Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Evoluční hry na grafech

Bakalářská práce

2022 Tereza Motlíková

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr bakalářského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářkou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 24. května 2022

. . . .
vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala RNDr. Vladimíru Švíglerovi, Ph.D. za vstřícnost, trpělivost a odborné rady při konzultacích a psaní této práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu a trpělivost.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá evolučními hrami na grafech. Standardní modely evolučních her (např. replikátorová dynamika) neuvažují žádnou strukturu populace. Využitím grafů zavedeme do evoluční hry strukturu, která může ovlivnit dynamiku hry. Cílem práce je zjistit, za jakých podmínek má hra pevný bod v závislosti na tom, zda využijeme imitační, Birth-Death nebo Death-Birth dynamiku a na jakém grafu se pohybujeme. Dynamiky mezi sebou porovnáme.

Klíčová slova: graf, evoluční hra, evoluční hra na grafu, teorie her, pevný bod

Abstract

This bachelor thesis deals with evolutionary games on graphs. Standard models of evolutionary games (e.g., replicator dynamics) do not consider any population structure. Using graphs, we introduce a structure into the evolutionary game which can affect the dynamics of the game. The aim of the thesis is to find out under which conditions the game has a fixed point depending on whether we use imitation, birth-death or death-birth dynamics and which graph we are using. We compare the dynamics with each other.
Keywords: graph, evolutionary game, evolutionary game on graph, game theory, fixed point

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Teorie her popisuje a analyzuje situace, při nichž dochází ke střetu zájmů. Má tak uplatnění nejen v biologii a ekonomii, ale také v sociologii nebo psychologii a dalších vědních oborech. Jednou ze součástí teorie her jsou evoluční hry, které se zaměřují na vývoj populace v čase. Evoluční hry jsou využívané zejména v biologii. Základním modelem, který popisuje evoluční hry, je replikátorová dynamika. Tento model neuvažuje strukturu hry. Tu do hry zaneseme využitím grafů, a tím můžeme ovlivnit dynamiku evolučních her. V práci se zaměříme na některé hry na grafu a budeme zkoumat, za jakých podmínek má daná hra pevný bod, pokud uvažujeme imitační, Birth-Death nebo Death-Birth dynamiku.

V kapitole 2 představíme základní pojmy teorie grafů a teorie her. Zaměříme se na základní definice teorie grafů a dále rozebereme statickou hru, sociální dilemata a v neposlední řadě také evoluční hru na grafu jako samostatnou strukturu.

V kapitole 3 se zaměříme na hry, pro které pevný bod neexistuje. Nejdříve se zaměříme na obecný souvislý graf, ve kterém každý z vrcholů má za sousedy pouze vrcholy s opačnou strategií. Dalším grafem, který rozebereme, je úplný graf.

V kapitole 4 se budeme podrobněji věnovat hře na souvislém grafu, v jehož jedné části se vyskytují pouze vrcholy s jednou strategií a v druhé části pouze vrcholy s opačnou strategií. Tato hra bude postupně rozebrána z pohledu všech dynamik.

Kapitola 2

Základní pojmy

V práci se zabýváme evolučními hrami na grafech, pro jejichž pochopení je potřeba znalost teorie grafů a teorie her. V následující kapitole shrneme potřebné základní poznatky z těchto dvou oblastí.

2.1 Teorie grafů

Graf je základní strukturou teorie grafů. Jedná se o objekt, který je sestaven z vrcholů a hran, které znázorňují vzájemnou relaci mezi vrcholy. Rozlišujeme grafy orientované a neorientované. V naší práci se budeme zabývat pouze neorientovanými grafy. Pro tuto podkapitolu budeme čerpat z [3].

Definice 2.1 ([3], Def. 2.1.1.)**.** Nechť V je konečná množina. Dvojice $G = (V, H)$, kde $H \subseteq \binom{V}{2}$, se nazývá neorientovaný graf.

Poznámka. Je-li graf G specifikován, lze použít značení $V = V(G)$ a $H = H(G)$. Účelem je odlišení množiny vrcholů a množiny hran při práci s různými grafy.

Poznámka. Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$.

Definice 2.2. Vrcholy spojené hranou budeme nazývat sousedními vrcholy.

Definice 2.3 ([3])**.** Nechť G je graf, $v \in V(G)$. Potom množinu

$$\mathcal{N}_1(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in H(G)\}$$

nazýváme množinou sousedů vrcholu v v grafu G a

$$\mathcal{N}_{\leq 1}(v) = \mathcal{N}_1(v) \cup \{v\}.$$

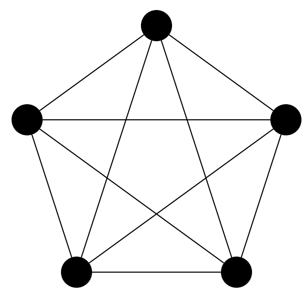
Definice 2.4 ([3], Def. 2.1.11.)**.** Nechť G_1, G_2 jsou grafy. Řekněme, že G_1 je podgrafem grafu G_2, značíme $G_1 \subseteq G_2$, jestliže $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ a současně $H(G_1) \subseteq H(G_2)$.

Následně si zadefinujeme pojem úplný graf, se kterým se v dalších částech práce setkáme. Tento graf je zobrazen na obrázku 2.1.

Definice 2.5 ([3])**.** Graf K_n na $n \geq 1$ vrcholech se strukturou

$$K_n = \left(\{1, 2, \ldots, n\}, \binom{\{1, 2, \ldots, n\}}{2} \right)$$

nazýváme úplný graf.



Obrázek 2.1: Úplný graf

2.2 Teorie her

V práci se budeme věnovat evolučním hrám na grafech. Graf budeme uvažovat pouze neorientovaný, jeho vrcholy budou reprezentovat hráče a hrany mezi vrcholy budou reprezentovat interakci mezi jednotlivými hráči. Jelikož evoluční hry úzce souvisí s hrami statickými, budeme se nejdříve věnovat právě hrám statickým. Pro tuto část práce budeme čerpat z [1], [2] a [4].

2.2.1 Statická hra

Hrou rozumíme situaci, kdy dva nebo více hráčů činí rozhodnutí, interagují mezi sebou, a užitek (odměna) každého z nich závisí na tom, jakou si jednotliví hráči vyberou strategii. Statická hra je speciální typ hry, ve které hráči volí strategii bez předchozí znalosti volby ostatních hráčů.

Jako hru můžeme označit jakoukoli interakci například mezi zvířaty, na pracovních jednáních, či prostou domluvu mezi kamarády.

Definice 2.6 ([4], Def. 4.1)**.** Statická hra je hra, ve které každý z hráčů činí rozhodnutí, aniž by znal rozhodnutí ostatních.

Ke každé hře mohou hráči přistupovat s určitou strategií. Jedná se o způsob chování při interakci s protihráčem. Hráč tedy může zvolit například strategii spolupracovat, tzn. vyhovět protihráči, být mírný a bezkonfliktní. Naopak strategie nespolupracovat může znamenat agresivní chování vůči protihráči, nevyhovění v požadavcích apod.

Definice 2.7 ([4], Def. 2.2)**.** Strategie je pravidlem pro rozhodnutí vždy, kdy je potřeba ho učinit. Čistá strategie je taková, která nebyla zvolena náhodně. Soubor všech možných čistých strategií budeme označovat X.

Poznámka. V naší práci budeme uvažovat pouze populaci stejných jedinců, kde všichni jedinci mají totožnou množinu čistých strategií X.

Pokud bude strategie zvolena náhodně s nějakou pravděpodobností, budeme mluvit o smíšené strategii.

Definice 2.8. Smíšená strategie σ je pravděpodobnostní vektor a specifikuje pravděpodobnost $p(x)$, se kterou je každá čistá strategie $x \in X$ volena. Množinu všech možných smíšených strategií označíme $\Sigma = \prod_i \Sigma_i$, kde Σ_i je množina smíšených strategií i-tého hráče.

Odměnou (či trestem) hráče za interakci s ostatními hráči je užitek. Jedná se o číselné vyjádření odměny (trestu), kterou každý hráč získá. Užitek každého hráče je ovlivněn nejen jeho strategií, ale také strategií ostatních hráčů.

