

Numerická schémata v úloze odhadu stavu

Jakub Matoušek¹

1 Úvod

Představme si letící letadlo, které je vybaveno senzorem výšky nad terénem a mapou. Polohu a rychlost tohoto stroje naskládejme do vektoru a nazvěme ho stavem. Protože na letadlo působí náhodné jevy (např. vítr), je v teorii odhadu vývoj stavu (dynamika stavu) v čase popsán stochastickou diferenciální nebo diferenční rovnicí (dále pouze diferenciální/diferenční rovnice). Stav je tedy náhodnou veličinou popsanou hustotou pravděpodobnosti. Naším cílem je tuto hustotu znát. Na základě zmíněné rovnice můžeme odhadovat stav letadla v budoucnosti, tedy hledat tzv. prediktivní hustotu pravděpodobnosti (PHP).

Vzhledem k tomu, že máme k dispozici senzor a mapu, můžeme naši PHP opravit pokaždé, když dostaneme měření ze senzoru. Protože reálné senzory poskytují nepřesná měření je tzv. rovnice měření, popisující vztah mezi stavem a výstupem senzoru, ve tvaru stochastické algebraické rovnice. Po „opravě“ PHP dostáváme filtrační hustotu pravděpodobnosti (FHP). Nalezení této hustoty bývá cílem algoritmů odhadu stavu (AOS). Tyto algoritmy tedy obecně v každém kroce nejdříve poskytují odhad PHP (prediktivní krok) a ve chvíli, kdy přijde měření, poskytují odhad FHP (filtrační krok).

Dvojici výše popsaných rovnic nazvěme modelem. Model letícího letadla se senzorem výšky je pouze jeden ilustrační příklad.

Úloha odhadu stavu je v posledních letech formulována především pro modely s diskretní dynamikou a měřením. Obecné řešení problému odhadu stavu pro takový systém je dáno Bayesovskými rekurzivními vztahy (BRV), kde vývoj hustoty pravděpodobnosti odhadovaného stavu v čase je popsán Chapman-Kolmogorovo rovnicí. Méně častá je formulace pro modely se spojitou dynamikou, kde vývoj pravděpodobnosti, popisující odhad stavu v čase, je dán Fokker-Planckovo rovnicí (FPR). Pokud se již taková formulace v literatuře vyskytuje, tak je FPR řešena pouze základními numerickými metodami (NM). Navíc zatím chybí ucelené porovnání diskretního a spojitého přístupu k propagaci hustoty odhadu stavu.

Prvním cílem výzkumu bylo zjistit konkurenceschopnost prediktivního kroku na základě modelu se spojitou dynamikou popsanou diferenciální rovnicí (danou fyzikálním modelováním), oproti prediktivnímu kroku na základě modelu s diskretní dynamikou danou diferenční rovnicí. Druhým cílem poté bylo upravit moderní numerické schéma aktivních toků pro použití v AOS.

2 Algoritmy odhadu stavu

Jedním z AOS je filtr bodových mas (Discrete), tento algoritmus je založen na diskretizaci stavového prostoru a reprezentaci hustoty pravděpodobnosti jako součtu přeškálovaných rovnoměrných rozdělení se středem v diskretizovaných mřížkových bodech. Výhodou tohoto filtru pro účely našeho výzkumu je, že standardní numerické metody pro řešení parciální diferenciálních rovnic jsou založeny na stejné prostorové diskretizaci a proto zjednodušeně stačí

¹ Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika, e-mail: matoujak@kky.zcu.cz

nahradit diskrétní prediktivní krok tohoto algoritmu za danou numerickou metodu. V prediktivním kroce spojitých AOS bylo použito několik numerických metod:

- FTCS - Standardní metoda používající centrální diference v prostoru a dopřednou diferenci v čase.
- RKCS - Stejně jako FTCS, ale využívá metodu Runge-Kutta druhého řádu v čase.
- Active flux - Schéma aktivních toků je moderní numerická metoda třetího řádu v čase a prostoru představena v disertační práci Eymann (2013).

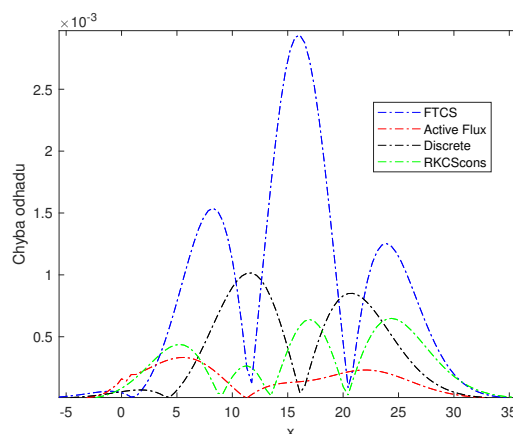
Pro použití v úloze odhadu stavu byla u všech numerických metod přidána možnost pohybu a zvětšování/zmenšování diskretizační mřížky, v průběhu realizace numerické metody, na základě odhadované variance skutečné hustoty stavu. Moderní schéma aktivních toků bylo upraveno tak, aby podporovalo rutinu odhadu stavu. Poslední AOS pro porovnání je částicový filtr založený na generování náhodných vzorků a řešení BRV Monte-Carlo integrací.

3 Numerické výsledky

Ukázalo se, že algoritmy pro spojitou predikci dokáží v přesnosti odhadu a výpočetní náročnosti konkurovat jejich diskrétním obdobím a filtr s numerickou metodou aktivních toků je dokonce všechny překonal. Výsledky lze vidět na obrázku 1, kde je porovnána chyba odhadu prediktivní hustoty, a v tabulce 1, kde jsou ukázány průměrné chyby ve střední hodnotě odhadu a průměrný čas potřebný pro provedení jednoho kroku algoritmu odhadu stavu.

Další z výhod spojitého PMF oproti diskrétnímu je, že netrpí problémy v případě, kdy je šum relativně malý oproti velikosti diskretizačních buněk. Prvotní experimenty také ukázaly, že může být pro velký počet bodů mřížky výpočetně méně náročný. Výhodou je rovněž fakt, že vzhledem k postupnému vývoji numerického řešení FPR v menších krocích, je možno průběžně monitorovat integritu řešení a zasáhnout v případě jeho nestability, případně postupně upravovat mřížku, na které je řešení hledáno.

Za nevýhodu numerických metod pro predikci stavu oproti diskrétní predikci lze považovat jejich obtížnější implementace (převážně NM vyššího řádu) a nutnost zajištění stability řešení.



Obrázek 1: Chyba odhadovaných PHP pro jeden prediktivní krok.

	Průměrná chyba odhadu	Čas kroku odhadu
Discrete	0.69958	0.018898
FTCS	0.97016	0.0012241
Active Flux	0.66466	0.0051487
RKCS	0.96121	0.0021147
BPF	0.66584	0.0046818

Tabulka 1: Průměrná chyba ve střední hodnotě odhadovaných FHP v úloze odhadu stavu.

Literatura

Eymann, T. A. (2013) *Active Flux Schemes*. University of Michigan, Dissertation thesis