

Kruh v egyptské matematice

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní,
České vysoké učení technické v Praze

✉ becvajin@fd.cvut.cz

Orientalia Antiqua Nova XXI

ISBN 978-80-261-1039-2

Západočeská univerzita v Plzni, 2021

<https://doi.org/10.24132/ZCU.2021.10392-1-14>

Abstract

The article analyzes five exercises (R50, R48, R41, R42 and R43) from the Rhind Mathematical Papyrus (deposited in the British Museum) that comes from the Second Intermediate Period of Egypt and is one of the best known examples of ancient Egyptian mathematics. One exercise (K2) from the *Kahun Mathematical Papyrus* (British Museum) is also discussed. The exercise R50 shows how Egyptian scribes calculated the area of a circle with a given diameter. The exercise R48 compares the area of a circle with a given diameter to that of its circumscribing square. Four other exercises demonstrate how to calculate the volume of a cylindrical grain silo with a given diameter and height. The author explains the algorithm which was used by Egyptian calculators. He also offers three ways how they could find a fairly accurate calculation, and how they approximated the value for π and compared Egyptian approximation with the approximation using by Babylonian scribes as well as Greek mathematicians.

Úvod

Historii starověkého Egypta členíme do následujících období.

Archaická doba (3200–2700)

Archaická doba odstartovala sjednocení Egypta a založení velké říše. Zrodilo se písmo a začalo se intenzivně rozvíjet.

Stará říše (2700–2180)

Stará říše znamenala první velký rozmach Egypta. Byly budovány chrámy, pohřebiště, postaveny velké pyramidy, sepsány tzv. *texty pyramid*, rozvíjelo se *hieroglyfické* a *hieratické* písmo, vznikl kalendář, narůstala vzdělanost.

První přechodná doba (2180–1994)

První přechodná doba byla obdobím rozpadu egyptské říše.

Střední říše (1994–1797)

Střední říše začala opětovným sjednocením země, představuje tzv. *klasické období starého Egypta*. Budovány byly zavlažovací kanály, chrámy, probíhaly administrativní reformy, rozvíjelo se písemnictví, byly sepsány matematické texty, jejichž znění se dochovalo do dnešních dnů.

Druhá přechodná doba (1797–1543)

Druhá přechodná doba byla poznamenána nadvládou Hyksósů. Z tohoto období zůstaly zachovány opisy starších matematických textů.

Nová říše (1543–1078)

Nová říše nastolila nový rozvoj starověkého Egypta. V Údolí králů byly budovány hroby, byly postaveny chrámy v Karnaku a Luxoru, byla sepsána *Knih mrtvých*.

Třetí přechodná doba (1078–715)

Třetí přechodná doba byla časem opětovného rozpadu říše, sever byl ovládán Libyjci.

Pozdní doba (715–332)

Pozdní doba přinesla jen krátký rozvoj, následovala okupace Egypta Asyrskou a Perskou říší. Roku 332 př. Kr. byl Egypt na tři století ovládnut Řeky a později Římany.

Matematické texty

Egyptských matematických textů z předřeckého období se dochovalo neskutečně málo. Nejvýznamnější jsou papyry Rhindův a Moskevský.

Rhindův papyrus (též Ahmosův, resp. Londýnský) je uchováván v Britském muzeu v Londýně (British Museum). Roku 1858 jej v Luxoru zakoupil Alexander Henry Rhind (1833–1863), skotský znalec starožitností. Kolem roku 1560 př. Kr. jej přepsal z materiálu pocházejícího z 19. století př. Kr. písař Ahmose. Splen byl ze čtrnácti papyrových listů, dochoval se ve dvou částech o rozměrech 319×33 cm a 206×33 cm. Jedná se o částečně tematicky členěnou sbírku úloh, které značíme **R1** až **R87**, s návody a řešeními.

Moskevský papyrus (též Goleniščevův) je uložen v Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Roku 1893 jej získal ruský egyptolog Vladimír Semjonovič Goleniščev (1856–1947). Napsán byl v Druhé přechodné době, jedná se o opis staršího textu ze Střední říše. Splen byl z jedenácti listů, je poměrně úzký, jeho rozměry jsou 544×8 cm. Není tematicky uspořádán, snad představoval jakýsi test znalostí. Úlohy v něm obsažené značíme **M1** až **M25**.

