

Západočeská univerzita v Plzni

**Fakulta strojní**

Studijní program: N0715A270013 Stavba energetických strojů a zařízení

Studijní specializace: N0715A270013S01 Stavba energetických strojů a zařízení

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Výpočet vodního rázu v potrubních sítích

Autor: **Pavel PECHMAN**

Vedoucí práce: **RNDr. Daniel DUDA, Ph.D.**

Konzultant: **Ing. Petr KOLLROSS, Ph.D.**

Akademický rok 2020/2021

# ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta strojní

Akademický rok: 2020/2021

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Pavel PECHMAN**  
Osobní číslo: **S19N0189P**  
Studijní program: **N0715A270013 Stavba energetických strojů a zařízení**  
Studijní obor: **Stavba energetických strojů a zařízení**  
Téma práce: **Vliv vodního rázu na potrubní síť**  
Zadávající katedra: **Katedra energetických strojů a zařízení**

### Zásady pro vypracování

1. Porovnat jednoduché teoretické přístupy.
  - 1.1. Bernoulliova rovnice pro nestacionární proudění.
  - 1.2. Žukovského teorie pro vodní ráz.
  - 1.3. Částečný vodní ráz.
2. Výpočet graficko/analytickou metodou.
3. Numerický výpočet.
4. Analýza a srovnání výsledků
5. Úvaha o rozšíření na ráz v páře.

Rozsah diplomové práce: **50 – 70 stran**  
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- Tropea, C., Yarin, A., Foss, J.F., Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics, Springer, 2007
- SHARP, B. B. a D. B. SHARP. Water hammer: practical solutions. New York: Halsted Press, 1996
- HAINDL Karel, Hydraulický ráz ve vodovodních a průmyslových potrubích, st. nakl. techn. lit., 1963

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Daniel Duda, Ph.D.**  
Katedra energetických strojů a zařízení

Konzultant diplomové práce: **Ing. Petr Kollross, Ph.D.**  
Doosan Škoda Power s.r.o.

Datum zadání diplomové práce: **31. října 2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **28. května 2021**

L.S.

---

**Doc. Ing. Milan Edl, Ph.D.**  
děkan

---

**Dr. Ing. Jaroslav Synáč**  
vedoucí katedry

## **Prohlášení o autorství**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne: .....

.....

podpis autora

## **Poděkování**

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Danielovi Dudovi Ph.D. a konzultantovi za DSPW Ing. Petrovi Kollrossovi Ph.D. za jejich podnětné rady a připomínky a za čas, který mi věnovali při řešení dané problematiky.

# ANOTAČNÍ LIST DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>AUTOR</b>	Pechman	Pavel	
<b>STUDIJNÍ OBOR</b>	N0715A270013 „Stavba energetických strojů a zařízení“		
<b>VEDOUcí PRÁCE</b>	RNDr. Duda, Ph.D.	Daniel	
<b>PRACOVÍŠTĚ</b>	ZČU - FST - KKE		
<b>DRUH PRÁCE</b>	<b>DIPLOMOVÁ</b>	<del><b>BAKALÁŘSKÁ</b></del>	<b>Nehodící se škrtněte</b>
<b>NÁZEV PRÁCE</b>	Výpočet vodního rázu v potrubních sítích		

<b>FAKULTA</b>	strojní	<b>KATEDRA</b>	KKE	<b>ROK ODEVZD.</b>	2021
----------------	---------	----------------	-----	--------------------	------

## POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)

<b>CELKEM</b>	71	<b>TEXTOVÁ ČÁST</b>	51	<b>GRAFICKÁ ČÁST</b>	1
---------------	----	---------------------	----	----------------------	---

<p style="text-align: center;"><b>STRUČNÝ POPIS (MAX 10 ŘÁDEK)</b></p> <p><b>ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL POZNATKY A PŘÍNOSY</b></p>	<p>Diplomová práce se věnuje různým způsobům výpočtu vodního rázu v potrubních sítích. Konkrétně Žukovského vztahu, graficko-analytické metodě a metodě charakteristik. Práce má za cíl prozkoumat tyto metody a jejich využití pro jednoduchý výpočet v projekční fázi návrhu potrubí.</p>
<p style="text-align: center;"><b>KLÍČOVÁ SLOVA</b></p>	<p style="text-align: center;">Vodní ráz, graficko-analytická metoda, metoda charakteristik, Žukovského vztah</p>

## SUMMARY OF DIPLOMA SHEET

<b>AUTHOR</b>	Pechman		Pavel
<b>FIELD OF STUDY</b>	N0715A270013 „Design of Power Machines and Equipment“		
<b>SUPERVISOR</b>	RNDr. Duda, Ph.D.		Daniel
<b>INSTITUTION</b>	ZČU - FST - KKE		
<b>TYPE OF WORK</b>	<b>DIPLOMA</b>	<b>BACHELOR</b>	Delete when not applicable
<b>TITLE OF THE WORK</b>	Water hammer in pipeline networks		

<b>FACULTY</b>	Mechanical Engineering	<b>DEPARTMENT</b>	Power System	<b>SUBMITTED IN</b>	2021
----------------	------------------------	-------------------	--------------	---------------------	------

### NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

<b>TOTALLY</b>	71	<b>TEXT PART</b>	51	<b>GRAPHICAL PART</b>	1
----------------	----	------------------	----	-----------------------	---

<b>BRIEF DESCRIPTION TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS</b>	The thesis focuses on different ways of calculation of water hammer occurring in pipeline networks. Specifically, it pursues the Joukowski equation, graphical water hammer and method of characteristics. Its goal is to scout these methods and their application during simplified water hammer calculation in a preliminary phase of pipeline design.
<b>KEY WORDS</b>	Water hammer, graphical water hammer, method of characteristics, Joukowski equation, fluid transients

## Obsah

Seznam obrázků .....	11
Seznam tabulek .....	13
Seznam symbolů .....	14
1. Úvod .....	16
1.1. Historie problematiky .....	16
1.2. Vodní ráz v praxi .....	16
1.2.1. Vzdušník.....	16
1.2.2. Vyrovnávací nádrž .....	17
1.2.3. Zavzdušňovací ventil.....	17
1.2.4. Pojistný ventil.....	18
1.2.5. Regulační ventil v obtoku čerpadla.....	18
2. Zjednodušený inženýrský přístup a Žukovského vztah .....	20
2.1. Žukovského vztah.....	20
2.1.1. Odvození výpočtu .....	20
2.1.2. Tuhostní součinitel $\kappa$ .....	22
2.2. Totální a částečný vodní ráz .....	23
2.2.1. Doba běhu vlny .....	23
2.2.2. Totální ráz .....	23
2.2.3. Částečný ráz .....	23
2.3. Zjednodušená inženýrská analýza .....	24
3. Graficko-analytická metoda .....	26
3.1. Diferenciální rovnice rázu .....	26
3.1.1. První diferenciální rovnice rázu .....	26
3.1.2. Druhá diferenciální rovnice rázu.....	27
3.2. Analytické řešení diferenciálních rovnic rázu .....	29
3.3. Grafické řešení Allieviho rovnic .....	32
4. Numerický výpočet .....	33
4.1. Hyperbolické PDE.....	33
4.2. Formulace problému vodního rázu.....	33
4.2.1. Eulerova rovnice .....	33
4.2.2. Rovnice kontinuity pro nekonztantní průřez potrubí.....	34
4.3. Hyperboličnost rovnic .....	35
4.4. Metoda charakteristik .....	35



5.	Zadání příkladu a prvotní výpočty .....	37
5.1.	Pokles otáček při výpadku čerpadla .....	37
5.2.	Rychlost šíření vlny .....	38
5.3.	Doba běhu vlny.....	38
5.4.	Žukovského vztah.....	38
6.	Graficko-početní metoda.....	39
6.1.	Charakteristické křivky za změněných podmínek.....	39
6.2.	Řešení .....	40
6.2.1.	Zakreslení zadání.....	40
6.2.2.	Definice časového kroku.....	41
6.2.3.	Pokles otáček čerpadla .....	42
6.2.4.	Směrnice rázových přímek.....	42
6.2.5.	Výběr počátečního bodu řešení .....	42
6.2.6.	Vykreslení rázových přímek .....	43
6.2.7.	Řešení přetržení vodního sloupce.....	44
6.2.8.	Maximální nárůst tlaku.....	46
6.2.9.	Rozbor výsledků.....	47
7.	Numerické řešení metodou charakteristik.....	49
7.1.	Hlavní funkce výpočtu.....	49
7.2.	Potrubí .....	50
7.3.	Zavzdušnění.....	51
7.4.	Rozliv.....	51
7.5.	Čerpadlo.....	51
7.6.	Nádrž .....	52
8.	Výsledky výpočtu.....	54
8.1.	Zpětná klapka – bod A.....	56
8.2.	Zavzdušnění – bod B .....	57
8.3.	Zavzdušnění – bod B' .....	58
8.4.	Rozliv – bod C.....	59
9.	Úvod do parního rázu .....	61
9.1.	Kavitace .....	61
9.2.	Slug flow.....	61
9.3.	Ráz náhlou změnou toku média.....	61
10.	Závěr.....	64

Reference.....	66
Příloha A: Řešení příkladu graficko-početní metodou .....	i
Příloha B: Kód 5: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku v místě zavzdušnění .....	ii
Příloha C: Kód 6: Hlavní funkce numerického výpočtu .....	iii

