortality mladých a dospělých jedinců jsou neměnné – bude lesní porost prosperovat i při nižší semenné produkci dospělých jedinců, hraniční hodnota koeficientu reprodukce f^* bude pro přežití porostu menší.

Obdobně to platí pro podmínky ovlivňující míru mortality mladých a dospělých jedinců. Při vhodných podmínkách prostředí zaručující vyšší pravděpodobnost přežití mladých a dospělých jedinců – za předpokladu, že růstové podmínky p budou neměnné – bude porost růst bez omezení i při nižších hodnotách reprodukce. Průběh závislosti mezi f^* a koeficientem přežívání dospělých jedinců s_2 při daných hodnotách podmíněné míry růstu p a koeficientu přežívání mladých jedinců s_1 je zobrazen v grafu na obrázku 3.7b.

Podle tvrzení věty 3.7 je Usherova projekční matice \mathbf{U}_1 daná podmínkami definice 3.4 primitivní. Odtud na základě věty 3.4 pro růstový model (3.28) plyne, že dlouhodobá dynamika stavu lesa nezávisí na počáteční růstové struktuře. Lineární model 2 růstových tříd je tak ergodický. Dlouhodobý vývoj lesa závisí na vlastním čísle r_1 , které v souvislosti s větou 3.5 a poznámkou 3.1 představuje koeficient růstu lesa, a vlastním vektoru \mathbf{v}_1 , jež odpovídá stabilní růstové struktuře porostu. Bez ohledu na počáteční stav lesa bude struktura porostu po dostatečně dlouhém vývoji odpovídat stabilní růstové struktuře, kdy růst porostu je dán ostře dominantním číslem. Počáteční stav porostu $\mathbf{n}(0)$ ovlivňuje



(a) Závislost f^* na parametru p pro dané hodnoty parametrů s_1 a s_2 . (b) Závislost f^* na parametru s_2 pro dané hodnoty parametrů s_1 a p .

Obrázek 3.7: Závislost f^* na parametru p a s_2 , kdy f^* je dáno (3.46). Grafická ilustrace k poznámce 3.6.

pouze celkovou velikost lesa, kdy relativní příspěvek jednotlivých růstových tříd – dané počátečním stavem – k celkové velikosti porostu je určen prvky Perronova levého vlastního vektoru.

4 Závěr

Předmětem bakalářské práce bylo studium maticových populačních modelů, které popisují vývoj lesního porostu strukturovaného do růstových tříd v čase plynoucím v diskrétních krocích. Pozornost byla věnována deterministickému lineárnímu modelu růstu lesa s Usherovou projekční maticí, která je nezápornou čtvercovou konstantní maticí s kladnými prvky umístěnými na prvním řádku, na diagonále a dolní subdiagonále. Z pohledu dynamiky růstu lesa a analýzy asymptotického chování lineárního modelu jsou klíčové právě vlastnosti Usherovy matice. Proto jsme v úvodní části práce formulovali důležité věty a definovali výchozí pojmy z teorie maticové algebry nezáporných matic.

Výchozím tvrzením pro studium vlastností nezáporných matic byla Perronova věta 2.20, která shrnuje stěžejní spektrální vlastnosti kladných čtvercových matic. Na základě tvrzení Perronovy věty má kladná čtvercová matice ostře dominantní vlastní číslo r . Tomuto vlastnímu číslu odpovídá jediný lineárně nezávislý vlastní vektor \mathbf{v} , který je reálný a lze jej volit za kladný.

Jelikož nezápornost matice není příliš silná vlastnost (mezi nezáporné matice patří i nulová matice), neplatí pro ni z žádných závěrů Perronovy věty. Zvýšíme-li však požadavky na nezápornou matici – budeme požadovat, aby nezáporná matice byla nerozložitelná – lze závěry Perronovy věty rozšířit na tuto speciální třídu nezáporných matic. Nezáporné nerozložitelné matice zahrnují rovněž všechny kladné matice. Proto je Perronova-Frobeniova věta 2.21 tvrzením, které rozšiřuje výsledky Perronovy věty na nezáporné nerozložitelné matice. V případě, že nezáporná nerozložitelná matice splňuje další vlastnost – je primitivní – platí Perronova věta 2.20 v plném rozsahu, a mluvíme o silné verzi Perronovy-Frobeniovy věty 2.21.