Méně významnými matematickými texty jsou *Káhúnské papyry* (Britské muzeum), *Dřevěné tabulky* (Egyptské muzeum v Káhiře), *Berlínský papyrus* (Egyptská sbírka Pruské akademie v Berlíně) a *Kožený svitek* (Britské muzeum). Pocházejí ze Střední říše, resp. z Druhé přechodné doby. Nejsou tak významné jako Rhindův či Moskevský papyrus.

Je třeba důrazně upozornit na to, že výše uvedené matematické texty byly určeny k výuce písařů a počtářů (nevíme však, jak pokročilých). Nelze proto z nich dělat seriózní závěry o úrovni matematiky ve starém Egyptě. Ze všech projevů egyptské civilizace však usuzujeme na mimořádně vysokou úroveň matematických znalostí a dovedností již v době před pěti tisíciletími. Stačí uvážit geometrické a počtářské schopnosti zcela nezbytné k projektování a organizaci obrovských staveb, které vznikaly již ve Staré říši.

Aritmetika

Staří Egypťané počítali v desítkové nepoziční soustavě, jednotky, desítky, stovky atd. byly značeny různými symboly. Sčítání a odčítání prováděli poměrně jednoduše – přidáváním, resp. odebráním znaků příslušných čísel. Násobili pomocí postupného zdvojnásobování násobence a následného sčítání. Dělili obdobným způsobem – postupně zdvojnásobovali dělitele, dokud z jeho násobků nesložili dělence. Zápis dělení se proto neodlišuje od zápisu násobení, rozlišíme je však podle kontextu.

Egypťané pracovali pouze s tzv. *kmennými zlomky*, tj. se zlomky, které mají v čitateli jedničku, a se zlomkem $\frac{2}{3}$. Vzhledem k tomu, že při násobení a při dělení čísla zdvojnásobovali, museli vědět, jak „zdvojnásobit“ kmenný zlomek, tj. (v našem smyslu) jak vyjádřit zlomek s dvojkou v čitateli součtem kmenných zlomků. Je-li

sudý jmenovatel, není to problém, zlomek lze (v našem smyslu) krátit. Problém je, když je jmenovatel liché číslo. Rhindův papyrus obsahuje tzv. „tabulku 2 lomeno n “, která uvádí rozklady zlomků s dvojkou v čitateli a lichým jmenovatelem na součet kmenných zlomků, a to pro $n = 5, \dots, 101$. Část takovéto tabulky (pro $n = 5, \dots, 21$) je rovněž na jednom z Káhúnských papyrů.

Geometrie

Egyptské matematické texty obsahují úlohy věnované výpočtu obsahů rovinných útvarů (čtyřúhelník, obdélník, trojúhelník, lichoběžník, kruh), objemů těles (krychle, kvádr, hranol, jehlan, komolý jehlan, válec) a sklonů rovin (sklony stěn pyramid). Znovu zdůrazněme, že již před pěti tisíci lety musely být ve starém Egyptě na značné úrovni praktické geometrické dovednosti (vyměřování polí, projektování staveb, tj. vytyčování půdorysů, orientace vůči světovým stranám atd.).

Obsah kruhu

Zajímavou částí egyptských matematických textů jsou partie související s výpočtem obsahu kruhu. Jedná se o úlohy **R50**, **R48**, **R41**, **R42**, **R43** Rhindova papyru a o úlohu **K2** jednoho z Káhúnských papyrů. Příklad **R50** podává návod na výpočet obsahu kruhu o průměru 9 *chet*. Od hodnoty průměru se odečte jedna devítina, vychází 8, toto číslo se umocní. Obsah kruhu o průměru 9 *chet* je tedy $64 \text{ chet}^2 = 64 \text{ secat}$. Zajímavé je, že jednotka *chet* je poměrně velká; *chet* je 100 loktů, přičemž *loket* je přibližně 52 cm. Jednalo se tedy o kruh o průměru zhruba 468 metrů. V příkladu **R50** tedy provedli „kvadraturu kruhu“ – obsah kruhu o průměru 9 *chet* nahradili obsahem čtverce o straně 8 *chet*. Příklad **R50** vypadá (v překladu) zhruba takto:

R50. Metoda výpočtu [obsahu] kruhové plochy o průměru 9 chet.

Jaký je obsah její plochy?

