

# NÁVRH A EXPERIMENTÁLNE OVERENIE ALGORITMU OPTIMÁLNEHO RIADENIA PRE VÝUKOVÝ MODEL MECHANICKÉHO SYSTÉMU

A. Jadlovská, R. Lonščák

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, Fakulta elektrotechniky a informatiky, TU v Košiciach,

Letná 9/A, 040 01 Košice

e-mail : Anna.Jadlovska@tuke.sk, Richard.Lonscak@tuke.sk

## Anotácia:

Článok sa zaoberá návrhom algoritmu optimálneho riadenia podľa kvadratického kritéria s využitím sumátora a jeho aplikáciou na riadenie simulačného/reálneho laboratórneho modelu – helikoptéra s cieľom riešiť problém sledovania zmien referenčných hodnôt riadiacej veličiny. Návrh modifikovaného algoritmu optimálneho riadenia so sumátorom vychádza zo znalosti stavového popisu modelu mechanického systému a je verifikovaný v riadiacej štruktúre naprogramovanej v simulačnom jazyku Matlab/Simulink s využitím S-funkcií. Vizualizácia získaných výsledkov je zrealizovaná pomocou vytvorených internetových aplikácií a technológie Matlab Web Server. Internetový prístup zjednodušuje verifikáciu navrhnutého algoritmu v simulačných schémach za účelom testovania jeho vlastností na riadenie simulačného nelineárneho a virtuálneho modelu helikoptéry. Článok sa zaoberá aj možnosťou aplikácie algoritmu optimálneho riadenia na nelineárny výukový model s využitím vstupno/výstupnej karty a funkcií Real Time Toolboxu na jej ovládanie.

## ÚVOD

Článok sa zaoberá návrhom a experimentálnym overením algoritmu optimálneho riadenia podľa kvadratického kritéria so sumátorom s cieľom riešiť problém kompenzácie trvalých porúch a problém sledovania zmien referenčných hodnôt riadiacej veličiny v aplikácii na riadenie simulačného a reálneho výukového modelu mechanického systému – helikoptéra [6], [10].

Mechanický systém helikoptéra [2], [3] patrí medzi reálne výukové modely firmy Humusoft (model magnetickej levitácie, model guľička na ploche) umiestnené v laboratóriu Kybernetiky na Katedre Kybernetiky a Umelej Inteligencie FEI TU v Košiciach za účelom testovania vlastností navrhnutých algoritmov riadenia v rámci výuky predmetov teórie riadenia.

Laboratórny model helikoptéra predstavuje mnohorozmerný (MIMO) nelineárny nestabilný dynamický systém, ktorý môže byť riadený v reálnom čase pomocou počítača navrhnutým modifikovaným algoritmom optimálneho riadenia so sumátorom s využitím multifunkčnej karty MF614. Algoritmus optimálneho riadenia so sumátorom [9] vychádza zo znalosti lineárneho diskretného modelu helikoptéry v stavovom priestore, ktorý získame linearizáciou pôvodného matematicko-fyzikálneho modelu dynamického systému v definovanom pracovnom bode blízko ustáleného stavu.

Navrhnutý algoritmus optimálneho riadenia je overený simuláciou riadiacej štruktúry v jazyku Matlab/Simulink s využitím vytvorených S-funkcií z knižnice CE150Lib [8].

Vizualizácia získaných výsledkov je zrealizovaná pomocou vytvorených internetových aplikácií a technológie Matlab Web Server (MWS) [11].

## LINEÁRNE KVADRATICKÉ RIADENIE – – RIADENIE DO ROVNOVÁŽNEHO STAVU

Návrh riadiacich systémov, ktoré zabezpečujú optimalizáciu kvadratického kritéria patrí medzi moderné metódy návrhu optimálnych riadiacich systémov pre dynamické systémy s jedným vstupom a výstupom (SISO - Single Input Single Output) a pre dynamické systémy s viacerými vstupmi a výstupmi (MIMO Multi Inputs Multi Outputs) [1], [10].

Uvažujme stavový opis diskretného lineárneho dynamického systému

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

kde

$\mathbf{x}(k)$  je vektor stavových premenných, rozmeru  $n$ ,

$\mathbf{u}(k)$  je vektor vstupných (riadiacich) premenných, rozmeru  $r$ ,

$\mathbf{y}(k)$  je vektor výstupných premenných, rozmeru  $m$ ,

$\mathbf{A}$  je matica dynamiky ( $n \times n$ ),

$\mathbf{B}$  je vstupná matica ( $n \times r$ ),

$\mathbf{C}$  je výstupná matica ( $m \times n$ ),

$\mathbf{D}$  je matica koeficientov priamych väzieb ( $m \times r$ ).

Úlohou syntézy klasického optimálneho riadenia do rovnovážneho stavu pre riaditeľný diskretný lineárny systém definovaný modelom v stavovom priestore (1), je určiť taký návrh algoritmu riadenia

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) \quad (2)$$

ktorý minimalizuje pri riadení za konečný interval času kvadratický funkcionál

$$J_{LQ} = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}^*\mathbf{x}(N) \quad (3)$$

pričom matice váh vo funkcionáli  $J_{LQ}$  sú zvolené tak, že  $\mathbf{Q}^*$  a  $\mathbf{Q}$  sú pozitívne semidefinitné matice rozmeru  $n \times n$  a  $\mathbf{R}$  je pozitívne definitná matica rozmeru  $r \times r$ . Matica  $\mathbf{K}(k)$  v zákone riadenia (2) je matica spätnoväzobných zosilnení rozmeru  $r \times n$ , ( $n$  je počet stavov systému,  $r$  je počet vstupov systému).

Pretože pri reálnych systémoch musí byť riadiaci vstup  $\mathbf{u}(k)$  vždy ohraničený, úlohou matice  $\mathbf{R}$  vo funkcionáli (3) je zabezpečiť ohraničenie prvkov vektora riadiacich veličín  $\mathbf{u}(k)$  na fyzikálne realizovateľné hodnoty. Význam začlenenia kladne semidefinitnej matice  $\mathbf{Q}$  je zabezpečiť pri riadení systému konvergenciu zložiek vektora stavových veličín do nuly. Kladne semidefinitná matica  $\mathbf{Q}^*$  reprezentuje váhu vektora stavových veličín  $\mathbf{x}(N)$  v kroku  $N$ , kedy vektor riadiacich veličín je už nulový, t.j.  $\mathbf{u}(N) = 0$ , pričom maticu  $\mathbf{Q}^*$  môžeme voliť tak, že  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$ .