Definice 2.9. Užitková funkce přiřazuje vektoru strategií užitky, tj.

$$u : X^V \to \mathbb{R}^n,$$

kde X^V je vektor strategií a $\mathbb{R}^n$ je vektor užitků.

Pokud budeme uvažovat pouze dva hráče, kteří mají stejné možnosti, užitek prvního z hráčů je výsledek kombinace i-té strategie prvního hráče a j-té strategie druhého hráče. Užitek prvního hráče potom označíme $u_1(s_i, s_j)$.

Statické hry lze následně řešit dvěma způsoby. Prvním způsobem je eliminace dominovaných strategií. Tento způsob je založen na principu, že hráči nebudou hrát strategii, která je jasně nevýhodná oproti jiné strategii, a můžeme ji proto vyloučit.

Definice 2.10 ([4], Def. 4.11)**.** Strategie prvního hráče σ_1 je silně dominována strategií σ_1^*, pokud

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) > u_1(\sigma_1, \sigma_2), \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

Podobně pro druhého hráče, strategie σ_2 je silně dominována strategií σ_2^*, pokud

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2^*) > u_2(\sigma_1, \sigma_2), \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1.$$

Jelikož některé hry nemohou být vyřešeny pomocí eliminace dominovaných strategií, je potřeba zavést jiný způsob řešení statických her. Tím je hledání Nashovy rovnováhy. Jedná se o takovou kombinaci strategií, při které si ani jeden z hráčů nemůže svojí volbou polepšit, tedy zvýšit svůj užitek.

Definice 2.11 ([4], Def. 4.17)**.** Nashova rovnováha (pro hru dvou hráčů) je dvojice strategií (σ_1^*, σ_2^*) taková, že

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_1(\sigma_1, \sigma_2^*), \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1$$

a

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_2(\sigma_1^*, \sigma_2), \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

2.2.2 Sociální dilema

V této podkapitole se budeme zabývat sociálními dilematy. Jedná se o druh her, ve kterých hraje skupina hráčů statickou hru a každý má na výběr právě ze dvou strategií - spolupracovat (S) nebo nespolupracovat (N). Množinu možných strategií budeme značit jako

$$X = \{S, N\} = \{1, 0\}.$$

Na základě zvolených strategií hráče a jeho souseda v grafu je poté každému hráči přiřazen užitek dle následující tabulky.

	S	N
S	a	b
N	c	d

Hráč má tedy užitek a, pokud oba hráči spolupracují, užitek b, pokud on spolupracuje, ale jeho protivník nespolupracuje, užitek c, pokud hráč nespolupracuje, ale protivník ano a nakonec užitek d, pokud oba nespolupracují.

Parametry a, b, c, d poté musí splňovat následující podmínky, aby hry odpovídaly sociálním dilematům.

1. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že žádné dva parametry si nejsou rovné.
2. Je vždy lepší, pokud oba hráči spolupracují, než když oba nespolupracují, tedy $a > d$.
3. Pokud pouze jeden z hráčů spolupracuje, je vždy výhodnější být ten, který nespolupracuje, tedy $c > b$.
4. Nezávisle na tom, jakou hráč zvolí strategii, je pro něj vždy lepší, když jeho partner spolupracuje, tedy $a > b$ a $c > d$.
5. Parametry a a c jsou kladné, kooperace soupeře je tedy odměněna kladným užitkem.

Spojením těchto pěti podmínek v jednu získáme

$$\min\{a, c\} > \max\{b, d, 0\}. \tag{2.1}$$

Definice 2.12 ([1], Def. 7)**.** Řekneme, že vektor parametrů (a, b, c, d) je přípustný, pokud splňuje podmínku (2.1), $a \neq c$ a $b \neq d$. Množina $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ všech těchto čtveřic se nazývá množina přípustných parametrů.

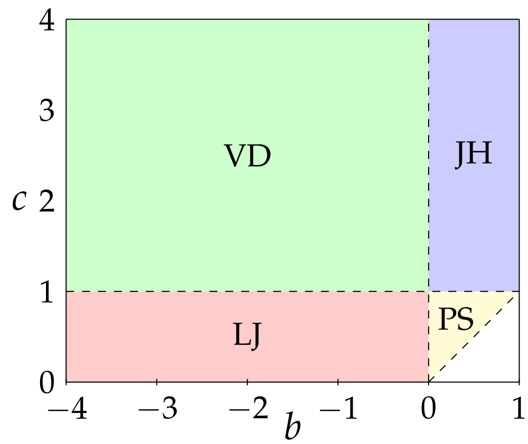
Množinu $\mathcal{P}$ následně rozdělíme do čtyř oblastí, odpovídající scénářům, kterými jsou Plná spolupráce (PS), Jestřábi a holubice (JH), Lov na jelena (LJ) a Vězňovo dilema (VD):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathrm{PS}} &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a > c > b > d\}, \\
\mathcal{P}_{\mathrm{JH}} &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c > a > b > d\}, \\
\mathcal{P}_{\mathrm{LJ}} &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a > c > d > b\}, \\
\mathcal{P}_{\mathrm{VD}} &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c > a > d > b\}.
\end{aligned}$$

Sjednocením těchto čtyř oblastí získáme původní množinu, tedy

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathrm{PS}} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{JH}} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{LJ}} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{VD}}.$$

Jelikož se nacházíme ve čtyřdimenzionálním prostoru, bylo by složité tyto oblasti zakreslit. Zafixujeme tedy $a = 1$ a $d = 0$. Následně je již možné zakreslit oblasti ve dvou dimenzích, což je již o mnoho jednodušší. Tyto oblasti jsou zobrazeny na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Množina čtyř přípustných scénářů pro $a = 1$ a $d = 0$.

Plná spolupráce

Plná spolupráce je hra zvýhodňující kooperaci nad nespoluprací. Pomocí eliminace dominovaných strategií můžeme nalézt právě jednu rovnováhu, a to (S, S), tedy oba hráči spolupracují.

Jestřábi a holubice

Jestřábi a holubice je antikoordinační hra, ve které se hráči nechtějí setkat ve stejné kombinaci strategií. Ve hře můžeme nalézt dvě čisté rovnováhy a jednu smíšenou rovnováhu. Čisté rovnováhy splňují kombinace (S, N) a (N, S). Smíšená rovnováha má tvar

$$\sigma^* = \frac{d - b}{a - c + d - b}.$$

Lov na jelena

Lov na jelena je hra, ve které se hráčům vyplatí zvolit stejnou strategii, preferovaná je ovšem spolupráce. Jedná se tedy o koordinační hru se shodnou preferencí. Pokud se strategie jednotlivých hráčů neshodují, mají užitek nejmenší.

Tato hra má opět dvě čisté Nashovy rovnováhy a jednu smíšenou. Čisté NR jsou kombinace (S, S) a (N, N) a smíšená rovnováha má tvar

$$\sigma^* = \frac{d-b}{a-c+d-b}.$$

Vězňovo dilema

Hra Vězňovo dilema je hra zvýhodňující nespolupráci. Eliminací dominovaných strategií získáme právě jednu rovnováhu (N, N), tedy oba hráči nespolupracují.

2.2.3 Evoluční hra na grafu

Zavedení pojmu dynamický systém nám umožní zabývat se vývojem hry v čase.

Definice 2.13 ([1], Def. 1)**.** Autonomní dynamický systém definujeme jako funkci

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \times X^V \to X^V,$$

která splňuje

- $\varphi(0, x) = x$,
- $\forall s, t \in \mathbb{N}_0, \forall x \in X^V : \varphi(s+t, x) = \varphi(t, (\varphi(s, x))$.

Evoluční hru na grafu potom budeme definovat jako strukturu složenou z grafu, parametrů, užitkové funkce a dynamického systému. V dalších částech práce se budeme jednotlivým prvkům věnovat detailněji.

Definice 2.14. Evoluční hra na grafu je struktura určena jako (G, p, u, φ), kde

- $G = (V, H)$ je souvislý graf,
- $p = (a, b, c, d)$ jsou parametry dané hry,
- $u : X^V \to \mathbb{R}^n$ je užitková funkce,
- $\varphi : \mathbb{N}_0 \times X^V \to X^V$ je autonomní dynamický systém.