## Seznam obrázků

Obrázek 1.1: Schéma vzdušníku umístěného na potrubí .....	17
Obrázek 1.2: Schéma vodní elektrárny s vyrovnávací nádrží .....	17
Obrázek 1.3: Schéma zavzdušňovacího ventilu (převzato od Záruby [6]) .....	18
Obrázek 1.4: Schéma pojistného ventilu .....	18
Obrázek 1.5: Schéma regulačního ventilu pro řízený zpětný tok média .....	19
Obrázek 2.1: Jednoduché schéma stlačení válce kapaliny před ventilem .....	20
Obrázek 2.2: Částečný ráz s lineární změnou rychlosti proudění (vzhledem k tomu, že jde o rovnost poměrů hodnot, nezáleží na volbě jednotek, pokud pro stejnou veličinu bude jednotka zachována) .....	24
Obrázek 2.3: Příklad grafu sloužícího pro zjednodušený výpočet nárůstu tlaku při lineárním uzavření ventilu [10] .....	25
Obrázek 3.1: Schéma silových účinků působících na elementární válec kapaliny během vodního rázu .....	26
Obrázek 3.2: Znázornění změny objemu elementární částice vlivem nárůstu tlaku .....	28
Obrázek 3.3: Zobrazení pohybu rázové vlny během její první periody .....	30
Obrázek 4.1: Charakteristické křivky hyperbolické parciální diferenciální rovnice .....	36
Obrázek 5.1: Schéma řadu chladicí vody skrze kondenzátor na rozliv chladicí věže .....	37
Obrázek 6.1: Konkrétní a bezrozměrné charakteristiky čerpadla ( $H, \psi$ – dopravní výška, zátěžový součinitel; $\eta$ – účinnost; $P, P_s$ – výkon, bezrozměrný výkon; $Q, \varphi$ – objemový průtok, průtokový součinitel) .....	39
Obrázek 6.2: Křivky známé ze zadání příkladu .....	41
Obrázek 6.3: Zjednodušené schéma trasy výtlačku čerpadla pro zadaný příklad .....	41
Obrázek 6.4: Volba počátku výpočtu v momentě zavzdušnění .....	42
Obrázek 6.5: Rázové přímky pro vodní sloupec mezi čerpadlem a zavzdušňovacím ventilem .....	43
Obrázek 6.6: Rázové přímky pro vodní sloupec mezi zavzdušňovacím ventilem a rozlivem chladicí věže .....	44
Obrázek 6.7: Rozdíly průtoku v místě zavzdušňovacího ventilu .....	45
Obrázek 6.8: Získání bodů B a B' po spojení vodního sloupce .....	46
Obrázek 6.9: Znázornění maximálního nárůstu tlaku po spojení vodního sloupce .....	47
Obrázek 8.1: Graf průběhu vodního rázu ve vodorovném potrubí s ideálně fungující zpětnou klapkou a malým vlivem přetržení vodního sloupce (near downstream - poblíž konce potrubí, near pump - poblíž čerpadla) [9] .....	55
Obrázek 8.2: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný numerickým výpočtem při velikosti časového výpočetního kroku $\Delta t = 36 \text{ ms}$ .....	56

Obrázek 8.3: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný numerickým výpočtem .....	56
Obrázek 8.4: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný graficko-početní metodou.....	57
Obrázek 8.5: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B) získaný numerickým výpočtem .....	57
Obrázek 8.6: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B) získaný graficko-početní metodou .....	58
Obrázek 8.7: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B') získaný numerickým výpočtem .....	58
Obrázek 8.8: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B') získaný graficko-početní metodou .....	59
Obrázek 8.9: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě rozlivu chladicí věže (bod C) získaný numerickým výpočtem.....	59
Obrázek 8.10: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě rozlivu chladicí věže (bod C) získaný graficko-početní metodou .....	60
Obrázek 9.1: Průběh slug flow při dvoufázovém proudění .....	61
Obrázek 9.2: Závislost nárůstu tlaku na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu při konstantní rychlosti proudění (5 m/s – pro vodu i páru) a průřezu potrubí .....	62
Obrázek 9.3: Závislost nárůstu tlaku v parním potrubí na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu pro konstantní rychlost proudění (50 m/s) a průřezu potrubí .....	62
Obrázek 9.4: Závislost nárůstu tlaku ve vodovodním potrubí na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu pro konstantní rychlost proudění (3 m/s) a průřezu potrubí .	63

## Seznam tabulek

Tabulka 1: Porovnání součinitele $\kappa$ a rychlosti šíření vlny $a$ pro dva různé materiály (ocel a mosaz) při stejných rozměrech potrubí .....	22
Tabulka 2: Zadání a výsledky jednoduchého příkladu pro uzavření ventilu řešeného pomocí Žukovského vztahu pro částečný ráz a pomocí různých grafů .....	25
Tabulka 3: Vývoj objemu vzduchové dutiny po zavzdušnění potrubí.....	47
Tabulka 4: Tabulka zadání topologie trasy pro numerický výpočet .....	50

## Seznam symbolů

$A$	plocha průřezu potrubí
$a$	rychlost šíření vln včetně vlivu roztažnosti potrubí
$a_t$	rychlost zvuku v médiu
$B$	konstanta pro výpočet metodou charakteristik
$D$	vnější průměr potrubí
$D_{\check{c}}$	průměr oběžného kola čerpadla
$d$	vnitřní průměr potrubí
$d_v$	průměr otvoru zavzdušňovacího ventilu pro vstup vzduchu
$c_A$	parametr pro výpočet metodou charakteristik shrnující známé hodnoty v bodě A
$c_B$	parametr pro výpočet metodou charakteristik shrnující známé hodnoty v bodě B
$E$	modul pružnosti materiálu potrubí
$E_d$	deformační energie
$E_k$	kinetická energie
$e$	tloušťka stěny potrubí
$F$	síla, nebo Allieviho rázová funkce
$f$	Darcyův-Weissbachův třecí součinitel, nebo Allieviho rázová funkce
$GD^2$	moment setrvačnosti rotačních součástí čerpadla pro SI jednotky
$g$	tíhové zrychlení
$H$	hydrostatická výška
$H_0$	hydrostatická výška v ustáleném stavu nebo v předchozím kroku výpočtu (rovnice rázových přímk)
$H_f$	tlaková ztráta třením ve formě hydrostatické výšky
$h_f$	bezrozměrná ztráta třením
$K$	modul objemové pružnosti kapaliny pro ideálně tuhé potrubí
$K^*$	modul objemové pružnosti kapaliny pro pružné potrubí
$k$	směrnice rázových přímk
$L$	délka potrubí
$m$	hmotnost
$n$	otáčky čerpadla
$\Delta p$	změna tlaku
$\Delta p_{\check{c}}$	nárůst tlaku při částečném rázu

$\Delta p_t$	nárůst tlaku při totálním rázu
$Q$	objemový průtok
$Q_0$	objemový průtok v předchozím časovém okamžiku
$Q_v$	objemový průtok vzduchu zavzdušňovacím ventilem
$R$	konstanta pro výpočet metodou charakteristik
$R_x$	člen Navier-Stokesovy rovnice zahrnující vliv vnějších setrvačných sil
$r$	vnitřní poloměr potrubí, nebo individuální plynová konstanta (v rovnici(8.1))
$T$	doba běhu vlny, nebo teplota okolního vzduchu (v rovnici (8.1))
$t$	čas
$t_c$	poměrná doba uzavírání armatury
$t_z$	doba uzavírání armatury
$V$	objem
$\Delta V$	změna objemu
$w$	rychlost proudění média
$w_0$	rychlost proudění média v ustáleném stavu
$x$	prostorová souřadnice
$\Delta x$	stlačení ve směru $x$
$z$	vertikální prostorová souřadnice
$\beta$	tlakový spád v místě zavzdušňovacího ventilu mezi potrubím a okolní atmosférou
$\gamma$	měrná tíha
$\eta$	účinnost
$\kappa$	tuhostní součinitel
$\kappa$	Poissonovo číslo
$\lambda$	sklon charakteristických křivek hyperbolických diferenciálních rovnic
$\rho$	hustota média, nebo Allieviho potrubní parametr
$\sigma$	napětí v materiálu potrubí
$\varphi$	průtokový součinitel čerpadla
$\psi$	zátěžový součinitel čerpadla
$\omega$	úhlová rychlost
$\vartheta$	úhel sklonu potrubí pro odvození rázových rovnic

## 1. Úvod

Vodní ráz je přechodový jev zvýšeného tlaku média v potrubí a vzniká následkem náhlé změny toku média. Tato změna toku může být způsobena například náhlým uzavřením ventilu nebo přerušením činnosti čerpadel. Vlivem setrvačnosti pohybu hmoty média dochází k nárůstu (resp. poklesu) tlaku před (resp. za) ventilem (čerpádem). Změna tlaku se poté šíří jako tlaková vlna zpět potrubím a vyvolává tlakové oscilace a následně síly na elementy potrubní sítě. Cyklické působení zvýšeného namáhání na potrubí může způsobit poškození zařízení na potrubí (ventily, čerpadla atd.), uložení potrubí (závěsy) nebo spojovacích částí potrubí a jejich součástí (příruby, svarové spoje atd.).

Cílem práce je shrnout problematiku vodního rázu, popsat různé metody výpočtu, tyto aplikovat na zadaný příklad a vytvořit návod nebo prostředek pro jednoduchý orientační výpočet rázu použitelný při projekčních pracích.

### 1.1. Historie problematiky

Problematice vodního rázu se věnuje mnoho autorů a jejich článků a publikací. Jedním z prvních byl Nikolaj Žukovskij s článkem O hydraulickém rázu ve vodovodních potrubích (*Über den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren*) [1], který se zabýval určením velikostí nárůstu tlaku a rychlosti v potrubí a formuloval vztah pro totální ráz v potrubí. Ve zhruba stejné době vydal Lorenzo Allievi svojí monografii Obecná teorie proměnného pohybu vody v tlakovodních potrubích (*Teoria Generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione*) [2], ve které položil matematický základ ke svojí pozdější Teorii vodního rázu (*Theory of Water-Hammer*) [3]. V Teorii vodního rázu odvodil Allievi analytické vztahy pro řešení vodního rázu v potrubí pomocí relativních bezrozměrných hodnot a představil bezrozměrný parametr  $\rho$ , tzv. *pipeline parameter*. V roce 1955 vydal Richard Skalák svoje Rozšíření teorie vodního rázu (*An Extension of the Theory of Water Hammer*) [4]. Mnoho dalších se poté zabývalo výpočetními a praktickými problémy vodního rázu. Z českých autorů např. Haindl [5], který se věnuje hlavně graficko-analytickému řešení rázu, nebo Záruba [6] věnující se výpočtu rázu metodou charakteristik, ze zahraničních potom např. Wylie a Lyle [7] nebo Sharp [8] nebo Sharp a Sharp [9].