Pre dynamický systém daný stavovým opisom (1) môžeme vypočítať optimálnu postupnosť symetrických, kladne definitných matic  $\{\mathbf{P}(k), k = N-1, N-2, \dots, 0\}$ , ktorá spĺňa okrajové podmienky  $\mathbf{P}(N-1) = \mathbf{Q}^*$ ,  $\mathbf{P}(-1) = \mathbf{P}(0)$  a získame ju riešením diskretnej Riccatiho rovnice

$$\mathbf{P}(k-1) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{A} \quad (4)$$

Z tejto postupnosti môžeme určiť požadovanú postupnosť matic zosilnení spätnej väzby  $\{\mathbf{K}(k), k = N-1, N-2, \dots, 0\}$  z rovnice

$$\mathbf{K}(k) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{A} \quad (5)$$

Podmienkou existencie riešenia pre riadenie do rovnovážneho stavu je, aby dynamický systém (1) bol riaditeľný.

Určené hodnoty matice spätnoväzobných zosilnení  $\mathbf{K}(k)$  na definovanom intervale riadenia použijeme na výpočet riadiaceho signálu podľa (2) pre  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Takto vypočítané riadenie má názov lineárne kvadratické riadenie (Linear Quadratic Control – LQ Control) [1], [7].

## MODIFIKÁCIA ALGORITMU LQ RIADENIA

V tejto časti sa budeme zaoberať návrhom algoritmu optimálneho riadenia podľa kvadratického kritéria (LQ riadenie) s využitím sumátora s cieľom riešiť problém kompenzácie trvalých porúch pôsobiacich na dynamický systém a problém sledovania zmien referenčných hodnôt riadiacej veličiny bez trvalej regulačnej odchýlky v riadiacej štruktúre za účelom aplikovať modifikovaný algoritmus LQ riadenia na riadenie reálneho a simulačného nelineárneho modelu helikoptéra [2], [3].

Modifikovaný algoritmus LQ riadenia vychádza zo znalosti linearizovaného diskretného modelu MIMO dynamického systému (1) a matice spätnoväzobných zosilnení  $\mathbf{K}$  stavového regulátora, ktorá je vypočítaná podľa (4) a (5) minimalizáciou kvadratického kritéria (3).

Pre návrh algoritmu riadenia so sumátorom [9], budeme uvažovať rozšírený stavový popis uzavretého obvodu, ktorý získame zaradením akčnej veličiny  $\mathbf{u}(k+1)$  pre ktorú platí:

$$\mathbf{u}(k+1) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k+1) = -\mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)] \quad (6)$$

kde  $\mathbf{K}$  je matica spätnoväzobných zosilnení stavového regulátora (vypočítaná klasickým algoritmom LQ riadenia) a zabezpečuje optimálnu kompenzáciu nenulového vektora počiatočných hodnôt  $\mathbf{x}(0)$ .

Rozšírený stavový popis uzavretého obvodu má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Predpokladajme, že existuje transformačná matica  $\mathbf{T}$  tvaru:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

na základe ktorej je možné prepísať maticu dynamiky rozšíreného stavového popisu uzavretého regulačného obvodu (7) do tvaru

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Z rovnosti (8) môžeme vidieť, že vlastné čísla uzavretého regulačného obvodu v rozšírenom tvare sú rovné vlastným číslam matice  $(A - BK)$  a nulovému vlastnému číslu, ktoré odpovedá počítačovej podmienke  $u(0)$ , ktorá odznie v jednom kroku.

V modifikovanej štruktúre so sumátorom (obr.1) budeme uvažovať účinok vektora trvalých porúch, takže dynamický systém v stavovom priestore s pôsobením trvalých porúch má tvar:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_d z(k) = \\ &= Ax(k) + Bu(k) + d \end{aligned} \quad (9)$$

kde pre vektor nemerateľných porúch platí  $d = B_d z(k)$ .

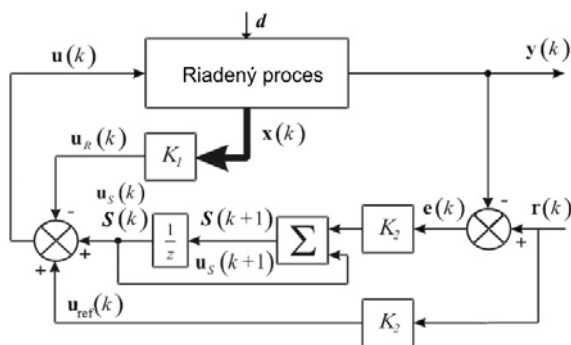
Aby sme mohli zaistiť sledovanie zmien hodnôt riadiacej veličiny budeme uvažovať modifikovanú riadiacu štruktúru so sumátorom (obr.1), ktorého dynamiku môžeme vyjadriť nasledujúcou diferenčnou rovnicou

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + K_2 e(k) = \\ &= S(k) + K_2 (r(k) - y(k)) = \\ &= S(k) + K_2 r(k) - K_2 Cx(k) \end{aligned} \quad (10)$$

kde  $K_2$  je zatiaľ neurčené zosilnenie.

Nakoľko akčný zásah počítame v okamihu „ $k$ “, je nutné pre akčnú veličinu  $u_s(k)$ , ktorú generuje sumátor, zaradiť za  $S(k+1)$ , oneskorenie o jeden krok, čo je realizované členom  $z^{-1}$ , takže platí  $u_s(k) = S(k)$ .

Zavedením oneskorenia vzniká pri skokovej zmene riadiacej veličiny  $r(k)$  oneskorenie na akčnej veličine o jeden krok, čo je v riadiacej štruktúre ošetrené doprednou väzbou priamo od vstupu riadiacej veličiny  $r(k)$  so zosilnením  $K_2$ , čiže platí  $u_{ref}(k) = K_2 r(k)$ , [9].