Každému z vrcholů v grafu přiřazujeme jeho užitek, k čemuž využíváme užitkové funkce. Existují dva nejčastější přístupy k užitkové funkci, a to součtová užitková funkce a průměrná užitková funkce.

Definice 2.15 ([2])**.** Součtovou užitkovou funkci můžeme definovat jako

$$u_i^S(x) = a \sum_{j \in \mathcal{N}_1(i)} x_i x_j + b \sum_{j \in \mathcal{N}_1(i)} x_i(1-x_j) + c \sum_{j \in \mathcal{N}_1(i)} (1-x_i)x_j + d \sum_{j \in \mathcal{N}_1(i)} (1-x_i)(1-x_j),$$

pro $x \in X = \{0, 1\}$. Průměrnou užitkovou funkci následně můžeme definovat jako

$$u_i^P(x) = \frac{1}{|\mathcal{N}_1(i)|} u_i^S(x).$$

V naší práci budeme pracovat pouze s průměrnou užitkovou funkcí, která je dána poměrem celkového součtu užitků vrcholu a počtem jeho sousedů.

Při práci s průměrnou užitkovou funkcí se může stát, že užitek některých vrcholů vůbec nebude záviset na počtu sousedů daného vrcholu. Tyto situace budou přiblíženy v lemma 2.1.

Lemma 2.1. Mějme vrchol A sousedící s vrcholy, které mají všechny stejnou strategii a uvažujeme průměrnou užitkovou funkci. Pokud platí nějaký z následujících čtyř scénářů

1. $x_A = 1$ a $\forall i \in \mathcal{N}_1(A) : x_i = 1$,
2. $x_A = 1$ a $\forall i \in \mathcal{N}_1(A) : x_i = 0$,
3. $x_A = 0$ a $\forall i \in \mathcal{N}_1(A) : x_i = 1$,
4. $x_A = 0$ a $\forall i \in \mathcal{N}_1(A) : x_i = 0$,

potom užitek vrcholu A nezávisí na stupni tohoto vrcholu.

Důkaz. Důkaz budeme provádět pro každý z uvedených scénářů zvlášť.

1. Užitek vrcholu A je $u_A = \frac{k \cdot a}{k} = a$, kde k je stupeň vrcholu A. Jelikož k můžeme zkrátit, užitek vrcholu A na něm nijak nezávisí.
2. Užitek vrcholu A je $u_A = \frac{k \cdot b}{k} = b$, kde k je stupeň vrcholu A.
3. Užitek vrcholu A je $u_A = \frac{k \cdot c}{k} = c$, kde k je stupeň vrcholu A.
4. Užitek vrcholu A je $u_A = \frac{k \cdot d}{k} = d$, kde k je stupeň vrcholu A.

□

2.2.4 Dynamický systém

V naší práci se budeme zabývat pouze tím, co se stane, když postoupíme vpřed o jeden krok, tj. $\varphi(1, x)$, jelikož nás zajímá existence pevných bodů po uplynutí jednoho časového okamžiku. Pro zjednodušení budeme označovat

$$\varphi_*(1, x) =: \varphi_*(x),$$

a tedy

$$\varphi_*(t, x) = \varphi_*^t(x),$$

kde $*$ odpovídá jedné z dynamik, a to imitační dynamice (ID), Birth-Death dynamice (BD) nebo Death-Birth dynamice (DB), které budou blíže popsány v následující části.

Imitační dynamika

V imitační dynamice každý vrchol „imituje“, tedy přebírá strategii od svého souseda, který má nejvyšší užitek. V jednotlivých krocích je tedy potřeba se podívat na každý vrchol zvlášť a vyhodnotit, jakou strategii bude mít v následujícím časovém okamžiku.

Definice 2.16 ([1], Def. 3)**.** Imitační dynamiku definujeme jako funkci s $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{|V|})$, kde $\varphi_i : S^V \to S$, následovně

$$\varphi_i^{ID}(x) = \begin{cases} x_{\max} & \text{pokud } |A_i(x)| = 1 \text{ a } A_i(x) = \{x_{\max}\}, \\ x_i & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $A_i(x)$ je množina strategií sousedních vrcholů x, které mají nejvyšší užitek a je dána jako

$$A_i(x) = \{x_k : k \in \arg\max\{u_j(x) : j \in \mathcal{N}_{\leq 1}(i)\}\}.$$

Birth-Death dynamika

V této dynamice je vyhledán vrchol, který má globálně nejvyšší užitek. Následně se tento vrchol „rozmnoží“ a nahradí nejslabší vrchol ze svých sousedů. Pokud má tedy nejvyšší užitek například spolupracující vrchol a v jeho okolí je nejslabším vrcholem naopak nespolupracující jedinec, je strategie nespolupracujícího nahrazena strategií spolupracujícího. Pokud se v okolí nějakého vrcholu vyskytuje více vrcholů s nejvyšším užitkem a různou strategií, vrchol si zachovává svou původní strategii. Pro definici využijeme variantu této dynamiky z [1].

Definice 2.17. Birth-Death dynamiku definujeme jako funkci $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{|V|})$, kde $\varphi_i : S^V \to S$, následovně

$$\varphi_i^{BD}(x) = \begin{cases} x_{\max} & \text{pokud } |A_i(x)| = 1, \max\limits_{j \in \mathcal{N}_1(i)} u_j(x) = \max\limits_{j \in V} u_j(x), A_i(x) = \{x_{\max}\} \\ & \qquad \text{a } \min\limits_{j \in \mathcal{N}_1(k)} u_j(x) = u_i(x) \text{ pro nějaké } k \in B_i(x), \\ x_i & \text{pokud } |A_i(x)| > 1 \text{ nebo } \max\limits_{j \in \mathcal{N}_1(i)} u_j(x) < \max\limits_{j \in V} u_j(x), \end{cases}$$

kde

$$A_i(x) = \{x_k : k \in B_i(x)\}$$

a

$$B_i(x) = \{k : k \in \arg\max\{u_j(x) : j \in \mathcal{N}_{\leq 1}(i)\}\}.$$

Death-Birth dynamika

V této dynamice je naopak nejdříve vyhledán vrchol, který má z celé populace užitek nejmenší. Tento vrchol „zemře“ a je následně nahrazen vrcholem ze svých sousedů, který má užitek největší. Pokud má tedy nejnižší užitek například vrchol, který spolupracuje, a v jeho nejbližším okolí je užitkově nejsilnější vrchol nespolupracující, potom dojde k nahrazení původní spolupracující strategie za novou nespolupracující. Pokud se v okolí nejslabšího vrcholu vyskytuje více vrcholů s nejvyšším užitkem a různou strategií, vrchol si zachovává svou původní strategii.

Definice 2.18 ([1])**.** Death-Birth dynamiku definujeme jako funkci $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{|V|})$, kde $\varphi_i : S^V \to S$, následovně

$$\varphi_i^{DB}(x) = \begin{cases} x_{\max} & \text{pokud } u_i(x) = \min_{j \in V} u_j(x), |A_i(x)| = 1 \text{ a } A_i(x) = \{x_{\max}\}, \\ x_i & \text{pokud } u_i(x) > \min_{j \in V} u_j(x) \text{ nebo } |A_i(x)| > 1, \end{cases}$$

kde

$$A_i(x) = \{x_k : k \in \arg\max\{u_j(x) : j \in \mathcal{N}_{\leq 1}(i)\}\}.$$

Cílem práce je studovat stavy, ve kterých spolupráce a nespolupráce koexistuje, a za jakých podmínek využitím dynamiky φ_* nedojde ke změně. Hledáme tedy pevný bod evoluční hry na grafu, který je dán následující definicí.

Definice 2.19 ([2], Def. 2.2)**.** Řekneme, že stav $x \in X^V$ je koexistenčním pevným bodem evoluční hry na grafu (G, p, u, φ), pokud

- je pevným bodem, tj. $\varphi(x) = x$ pro všechna $t \in N$,
- je koexistenčním stavem, tj. $0 < \sum_{i \in V} x_i < |V|$.

2.2.5 Hranice shluků

Vrcholy s přiřazenými strategiemi můžeme rozdělit do čtyř různých skupin v závislosti na tom, jakou má strategii on sám a jaké mají strategie jeho sousedi. Tyto skupiny budeme označovat jako vnitřní spolupracující (VS), vnitřní nespolupracující (VN), hraniční spolupracující (HS) a hraniční nespolupracující (HN). Důležitou vlastností „vnitřních“ vrcholů je, že nemůžou změnit svou strategii. Této vlastnosti budeme využívat v dalších kapitolách.