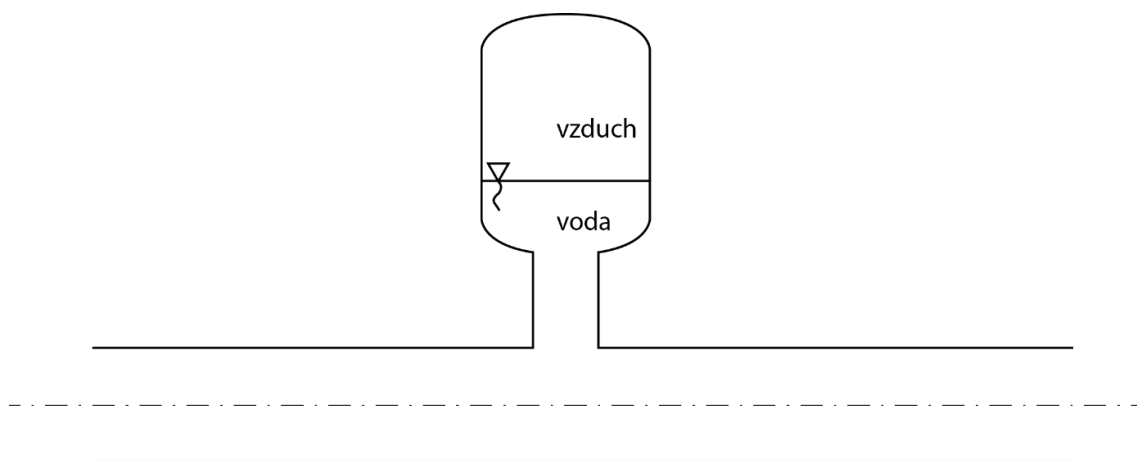
### 1.2. Vodní ráz v praxi

Tato práce se věnuje hlavně způsobům výpočtu průběhu tlaku během vodního rázu. V praxi je však takovýto výpočet pouze prvním krokem při návrhu vodovodního řadu. Výpočet by měl však dále poskytnout data pro návrh optimálního umístění prvků pro utlumení vodního rázu jako jsou vzdušníky, přepady nebo zavzdušňovací ventily a také pro dynamickou analýzu potrubí, která by měla po návrhu potrubí následovat. Následující podkapitoly se věnují zběžnému přehledu zařízení sloužících k tlumení velikosti rázů v potrubí. Většina popisů a ilustračních obrázků byla převzata od Chaudryho [10].

#### 1.2.1. Vzdušník

Vzdušník (anglicky *air chamber*) je tlaková nádoba napojená na potrubí se vzduchovým polštářem nad hladinou kapaliny uvnitř nádoby. Při nárůstu tlaku vody v potrubí se začne polštář stlačovat, čímž tlumí velikost rázů. Velkou nevýhodou vzdušníků je však potřeba mít k dispozici zdroj stlačeného vzduchu pro udržování tlaku vzduchového polštáře. Na obrázku 1.1 je vzdušník schematicky zobrazen. Záruba [6] toto zařízení označuje jako větrník a jako vzdušník označuje zavzdušňovací ventil, který bude popsán dále.

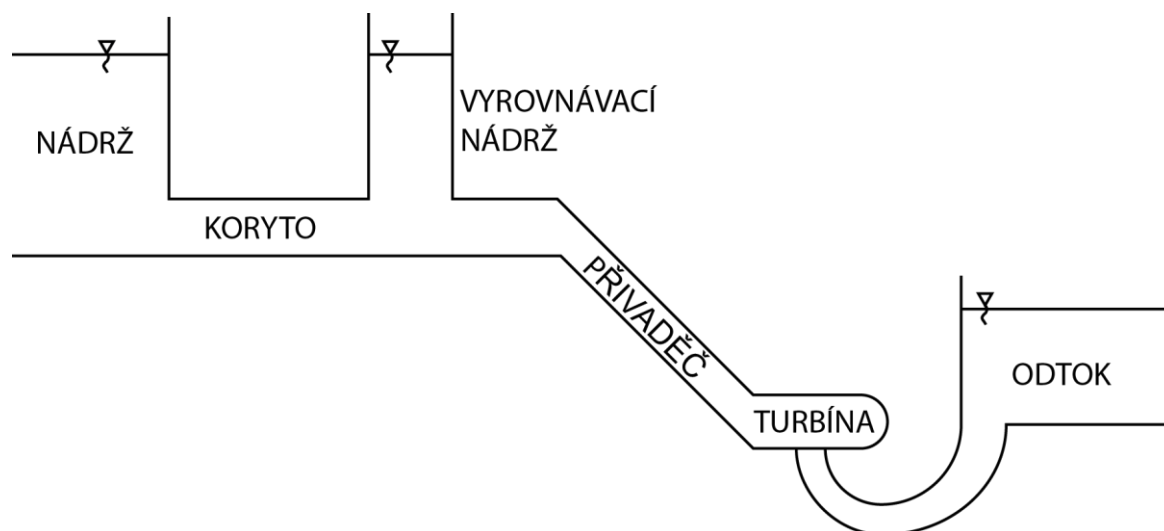




Obrázek 1.1: Schéma vzdušníku umístěného na potrubí

### 1.2.2. Vyrovnávací nádrž

Vyrovnávací nádrž (anglicky *surge tank*) je otevřená nádrž nebo vertikální potrubí, která slouží ke snížení síly vodního rázu a uchování přebytečného množství média v systému. Tyto nádrže se používají zejména u vodních elektráren. Princip vyrovnávací nádrže je, že rázové vlny se odrážejí právě od její hladiny a vodní ráz se tak prakticky omezí na úsek potrubí mezi vyrovnávací nádrží a turbínou. Vyrovnávací nádrž také slouží jako zásobník média, takže je do ní přiváděno přebytečné médium při zastavení vodní turbíny nebo by z ní bylo potřebné médium odváděno v případě např. výpadku čerpadel, čímž se zpomaluje změna toku média a snižuje velikost rázů. Vyrovnávací nádrž však musí být správně navržena a může jít o poměrně velké a drahé zařízení.



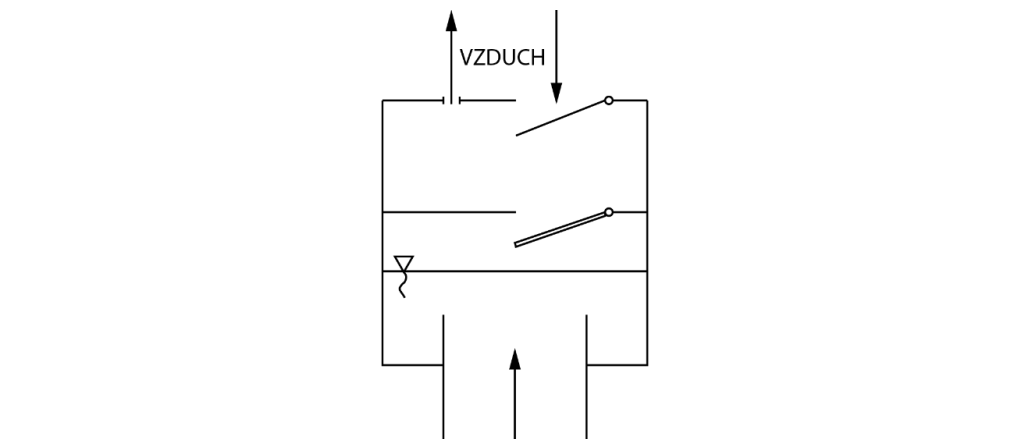
Obrázek 1.2: Schéma vodní elektrárny s vyrovnávací nádrží

Dalšími možnými zařízeními snižujícími velikost a dopady vodního rázu jsou různé typy ventilů. Zde budou popsány tři základní typy ventilů běžně používaných pro tento účel.

### 1.2.3. Zavzdušňovací ventil

Zavzdušňovací ventil zabraňuje vytvoření vakua v potrubí a následné kavitaci. V případě poklesu tlaku se otevřou jednocestné otvory ventilu a nad hladinu vody je přisáván vzduch. V případě opětovného nastolení přetlaku se uzavírá horní jednocestný otvor a vzduch uniká

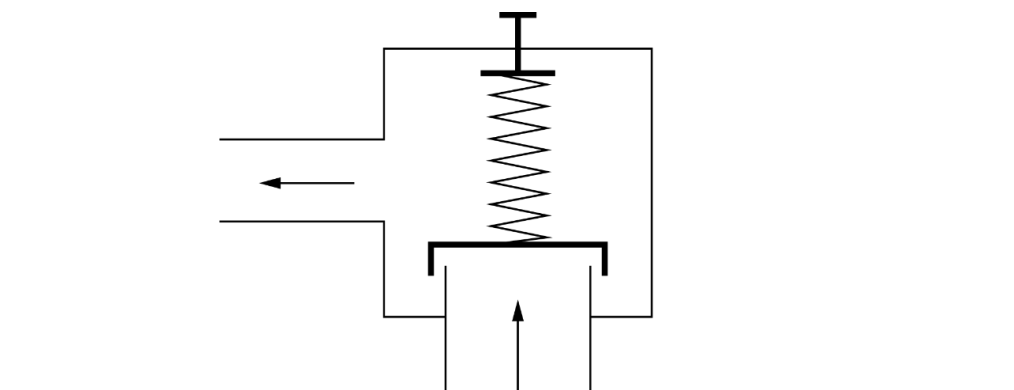
otvorem nalevo. Větší otvor pro vstup vzduchu umožňuje dostatečně rychlé zavzdušnění potrubí. Menší otvor pro výfuk vzduchu zase zpomaluje vytlačování vzduchu z potrubí. Svým odporem vytváří v zavzdušňovacím ventilu přetlak, a funguje tak částečně jako vzdušník, čímž snižuje velikost rázu po úplném vytlačení vzduchu a následném spojení vodního sloupce.



Obrázek 1.3: Schéma zavzdušňovacího ventilu (převzato od Záruby [6])

#### 1.2.4. Pojistný ventil

Pojistný ventil (anglicky *pressure relief valve*) je běžná součást jakýchkoliv tlakových zařízení. Při nárůstu tlaku v potrubí je překonána síla pružiny uzavírající ventil, přebytečné médium je odvedeno mimo natlakované potrubí a tlak v potrubí poklesne. Základní pružinový pojistný ventil zobrazený na obrázku 1.4 však uzavírá velmi rychle a náhle v momentě, kdy tlak podkročí nastavenou hodnotu. To může paradoxně vyvolávat další rázy v potrubí, které má ventil chránit. Je tak vhodnější použít pilotně ovládaný pojistný ventil s plynulejším průběhem uzavírání.