**Obr. 1** Modifikovaná riadiaca štruktúra so sumátorom a doprednou väzbou so zosilnením  $K_2$

Stavový regulátor v spätnej väzbe generuje signál  $u_r(k) = -K_1 x(k)$ , kde  $K_1$  je zatiaľ neurčený vektor stavového regulátora modifikovanej štruktúry.

Akčnú veličinu vstupujúcu do dynamického systému tvoria tri zložky

$$\begin{aligned} u(k) &= u_r(k) + u_s(k) + u_{ref}(k) = \\ &= -K_1 x(k) + S(k) + K_2 r(k) \end{aligned} \quad (11)$$

Pre takto definovanú akčnú veličinu v kroku  $(k+1)$  platí

$$u(k+1) = -K_1 x(k+1) + S(k+1) + K_2 r(k+1) \quad (11a)$$

Dosadením za  $S(k+1)$  a  $x(k+1)$  z rovnice (9) a (10) dostávame

$$\begin{aligned} u(k+1) &= -K_1 Ax(k) - K_1 Bu(k) - K_1 d + \\ &+ S(k) + K_2 r(k) - K_2 Cx(k) + \\ &+ K_2 r(k+1) \end{aligned} \quad (11b)$$

Vylúčenie premennej  $S(k)$  zaistíme dosadením za  $S(k)$  z rovnice (11)

$$\begin{aligned} u(k+1) &= (K_1 - K_1 A - K_2 C)x(k) - K_1 d + \\ &+ (1 - K_1 B)u(k) + K_2 r(k+1) \end{aligned} \quad (11c)$$

Rozšírený stavový popis uzavretého regulačného obvodu má tvar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} r(k+1) + \begin{bmatrix} I \\ -K_1 \end{bmatrix} d + \\ &+ \left\{ I + \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

kde  $I$  je jednotková matica.

Porovnaním matice uzavretého regulačného obvodu z (7) a (12)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -KA & -KB \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

môžeme dosiahnuť rovnakú dynamiku (rovnaké póly charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu), ak platí:

$$[-K_1 \quad -K_2] \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = [-KA \quad -I-KB] \quad (14)$$

Z rovnice (14) môžeme vypočítať hľadaný vektor stavového regulátora  $K_1$ , a zosilnenie  $K_2$

$$[K_1 \quad K_2] = [KA \quad I+KB] \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

Rozklad stavového regulátora  $K$  na modifikovaný stavový regulátor  $K_1$  a zosilnenie  $K_2$  zachovávajúce pôvodné dynamické vlastnosti existuje vtedy, ak existuje inverzná matica matice

$$\begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

### Implementácia modifikovaného algoritmu LQ riadenia so sumátorom do simulačného jazyka MATLAB

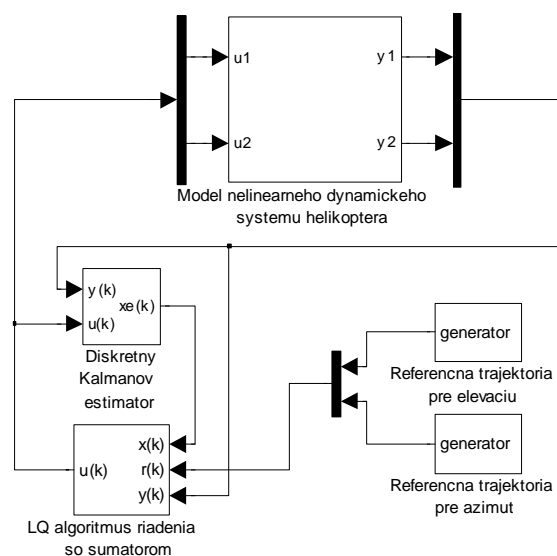
V tejto časti uvedieme modifikovaný algoritmus výpočtu akčného zásahu LQ stavového regulátora a jeho aplikáciu na riadený dynamický systém

1. **štart** simulácie,
2. výpočet matice zosilnenia  $K(k)$  rekurzívnym spôsobom pomocou Riccatiho rovníc (4) a rovnice (5), ktorý sa ukončí, ak je splnená podmienka  $|K(k) - K(k-1)| \leq \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je presnosť výpočtu,
3. **ak**  $t = t_{koniec\_sim}$  **potom** skok na krok 11,
4. načítanie vektora stavov systému  $x(k)$ , výstupov systému  $y(k)$  a riadiacej veličiny  $r(k)$ ,
5. výpočet matíc zosilnení  $K_1$ ,  $K_2$  z matice  $K(k)$  podľa vzťahu (15),
6. výpočet akčného zásahu  $u(k) = u_s(k) - K_1 x(k) + K_2 r(k)$ ,
7. výpočet výstupu sumátora  $u_s(k+1) = u_s(k) + K_2 (r(k) - y(k))$
8. výpočet matice  $K(k+1)$  podľa (4) a (5),
9. obmedzenie vypočítaného akčného zásahu  $u(k)$ , voľbou prvkov na hlavnej diagonále pre maticu  $Q$ .
10. privedenie vypočítaného akčného zásahu na vstupy systému (9), výpočet stavového vektora systému, skok na krok 3,
11. **koniec** simulácie.

## SIMULAČNÉ OVERENIE ALGORITMU OPTIMÁLNEHO RIADENIA SO SUMÁTOROM

Navrhnutý modifikovaný algoritmus optimálneho riadenia budeme aplikovať na riadenie simulačného a reálneho modelu mechanického systému – výukový model helikoptéra firmy Humusoft [2], [3].

Pre verifikáciu algoritmu optimálneho riadenia v riadiacej štruktúre na obr.2 v simulačnom jazyku Matlab/Simulink sme vytvorili model helikoptéry v stavovom priestore ako S-funkciu, pričom ako východzí nelineárny matematicko-fyzikálny model helikoptéry bol použitý model uvedený v [2] a [3], ktorého neznáme parametre boli dourčené dodatočnou experimentálnou identifikáciou [8].



**Obr. 2** Simulačná schéma riadiacej štruktúry – optimálne riadenie nelineárneho dynamického systému – helikoptéra

Mechanický systém helikoptéra patrí medzi reálne výukové modely umiestnené v laboratóriu Kybernetiky KKUI FEI TU v Košiciach za účelom testovania vlastností navrhovaných algoritmov riadenia v rámci výuky predmetov teórie riadenia a tiež v priebehu riešenia bakalárskych a diplomových prác.