Definice 2.20 ([2])**.** Spolupracující vrchol, jehož sousedi také pouze spolupracují, označíme jako vnitřní spolupracující vrchol (VS). Pro daný stav $x \in X^V$ zavádíme množinu vnitřních spolupracujících jako

$$V_{\text{VS}}(x) := \{i \in V : x_i = 1 \text{ a } x_j = 1 \text{ pro všechna } j \in \mathcal{N}_1(i)\}.$$

Definice 2.21 ([2])**.** Nespolupracující vrchol, jehož sousedé pouze nespolupracují, budeme označovat jako vnitřní nespolupracující vrchol (VN). Pro daný stav $x \in X^V$ zavádíme množinu vnitřních nespolupracujících jako

$$V_{\text{VN}}(x) := \{i \in V : x_i = 0 \text{ a } x_j = 0 \text{ pro všechna } j \in \mathcal{N}_1(i)\}.$$

Definice 2.22 ([2])**.** Spolupracující vrchol, který má alespoň jednoho nespolupracujícího souseda, budeme označovat jako hraniční spolupracující vrchol. Pro daný stav $x \in X^V$ definujeme množinu hraničních spolupracujících jako

$$V_{\mathrm{HS}}(x) := \{i \in V : x_i = 1 \text{ a existuje } j \in \mathcal{N}_1(i) \text{ s } x_j = 0\}.$$

Definice 2.23 ([2])**.** Nespolupracující vrchol, který má alespoň jednoho spolupracujícího souseda, budeme označovat jako hraniční nespolupracující vrchol. Pro daný stav $x \in X^V$ definujeme množinu hraničních nespolupracujících jako

$$V_{\mathrm{HN}}(x) := \{i \in V : x_i = 0 \text{ a existuje } j \in \mathcal{N}_1(i) \text{ s } x_j = 1\}.$$

Kapitola 3

Hry bez pevných bodů

V následujících dvou kapitolách se budeme zabývat několika větami, které popisují chování v konkrétně rozložené populaci.

V této kapitole se zaměříme na hry, pro které daný stav není pevným bodem pro žádnou z dynamik.

3.1 Obecný souvislý graf

Jako první se budeme věnovat hře na souvislém grafu, ve kterém každý z vrcholů sousedí pouze s vrcholem s opačnou strategií.

Věta 3.1. Mějme evoluční hru na grafu (G, p, u^P, φ), kde

- $G = (V, H)$ je libovolný souvislý graf a $|V| > 1$,
- $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ je množina přípustných parametrů,
- φ je libovolný dynamický systém volený z φ^{ID}, φ^{BD} a φ^{DB},

a vektor strategií $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}) \in X^V$ takový, že

$$\forall i \in V, \forall k \in \mathcal{N}_1(i) : x_i \neq x_k.$$

Potom $\varphi(x) \neq x$.

Důkaz. Nejprve určíme užitky jednotlivých vrcholů. Jelikož každý z vrcholů sousedí pouze s vrcholy, které mají všechny stejnou strategii, můžeme všechny spolupracující vrcholy označit $\mathcal{C}$ a nespolupracující vrcholy označit $\mathcal{D}$ (viz lemma 2.1). Užitek vrcholu $\mathcal{C}$ je $u_{\mathcal{C}} = b$ a užitek vrcholu $\mathcal{D}$ je $u_{\mathcal{D}} = c$.

Nyní dokážeme pro každý dynamický systém zvlášť, že x není pevným bodem, tj. $\varphi(x) \neq x$.

1. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{ID}}$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$, tedy platí, že ani jeden z vrcholů nezmění svou strategii.

   Aby vrchol $\mathcal{C}$ nezměnil svou strategii, je potřeba splnit $b > c$, což je ovšem v rozporu s podmínkou (2.1) omezující sociální dilemata, tedy $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) \neq x$.

2. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{BD}}$. Důkaz opět provedeme sporem. Předpokládáme, že $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) = x$, tedy ani jeden z vrcholů nezmění svou strategii. Budeme se následně zabývat dvěma různými situacemi - nejvyšší užitek má buď vrchol $\mathcal{C}$ nebo vrchol $\mathcal{D}$.

   Pokud
$$\max_{j \in V} u_j(x) = u_{\mathcal{C}} = b,$$
   platí $b > c$, což je v rozporu podmínkou (2.1) kladenou na sociální dilemata. Pokud
$$\max_{j \in V} u_j(x) = u_{\mathcal{D}} = c,$$
   tak $c > b$. Platí $x_{\mathcal{D}} = 0$ a $A_{\mathcal{D}}(x) = \{1\}$, tedy $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) \neq x$.

3. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{DB}}$ a důkaz opět provedeme sporem. Předpokládejme, že $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) = x$, tj. žádný z vrcholů nezmění svou strategii. Budeme se opět zabývat dvěma situacemi - nejnižší užitek má buď vrchol $\mathcal{C}$ nebo vrchol $\mathcal{D}$.

   Pokud
$$\min_{j \in V} u_j(x) = u_{\mathcal{D}} = c,$$
   platí $c < b$, což neodpovídá podmínce (2.1) kladené na sociální dilemata. Pokud
$$\min_{j \in V} u_j(x) = u_{\mathcal{C}} = b,$$
   tak $b < c$. Dále platí $x_{\mathcal{C}} = 1$ a zároveň $A_{\mathcal{C}}(x) = \{0\}$ a tedy $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) \neq x$.

□

3.2 Úplný graf

Dále se budeme věnovat hře na úplném grafu, kde alespoň jeden z vrcholů má jinou strategii, než ostatní. V této hře všichni hráči interagují s každým z ostatních hráčů.

Věta 3.2. Nechť $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Mějme evoluční hru na grafu (K_n, p, u^P, φ), kde

- K_n je úplný graf,
- $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ je množina přípustných parametrů,
- φ je libovolný dynamický systém volený z φ^{ID}, φ^{BD} a φ^{DB},

a libovolný vektor strategií $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}) \in X^V$ takový, že x je koexistenční stav. Potom pro skoro všechna $(a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ platí $\varphi(x) \neq x$.

Důkaz. Tvrzení budeme dokazovat pro každou z dynamik zvlášť. Jelikož je graf úplný, všechny spolupracující vrcholy mají stejný užitek a všechny nespolupracující vrcholy mají stejný užitek. Označíme tedy libovolný spolupracující vrchol $\mathcal{C}$ a libovolný nespolupracující vrchol $\mathcal{D}$.

Užitek vrcholu $\mathcal{C}$ je

$$u_{\mathcal{C}} = \frac{ka + lb}{k + l},$$

kde k je počet sousedů vrcholu $\mathcal{C}$ se strategií $x = 1$ a l je počet sousedů vrcholu $\mathcal{C}$ se strategií $x = 0$.

Užitek vrcholu $\mathcal{D}$ je

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{mc + nd}{m + n},$$

kde m je počet sousedů vrcholu $\mathcal{D}$ se strategií $x = 1$ a n je počet sousedů vrcholu $\mathcal{D}$ se strategií $x = 0$. Jelikož všechny vrcholy mají stejný počet sousedů, užitek vrcholu $\mathcal{D}$ se dá také zapsat jako

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{(k+1)c + (l-1)d}{k + l}.$$

Zde předpokládejme, že $u_{\mathcal{C}} \neq u_{\mathcal{D}}$.

1. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{BD}}$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) = x$, tj. platí, že žádný z vrcholů nezmění svou strategii. Mohou nastat dvě různé možnosti - maximální užitek má vrchol $\mathcal{C}$ nebo vrchol $\mathcal{D}$.

   Pokud

   $$\max_{j \in V} u_j(x) = u_{\mathcal{C}},$$

   pak platí

   $$u_{\mathcal{C}} > u_{\mathcal{D}}.$$

   Aby nedošlo ke změně, musí mít nejslabší sousední vrchol strategii $x = 1$, tj.

   $$u_{\mathcal{C}} < u_{\mathcal{D}},$$

   což je spor s první nerovností, tedy $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) \neq x$.