Odečti $\frac{1}{9}$ z toho, je to 1, zbytek je 8.

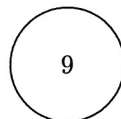
Počítej s 8 8-krát, vyjde 64.

Toto je její obsah v ploše: 64 secat.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \\ \frac{1}{9} \quad 1 \end{array}$$

Odečíst od toho, zbytek 8.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad \quad 4 \quad 32 \\ 2 \quad 16 \quad \quad \backslash 8 \quad 64 \end{array}$$



Obsah plochy

64 secat

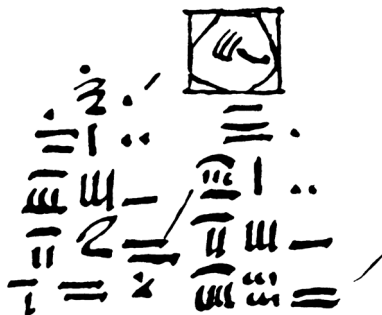
Egyptská kvadratura kruhu je tedy takováto: čtverec, který má „stejný“ obsah jako kruh o průměru d , resp. poloměru r , má stranu $\frac{8}{9} \cdot d$, resp. $\frac{16}{9} \cdot r$. Obsah kruhu byl tedy ve starém Egyptě vyjádřen hodnotou $\frac{64}{81} \cdot d^2$, resp. $\frac{256}{81} \cdot r^2$. Vydělením dostaneme přibližně $3,16 \cdot r^2$. „Egyptské π “ je tedy 3,16.

Na Rhindově papyru předchází příkladu **R50** příklad **R48**. Neobsahuje žádný text, jeho smyslem je patrně srovnání obsahů kruhu (64) a opsaného čtverce (81). Porovnejme zápis příkladu **R48** na Rhindově papyru a jeho přepis (egyptský zápis se čte zprava doleva). Obrázek je převzat z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 85.

R48.

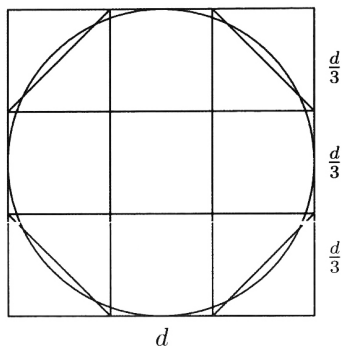


1	8	\	1	9	
2	16		2	18	
4	32		4	36	
\	8	64	\	8	72
celkem			81		



Velkým problémem pro historiky matematiky je otázka, jak ve starém Egyptě dospěli k výše uvedenému algoritmu pro výpočet obsahu kruhu. Naznačíme tři možnosti, jak k tomu mohlo dojít. Všechno jsou ovšem jen spekulace.

Představme si, že kruh o průměru d je vepsán do čtverce, který je rozdělen na devět stejných čtverců (viz obrázek). Aproximujme obsah kruhu obsahem osmiúhelníku, který získáme tak, že od čtyř rohových čtverců odkrojíme úhlopříčkou jejich poloviny. Obsah získaného osmiúhelníku je tedy roven obsahu sedmi menších čtverců, tj. sedmi devítinám obsahu velkého čtverce, tj. $\frac{7}{9} \cdot d^2 = \frac{63}{81} \cdot d^2$. Egyptský způsob však udává hodnotu $\frac{64}{81} \cdot d^2$, která je přesnější (viz hodnoty na obrázku). Snad staří Egypťané zvětšili číselník 63 o jedničku, aby bylo možno číslo 64 odmocnit. Tak mohli dojít k vyjádření obsahu (v našem smyslu) výrazem $(\frac{8}{9} \cdot d)^2$.



$$S \doteq \frac{7}{9} d^2 = \frac{63}{81} d^2$$

$$S \doteq (d - \frac{1}{9} d)^2 = \frac{64}{81} d^2 \doteq 3,16 r^2$$

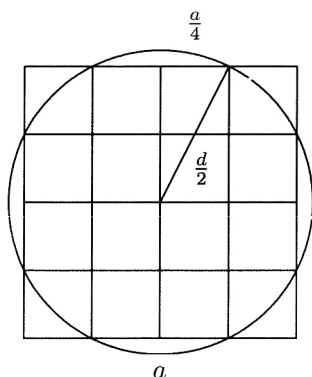
$$S = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2,$$