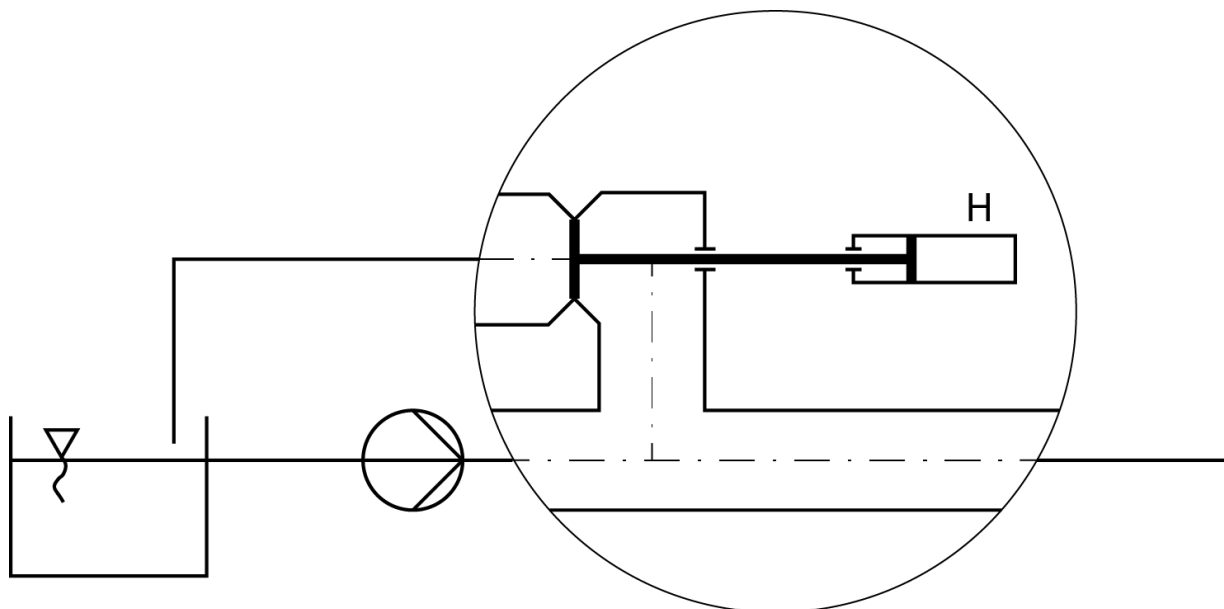


Obrázek 1.4: Schéma pojistného ventilu

#### 1.2.5. Regulační ventil v obtoku čerpadla

Regulační ventil v obtoku čerpadla napomáhá snižovat sílu vodního rázu umožněním řízeného zpětného průtoku. Jak bude blíže popsáno dále, použití samočinné zpětné klapky na výtlačku

čerpadla vede při obrácení směru toku média během vodního rázu k velkému nárůstu tlaku odpovídajícímu totálnímu rázu (taktéž vysvětleno dále). Regulační ventil v obtoku čerpadla umožňuje řídit zpětný průtok potrubím, čímž snižuje velikost vodního rázu, bez nutnosti zpětného průtoku odpojeným čerpadlem, čímž eliminuje problém přílišného roztočení čerpadla. Další podobnou možností je zařazení zpětné klapky s ovládaným dovíráním listu klapky. U této varianty je však třeba věnovat pozornost možnosti přílišného roztočení čerpadla v turbínovém režimu.



Obrázek 1.5: Schéma regulačního ventilu pro řízený zpětný tok média

## 2. Zjednodušený inženýrský přístup a Žukovského vztah

Nejjednodušší metodou výpočtu vodního rázu je tzv. Žukovského vztah, pomocí kterého lze zjistit maximální nárůst tlaku v potrubí při uzavírání nebo otevírání armatury na potrubí, která zabraňuje toku média. Při splnění podmínky dostatečně rychlého uzavření nastává tzv. *totální ráz*, který má pro daný případ konečnou maximální hodnotu. Při delší době uzavírání pak dochází pouze k úměrnému nárůstu tlaku. Tento případ se označuje jako *částečný ráz*.

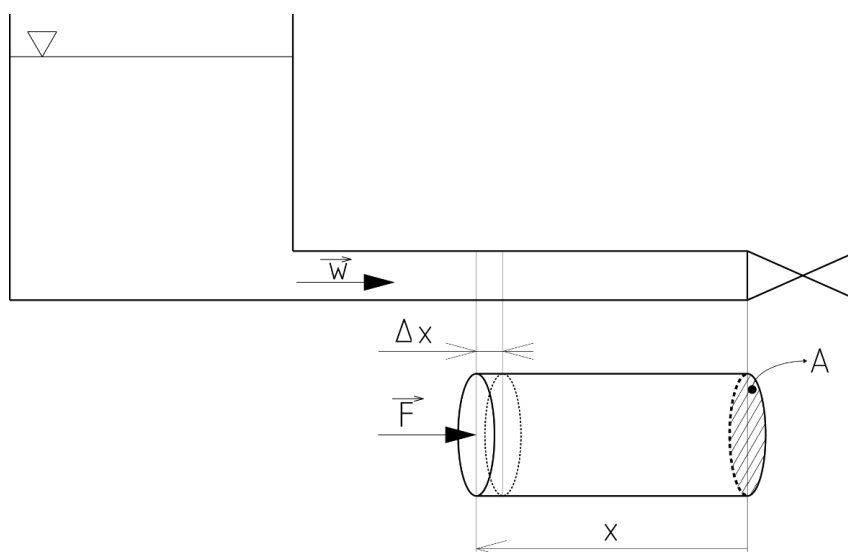
Pro předběžnou analýzu problému vodního rázu na konkrétním potrubí byly vypracovány sady grafů. Pomocí nich lze v prvotních fázích návrhu potrubí zhruba určit velikost nárůstu či poklesu tlaku vlivem jednotlivých zařízení.

### 2.1. Žukovského vztah

Metoda slouží k jednoduchému orientačnímu výpočtu maximálního nárůstu tlaku při uzavírání nebo otevírání armatur na potrubní trase. Nevhodná je naopak pro druhý typický případ vodního rázu – odstavení odstředivého čerpadla. V tomto případě nelze jednoduše určit dobu úplného zastavení toku média. K tomu totiž nedochází v okamžiku doběhu čerpadla. Kapalina potom ještě určitý čas pokračuje v pohybu vlastní setrvačností. Nevýhodou Žukovského metody je také neschopnost zjištění průběhu rázu v čase.

#### 2.1.1. Odvození výpočtu

Schématicky je děj znázorněn na obrázku 2.1. Postup výpočtu je převzat z Hydromechaniky od Noskiewiče [11].



Obrázek 2.1: Jednoduché schéma stlačení válce kapaliny před ventilem

Kinetickou energii proudící tekutiny lze vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2}mw^2. \quad (2.1)$$

Hmotnost tekutiny  $m$  lze vyjádřit pomocí hustoty média a geometrie kanálu jako

$$m = \rho \cdot Ax = \rho \cdot V, \quad (2.2)$$

kde  $A$  je plocha průřezu potrubí,  $x$  je délka válce kapaliny v potrubí a  $V$  je jeho objem. Potom tedy

$$E_k = \frac{1}{2} \rho V w^2. \quad (2.3)$$

Toto je kinetická energie válce tekutiny na úseku  $x$  ve chvíli před jeho zastavením. Kinetická energie se tedy musí přetransformovat do jiné formy, a to do formy deformační energie, která tento válec stlačí o hodnotu  $\Delta x$ .

$$E_d = \frac{1}{2} F \Delta x \quad (2.4)$$

Sílu působící na tekutinu lze vyjádřit pomocí nárůstu jejího tlaku jako

$$F = A \Delta p \quad (2.5)$$

a stlačení tekutiny  $\Delta x$  lze díky konstantní velikosti průřezu potrubí  $A$  vyjádřit pomocí změny objemu jako

$$A \Delta x = \Delta V. \quad (2.6)$$

Potom lze psát deformační energii ve tvaru

$$E_d = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V. \quad (2.7)$$

Porovnáním těchto dvou forem energie získáme

$$E_k = E_d \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2} \rho V w^2 = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V \quad (2.9)$$

Po vhodné úpravě rovnice (2.9) lze dosadit do rovnice modul objemové pružnosti kapaliny  $K$ .

$$\frac{1}{K} = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta p} \quad (2.10)$$

$$\frac{\rho w^2}{\Delta p^2} = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta p} = \frac{1}{K}. \quad (2.11)$$

Z této rovnice lze již vyjádřit  $\Delta p$ , což je nejvyšší hodnota navýšení tlaku v potrubí při hydraulickém rázu (za daných podmínek). Lze jej vyjádřit jako

$$\Delta p = \sqrt{\rho K w^2}. \quad (2.12)$$

Tlakové vlny se potrubím šíří rychlostí zvuku. Rovnice (2.12) tento parametr obsahuje implicitně. Pro jeho přímé použití lze rovnici přepsat do tvaru

$$\Delta p_t = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} w = \rho a_t w. \quad (2.13)$$

Rychlost zvuku  $a_t$  je však teoretická rychlost zvuku v dokonale tuhém potrubí (proto označení nárůstu tlaku jako  $\Delta p_t$ ). Při nárůstu tlaku v pružném potrubí se však potrubí roztáhne. Toto roztažení potrubí musí být z důvodu zachování kontinuity kompenzováno změnou rychlosti (blíže v rámci kapitoly 3.1.2 při odvození druhé rázové rovnice). Pro získání skutečné rychlosti

zvuku, a tedy i skutečného nárůstu tlaku je třeba rychlost zvuku  $a_t$  vynásobit součinitelem  $\kappa$ , který tuhost potrubí zohledňuje. Skutečný nárůst tlaku lze tedy vypočítat jako

$$\Delta p = \rho \kappa a_t w. \quad (2.14)$$

Ve formě  $p - Q$  potom

$$\Delta p = \rho \kappa a_t \frac{Q}{A}. \quad (2.15)$$

### 2.1.2. Tuhostní součinitel $\kappa$

Součinitel se může lišit pro různé materiály potrubí, tvary potrubí nebo i pro různý obsah plynu v potrubí. Zde uvedené tzv. Moensovy-Kortewegovy rovnice [12] (2.16) a (2.17) platí pro potrubí kruhového průřezu bez obsahu plynu. Hodnota a způsob výpočtu koeficientu  $\kappa$  se odvíjí od podoby konstrukce potrubí. Noskiewicz [11] pro tenkostěnná potrubí udává

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K d}{E e}}} \quad (2.16)$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti kapaliny,  $E$  je modul pružnosti materiálu potrubí,  $d$  je vnitřní průměr potrubí a  $e$  je tloušťka stěn potrubí. Pro tlustostěnná potrubí (opět dle Noskiewiče [11]) lze koeficient vypočítat jako

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{K D^2 + d^2}{E D^2 - d^2}}} \quad (2.17)$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti kapaliny,  $E$  je modul pružnosti materiálu potrubí,  $d$  je vnitřní průměr potrubí a  $D$  je vnější průměr potrubí.