Výukový model predstavuje mnohorozmerný (MIMO) nelineárny dynamický systém s tromi riadiacimi vstupmi a dvoma meranými výstupmi (obr.3). Model je zložený z tela helikoptéry, na ktorom sú dve vrtule poháňané jednosmernými motormi a z nosníka, t.j. helikoptéra predstavuje dynamický systém s dvoma stupňami voľnosti. Prvý stupeň voľnosti predstavuje pohyb v smere osi  $y$  (elevácia  $y_1$ ) a druhý stupeň predstavuje pohyb v smere osi  $x$  (azimut  $y_2$ ). Hodnoty oboch uhlov natočenia tela helikoptéry sú závislé od otáčania vrtúľ, ktorých osi sú na seba kolmé [3]. Obedva uhly

natočenia ( $\varphi$  - uhol pre eleváciu,  $\psi$  – uhol pre azimut) sú merané pomocou inkrementálnych snímačov. Motory sú riadené výkonnými zosilňovačmi, pričom napätie privedené na motory je priamo úmerné výstupu z počítača.

Model sa pripája k PC cez multifunkčnú vstupno/výstupnú kartu MF614 [4], ktorá komunikuje s počítačom pomocou funkcií Real Time Toolboxu [5].

Technické parametre reálneho mechanického systému, ktoré boli zohľadnené pri návrhu algoritmu optimálneho riadenia so sumátorom sú nasledovné:

helikoptéra sa môže pohybovať v rozmedzí  $\langle -45^\circ, 45^\circ \rangle$  pre polohu helikoptéry v elevácii  $y_1$  a v rozmedzí  $\langle -130^\circ, 130^\circ \rangle$  pre polohu helikoptéry v azimute  $y_2$ .

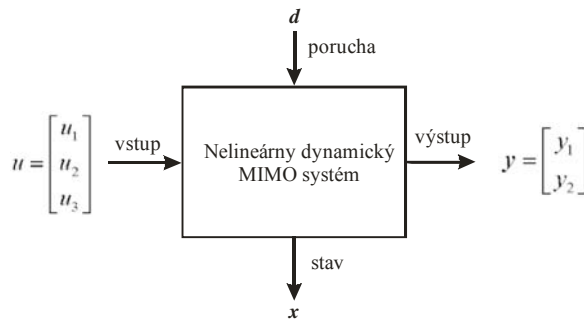
Vstupy do výukového modelu sú:

napätie hlavného motora  $u_1$  (vstup pre ovládanie hlavnej vrtule),

napätie ovplyvňujúce vedľajší motor  $u_2$  (vstup pre ovládanie pomocnej vrtule),

pričom obidva vstupy sú v rozmedzí  $\langle -1V, 1V \rangle$  [3],

(obr.3). Vstup  $u_3$  pre ovládanie polohy ťažiska mechanického systému neuvažujeme ako riadiaci vstup, t.j.  $u_3 = 0$ .



**Obr.3** Štruktúra modelu mechanického systému – helikoptéra z pohľadu vstupov/výstupov

vektor vstupu  $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k)]^T$

vektor výstupu  $y(k) = [y_1(k) \ y_2(k)]^T$

Navrhovaný algoritmus optimálneho riadenia, ktorý umožňuje kompenzáciu trvalých porúch  $d$  a sledovanie zmien riadiacej veličiny  $r$  bez trvalej regulačnej odchýlky predpokladá linearizáciu nelineárneho dynamického systému – helikoptéra v okolí pracovného bodu.

Predpokladajme, že mechanický systém – helikoptéra vieme popísať nelineárnymi diferenciálnymi rovnicami [2], [3], [8]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (16)$$

kde  $f$  a  $g$  sú nelineárne vektorové funkcie.

Ak rozvineme do Taylorovho radu vektorové funkcie  $f$  a  $g$  v pracovnom bode  $P \equiv [x_E, u_E]$ , pričom členy vyšších rádov zanedbáme dostaneme stavový

lineárny model mechanického systému:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_C x(t) + B_C u(t) \\ y(t) &= C_C x(t) + D_C u(t) \end{aligned} \quad (17)$$

kde

$$A_C = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\substack{x=x_E \\ u=u_E}} \quad B_C = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{\substack{x=x_E \\ u=u_E}}$$

pričom

Jacobian  $A_C$  je matica dynamiky systému

Jacobian  $B_C$  je matica riadenia systému.

Maticy lineárneho časovo – invariantného (Linear Time Invariant - LTI) dynamického systému (17) popisujúce model helikoptéry v stavovom priestore majú nasledujúcu štruktúru

$$A_C = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_C = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_{14} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{26} \end{bmatrix}^T$$

$$D_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pričom prvky matic  $A_C$ ,  $B_C$ ,  $C_C$ ,  $D_C$  s významom fyzikálnych parametrov sú definované v [8].

Vektor stavu  $x(t)$  a vektor vstupu  $u(t)$  (vektor riadiacich veličín) majú tvar:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t) \ x_6(t)]^T$$

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$$

kde

$x_1(t)$  – rýchlosť otáčania hlavného motora,

$x_2(t)$  – rýchlosť otáčania vedľajšieho motora,

$x_3(t)$  – rýchlosť otáčania modelu helikoptéry v elevácii,

$x_4(t)$  – poloha modelu helikoptéry v elevácii,

$x_5(t)$  – rýchlosť otáčania modelu helikoptéry v azimute,

$x_6(t)$  – poloha modelu helikoptéry v azimute,

$u_1(t)$  – riadiaci vstup pre hodnotu napätia na hlavnom motore,

$u_2(t)$  – riadiaci vstup pre hodnotu napätia na vedľajšom motore.

Snímače merajú dva stavy: stav  $x_4(t)$ , ktorý odpovedá polohe helikoptéry v elevácii v radiánoch a stav  $x_6(t)$ , ktorý odpovedá polohe helikoptéry v azimute v radiánoch, pričom medzi stavom a výstupom platí:

$$y_1 = \frac{1}{\pi} x_4(t) ; y_2 = \frac{1}{\pi} x_6(t)$$

potom

$y_1(t)$  vyjadruje polohu modelu helikoptéry v elevácii

$y_2(t)$  vyjadruje polohu modelu helikoptéry v azimute.