Při konstrukci obecného lineárního maticového modelu o k růstových třídách – v souvislosti se silnou verzí Perronovy-Frobeniovy věty 2.21 – jsme požadovali, aby Usherova matice byla nerozložitelná a primitivní. Z pohledu asymptotického chování modelu není tento požadavek nikterak omezující a je platný pro většinu aplikací. Z asymptotických vlastností řešení modelu vyplynulo, že dlouhodobá dynamika lesního porostu závisí na ostře dominantním čísle r a stav lesa konverguje ke stabilní růstové struktuře, jež odpovídá konstantnímu násobku vlastního vektoru \mathbf{v} . Je-li $r > 1$, lesní porost roste exponenciálně bez omezení. Pokud $r < 1$, lesní porost odumírá. Dlouhodobá dynamika naopak nezávisí na počáteční struktuře stavu lesa, lineární maticový model je ergodický.

Příkladem maticového strukturovaného populačního modelu, který jsme sestavili v kapitole 3.2, byl lineární model růstu lesa o dvou růstových třídách. První třída odpovídala mladým neplodným jedincům a druhou třídu tvořili dospělí plodní jedinci. Pro tento model jsme odvodili čistou míru reprodukce porostu R_0 , biologický parametr modelu, který udává počet potomků nově zmlazených stromků během jejich života. Na základě čisté míry reprodukce jsme stanovili hraniční hodnotu koeficientu reprodukce tak, aby bylo možné rozhodnout o stabilitě počátku. Z výsledků vyplynulo, že lesní porost bude dlouhodobě prosperovat i při nižší míře přirozené obnovy, pokud pro jeho růst budou zajištěny

vhodné růstové podmínky nebo mortalita mladých, resp. dospělých jedinců bude na nízké úrovni.

Lineární maticový model 2 růstových tříd jsme sestavili za podmínek dané definicí 3.4. Předpokládali jsme, že Usherova projekční matice \mathbf{U}_1 je nerozložitelná a primitivní. Možným rozšířením modelu je uvažování slabších podmínek pro podmíněnou míru růstu a koeficient přežívání dospělých jedinců. Pokud bude pro p a s_2 místo podmínek (3.30) platit $0 < p \leq 1$ a $0 \leq s_2 < 1$, je možným příkladem při $p = 1$ a $s_2 = 0$ následující podoba Usherovy matice

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ s_1 & 0 \end{pmatrix},$$

která bude nerozložitelná a imprimitivní. Orientovaný graf matice $G(\mathbf{U}_2)$ bude mít jediný cyklus o délce 2 (viz orientovaný graf na obrázku 2.2 z příkladu 2.6). Jak uvádí [5], celkový stav porostu bude exponenciálně růst nebo klesat s oscilacemi o periodě rovné 2 a to podle toho, zda dominantní číslo r matice \mathbf{U}_2 bude větší, resp. menší než 1. Oproti modelu s primitivní maticí \mathbf{U}_1 nebude struktura porostu po dostatečně dlouhém vývoji konvergovat ke stabilní růstové struktuře, nicméně lineární dynamický systém s maticí \mathbf{U}_2 bude ergodický. Příkladem lesního porostu, který odpovídá dynamickému systému s Usherovou maticí \mathbf{U}_2 , je výmladkový les. Stromy ve výmladkovém lese během projekčního intervalu dorostou do dospělé fáze, kdy na konci intervalu jsou seřezány blízko země a poté z pařezů vyrazí nové výmladky. Takto lze stromy seřezávat opakovaně.