   Pokud má maximální užitek vrchol $\mathcal{D}$, pak platí

   $$u_{\mathcal{D}} > u_{\mathcal{C}}.$$

   Aby nedošlo ke změně, musí mít nejslabší sousední vrchol strategii $x = 0$, tj.

   $$u_{\mathcal{D}} < u_{\mathcal{C}},$$

   což je ale v rozporu s první podmínkou, tedy $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) \neq x$.

2. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{DB}}$. Důkaz opět provedeme sporem. Předpokládáme, že $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) = x$, tj. žádný vrchol nezmění svou strategii. Opět mohou nastat dvě různé situace - minimální užitek má buď vrchol $\mathcal{C}$ nebo vrchol $\mathcal{D}$.

   Pokud má minimální užitek spolupracující vrchol, platí

   $$u_{\mathcal{C}} < u_{\mathcal{D}}.$$

Vrchol $\mathcal{C}$ přebírá strategii od svého nejsilnějšího souseda a aby nedošlo ke změně, musí platit

$$u_{\mathcal{C}} > u_{\mathcal{D}},$$

což je ovšem v rozporu s první podmínkou, tedy $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) \neq x$.

Pokud má minimální užitek vrchol $\mathcal{D}$, platí

$$u_{\mathcal{D}} < u_{\mathcal{C}}.$$

Aby nedošlo ke změně, musí platit

$$u_{\mathcal{D}} > u_{\mathcal{C}},$$

což je v rozporu s předchozí podmínkou a tedy $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) \neq x$.

3. Nechť $\varphi = \varphi^{\mathrm{ID}}$. Důkaz i zde provedeme sporem. Znovu předpokládáme, že $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$, tj. žádný z vrcholů nezmění strategii. Aby žádný ze spolupracujících vrcholů nezměnil strategii, musí platit

$$u_{\mathcal{C}} > u_{\mathcal{D}}.$$

Aby ani žádný z nespolupracujících vrcholů nezměnil strategii, musí platit

$$u_{\mathcal{D}} > u_{\mathcal{C}}.$$

Tyto dvě nerovnosti nemůžou platit zároveň, proto $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) \neq x$.

Nyní vyřešíme zbylé případy, pro které $\varphi(x) = x$. Stane se tak, pokud

$$u_{\mathcal{C}} = u_{\mathcal{D}},$$

tedy

$$\frac{ka + lb}{k + l} = \frac{(k+1)c + (l-1)d}{k + l}.$$

Tato situace tedy nastane v prostoru $\mathbb{R}^4$ na nadrovině

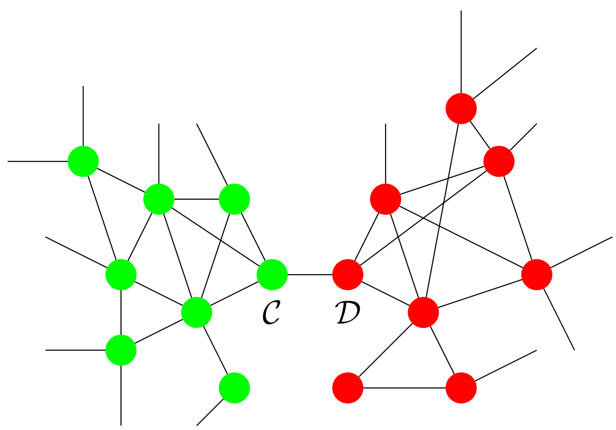
$$ka + lb = (k+1)c + (l-1)d,$$

kterou pro náš příklad vynecháme. □

Kapitola 4

Pevný bod na speciálním typu grafu

Následující tři tvrzení se budou týkat hry, která má počáteční rozložení strategií takové, že v jedné části grafu se nachází vrcholy pouze se strategií spolupracovat a v druhé části pouze vrcholy se strategií nespolupracovat. Graf této hry je ilustrován na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Graf G, v jehož jedné části mají všechny vrcholy strategii S a v druhé části mají všechny vrcholy strategii N. Tyto dvě části jsou spojené pouze jednou hranou.

Tento graf se z největší části skládá pouze z vnitřních spolupracujících vrcholů a vnitřních nespolupracujících vrcholů a pouze dva vrcholy (jeden ze skupiny spolupracujících a jeden ze skupiny nespolupracujících) interagují i s vrcholem s opačnou strategií.

Situaci bychom si mohli představit jako setkání dvou skupin, z nichž každá má jiný názor a obě vyšlou svého „vyjednavače“, který si jako jediný může vyslechnout názor opačné skupiny.

Použitím jedné z dynamik může dojít k ovlivnění ostatních hráčů v populaci a tím ke změně jejich strategie. Zde budeme zkoumat, za jakých podmínek na grafu k tomu nedojde a všichni hráči si zanechají svoji původní strategii.

Vrcholy z grafu G_1 (kromě vrcholu $\mathcal{C}$) odpovídají vnitřním spolupracujícím (viz Definice 2.20), tedy

$$V_{\text{VS}}(x) = V(G_1) \setminus \{\mathcal{C}\},$$

podobně vrcholy z grafu G_2 (kromě vrcholu $\mathcal{D}$) odpovídají vnitřním nespolupracujícím vrcholům (viz Definice 2.21), tedy

$$V_{\mathrm{VN}}(x) = V(G_2)\backslash\{\mathcal{D}\}.$$

Aby se nám s vrcholy lépe pracovalo, budeme pro vrcholy z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ používat značení VS a vrcholy z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ budeme značit VN.

4.1 Birth-Death dynamika

Jako první se budeme věnovat Birth-Death dynamice, ve které dochází k tomu, že užitkově nejsilnější vrchol se snaží zaplnit své okolí a změnit strategii svých sousedů. V následující větě a důkazu si ukážeme, pro jaké parametry žádný z vrcholů nezmění svou strategii.

Věta 4.1. Mějme evoluční hru na grafu $(G, p, u^P, \varphi^{\mathrm{BD}})$, kde $G = (V, H)$ je souvislý graf takový, že $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ a $H = H(G_1) \cup H(G_2) \cup \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, kde $\mathcal{C} \in V(G_1)$, $\mathcal{D} \in V(G_2)$, G_1 a G_2 jsou souvislé grafy a $|V(G_1)| > 1$, $|V(G_2)| > 1$ a vektor strategií $x = (x_1, x_2, \dots, x_{|V|}) \in X^V$ takový, že

$$\forall i \in V(G_1) : x_i = 1,$$
$$\forall k \in V(G_2) : x_k = 0.$$

Množina přípustných parametrů $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ splňuje

$$b > (1-k)a + kd, \tag{4.1}$$

nebo

$$c \leq la + (1-l)d, \tag{4.2}$$

kde $k = |\mathcal{N}_1(\mathcal{C})|$ a $l = |\mathcal{N}_1(\mathcal{D})|$ právě tehdy, když $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) = x$.

Důkaz. Nejprve provedeme důkaz postačující podmínky, tj. nechť $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ splňuje (4.1) nebo (4.2), potom $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) = x$.

Začneme určením užitků jednotlivých vrcholů. Jelikož všechny vrcholy množin $V_{\mathrm{VS}}(x)$ a $V_{\mathrm{VN}}(x)$ sousedí pouze s vrcholy, které mají všechny stejnou strategii, můžeme užitky určit jednoduše podle lemma 2.1.