Pre linearizáciu nelineárneho diskretného systému budeme uvažovať pracovný bod  $P \equiv [\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E]$ , v ktorom pre polohu v elevácii  $\varphi = 0$  ( $y_1 = 0$ ) a pre polohu v azimute  $\psi = 0$  ( $y_2 = 0$ ) odpovedajú vnútorné stavy:

$$\begin{aligned} x_1 = x_{1E} = 0.5837 & \quad x_2 = x_{2E} = 0.144 & \quad x_3 = x_{3E} = 0 \\ x_4 = x_{4E} = 0 & \quad x_5 = x_{5E} = 0 & \quad x_6 = x_{6E} = 0 \end{aligned}$$

pri zvolených vstupných napätiach

$$u_1 = 0.5837V \quad u_2 = 0.144V .$$

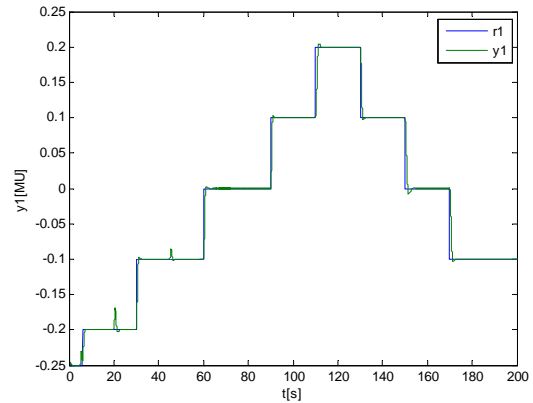
Nakoľko navrhnutý modifikovaný algoritmus optimálneho riadenia vyžaduje lineárny diskretný stavový model MIMO dynamického systému v tvare (1), získaný LTI spojitý model (17) je nutné diskretizovať v jazyku Matlab s využitím funkcie *c2d* s vhodne zvolenou periódou vzorkovania  $T_s$ .

Parametre simulácie pre modifikovaný optimálny algoritmus LQ riadenia so sumátorom pozostávajú z nasledovných vhodne zvolených hodnôt:

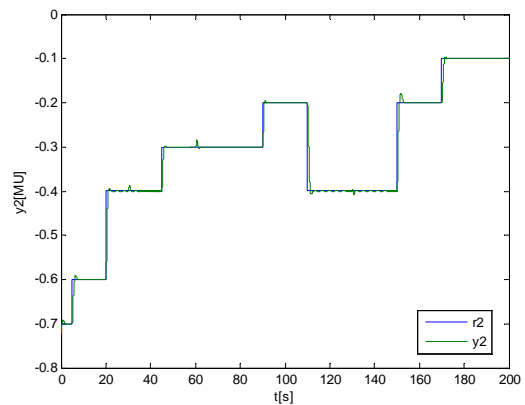
- pracovného bodu helikoptéry  $P \equiv [\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E]$ ,
- periódy vzorkovania  $T_s$ , ( $T_s = 0.01s$ ),
- koeficientov váhových matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  účelovej funkcie  $J_{LQ}$  (3), pričom vhodná voľba prvkov matice  $\mathbf{R}$  zabezpečuje ohraňenie na riadiace vstupy  $u_1(k)$  a  $u_2(k)$ .

Na obr.4 a obr.5 sú znázornené výsledky sledovania zmien hodnôt referenčných trajektórií  $r_1(t)$  a  $r_2(t)$  výstupmi nelineárneho dynamického systému  $y_1(t)$  a  $y_2(t)$ , ktoré boli získané aplikáciou modifikovaného algoritmu optimálneho riadenia so sumátorom v riadiacej štruktúre na obr.2.

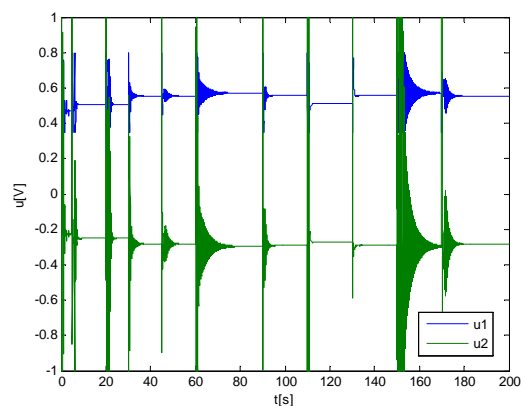
Výstupy LQ regulátora so sumátorom - optimálne riadiace signály  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  sú na obr.6.



**Obr. 4** LQ riadenie so sumátorom – sledovanie referenčnej trajektórie  $r_1(t)$  výstupom nelineárneho systému  $y_1(t)$



**Obr. 5** LQ riadenie so sumátorom – sledovanie referenčnej trajektórie  $r_2(t)$  výstupom nelineárneho systému  $y_2(t)$



**Obr. 6** Riadiace signály LQ regulátora so sumátorom –  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$

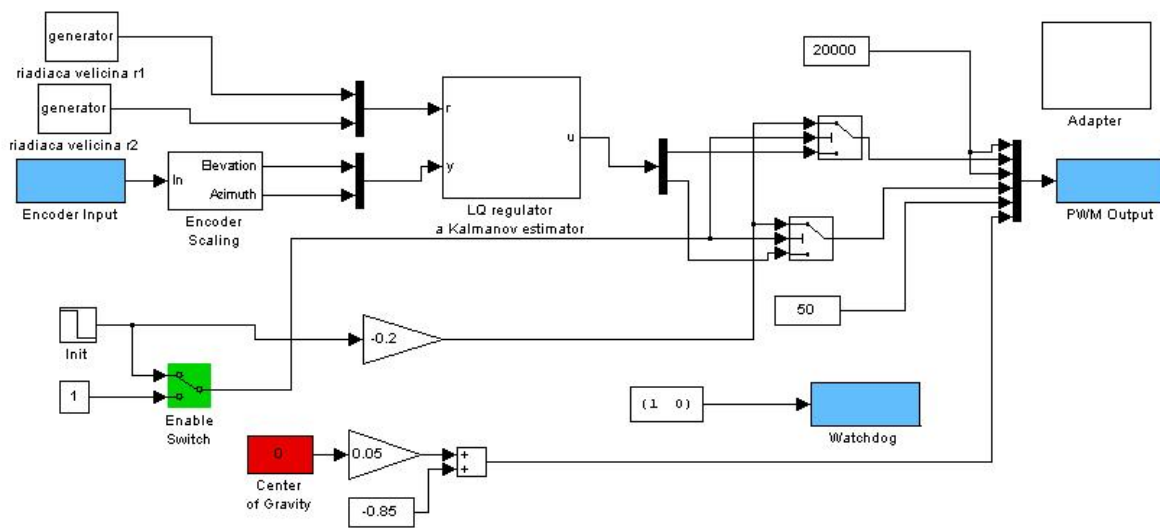
Z uvedeného vyplýva, že modifikovaný algoritmus optimálneho riadenia so sumátorom