Další možnou modifikací je lineární růstový model s postreprodukční fází vývoje. První růstová fáze bude tvořena jedinci, kteří během projekčního intervalu dospějí a budou plodní. Druhá růstová fáze odpovídá vývojové fázi dožívání, do které zahrneme přestárlé jedince, kteří již plodní nejsou. Podoba Usherovy matice s postreprodukční fází bude následující

$$\mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} s_1(1-p) + f & 0 \\ s_1p & s_2 \end{pmatrix},$$

kdy koeficienty přežívání s_1 a s_2 udávají pravděpodobnosti přežití dospělého, resp. přestárlého stromu a růstový parametr p vyjadřuje pravděpodobnost, že dospělý strom během projekčního intervalu doroste do postreprodukční fáze a neuhyne. Budeme-li předpokládat, že vitální míry matice \mathbf{U}_3 splňují podmínky (3.30), matice \mathbf{U}_3 bude rozložitelná. Prvek $s_1(1-p) + f$ představuje projekční matici, která odpovídá reprodukční růstové třídě a je nerozložitelná a primitivní. Reprodukční část porostu se bude vyvíjet způsobem popsáním pro dynamický systém s primitivní projekční maticí. Dlouhodobá dynamika celého systému bude záviset na počátečním stavu lesního porostu, tedy podle toho, jaké bude relativní zastoupení přestárlých jedinců, kteří nejsou schopni semenné obnovy [5].

U lineárního maticového modelu jsme předpokládali, že vitální míry projekční matice jsou v čase konstantní, lesní porost mohl růst exponenciálně bez omezení. Z důvodu kompetice jedinců o zdroje není tento předpoklad reálný. Vitální míry mohou záviset na současném stavu porostu (resp. hustotě porostu), proto je vhodné uvažovat dynamický systém s nelineárními členy. Lineární maticový model 2 růstových tříd lze modifikovat ve smyslu nahrazení jedné či více vitálních měr skalární funkcí s celkovou hustotou porostu

$q = q(N(t))$, kdy q je kladná a ostře klesající funkce – vliv hustoty na stav porostu je nežádoucí. Jako příklad projekční matice nelineárního maticového modelu 2 růstových tříd s Rickerovou exponenciální funkcí $q(N) = e^{-bN(t)}$ lze uvést následující Usherovu matici

$$\mathbf{U}_4 = \begin{pmatrix} \sigma_1 e^{-bN(t)}(1-p) & f \\ \sigma_1 e^{-bN(t)}p & s_2 \end{pmatrix},$$

kde $s_1 = \sigma_1 e^{-bN(t)}$ je koeficient přežívání mladých jedinců závislý na celkové hustotě porostu, σ_1 je parametr nezávislý na hustotě porostu, b je kladný parametr [30, 31]. Nelineární parametr s_1 představuje proces vnitrodruhové kompetice o světlo a živiny mezi mladými jedinci, rovněž mortalita mladých jedinců je ovlivněna následkem zastínění vyšším patrem dospělých jedinců. Jak uvádí [30], nelineární dynamický systém s Usherovou projekční maticí \mathbf{U}_4 bude mít dva rovnovážné body, počátek \mathbf{n}_e^* a kladný rovnovážný bod \mathbf{n}_p^* .

Literatura

- [1] Allen, L. J. S. *An Introduction to Mathematical Biology*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [2] Brualdi, R. A., Ross, J. A. On the Exponent of a Primitive, Nearly Reducible Matrix. *Mathematics of Operations Research*, 5(2), 229–241, 1980.
- [3] Buongiorno, J., Peyron, J.-L., Houllier, F., Bruciamacchie, M. Growth and Management of Mixed-Species, Uneven-Aged Forests in the French Jura: Implications for Economic Returns and Tree Diversity. *Forest Science*, 41(3), 397–429, 1995.
- [4] Calder, M. S., Zhao, Y., Zou, X. Amplification of the Net Reproductive Number by Dispersion for a Matrix Population Model Applicable to the Invasive Round Goby Fish. arXiv:1311.4822 [math.DS], s. 26, 2013.
- [5] Caswell, H. *Matrix Population Models. Construction, Analysis, and Interpretation*. Second Edition. Sunderland: Sinauer Associates, 2001.
- [6] Caswell, H., Takada, T. Elasticity analysis of density-dependent matrix population models: the invasion exponent and its substitutes. *Theoretical Population Biology*, 65, 401–411, 2004.
- [7] Cohen, J. E. Ergodic Theorems in Demography. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1(2), 275–295, 1979.
- [8] Cole, L. M. The Population Consequences of Life History Phenomena. *The Quarterly Review of Biology*, 29(2), 103–137, 1954.
- [9] Cushing, J. M. Nonlinear Matrix Models and Populations Dynamics. *Natural Resource Modeling*, 2(4), 539–580, 1988.
- [10] Cushing, J. M., Yicang, Z. The Net Reproductive Value and Stability in Matrix Population Models. *Natural Resource Modeling*, 8(4), 297–333, 1994.
- [11] Cushing, J. M. *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [12] Cushing, J. M. Matrix Models and Population Dynamics. In: Lewis, M. A., Chaplain, M. A. J., Keener, J. P., Maini, P. K. (eds) *Mathematical Biology*. IAS/Park City Mathematics Series, Volume 14, Providence: American Mathematical Society, 47–150, 2009.
- [13] Debreu, G., Herstein, I. N. Nonnegative Square Matrices. *Econometrica*, 21(4), 597–607, 1953.