Modul objemové pružnosti kapaliny  $K$  lze získat buď z příslušných tabulek (např. [11]), nebo jej lze vypočítat pomocí hustoty a rychlosti zvuku v tekutině podle rovnice

$$K = \rho a_t^2 \quad (2.18)$$

Hodnoty modulu pružnosti materiálu potrubí  $E$  jsou dobře známé a lze je dohledat v tabulkové podobě např. na webu [13]. Pro představu v tabulce 1 můžeme vidět hodnoty součinitele  $\kappa$  a rychlosti šíření vlny pro dva různé materiály při stejných rozměrech potrubí.

*Tabulka 1: Porovnání součinitele  $\kappa$  a rychlosti šíření vlny  $a$  pro dva různé materiály (ocel a mosaz) při stejných rozměrech potrubí*

	potrubí	
$D$ [m]	0,50	
$d$ [m]	0,49	
	voda	
$K$ [Pa]	2,25·10 <sup>9</sup>	
$a_t$ [m/s] *při 15 bar(a) a 25 °C	1500	
	ocel	mosaz
$E$ [Pa]	2,10·10 <sup>11</sup>	1,20·10 <sup>11</sup>

$\kappa [-]$	0,70	0,59
$a [m/s]$	1044,69	887,30

## 2.2. Totální a částečný vodní ráz

Nárůst tlaku vypočítaný podle rovnice (2.15) nebo (2.14) je maximální nárůst, který může při daných podmínkách (vlastnosti média, vlastnosti potrubí a rychlost proudění) nastat. Této hodnoty bude dosaženo za podmínky totálního rázu, kdy doba uzavření armatury  $t_z$  musí být kratší než tzv. doba běhu rázové vlny  $T$ . V opačném případě nastane částečný ráz a nárůst tlaku bude úměrný poměru doby uzavření a doby běhu vlny.

$$t_z \leq T \Rightarrow \text{totální ráz} \quad (2.19)$$

### 2.2.1. Doba běhu vlny

Doba běhu vlny  $T$  je čas, za který rázová vlna dorazí od místa uzavěru do počátku proudění (nádrž, čerpadlo, ...) a zpět. Haindl [5] jí nazývá rázovou fází nebo rázovou periodou, Allievi [3] zase dobou trvání fáze a značí ji písmenem  $\mu$  (toto označení ale spíše používá pro stanovení tlaku a rychlosti v čase při výpočtu graficko-analytickou metodou). Lze ji vypočítat jako

$$T = \frac{2L}{a}, \quad (2.20)$$

kde  $a$  je rychlost šíření vlny a  $L$  je délka potrubí.

### 2.2.2. Totální ráz

Jako totální ráz se nazývá případ, kdy při uzavírání ventilu na potrubí dojde k úplnému zastavení proudu média ještě před uplynutím doby běhu vlny (blíže v kapitole 2.2). Původní kinetická energie nyní již zastaveného proudu se následně transformuje v deformační energii, která stlačuje svůj vlastní objem. Nárůst tlaku při totálním rázu lze tedy vypočítat podle rovnice (2.15) odvozené v kapitole 2.1.1:

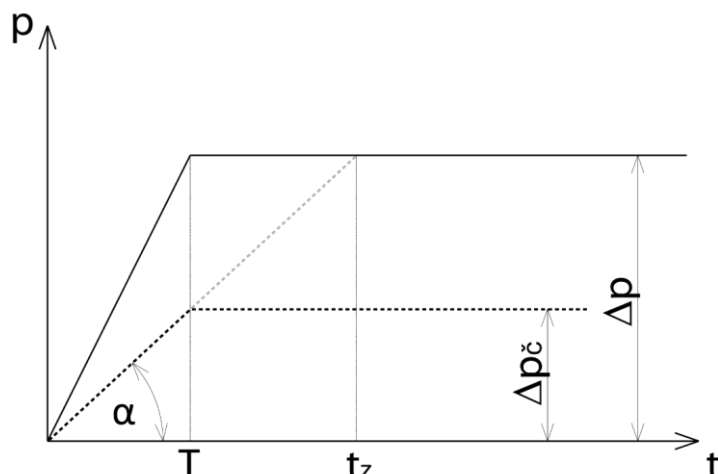
$$\Delta p = \rho \kappa a_t \frac{Q}{A}$$

V případě, že uzavírací čas bude delší než doba běhu rázové vlny, dojde k tzv. částečnému rázu. Při částečném rázu nedosáhne nárůst tlaku svojí plné hodnoty, ale pouze její úměrné části.

### 2.2.3. Částečný ráz

Velikost nárůstu tlaku při částečném rázu  $\Delta p_\zeta$  závisí na rychlosti uzavírání armatury nebo přesněji řečeno na rychlosti úplného zastavení toku média. Tlak bude potom narůstat úměrně změně (snížení) rychlosti. Jednoduchým příkladem je lineární snižování průtoku a nárůstu tlaku. Pro tento případ (viz obrázek 2.2) lze nárůst tlaku při částečném rázu získat z podobnosti trojúhelníků:

$$tg \alpha = \frac{\Delta p_\zeta}{T} = \frac{\Delta p}{t_z} \rightarrow \Delta p_\zeta = \Delta p \frac{T}{t_z}. \quad (2.21)$$



Obrázek 2.2: Částečný ráz s lineární změnou rychlosti proudění (vzhledem k tomu, že jde o rovnost poměrů hodnot, nezáleží na volbě jednotek, pokud pro stejnou veličinu bude jednotka zachována)

### 2.3. Zjednodušená inženýrská analýza

Jak bylo zmíněno, pro účely rychlé a jednoduché předběžné analýzy problému vodního rázu byly různými autory zpracovány sady grafů uvádějící většinou maximální hodnoty nárůstu tlaku zpravidla v závislosti na Allieviho potrubním parametru. Chaudry [10] uvádí přehled těchto grafů pro nejčastější případy běžných zařízení. Pro výpadek odstředivých čerpadel poskytuje bohužel pouze grafy pro čerpadla se specifickými otáčkami menšími než 49 [-] (pro jednotky SI). Chaudryho zdroj, Kinno a Kennedy [14], se nepodařilo získat. Další grafy uvádí například Parmakian [15] nebo Karney a Ruus [16] [17].

Na obrázku 2.3 je jako příklad uveden graf maximálního nárůstu tlaku při lineárním uzavírání ventilu se zanedbáním třecích ztrát v potrubí pro bod u ventilu. Na abscise je Allieviho potrubní parametr  $\rho$  (nejedná se o hustotu, ač je trochu nešťastně označen shodným symbolem), který má tvar

$$\rho = \frac{a \cdot w_0}{2 \cdot g \cdot H_0} \quad (2.22)$$

kde  $a$  je rychlost šíření vlny  $w_0$  je původní rychlost proudění v ustáleném stavu a  $H_0$  je rozdíl hydrostatických výšek zdrojové nádrže a ventilu (pro umístění ventilu na hladině  $h = 0$  m odpovídá výšce hladiny v nádrži). Na ordinále se odečte poměrný nárůst tlaku pro různé koeficienty  $k$ , které vyjadřují poměr času uzavírání armatury  $t_z$  a doby běhu vlny  $T$ . Tedy

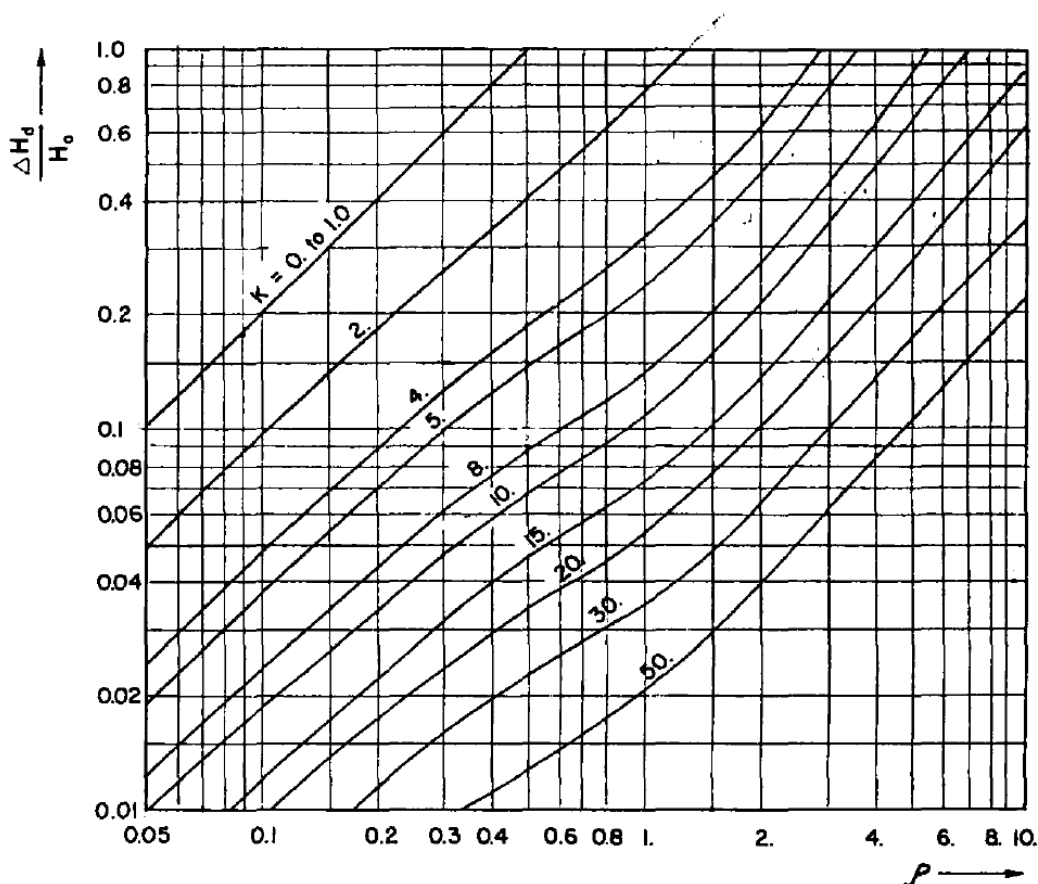
$$k = \frac{t_z}{T} = \frac{t_z \cdot a}{2 \cdot L} \quad (2.23)$$

kde  $L$  značí délku potrubí mezi nádrží a ventilem.

Výsledky získané pomocí jednotlivých grafů se však mohou značně lišit. V tabulce 2 můžeme vidět hodnoty nárůstu tlaku získané z Žukovského vztahu pro částečný ráz a z grafů uvedených různými zdroji. Bohužel se nepodařilo najít experimentální výsledky s dostatečně popsáním testovacím zařízením, aby bylo možné porovnat výsledky v tabulce 2 s naměřenými hodnotami.