$$\frac{63}{81} = \frac{7}{9} \doteq 0,7777 \quad +0,0077$$

$$\text{kde } \frac{1}{4} \pi \doteq 0,7854$$

$$\frac{64}{81} \doteq 0,7901 \quad -0,0047$$

Druhá úvaha je představena na dalším obrázku. Kruh o průměru d je zakreslen ve čtvercové síti, přičemž prochází osmi mřížovými body. Pomocí Pythagorovy věty snadno vyjádříme délku strany a čtverce pomocí průměru d , resp. poloměru r (viz obrázek). Pokud obsah kruhu o poloměru r aproximujeme obsahem čtverce se stranou a , bude obsah kruhu vyjádřen hodnotou $a^2 = 3,2 \cdot r^2$. To však neodpovídá egyptskému výpočtu. Vrátime se proto k vyjádření hodnoty a , kde ve jmenovateli je odmocnina z 80. Zvětšíme-li tuto hodnotu o jedničku, bude možno číslo 81 v oboru přirozených čísel odmocnit. Hodnota a se tím mírně zmenší a bude přesně odpovídat egyptské kvadratuře kruhu.



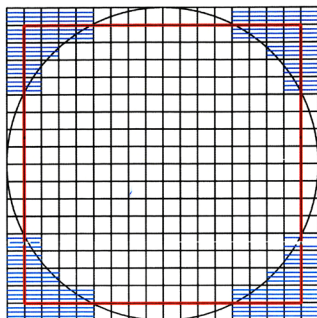
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}} d = \frac{8}{\sqrt{80}} d$$

$$a^2 = \frac{4}{5} d^2 = 3,2 r^2$$

$$a \doteq \frac{8}{\sqrt{81}} d = \frac{8}{9} d$$

Třetí úvaha je na dalším obrázku, kde je kruh vepsán do čtverce sestávajícího z $18 \times 18 = 324$ malých čtverečků. V každém rohu velkého čtverce odebereme 17 malých čtverečků a obsah kruhu aproximujeme zbylou bílou plochou. Z velkého čtverce jsme tedy odebrali $4 \times 17 = 68$ malých čtverečků, zbylo $324 - 68 = 256 = 16 \times 16$ čtverečků. K bílé ploše nyní přidáme 4×8 čtverečků v rozích a odebereme 4×8 čtverečků po stranách. Tím jsme bílou plochu přetvořili na čtverec 16×16 a dospěli k egyptské kvadratuře kruhu: od průměru 18 jsme odebrali jednu devítinu, $18 - 2 = 16$, a obsah kruhu aproximovali obsahem čtverce o straně 16.



Velký čtverec je složen z $18^2 = 324$ malých čtverečků.

V každém rohu z něj odebereme 17 čtverečků, tj. celkem 68 čtverečků.

Aproximujeme obsah kruhu bílou plochou $324 - 68 = 256 = 16^2$ čtverečků.

Bílou plochu můžeme přetvořit na čtverec.

Ze čtverce 16^2 odebráno $4 \cdot 8 = 32$ čtverečků a přidáno $4 \cdot 8 = 32$ čtverečků.

Zřejmě je $16 = \frac{8}{9} \cdot 18$.

Objem válce

Na Rhindově papyru jsou tři úlohy, v nichž je třeba vypočítat objem válcové sýpky. V příkladu **R41** je úkolem vypočítat objem takové sýpky o průměru základny 9 a výšce 10. Výpočet probíhá víceméně jako v dnešních školách, obsah podstavy se vynásobí výškou. Využije se přitom již známý postup výpočtu obsahu kruhu. Příklad je mírně komplikován převodem jednotek. Zadané rozměry sýpky jsou v loktech, její objem je tedy vypočten v krychlových loktech. Vypočtená hodnota je pak zvětšena o polovinu, neboť jeden krychlový loket zrna odpovídá půl druhému pytlí zrna. Počet pytlů je dále vydělen dvaceti, výsledek je přepočten na podstatně větší jednotky (tzv. stovky čtyřnásobných měřic). Můžeme si představit, že dvacet pytlů je naloženo na vozík. Viz následující obrázek.

R41. Metoda výpočtu kruhové sýpky (o rozměrech) 9, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 9. Je to 1, zbytek 8. Počítej s 8 8-krát, vyjde 64.