Užitek všech vrcholů z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ je $u_{\mathrm{VS}} = a$ a užitek všech vrcholů z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ je $u_{\mathrm{VN}} = d$. Užitek vrcholu $\mathcal{C}$ je

$$u_{\mathcal{C}} = \frac{b + (k-1)a}{k},$$

a užitek vrcholu $\mathcal{D}$ je

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{c + (l-1)d}{l}.$$

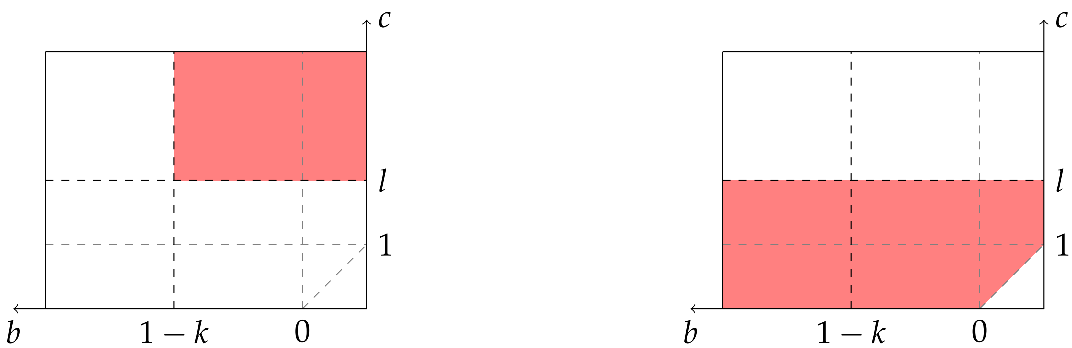
Pro zjednodušení si původní oblast parametrů (a, b, c, d) rozdělíme na dvě menší oblasti a důkaz provedeme pro každou z nich zvlášť. Oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}}$ je pro $a = 1$ a $d = 0$ zobrazena na obrázku 4.2a a definujeme ji jako

$$\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}} = \{(a, b, c, d) \in \mathcal{P} : (b > (1-k)a + kd) \wedge (c > la + (1-l)d)\},$$

a oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{BD}}$ definujeme jako

$$\mathcal{P}_2^{\mathrm{BD}} = \{(a, b, c, d) \in \mathcal{P} : c \leq la + (1-l)d\}$$

a pro $a = 1$ a $d = 0$ je zobrazena na obrázku 4.2b.



(a) Oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}}$

(b) Oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{BD}}$

Obrázek 4.2: Oblasti $\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}}$ a $\mathcal{P}_2^{\mathrm{BD}}$ pro $a = 1$ a $d = 0$. Hranice $b = 1 - k$ a $c = l$ jsou meze oblastí přípustných parametrů.

1. Nechť

$$b > (1-k)a + kd, \tag{4.3}$$
$$c > la + (1-l)d, \tag{4.4}$$

tj. oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}}$. Díky platnosti (4.3) víme, že $u_{\mathcal{C}} > d$. Podobně díky platnosti (4.4), $u_{\mathcal{D}} > a$.

Dohromady tedy platí

$$u_{\mathcal{D}} > u_{\mathrm{VS}} > u_{\mathcal{C}} > u_{\mathrm{VN}}.$$

Maximální užitek má tedy vrchol $\mathcal{D}$, který předá svoji strategii svému nejslabšímu sousedovi, což je každý vrchol z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$, tedy $\varphi(x) = x$.

2. Nechť

$$c \leq la + (1-l)d, \tag{4.5}$$

tj. oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{BD}}$. Z (2.1) plyne, že $u_{\mathcal{C}} < a$. Podobně díky platnosti (4.5) víme, že $u_{\mathcal{D}} \leq a$.

Dohromady platí buď

$$u_{\mathrm{VS}} > \max\{u_{\mathrm{VN}}, u_{\mathcal{D}}, u_{\mathcal{C}}\}$$

nebo

$$u_{\mathrm{VS}} = u_{\mathcal{D}} > \max\{u_{\mathrm{VN}}, u_{\mathcal{C}}\}.$$

Vrchol s nejvyšším užitkem je tedy libovolný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$, který určitě sousedí pouze s vrcholem se stejnou strategií, tedy $\varphi(x) = x$. Pokud je užitek libovolného vrcholu z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ shodný s užitkem vrcholu $\mathcal{D}$ a zároveň větší než užitky ostatních vrcholů, ke změně strategie vrcholu $u_{\mathcal{C}}$ také nedojde.

Nyní provedeme důkaz nutné podmínky, tj. nechť $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) = x$, potom $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ splňuje (4.1) nebo (4.2).

Důkaz můžeme rozdělit na pět různých situací - maximální bude vrchol $\mathcal{C}$ nebo vrchol $\mathcal{D}$ nebo libovolný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ nebo libovolný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$. Poslední možností je, že nejvyšší užitek bude mít vrchol $\mathcal{D}$ a vrchol množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ zároveň.

1. Pokud bude mít nejvyšší užitek vrchol $\mathcal{C}$, nedojde ke splnění podmínky (2.1), tedy $\varphi^{\mathrm{BD}}(x) \neq x$.

2. Maximální užitek bude mít vrchol $\mathcal{D}$, tj.

$$u_{\mathcal{D}} > \max\{u_{\mathcal{C}}, u_{\mathrm{VS}}, u_{\mathrm{VN}}\},$$
$$\frac{c + (l-1)d}{l} > \max\left\{\frac{b + (k-1)a}{k}, a, d\right\}.$$

Úpravou těchto tří nerovností získáme dvě podmínky

$$c > \frac{lb + l(k-1)a}{k} + (1-l)d \qquad \text{a} \qquad c > la + (1-l)d.$$

Třetí nerovnost je díky platnosti (2.1) splněna vždy. Aby nedošlo ke změně, musí platit

$$d < \frac{b + (k-1)a}{k},$$

tedy po úpravě

$$b > (1-k)a + kd.$$

Sjednocením prvních dvou nerovností a následným průnikem s poslední nerovností získáme oblast ohraničenou

$$c > la + (1-l)d \qquad \text{a} \qquad b > (1-k)a + kd,$$

což odpovídá oblasti $\mathcal{P}_1^{\mathrm{BD}}$.

3. Nejvyšší užitek má vrchol z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$, tedy

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{VS}} &> \max\{u_{\mathcal{C}}, u_{\mathcal{D}}, u_{\mathrm{VN}}\}, \\ a &> \max\left\{\frac{b+(k-1)a}{k}, \frac{c+(l-1)d}{l}, d\right\}. \end{aligned}$$

   Úpravou získáme

$$c < la + (1-l)d.$$

   Zbylé dvě nerovnosti jsou díky platnosti (2.1) splněny vždy. Jelikož všechny vrcholy z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ sousedí pouze s vrcholy se stejnou strategií, nemůže dojít ke změně a není nutné splnit další nerovnost. Získali jsme oblast

$$c < la + (1-l)d.$$

4. Žádný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ nemůže mít nejvyšší užitek, protože by nebyla splněna podmínka (2.1).

5. Nejvyšší užitek mají vrchol $\mathcal{D}$ a vrcholy z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$, tedy

$$c = la + (1-l)d.$$

   Pro tuto oblast ke změně strategie žádného z vrcholů nedojde.

Zkombinováním těchto možností získáme jednu oblast pro parametry $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$, splňující

$$b > (1-k)a + kd \qquad \text{nebo} \qquad c \leq la + (1-l)d.$$

□

4.2 Death-Birth dynamika

V následující podkapitole se zaměříme na Death-Birth dynamiku, ve které naopak užitkově nejslabší vrchol přebírá strategii od svého nejsilnějšího souseda.

Věta 4.2. Mějme evoluční hru na grafu $(G, p, u^P, \varphi^{\mathrm{DB}})$, kde $G = (V, H)$ je souvislý graf takový, že $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ a $H = H(G_1) \cup H(G_2) \cup \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, kde $\mathcal{C} \in V(G_1)$ a $\mathcal{D} \in V(G_2)$, G_1 a G_2 jsou souvislé grafy a $|V(G_1)| > 1$, $|V(G_2)| > 1$ a vektor strategií $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}) \in X^V$ takový, že

$$\begin{aligned} \forall i \in V(G_1) &: x_i = 1, \\ \forall k \in V(G_2) &: x_k = 0. \end{aligned}$$

Množina přípustných parametrů $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ splňuje

$$b > (1-k)a + kd, \tag{4.6}$$

nebo

$$c \leq la + (1-l)d, \tag{4.7}$$

kde $k = |\mathcal{N}_1(\mathcal{C})|$ a $l = |\mathcal{N}_1(\mathcal{D})|$ právě tehdy, když $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) = x$.

Důkaz. Jako první dokážeme postačující podmínku, tj. nechť $p = (a, b, c, d)$ splňuje (4.6) nebo (4.7), potom $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) = x$. Začneme určením užitků jednotlivých vrcholů. Užitek všech vrcholů množin $V_{\mathrm{VS}}(x)$ a $V_{\mathrm{VN}}(x)$ opět jednoduše určíme podle lemma 2.1.