V tabulce 2 jsou dvě dříve nezmíněné veličiny. Bezrozměrná ztráta třením  $h_f$  je poměr tlakové ztráty třením  $H_f$  a výšky hladiny v nádrži  $H_0$ . Poměrná doba uzavření je poměr doby uzavírání ventilu  $t_z$  a doby běhu vlny  $T$ . Obě tyto veličiny využívají ve svých grafech Karney a Ruus [16].



Obrázek 2.3: Příklad grafu sloužícího pro zjednodušený výpočet nárůstu tlaku při lineárním uzavření ventilu [10]

Tabulka 2: Zadání a výsledky jednoduchého příkladu pro uzavření ventilu řešeného pomocí Žukovského vztahu pro částečný ráz a pomocí různých grafů

vnitřní průměr potrubí $d$ [m]	0,49	třecí součinitel $f$ [-]	0,015
délka potrubí $L$ [m]	500	doba uzavření ventilu $t_z$ [s]	6
rychlost šíření vln $a$ [m/s]	1045	doba běhu vlny $T$ [s]	0,96
rychlost proudění média $w$ [m/s]	2	poměrná doba uzavření $t_c$ [-]	6,3
hustota vody $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	998	potrubní parametr $\rho$ [-]	7,1
výška hladiny v nádrži $H_0$ [m]	15	bezrozměrná ztráta třením $h_f$ [-]	0,21
$\Delta h$ [m]			
Ruus a Karney	37,5	Parmakian	29,82
Chaudry	25,5	Žukovskij	34

### 3. Graficko-analytická metoda

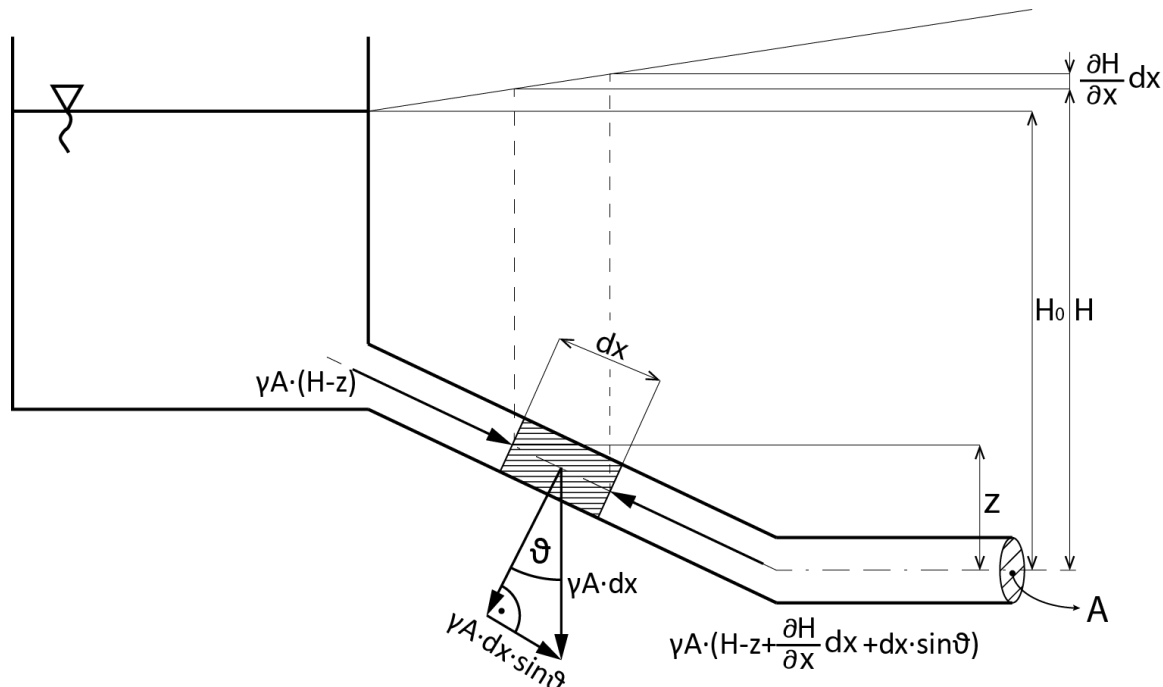
Graficko-analytická (nebo graficko-početní) metoda výpočtu vodního rázu byla velmi oblíbená v minulém století a pro některá použití možná stále je vhodným výpočetním nástrojem i dnes. Na rozdíl od Žukovského vztahu lze s její pomocí získat časový průběh tlaku a průtoku v daném bodě potrubí. Dále není závislá na strojové výpočetní kapacitě. Nejnáročnějším úkonem při výpočtu graficko-analytickou metodou je získání a zakreslení okrajových podmínek (např. charakteristických křivek čerpadla, či odporových parabol potrubní trasy). Po získání těchto závislostí a jejich zakreslení je již metoda relativně rychlá a jednoduchá. Na rozdíl od numerického výpočtu je také značně transparentní. Způsob výpočtu a odvození v této kapitole je převzato z Haindla [5].

#### 3.1. Diferenciální rovnice rázu

Řešení graficko-analytickou metodou vychází ze dvou diferenciálních rovnic odvozených v kapitolách 3.1.1 a 3.1.2. Allievi [3] představil obecné řešení těchto diferenciálních rovnic v analytickém tvaru (rovnice (3.20) a (3.21)). Tyto Allieviho rovnice se poté dají řešit buď dále analyticky jako soustava rovnic o více neznámých, nebo právě grafickou cestou v  $Q - H$  diagramu pomocí rázových přímek.

##### 3.1.1. První diferenciální rovnice rázu

Odvození první diferenciální rovnice rázu vychází z dynamické rovnováhy sil působících během rázového jevu na elementární váleček kapaliny, který se pohybuje potrubím ve směru proudění. Znázornění působících silových účinků lze vidět na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Schéma silových účinků působících na elementární váleček kapaliny během vodního rázu

Ve směru proudění působí síla způsobená hydrostatickým tlakem sloupce kapaliny v nádrži

$$\gamma A \cdot (H - z), \quad (3.1)$$

složka tíhové síly elementární částice ve směru proudění

$$\gamma A \cdot dx \cdot \sin\vartheta \quad (3.2)$$

a síla způsobená změnou rychlosti proudění vlivem vodního rázu

$$\frac{\gamma A}{g} \cdot dx \cdot \frac{dw}{dt}, \quad (3.3)$$

kde  $\gamma$  označuje specifickou tíhu kapaliny

$$\gamma = \rho g. \quad (3.4)$$

Ve směru proti proudu působí opět síla způsobená hydrostatickým sloupcem kapaliny ve stejném tvaru jako v rovnici (3.1), reakce na tíhovou sílu elementární částice ve stejném tvaru jako v rovnici (3.2) a navíc také síla způsobená nárůstem tlaku vlivem probíhajícího vodního rázu

$$\gamma A \cdot \frac{\partial H}{\partial x} dx. \quad (3.5)$$

Po zkrácení rovnice rovnováhy tedy zbyde pouze rovnost změn způsobených vodním rázem

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} - w \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3.6)$$

kde složka  $w \frac{\partial w}{\partial x}$  je oproti  $\frac{\partial w}{\partial t}$  zanedbatelná. Lze tak zapsat první Allieviho diferenciální rovnici vodního rázu ve tvaru

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Druhá diferenciální rovnice rázu

Druhá rovnice bere v úvahu změny objemu elementární částice vlivem stlačitelnosti kapaliny a roztažnosti potrubí při nárůstu tlaku během vodního rázu. Tyto změny objemu musí také odpovídat změně rychlosti. Grafické znázornění změny objemu elementární částice lze vidět na obrázku 3.2.

Vlivem nárůstu tlaku se elementární částice kapaliny stlačí, čímž dle Hookova zákona změní svůj objem podle vztahu

$$\Delta V_1 = \pi r^2 \Delta dx = \frac{\pi r^2 dx}{K} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt, \quad (3.8)$$

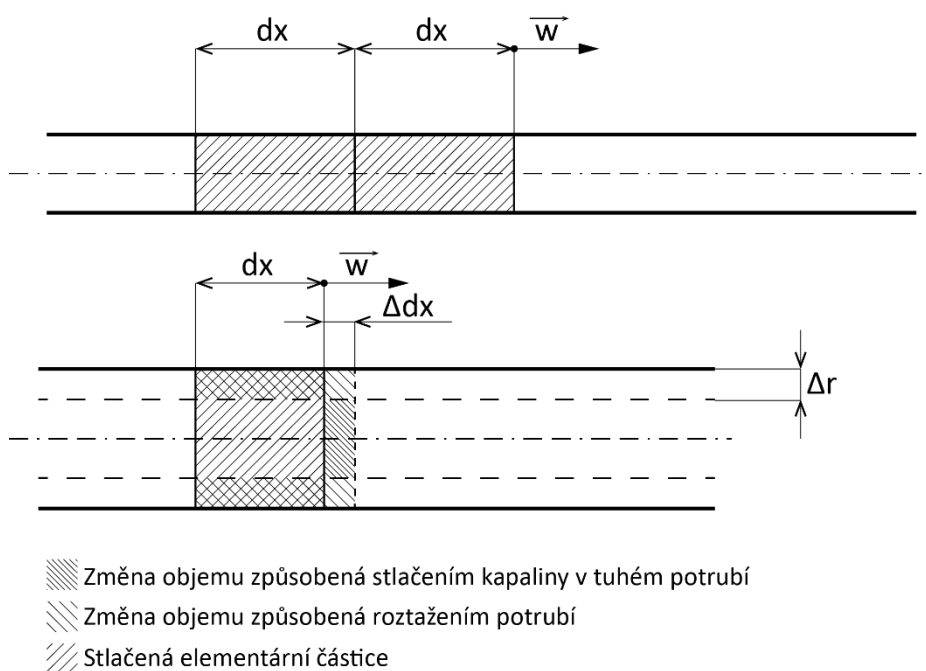
kde  $R$  je vnitřní poloměr potrubí a  $K$  označuje modul objemové pružnosti kapaliny.

Nárůstem tlaku se také zvýší napětí materiálu potrubí, které se důsledkem toho roztáhne. Obvodové napětí potrubí lze vypočítat jako

$$\sigma = p \frac{r}{e}, \quad (3.9)$$

kde  $e$  značí tloušťku potrubí. Změna napětí vlivem vodního rázu potom bude

$$\Delta \sigma = \frac{\partial p}{\partial t} dt \cdot \frac{r}{e}. \quad (3.10)$$



Obrázek 3.2: Znáznornění změny objemu elementární částice vlivem nárůstu tlaku

Tato změna způsobí roztažení potrubí v radiálním směru o objem, který následně zaplní kapalina uvnitř. Změnu objemu částice kapaliny lze tedy vypočítat jako

$$\Delta V_2 = 2\pi r \cdot \Delta r \cdot dx, \quad (3.11)$$

kde

$$2\pi \Delta r = \Delta \sigma \cdot \frac{2\pi r}{E}. \quad (3.12)$$

Dosazením rovnic (3.10) a (3.12) do (3.11) lze tedy změnu objemu vyjádřit jako

$$\Delta V_2 = \frac{\partial p}{\partial t} dt \cdot dx \cdot \frac{2\pi r^3}{E \cdot e}. \quad (3.13)$$

$E$  označuje modul pružnosti potrubí.