kompenzuje trvalé poruchy a umožňuje sledovanie zmien referenčných trajektórií bez trvalej regulačnej odchýlky nie len v prípade aplikácie na linearizovaný model helikoptéry, ale aj v prípade jeho použitia na riadenie nelineárneho simulačného mechanického systému - helikoptéra (obr.4), (obr.5) pričom na odhad nemerateľných stavov stavového vektora  $x(k)$  sme použili diskretný Kalmanov estimátor ktorý bol navrhnutý pomocou funkcie Control Toolboxu *kalman* alebo *place*.

Táto skutočnosť umožňuje daný algoritmus optimálneho riadenia so sumátorom využívať aj na

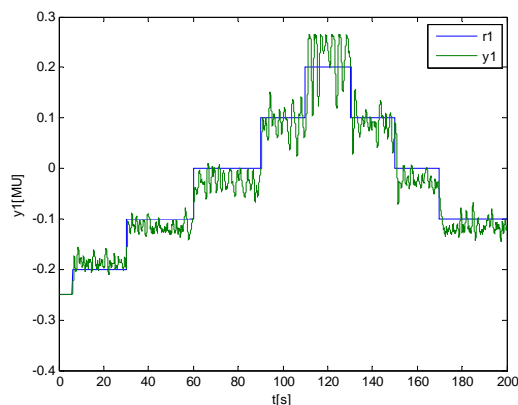
riadenie reálneho výukového modelu helikoptéra nakoľko algoritmus uvažuje s obmedzením na riadiace vstupy  $u_1(t)$  a  $u_2(t)$ .

Pre riadenie reálneho výukového modelu – helikoptéra algoritmom optimálneho riadenia so sumátorom sa využíva vstupno – výstupná karta MF614 v spolupráci s funkciami Real Time Toolboxu. Na obr.7 je uvedená schéma zapojenia pre riadenie reálneho modelu algoritmom LQ so sumátorom s využitím funkcií Real Time Toolboxu [5].

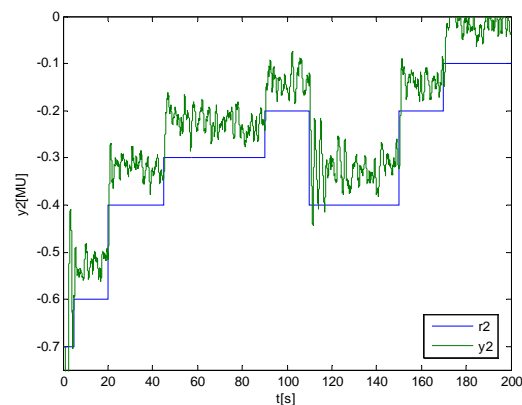


**Obr. 7** Simulačná schéma pre riadenie reálneho modelu helikoptéra

Na obr.8 a obr.9 sú znázornené výsledky sledovania zmien hodnôt referenčných trajektórií  $r_1(t)$  a  $r_2(t)$  výstupmi reálneho výukového modelu helikoptéry, ktoré boli získané aplikáciou LQ algoritmu so sumátorom.



**Obr. 8** LQ riadenie so sumátorom – graf elevácie reálneho modelu helikoptéry

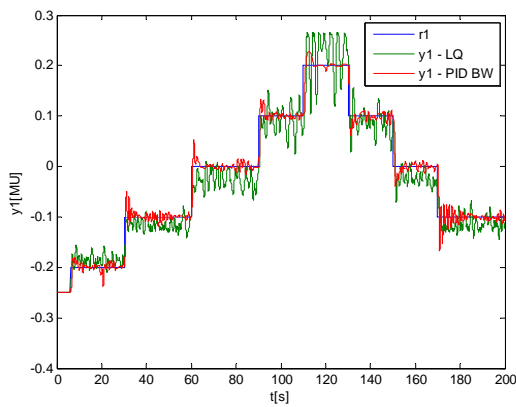


**Obr. 9** LQ riadenie so sumátorom – graf azimutu reálneho modelu helikoptéry

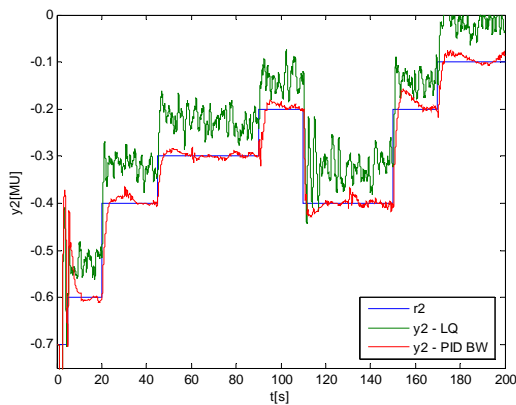
Hoci do návrhu algoritmu LQ so sumátorom sme brali do úvahy vyhovujúci test „validity“ medzi nelineárnym simulačným modelom helikoptéry a reálnym modelom helikoptéry, získané priebehy na obr.8 a obr.9 sa vyznačujú výraznejším kmitaním výukového modelu

helikoptéry v elevácii a v azimute pri sledovaní zmien referenčných trajektórií (v porovnaní s výsledkami na obr.4 a obr.5, ktoré sú získané z aplikácie LQ algoritmu riadenia na simulačnom nelineárnom modeli), ktoré mohlo byť spôsobené

- odchýlkami medzi nelineárnym simulačným a reálnym modelom helikoptéry – nepresnosti v modelovaní mechanických častí výukového modelu,
- pôsobením nemerateľných porúch okolia napr. vírenie vzduchu,
- aplikáciou algoritmu LQ na reálny dynamický systém, pričom jeho syntéza bola navrhnutá pre jeden pracovný bod.