Počítej se 64 10-krát, vyjde 640.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho, vyjde 960. **To je jeho objem v pytlích.**

Vypočti $\frac{1}{20}$ z 960. Je to 48.

To je to, co do ní vejde ve stovkách čtyřnásobných měřic:

48 stovek čtyřnásobných měřic obilí.

Tvar řešení tohoto:

1	8	\ 8	64	celkem	960
2	16	1	64	$\frac{1}{10}$	96
4	32	\ 10	640	$\frac{1}{20}$	48
		\ $\frac{1}{2}$	320		

Obdobným příkladem, který je však numericky náročnější, je příklad **R42**. Průměr základny je 10, z toho jedna devítina je $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{8}{9}$. Zlomek $\frac{8}{9}$ je ovšem nutno vyjádřit pomocí kmenných zlomků, což výpočet komplikuje. Viz obrázek.

R42. Kruhá sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$, zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$ atd.

Výsledky: $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{54}$, 1185, $59\frac{1}{4}$.

V následujícím příkladu **R43** je třeba vypočítat objem válcové obilnice o průměru 9 a výšce 6. Příklad je však zapsán chybně, chybami je poznamenán i výpočet. Jeden z Káhúnských papyrů obsahuje příklad **K2**, který snad lze chápat jako výpočet objemu válcové obilnice o průměru 12 a výšce 6. Není bohužel doprovázen žádným textem, připojený obrázek však takovouto interpretaci podporuje.

Závěr

Pro výpočet obvodu o a obsahu S kruhu dnes užíváme konstantu π . Ve škole jsme se naučili vzorce

$$o = 2\pi r,$$

$$S = \pi r^2,$$

kde $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ \dots$,

pro běžné účely stačí brát za π hodnotu 3,14. Dnes víme, že číslo π je *iracionální*, tj. nelze je vyjádřit zlomkem s celočíselným

čitatelem a jmenovatelem. Ve druhé polovině 19. století bylo dokázáno, že je π dokonce číslo *transcendentní*, tj. není kořenem žádné algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty. Tímto výsledkem byl s konečnou platností negativně vyřešen problém kvadratury kruhu, který byl vysloven ve starém Řecku již někdy v 5. století př. Kr.: pravítkem a kružítkem nelze sestrojít stranu čtverce, který má stejný obsah jako daný kruh.

Ve starém Egyptě byla v polovině 2. tisíciletí př. Kr. pro výpočet obsahu kruhu místo našeho π užívána hodnota 3,16, zatímco v Mezopotámii ve stejné době (i daleko později) méně přesná hodnota 3. Zhruba o patnáct století později vypočetl řecký matematik a fyzik Archimédés (asi 287 až 212) velmi nápaditým postupem horní a dolní odhad obvodu kruhu, a našel tak (v moderní interpretaci vyjádřeno) horní a dolní odhad čísla π . Převědeme-li Archimédovy zlomky na desetinná čísla, dospějeme k vymezení

$$3,140909 < \pi < 3,142\ 826,$$

které je přesné na dvě desetinná místa. Od Archiméda pochází i jednodušší odhad

$$3^{10}/71 < \pi < 3^1/7 = 22/7.$$

Archimédovu přibližnou hodnotu $22/7$ pro číslo π jsme užívali ve škole.

O matematice ve starém Egyptě viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003 a Vymazalová 2006, o Rhindově papyru viz Robins a Shute 1990, o geometrii viz Neugebauer 1931, o obsahu kruhu viz Engels 1977 a Gerdes 1985.

Literatura

- Bečvář, Jindřich, Martina Bečvářová a Hana Vymazalová. 2003. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23. Praha: Prometheus.
- Engels, Hermann. 1977. „Quadrature of the Circle in Ancient Egypt.“ *Historia Mathematica* 4: 137–140.
- Gerdes, Paulus. 1985. „Three Alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of a Circle.“ *Historia Mathematica* 12: 261–268.
- Neugebauer, Otto. 1931. „Die Geometrie der ägyptischen Texte.“ *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B, Band 1. Berlin: J. Springer, 413–451.
- Robins, Gay a Charles Shute. 1990. *The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text*. The Trustees of the British Museum, London: British Museum Press.
- Vymazalová, Hana. 2006. *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 31. Praha: Český egyptologický ústav.