Posledním důsledkem stlačitelnosti kapaliny a roztažnosti potrubí na objem elementární částice je změna rychlosti pohybu částice. Vlivem stlačení urazí elementární částice za čas  $dt$  menší vzdálenost  $dx$ . Část objemu stlačené částice, která kvůli změně rychlosti zůstane na úseku  $\Delta dx$ , lze vypočítat jako

$$V_3 = \pi r^2 \cdot \Delta dx = \pi r^2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx \cdot dt. \quad (3.14)$$

Konečně, změny objemu vyvolané stlačením kapaliny ( $\Delta V_1$ ) a roztažností potrubí ( $\Delta V_2$ ) musí být pro zachování kontinuity proudění kompenzovány změnou rychlosti. Tuto změnu reprezentuje právě objem  $V_3$ :

$$V_3 = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (3.15)$$

Po rozepsání rovnice (3.15) pomocí rovnic (3.8), (3.13) a (3.14) a následném zkrácení lze získat rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\gamma}{K} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2\gamma r}{Ee} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3.16)$$

kde  $\gamma$  opět vyjadřuje specifickou tíhovou sílu kapaliny (viz rovnici (3.4)), kterou lze využít pro vyjádření tlaku pomocí hydrostatické výšky jako

$$\partial p = \gamma \cdot \partial H. \quad (3.17)$$

Z rovnice (3.16) lze také vytknout

$$\frac{\gamma}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{2r}{Ee} \right) = \frac{1}{a^2}, \quad (3.18)$$

kde  $a$  značí rychlost šíření rázové vlny. Konečná podoba druhé Allieviho diferenciální rovnice rázu bude tedy

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.19)$$

### 3.2. Analytické řešení diferenciálních rovnic rázu

Allievi [3] představil obecné řešení diferenciálních rovnic rázu (3.19) a (3.7) odvozené v předchozí kapitole v podobě

$$H = H_0 + F \left( t - \frac{x}{a} \right) + f \left( t + \frac{x}{a} \right), \quad (3.20)$$

$$w = w_0 - \frac{g}{a} \left[ F \left( t - \frac{x}{a} \right) - f \left( t + \frac{x}{a} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Funkce  $F$  a  $f$  označují integrační funkce a představují rázové vlny pohybující se potrubím ve směru toku média ( $f$ ) a proti směru toku ( $F$ ). Obě vlny se pohybují rychlostí šíření vlny  $a$  a za dobu  $t$  urazí vlna  $F$  vzdálenost  $x = a \cdot t$  a vlna  $f$  vzdálenost  $x = -a \cdot t$ . Pokud budeme uvažovat  $x = a \cdot t + konst.$ , zjistíme, že funkce  $F$  je konstantní, protože

$$F \left( t - \frac{x}{a} \right) = F \left( t - \frac{a \cdot t + konst.}{a} \right) = F(konst.) = konst. \quad (3.22)$$

To samé bude platit pro funkci  $f$ . Velikost funkce se tak v průběhu cesty potrubím nemění a informaci o změně tlaku na jednom konci potrubí donese v nezměněné podobě až na druhý konec potrubí.

Když rázová vlna dorazí na konec potrubí na straně zdroje tlaku, nastává její úplný odraz a vlna se začíná pohybovat opačným směrem k druhému konci potrubí. Platí přitom

$$F \left( t - \frac{L}{a} \right) = -f \left( t + \frac{L}{a} \right). \quad (3.23)$$

To lze odvodit z předpokladu, že hodnota tlaku ve zdroji je konstantní, a při odrazu tedy platí

$$H = H_0 + F \left( t - \frac{L}{a} \right) + f \left( t + \frac{L}{a} \right) = H_0. \quad (3.24)$$

Po úpravě tedy získáme vztah (3.23).

Při odrazu na straně zdroje tlaku platí, že odražená vlna má velikost původní vlny s obráceným znaménkem. To lze odvodit po dosazení  $t = t_i - \frac{L}{a}$ . Platí tedy

$$F\left(t_i - \frac{2L}{a}\right) = -f(t_i), \quad (3.25)$$

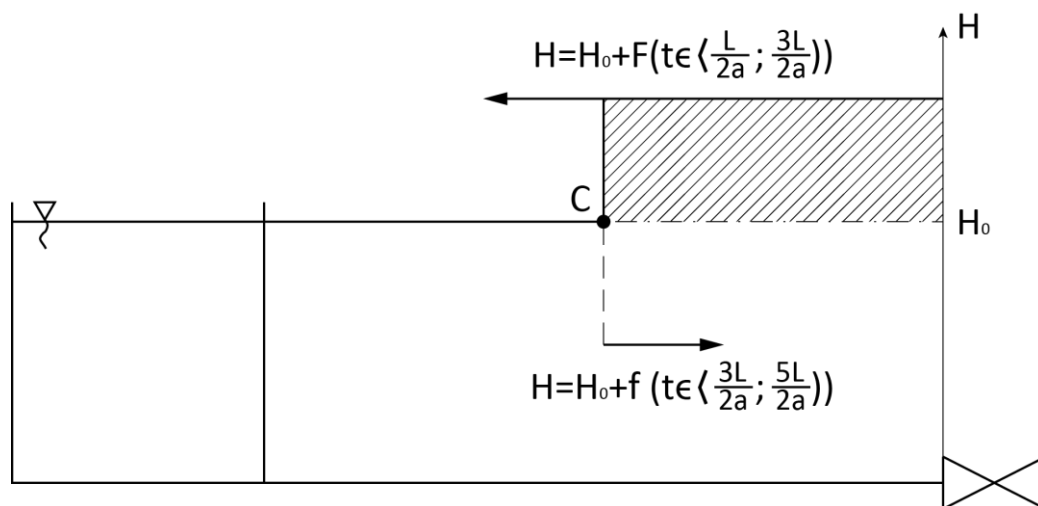
kde  $\frac{2L}{a}$  je doba běhu vlny  $T$  stejně jako ve vztahu (2.20). Pokud se použije stejný postup pro druhou okrajovou podmínku, tedy že na uzavíraném konci potrubí je v každém okamžiku rychlost proudění média rovná nule ( $w = w_0 = 0$ ), vychází, že i na tomto konci potrubí dojde k úplnému odrazu vlny, přičemž se ale nezmění znaménko. Pro uzavíraný konec potrubí tedy platí

$$F\left(t_i - \frac{2L}{a}\right) = f(t_i). \quad (3.26)$$

Na obrázku 3.3 je naznačen průběh první periody rázové vlny po uzavření ventilu a hodnoty tlaku pro bod  $C$ , který leží uprostřed potrubí ( $x_C = \frac{L}{2}$ ). V čase  $\frac{L}{2a}$  se rázová vlna  $F$  dostává do bodu  $C$ , kde zvyšuje tlak na hodnotu  $h$ . Vlna potom dále pokračuje až na druhý konec potrubí, kde se odrazí a putuje potrubím zpět a přináší do bodu  $C$  novou hodnotu tlaku plynoucí z odrazu vlny od hladiny v nádrži (podle rovnice (3.35)  $f = -H$ ). V bodě  $C$  se hodnota, kterou přinesla tato odražená vlna  $f$  sečte s hodnotou, kterou ve stejném okamžiku přinesla nová přímá vlna  $F$ . Po sečtení hodnot těchto dvou funkcí pak získáme novou hodnotu v bodě  $C$ . Bude-li hodnota nové přímé vlny  $F$  rovna hodnotě původní přímé vlny (případ totálního rázu), platí

$$H_C\left(t_i = \frac{3L}{2a}\right) = H_0 + F\left(\frac{L}{2a}\right) - F\left(\frac{L}{2a}\right) = H_0. \quad (3.27)$$

U ventilu se vlna  $f$  odrazí a bude se šířit zpět jako vlna  $F$  - tentokrát podle vztahu (3.26) beze změny znaménka a s hodnotou  $-H$ . Takto se bude celý proces opakovat.



Obrázek 3.3: Zobrazení pohybu rázové vlny během její první periody

Vezměme nyní rovnice (3.20) a (3.21) a použijme je pro dva po sobě jdoucí časové okamžiky  $i - 1$  a  $i$ , kde  $t_i - t_{i-1} = T$ .

$$H_{i-1} = H_0 + F_{i-1} + f_{i-1}, \quad (3.28)$$

$$H_i = H_0 + F_i + f_i \quad (3.29)$$

a

$$w_{i-1} = w_0 - \frac{g}{a} [F_{i-1} - f_{i-1}], \quad (3.30)$$

$$w_i = w_0 - \frac{g}{a} [F_i - f_i]. \quad (3.31)$$

Rovnice tedy budou vypadat následovně: Pro bod ležící na uzavíraném konci potrubí víme, že vlna, která do tohoto bodu dojde za dobu  $T$ , bude odražena na hladině nádrže, a bude tedy platit rovnice (3.25). Předchozí soustava rovnic bude tedy ve tvaru

$$H_{i-1} = H_0 + F_{i-1} - F_{i-2}, \quad (3.32)$$

$$H_i = H_0 + F_i - F_{i-1} \quad (3.33)$$

a

$$w_{i-1} = w_0 - \frac{g}{a} [F_{i-1} + F_{i-2}], \quad (3.34)$$

$$w_i = w_0 - \frac{g}{a} [F_i + F_{i-1}]. \quad (3.35)$$

Sečtením rovnic (3.32) a (3.33) a odečtením rovnic (3.34) a (3.35) získáme rovnice ve tvaru

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = F_i - F_{i-2} \quad (3.36)$$

$$-\frac{a}{g}(w_i - w_{i-1}) = F_i - F_{i-2}. \quad (3.37)$$

Eliminací funkcí  $F$  tak získáme finální vzorec pro analytický výpočet průběhu tlaku a rychlosti v čase ve tvaru

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = -\frac{a}{g}(w_i - w_{i-1}). \quad (3.38)$$