**Obr. 10** Porovnanie LQ riadenia so sumátorom s PID syntézou – graf elevácie reálneho modelu helikoptéry



**Obr. 11** Porovnanie LQ riadenia so sumátorom s PID syntézou – graf azimutu reálneho modelu helikoptéry

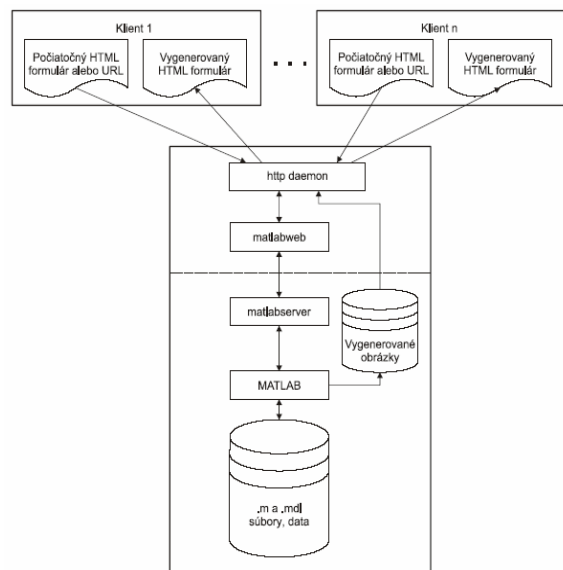
Záverom môžeme konštatovať, že algoritmus LQ so sumátorom vychádzajúci zo stavového popisu lineárneho dynamického systému helikoptéra je citlivejší na zmeny riadiacej veličiny  $r(k)$  ako algoritmus číslicového PID regulátora navrhnutý metódou štandardných tvarov - Butterworth (obr.10),

(obr.11) v aplikácii na reálny výukový model helikoptéry, kde významnú úlohu zohráva aj voľba počtu pracovných bodov pre definovaný typ algoritmu (pre číslicový PID algoritmus sme volili štyri pracovné body pre pohyb v elevácii a jeden pracovný bod pre pohyb v azimute).

## INTERNETOVÁ APLIKÁCIA LQ ALGORTMU RIADENIA PRE LAB MODEL – HELIKOPTÉRA

Pomocou technológie Matlab Web Server (MWS) [11] boli naprogramované internetové aplikácie pre prezentovanie vybraných algoritmov riadenia s aplikáciou na mechanický systém helikoptéra. Vytvorené internetové aplikácie zjednodušujú užívateľom použitie navrhnutých algoritmov (algoritmus LQ optimálneho riadenia so sumátorom – prezentovaný v tomto článku, algoritmus prediktívneho riadenia – MPC [6], algoritmus využívajúci metódu exaktnej linearizácie, číslicové PID algoritmy na báze metód: štandardné tvary Graham-Lathrop a Butterworth, umiestnenie pólov (Pole Placement Method), Naslin a fuzzy regulátory navrhnuté podľa koeficientov číslicových PID regulátorov), v riadiacich štruktúrach za účelom testovania ich vlastností v aplikácii na simulačný lineárny/nelineárny MIMO model helikoptéra aj bez vlastnej inštalácie simulačného jazyka Matlab/Simulink na klientovom PC.

Technológia MWS umožňuje užívateľom sprístupnenie vopred vytvorených aplikácií v prostredí Matlab/Simulink na webe prostredníctvom internetového prehliadača. Ako vyplýva z principiálnej schémy MWS na obr.12 MWS pozostáva z programov *matlabweb*, *matlabserver* a ich konfiguračných súborov.



**Obr. 12** Štruktúrna schéma Matlab Web Server technológie



Program *matlabserver* je TCP/IP server, ktorý riadi komunikáciu medzi webovou aplikáciou a simulačným jazykom Matlab, umožňuje spustenie m-súborov, ktoré sú zadané v skrytom poli HTML dokumentu. Program *matlabweb* je TCP/IP klient programu *matlabserver*, ktorý používa štandard CGI (Common Gateway Interface) na získanie potrebných dát z HTML dokumentu.

Navrhnuté aplikácie sú tvorené stránkami HTML, ktoré sa používajú pre sprístupnenie informácií a na komunikáciu s užívateľom a pripravenými prezentáciami v m-súboroch, čiže môžeme konštatovať, že MWS aplikácie sú kombináciou m-súborov jazyka Matlab/Simulink, HTML súborov a grafiky.

Znalosti programovania v simulačnom jazyku Matlab/Simulink a základy jazyka HTML (HyperText Markup Language) patria medzi jediné požiadavky pre vytváranie a správne fungovanie aplikácií.

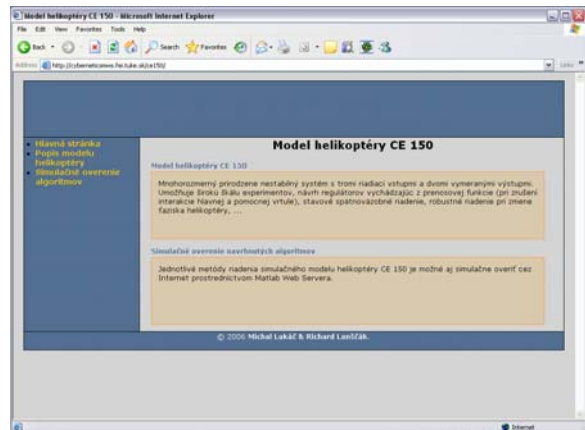
Možnosť vytvárať takéto aplikácie robí z simulačného jazyka Matlab silný nástroj pre vzdialené spracovanie a vizualizáciu dát na internete. Ďalším nástrojom, ktorý výrazne rozširuje možnosti vizualizácie 3D aplikácií prostredníctvom internetu je Virtual Reality Toolbox [12].