Užitek vrcholů množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ je $u_{\mathrm{VS}} = a$ a užitek všech vrcholů z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ je $u_{\mathrm{VN}} = d$. Užitek vrcholu $\mathcal{C}$ je

$$u_{\mathcal{C}} = \frac{b + (k-1)a}{k},$$

a užitek vrcholu $\mathcal{D}$ je

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{c + (l-1)d}{l}.$$

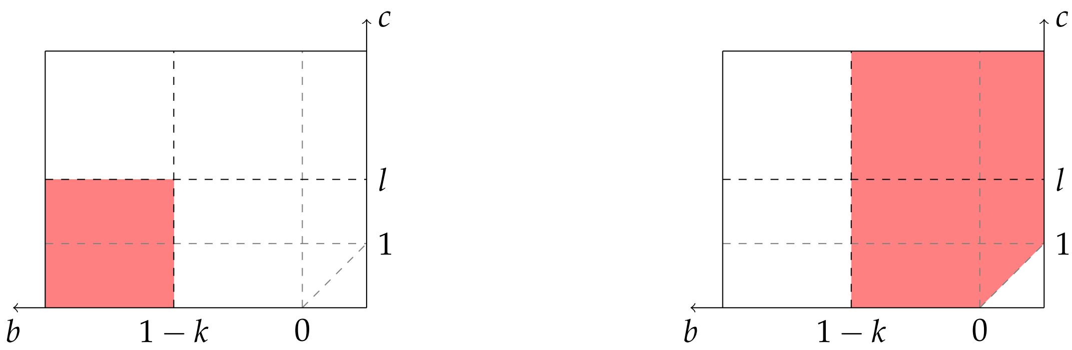
Podobně jako v předchozím důkazu, původní oblast parametrů (a, b, c, d) rozdělíme na dvě menší oblasti a důkaz provedeme pro každou z nich zvlášť. Oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{DB}}$ je pro $a = 1$ a $d = 0$ zobrazena na obrázku 4.3a a definujeme ji jako

$$\mathcal{P}_1^{\mathrm{DB}} = \{(a, b, c, d) : (b \leq (1-k)a + kd) \wedge (c \leq la + (1-l)d)\},$$

a oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{DB}}$ definujeme jako

$$\mathcal{P}_2^{\mathrm{DB}} = \{(a, b, c, d) : b > (1-k)a + kd\}$$

a pro $a = 1$ a $d = 0$ je zobrazena na obrázku 4.3b.



(a) Oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{DB}}$ (b) Oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{DB}}$

Obrázek 4.3: Oblasti $\mathcal{P}_1^{\mathrm{DB}}$ a $\mathcal{P}_2^{\mathrm{DB}}$ pro $a = 1$ a $d = 0$. Hranice $b = 1-k$ a $c = l$ jsou meze oblastí přípustných parametrů.

1. Nechť

$$b \leq (1-k)a + kd, \tag{4.8}$$
$$c \leq la + (1-l)d, \tag{4.9}$$

tj. oblast $\mathcal{P}_1^{\mathrm{DB}}$. Díky platnosti (4.8) víme, že $u_{\mathcal{C}} \leq d$. Dále díky platnosti (4.9) víme, že $u_{\mathcal{D}} \leq a$.

Dohromady platí

$$u_{\mathcal{C}} \leq u_{\mathrm{VN}} < u_{\mathcal{D}} \leq u_{\mathrm{VS}}.$$

Nejmenší užitek má tedy vrchol $\mathcal{C}$, který přebírá strategii od svého nejsilnějšího souseda, vrcholu z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$, který má určitě stejnou strategii. Tedy $\varphi(x) = x$.

2. Nechť

$$b > (1-k)a + kd, \tag{4.10}$$

tj. oblast $\mathcal{P}_2^{\mathrm{DB}}$. Jelikož platí (4.10), tak $u_{\mathcal{C}} > d$. Z platnosti (2.1) víme, že $u_{\mathcal{D}} > d$.

Dohromady tedy platí

$$u_{\mathrm{VN}} < \min\{u_{\mathcal{D}}, u_{\mathcal{C}}, u_{\mathrm{VS}}\}.$$

Minimální užitek má tedy libovolný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$, který přebírá strategii od svého nejsilnějšího souseda, který má určitě stejnou strategii, tedy $\varphi(x) = x$.

Dále provedeme důkaz nutné podmínky, tj. nechť $\varphi^{\mathrm{DB}}(x) = x$, potom $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ splňuje (4.6) nebo (4.7). Opět zde mohou nastat čtyři různé možnosti - nejnižší užitek bude mít vrchol $\mathcal{C}$, vrchol $\mathcal{D}$, vrchol z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ nebo vrchol z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$.

1. Minimální užitek má vrchol $\mathcal{C}$, tj.

$$u_{\mathcal{C}} < \min\{u_{\mathcal{D}}, u_{\mathrm{VS}}, u_{\mathrm{VN}}\},$$
$$\frac{b + (k-1)a}{k} < \min\left\{\frac{c + (l-1)d}{l}, a, d\right\}.$$

Úpravou těchto nerovnic získáme následující hranice oblastí

$$c > \frac{bl + l(k-1)a}{k} + (1-l)d \qquad \text{a} \qquad b < (1-k)a + kd.$$

Třetí nerovnost je díky platnosti (2.1) splněna vždy. Aby nedošlo ke změně, musí dále platit

$$a \geq \frac{c + (l-1)d}{l},$$

po úpravě

$$c \leq la + (1-l)d.$$

Pokud bude mít minimální užitek zároveň vrchol $\mathcal{C}$ a vrchol množiny $V_{\text{VN}}(x)$, tj.

$$b = (1-k)a + kd,$$

ke změně strategií žádného vrcholu také nedojde. Sjednocením prvních dvou nerovností a následným průnikem s poslední nerovností získáme oblast ohraničenou

$$c \leq la + (1-l)d, \qquad \text{a zároveň} \qquad b \leq (1-k)a + kd,$$

což odpovídá oblasti $\mathcal{P}_1^{\text{DB}}$.

2. Minimální užitek má vrchol $\mathcal{D}$, potom není splněná podmínka (2.1), tedy $\varphi^{\text{DB}}(x) \neq x$.

3. Žádný vrchol z množiny $V_{\text{VS}}(x)$ nemůže být nejslabší kvůli podmínce (2.1).

4. Minimální užitek má vrchol z množiny $V_{\text{VN}}(x)$, tj.

$$\begin{aligned} u_{\text{VN}} &< \min\{u_{\mathcal{C}}, u_{\mathcal{D}}, u_{\text{VS}}\}, \\ d &< \min\left\{\frac{b+(k-1)a}{k}, \frac{c+(l-1)d}{l}, a\right\}. \end{aligned}$$

Úpravou těchto nerovností získáme hranici oblasti následovně

$$b > (1-k)a + kd.$$

Ostatní nerovnosti jsou díky platnosti (2.1) splněny vždy. Jelikož libovolný vrchol z množiny V_{VN} sousedí pouze s vrcholy se stejnou strategií, ke změně nemůže dojít a získali jsme oblast

$$b > (1-k)a + kd,$$

což odpovídá oblasti $\mathcal{P}_2^{\text{DB}}$.

Zkombinováním oblasti $\mathcal{P}_1^{\text{DB}}$ a $\mathcal{P}_2^{\text{DB}}$ získáme oblast ohraničenou

$$b > (1-k)a + kd, \qquad \text{nebo} \qquad c \leq la + (1-l)d.$$

□

Jak jsme si ukázali, předchozí dvě evoluční hry na grafu se výsledkem odlišují pouze v použité dynamice, oblast parametrů $p = (a, b, c, d)$ je pro obě hry stejná. V obou případech ale tuto oblast parametrů získáme sjednocením jiných menších oblastí. Zatímco pro Birth-Death dynamiku jsou rozhodující vrcholy z množiny V_{VN} a vrchol $\mathcal{C}$, v Death-Birth dynamice je to přesně naopak. Oblasti $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ se tak pro obě dynamiky liší.

4.3 Imitační dynamika

Nakonec se budeme věnovat imitační dynamice, která je založena na změně strategie každého hráče v závislosti na jeho nejsilnějším sousedovi. Tato dynamika se na rozdíl od Birth-Death a Death-Birth dynamik chová pouze lokálně a nikoli globálně.