- [14] Demetrius, L. Primitivity Conditions for Growth Matrices. *Mathematical Biosciences*, 12, 53–58, 1971.
- [15] Dont, M. *Maticová analýza*. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2011.
- [16] Fiedler, M. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [17] Friedland, S. *Matrices. Algebra, Analysis and Applications*. Singapore: World Scientific Publishing, 2016.
- [18] Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices*. Volume 2. New York: Chelsea Publishing Company, 1960.
- [19] Gentle, J. E. *Matrix Algebra. Theory, Computations, and Applications in Statistics*. New York: Springer, 2007.
- [20] Holenda, J. *O maticích*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2007.
- [21] Jarošík, V. *Růst a regulace populací*. Praha: Academia, 2005.
- [22] Krajník, E. *Základy maticového počtu*. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2006.
- [23] Lefkovich, L. P. The Study of Population Growth in Organisms Grouped by Stages. *Biometrics*, 21(1), 1–18, 1965.
- [24] Leslie, P. H. On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*, 33(3), 183–212, 1945.
- [25] Leslie, P. H. Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics. *Biometrika*, 35(3/4), 213–245, 1948.
- [26] Li, C.-K., Schneider, H. Applications of Perron–Frobenius theory to population dynamics. *Journal of Mathematical Biology*, 44, 450–462, 2002.
- [27] Liang, J., Picard, N. Matrix Model of Forest Dynamics: An Overview and Outlook. *Forest Science*, 59(3), 359–378, 2013.
- [28] Malthus, T. R. *Essay on the Principle of Population, as it Affects the Future Improvement of Society with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*. Londýn: J. Johnson, 1798.
- [29] Mortier, F., Rossi, V., Guillot, G., Gourlet-Fleury, S., Picard, N. Population dynamics of species-rich ecosystems: the mixture of matrix population models approach. *Methods in Ecology and Evolution*, 4, 316–326, 2013.
- [30] Neubert, M. G., Caswell, H. Density-dependent vital rates and their population dynamic consequences. *Journal of Mathematical Biology*, 41, 103–121, 2000.
- [31] Pospíšil, Z. *Maticové populační modely* [online]. [cit. 2022-03-08]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~pospisil/MathBio/MatPopMod.pdf>.

- [32] Pospíšil, Z. *Diskrétní deterministické modely* [online]. [cit. 2022-05-18]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~pospisil/MathBio/DiskrMod.pdf>.
- [33] Schott, J. R. *Matrix Analysis for Statistics*. Third Edition. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017.
- [34] Schwarz, Š. New kinds of theorems on non-negative matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 16(2), 285–295, 1966.
- [35] Sedláček, J. O incidenčních maticích orientovaných grafů. *Časopis pro pěstování matematiky*, 84(3), 303–316, 1959.
- [36] Seneta, E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [37] Solow, R. On the Structure of Linear Models. *Econometrica*, 20(1), 29–46, 1952.
- [38] Sykes, Z. M. On Discrete Stable Population Theory. *Biometrics*, 25(2), 285–293, 1969.
- [39] Usher, M. B. A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests. *Journal of Applied Ecology*, 3(2), 355–367, 1966.
- [40] Usher, M. B. A Matrix Model for Forest Management. *Biometrics*, 25(2), 309–315, 1969.
- [41] Verhulst, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles*, 18, 1–38, 1845.