Virtual Reality Toolbox umožňuje obojsmernú interakciu prostredia Matlab/Simulink s prostredím virtuálnej reality pomocou formátu VRML – Virtual Reality Markup Language. Prepojenie tohto Toolboxu so simulačným modelom vytvoreným v programovom prostredí Matlab/Simulink zabezpečí, že aktuálne hodnoty z výpočtov simulácie riadenia modelu dynamického systému sa počas nej zasielajú do virtuálnej scény. Zmenou jednotlivých súradníc objektu je možné vytvoriť dojem pohybu objektu a tak lepšie vizuálne znázorniť aktuálny stav reálneho systému, ktorého model je popísaný diferenciálnymi rovnicami v simulačnom jazyku Matlab/Simulink. Virtuálny model reálneho systému je možné prepojiť pomocou Real-Time-Toolbox-u a príslušným vstupno/výstupným hardvérom aj s reálnym fyzikálnym modelom a tak vytvoriť jeho vizualizáciu na PC.

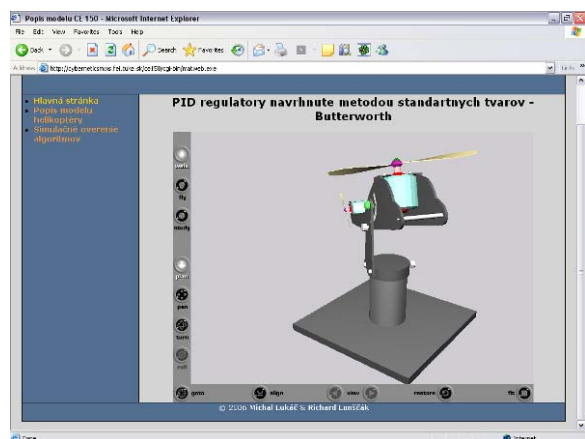
Užívateľovi stačí k práci s navrhnutou aplikáciou internetový prehliadač, v ktorom sa mu po zadaní adresy

<http://matlab.fei.tuke.sk/CE150>

zobrazí úvodné okno hlavnej stránky pre výukový model helikoptéry CE150 firmy Humusoft (obr. 13), na ktorej sa nachádza stručný popis výukového modelu a navrhnuté algoritmy riadenia spolu s možnosťou ich simulačného overenia nielen na simulačnom ale aj na virtuálnom modeli helikoptéry. Na obr.14 je znázornený virtuálny 3D model nelineárneho dynamického systému helikoptéra použitý pri internetových prezentáciách.



Obr. 13 Hlavná stránka pre výukový model helikoptéry CE 150



Obr. 14 Virtuálny model výukového modelu helikoptéry CE 150

## ZÁVER

Článok prezentuje výsledky sledovania zmien referenčných trajektórií bez regulačnej odchýlky pre eleváciu, azimut a tiež kompenzáciu trvalých porúch, ktoré boli získané aplikáciou algoritmu optimálneho riadenia so sumátorom v riadiacej štruktúre naprogramovanej v simulačnom jazyku Matlab/Simulink za podpory S - funkcií, nielen v prípade použitia na riadenie nelineárneho simulačného modelu mechanického systému, ale aj v prípade riadenia reálneho výukového modelu – helikoptéra.

Vizualizácia získaných výsledkov je zrealizovaná pomocou vytvorených internetových aplikácií s využitím technológie Matlab Web Server. Navrhnuté internetové aplikácie môžu byť využité študentami ako praktické ukážky na cvičeniach z predmetov teórie riadenia ako napr. *Úvod do nelineárnych systémov*, *Teória optimálnych a adaptívnych systémov*, *Riadenie a umelá inteligencia* prednášaných na KKUI FEI TU v Košiciach. Internetový prístup zjednodušuje verifikáciu existujúcich algoritmov za účelom testovania ich vlastností v aplikácii na riadenie

simulačného lineárneho/nelineárneho a virtuálneho modelu helikoptéry aj bez vlastnej inštalácie simulačného jazyka Matlab/Simulink na klientovom PC.

Článok obsahuje zhodnotenie praktických skúseností získaných z real-time aplikácie algoritmu optimálneho riadenia so sumátorom na nelineárny laboratórny model – helikoptéra za podpory funkcií Real Time Toolbox-u a vstupno/výstupnej karty MF614.

## POĎAKOVANIE

Článok bol podporovaný a riešený ako súčasť vedeckého projektu Vega No.1/2183/05 Grantovej Agentúry MŠ SR a SAV pod názvom “Multiagentové hybridné riadenie zložitých systémov” a projektu Kega No.3/4230/06 “Monitorovanie a supervízne riadenie simulačných procesov – Virtuálne laboratórium IRS”.

## LITERATÚRA

- [1] Havlena, V., Štecha, J. (1996) *Moderní teorie řízení*, ČVUT Ltd., Praha, ISBN 80-01-01076-7
- [2] Humusoft (1996-2002). *CE150 Helicopter Model – Educational Manual*
- [3] Humusoft (1996-2002). *CE150 Helicopter Model – User’s Manual*, revision 3.0
- [4] Humusoft (1996-2002). *MF614 Multifunction I/O Card User’s manual*
- [5] Humusoft (1996-2002). *Real Time Toolbox– User’s Manual*
- [6] Jadlovská, A. (2003). *Modelovanie a riadenie dynamických procesov s využitím neuronových sietí*, Edícia vedeckých spisov FEI TU Košice, Informatech, Ltd., 173s, ISBN 80-88 941-22-9
- [7] Krokavec, D. – Filasová, A. (2006). *Diskrétné systémy*, Elfa Ltd., Košice, ISBN 80-8086-028.
- [8] Lonščák, R. (2006). *Algoritmy riadenia virtuálnych modelov dynamických systémov s využitím Matlab Web Servera*, Diplomová práca, (doc. Ing. A. Jadlovská, PhD.-vedúca práce), FEI TU, Košice.
- [9] Modrlák, O. (2004). *Princípy analýzy a syntézy v stavovom priestore – študijné materiály*, Liberec
- [10] Sarnovský, J., Jadlovská, A., Kica P. (2005). *Teória optimálnych a adaptívnych systémov*, Elfa Ltd., 171 strán, ISBN 80-8086 -020 -3.
- [11] The MathWorks: *MATLAB Web Server – User’s Guide*.
- [12] The MathWorks: *Virtual Reality Toolbox – User’s Guide*.