Věta 4.3. Mějme evoluční hru na grafu $(G, p, u^P, \varphi^{\mathrm{ID}})$, kde $G = (V, H)$ je souvislý graf takový, že $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ a $H = H(G_1) \cup H(G_2) \cup \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, kde $\mathcal{C} \in V(G_1)$ a $\mathcal{D} \in V(G_2)$, G_1 a G_2 jsou souvislé grafy a $|V(G_1)| > 1$, $|V(G_2)| > 1$ a vektor strategií $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}) \in X^V$ takový, že

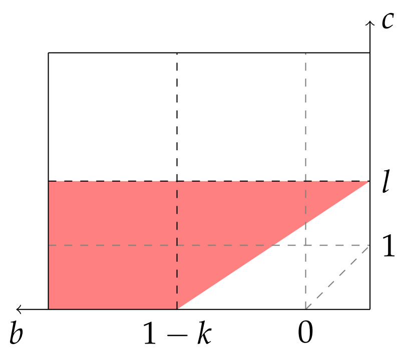
$$\forall i \in V(G_1) : x_i = 1,$$
$$\forall k \in V(G_2) : x_k = 0.$$

Existuje množina přípustných parametrů $p = (a, b, c, d) \in P$ taková, že

$$c \geq \frac{lb + l(k-1)a}{k} + (1-l)d \tag{4.11}$$
$$c \leq la + (1-l)d, \tag{4.12}$$

kde $k = |\mathcal{N}_1(\mathcal{C})|$ a $l = |\mathcal{N}_1(\mathcal{D})|$, právě tehdy, když $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$.

Důkaz. Nejprve provedeme důkaz postačující podmínky, tj. nechť $\mathcal{P}^{\mathrm{ID}} = (a, b, c, d)$ splňuje (4.11) a (4.12), potom $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$. Oblast $\mathcal{P}^{\mathrm{ID}}$ je zobrazena na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Oblast $\mathcal{P}^{\mathrm{ID}}$

Začneme určením užitků jednotlivých vrcholů.

Užitek vrcholu $\mathcal{C}$ je

$$u_{\mathcal{C}} = \frac{b + (k-1)a}{k}.$$

Jelikož platí (4.11), tak $u_{\mathcal{D}} \geq u_{\mathcal{C}}$.

Užitek vrcholu $\mathcal{D}$ je

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{c + (l-1)d}{l}.$$

Jelikož platí (4.12), tak $u_{\mathcal{D}} \leq a$.

Užitek vrcholů množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ je $u_{\mathrm{VS}} = a$ a užitek vrcholů množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ je $u_{\mathrm{VN}} = d$.

Dohromady platí

$$u_{\mathrm{VS}} \geq u_{\mathcal{D}} \geq u_{\mathcal{C}},$$

tedy $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$.

Nyní provedeme důkaz nutné podmínky, tj. $\varphi^{\mathrm{ID}}(x) = x$, potom pro $p = (a, b, c, d) \in \mathcal{P}$ platí (4.11) a (4.12).

Žádný vrchol z množiny $V_{\mathrm{VS}}(x)$ ani z množiny $V_{\mathrm{VN}}(x)$ určitě nezmění svou strategii, protože sousedí pouze s vrcholy se stejnou strategií.

Aby nezměnil svou strategii vrchol $\mathcal{C}$, je potřeba, aby bylo splněno následující

$$\frac{b + (k-1)a}{k} > a \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{b + (k-1)a}{k} > \frac{c + (l-1)d}{l}. \tag{4.13}$$

nebo

$$a \geq \frac{c + (l-1)d}{l}.$$

Zde nemůže být splněna první část, proto získáváme oblast

$$la + (1-l)d \geq c.$$

Aby ani vrchol $\mathcal{D}$ nezměnil svou strategii, musí platit následující

$$\frac{c + (l-1)d}{l} \geq d \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{c + (l-1)d}{l} \geq \frac{b + (k-1)a}{k},$$

nebo

$$d \geq \frac{b + (k-1)a}{k}.$$

Jelikož můžou nastat všechny uvedené nerovnosti, získáváme dvě různé oblasti, jejichž sjednocením získáváme oblast

$$c > \frac{lb + l(k-1)a}{k} + (1-l)d.$$

Zkombinováním těchto oblastí získáme oblast

$$c \geq \frac{lb + l(k-1)a}{k} + (1-l)d \qquad \text{a zároveň} \qquad c \leq la + (1-l)d. \tag{4.14}$$

□

Jelikož imitační dynamika funguje pouze lokálně (zkoumáme vždy pouze chování samostatného vrcholu v závislosti na sousedních vrcholech), dochází zde k velké odlišnosti také v oblasti parametrů $\mathcal{P}$ oproti předchozím dynamikám. Každý z vrcholů může změnit svou strategii. Aby nebyla změněna strategie žádného z nich, je potřeba splnit více podmínek, které zásadně omezují výslednou oblast přípustných parametrů.

Kapitola 5

Závěr

Tato práce se věnovala evolučním hrám na grafech. Graf zde představoval strukturu, která nám umožnila změnit dynamiku hry. Vrcholem v grafu jsme rozuměli hráče a hranou interakci mezi jednotlivými hráči.

Postupně byly představeny základní pojmy jak z teorie grafů, tak také z teorie her. V posledních kapitolách jsme se věnovali existenci či neexistenci pevného bodu evoluční hry na grafu a srovnali jsme jednotlivé dynamiky.

První hrou, kterou jsme se zabývali, byla hra na souvislém grafu, v němž každý z vrcholů sousedí pouze s vrcholy s opačnou strategií. Pro tuto hru pevný bod pochopitelně neexistuje, a to z důvodu, že vrcholy nemají „podporu“ v žádném ze svých sousedů. Pro každou z dynamik tedy dochází k tomu, že vždy alespoň jeden z vrcholů musí změnit svou strategii.

Další hrou, kterou jsme se zabývali, je hra na úplném grafu, kde alespoň jeden z vrcholů má jinou strategii než ostatní. Každý z vrcholů tak interaguje jak s vrcholem se shodnou strategií, tak s vrcholem s opačnou strategií. Nezabývali jsme se situací, kdy všechny vrcholy mají stejnou strategii, a tak žádný svou strategii nezmění. Pokud všechny vrcholy nemají stejnou strategii, není možné, aby pro tuto hru existoval pevný bod.

V celé poslední kapitole jsme se zabývali jedním typem hry z pohledu všech tří dynamik. Jednalo se o hru na grafu, v jehož jedné části měly všechny vrcholy strategii spolupracovat a v jeho druhé části strategii nespolupracovat, a tyto dvě části byly spojeny pouze jednou hranou. Pro tuto hru jsme již dokázali najít nutné a postačující podmínky takové, aby pevný bod existoval. Nejlépe je možné srovnat Birth-Death a Death-Birth dynamiku. Pro tyto dvě dynamiky totiž existuje totožná množina přípustných parametrů, pro které pevný bod existuje. Čím se tyto dvě dynamiky liší, je to, který vrchol rozhoduje o přípustných parametrech. Zatímco pro Birth-Death dynamiku je „dominantním“ vrcholem vrchol s nespolupracující strategií a celá množina vnitřních spolupracujících, pro Death-Birth dynamiku je tomu přesně naopak.

Jelikož jsme se v naší práci zabývali pouze průměrnou užitkovou funkcí, zajímavým srovnáním by mohlo být zkoumání stejných her ovšem za použití součtové užitkové funkce. U některých z her, by tak mohlo dojít ke změně chování, a tím vzniku nebo zániku pevných bodů.

Literatura

[1] EPPERLEIN, J., SIEGMUND, S., AND STEHLÍK, P. Evolutionary games on graphs and discrete dynamical systems. *Journal of Difference Equations and Applications 21*, 2 (Dec. 2014), 72–95.

[2] EPPERLEIN, J., SIEGMUND, S., STEHLÍK, P., AND ŠVÍGLER, V. Coexistence equilibria of evolutionary games on graphs under deterministic imitation dynamics. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B 21*, 3 (May 2016), 803–813.

[3] HOLUB, P. Přednášky z předmětu KMA/DMA. `https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kma/dma`, 2020.

[4] WEBB, J. N. *Game theory*. Springer, London, 2007.