Rovnice (3.38) stále obsahuje dvě neznámé (konkrétně  $H_i$  a  $w_i$ ) nicméně rychlost v dalším časovém okamžiku lze vypočítat z průtokové charakteristiky ventilu, který potrubí uzavírá. Pro lineární charakteristiku lze rychlost  $w_i$  vypočítat podle rovnice

$$w_i = w_0 - \frac{t}{\tau} w_0 \quad (3.39)$$

kde  $w_0$  je ustálená rychlost proudění před začátkem rázu,  $t$  je čas uplynulý od začátku uzavírání ventilu (násobek doby běhu vlny  $T = \frac{2L}{a}$ ) a  $\tau$  je uzavírací doba ventilu. To zřejmě platí pouze za podmínky pomalého uzavírání ventilu vůči době běhu vlny, kdy  $t > \tau$  a kdy nastává pouze částečný ráz. V případě, že ventil uzavře rychleji, než stačí vlna dorazit na druhý konec potrubí a zpět, nastává totální ráz popsáný Žukovským (viz kapitolu 2.2.2). Toto je zjevné, když si uvědomíme, že v čase  $i$  bude okrajová podmínka pro průtok ventilem  $w_i = 0$ , rychlost a tlaková hladina v přechodném časovém okamžiku  $H_{i-1}$  a  $w_{i-1}$  budou mít hodnoty ustáleného režimu  $H_0$  a  $w_0$ , a tedy podle rovnice (3.38) získáme Žukovského vztah (2.14) v podobě tlakových hladin.

$$H_i + H_0 - 2H_0 = -\frac{a}{g}(0 - w_0) \rightarrow H_i - H_0 = \Delta H = \frac{aw_0}{g}. \quad (3.40)$$

### 3.3. Grafické řešení Allieviho rovnic

Grafické řešení vychází ze stejných poznatků a rovnic jako řešení analytické popsané v předchozí podkapitole. Základem budou opět Allieviho rovnice (3.20) a (3.21). Jejich vzájemným sečtením nebo odečtením lze eliminovat jednu z funkcí  $F$  nebo  $f$ . Dostaneme tedy rovnice pro přímou a odraženou vlnu v tomto pořadí ve tvarech

$$H - H_0 = \frac{a}{g}(w - w_0) + 2F\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad (3.41)$$

$$H - H_0 = -\frac{a}{g}(w - w_0) + 2f\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad (3.42)$$

kteří platí pro libovolný bod v potrubí. Po aplikaci rovnice (3.41) pro dva po sobě následující body v potrubí a následném odečtení těchto dvou rovnic jsme eliminovali funkci  $F$  a získali pro body  $A$  a  $B$  (uvažujeme bod  $A$  v místě ventilu a bod  $B$  v místě nádrže) rovnici

$$H_{A_1} - H_{B_1} = \frac{a}{g}(w_{A_1} - w_{B_1}) + (H_{A_0} - H_{B_0}). \quad (3.43)$$

Rozdíl  $w_{A_0} - w_{B_0}$  je rovný nule (za předpokladu nestlačitelnosti vody, konstantního průřezu potrubí a zachování rovnice kontinuity). Dále prozatím zanedbejme tlakové ztráty a také, pro široce rozšířenou konvenci uvádění zde používaných závislostí v grafickém prostředí v souřadnicích  $Q - h$ , uvažujme  $w = \frac{Q}{A}$ . Potom bude rovnice (3.43) ve tvaru

$$H_{A_1} - H_{B_1} = \frac{a}{gA}(Q_{A_1} - Q_{B_1}). \quad (3.44)$$

Pokud stejný postup provedeme pro rovnici (3.42), získáme rovnici

$$H_{A_1} - H_{B_1} = -\frac{a}{gA}(Q_{A_1} - Q_{B_1}). \quad (3.45)$$

Tyto dvě rovnice v souřadnicích  $Q - h$  představují přímky se směrnici  $k = \pm \frac{a}{gA}$ . Tyto přímky nazýváme rázovými přímkami [5]. Směrnice tvar rázových přímek pro dva po sobě jdoucí časové okamžiky je tedy

$$H = \pm \frac{a}{gA}(Q - Q_0) + H_0. \quad (3.46)$$



## 4. Numerický výpočet

### 4.1. Hyperbolické PDE

Všude tam, kde se projeví setrvačné síly a stlačitelnost, popisují problém hyperbolické parciální diferenciální rovnice charakterizované reálnými charakteristikami. Vlastností těchto rovnic se někdy využívá pro řešení metodou charakteristik. Odvození a výpočet byly převzaty od Žitného [18].

Jako hyperbolická se označuje parciální diferenciální rovnice (dále jen PDE z angl. *Partial Differential Equation*), pro kterou existuje dvojice reálných kořenů, a tedy i dvojice charakteristik. Koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $f$  mohou být libovolné funkce  $x$ ,  $y$  i  $\varphi$ .

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f \quad (4.1)$$

Charakteristiky jsou závislosti  $y(x)$ , jsou určeny pomocí koeficientů  $a$ ,  $b$  a  $c$  a musí splňovat rovnici (4.2).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.2)$$

Splňují-li tedy koeficienty podmínku

$$b^2 - 4ac > 0, \quad (4.3)$$

jedná se o hyperbolickou PDE.

### 4.2. Formulace problému vodního rázu

Uvažujeme potrubí, které není nekonečně tuhé a jehož průřez se může po délce potrubí měnit. Průřez je tedy funkcí  $A(t, x)$ . Dále je nutno uvažovat stlačitelnost média. Závislost tlaku média na jeho hustotě lze vyjádřit pomocí modulu objemové pružnosti (angl. *bulk modulus*)  $K$  [Pa], který je v případě nekonečně tuhého potrubí (a dalších idealizovaných podmínek) vlastností média a odpovídá teoretické rychlosti zvuku v daném médiu.

$$\frac{K}{\rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} = a_t^2 \quad (4.4)$$

Cílem úlohy bude potom stanovit průběh tlaku  $p(t, x)$  a rychlosti  $w(t, x)$  média v čase a prostoru a získat skutečný modul objemové pružnosti  $K^*$ , který zohledňuje roztažnost potrubí. Využito bude dvou základních rovnic, a to rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice.

#### 4.2.1. Eulerova rovnice

Eulerovu rovnici lze získat z Navierovy-Stokesovy rovnice zavedením zjednodušení nevazkého média  $\nu = 0$  ve tvaru

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} w = R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.5)$$

kde  $R_x$  zahrnuje vliv vnějších setrvačných sil a tlakové ztráty média. Člen  $\partial w / \partial x \cdot w$  lze zanedbat, protože

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} w = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \left(1 - \frac{w}{\partial x / \partial t}\right), \quad (4.6)$$

kde  $\partial x / \partial t$  představuje rychlost šíření vlny, která je řádově vyšší než rychlost proudění  $w$ .

Tlakové ztráty lze vyjádřit pomocí Darcyho-Weissbachova součinitele třecích ztrát  $f$  jako

$$e_z = \frac{fw|w|}{2D}. \quad (4.7)$$

Výsledný tvar bude tedy ve tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{dz}{dx} + \frac{fw|w|}{2D} = 0. \quad (4.8)$$

#### 4.2.2. Rovnice kontinuity pro nekonstantní průřez potrubí

Pro element  $dx$  se rovnice kontinuity skládá ze dvou členů - členu  $\frac{\partial}{\partial x}(\rho w A)$ , který představuje hmotnostní změnu vlivem přítoku a odtoku média, a členu  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)$  představujícího akumulaci média v elementu.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w A) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \quad (4.9)$$

Pro výpočet vodního rázu je nutné převést rovnici do tvaru zohledňujícího stlačitelnost, a tedy vztah hustoty a tlaku média (4.4). Podle využití buďto změny v prostoru, nebo v čase, můžeme psát tento vztah jako

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.10)$$

nebo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Rozepsáním rovnice (4.9) a dosazením rovnic (4.10) a (4.11) získáme

$$w \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + K \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad (4.12)$$

kde člen  $w \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right)$  lze zanedbat (Žitný [18]). Dále lze vyjádřit závislost změny průřezu potrubí na změně tlaku média jako

$$K \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \left( 1 + \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Výslednou formou rovnice kontinuity bude

$$K^* \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (4.14)$$

kde  $K^*$  značí skutečný modul objemové pružnosti, který zohledňuje roztažnost potrubí a který odpovídá skutečné rychlosti šíření tlakových vln  $a$  v daném potrubí a médiu.  $K^*$  lze tedy podle rovnic (4.14) a (4.13) vypočítat jako

$$K^* = \frac{K}{1 + \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial p}} = a^2 \rho, \quad (4.15)$$

kdy rovnost  $K^* = a^2 \rho$  je analogií k rovnici (4.4) pro tuhé potrubí a teoretickou rychlost zvuku.

### 4.3. Hyperboličnost rovnic

Derivací rovnice kontinuity (4.14) dle času a Eulerovy rovnice (4.5) dle souřadnice  $x$  a následným odečtením obou rovnic dostaneme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (4.16)$$

Pokud to samé provedeme obráceně, získáme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.17)$$

Z těchto rovnic (4.16) a (4.17) je již zřejmý jejich hyperbolický charakter. Problémem pro tyto dvě rovnice je však podoba okrajových podmínek úlohy. V případě vodního rázu jde většinou o konstantní tlak na jednom konci potrubí a náhlá změna průtoku na druhém konci. Rovnice by se tedy musely řešit společně jako soustava.

### 4.4. Metoda charakteristik

Pro výpočet takovýchto rovnic se často používá metoda charakteristik (angl. MoC – *Method of Characteristics*). Ta využívá existenci dvou reálných charakteristik, což je vlastnost specifická pro hyperbolické PDE.

Pro řešení využijeme rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici vyjádřené dříve. Pro kombinaci těchto dvou rovnic využijeme libovolnou nenulovou konstantu  $\lambda$ , kterou vynásobíme rovnici kontinuity. Následně obě rovnice sečteme. Koeficient  $K^*$  lze ještě vyjádřit jako součin kvadrátu rychlosti zvuku a hustoty média.

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f \rho w |w|}{2d} + \lambda \left( a^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.18)$$

V rámci rovnice separujeme tlak a rychlost média.

$$\lambda \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{f \rho w |w|}{2d} = 0 \quad (4.19)$$

Dále zvolíme libovolnou křivku v rovině čas-souřadnice  $x$ . Podél této křivky jsou úplné diferenciály tlaku a rychlosti.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.21)$$

U těchto dvou rovnic si lze povšimnout podobnosti se závorkami v rovnici (4.19). Pokud tedy tato křivka bude splňovat podmínku

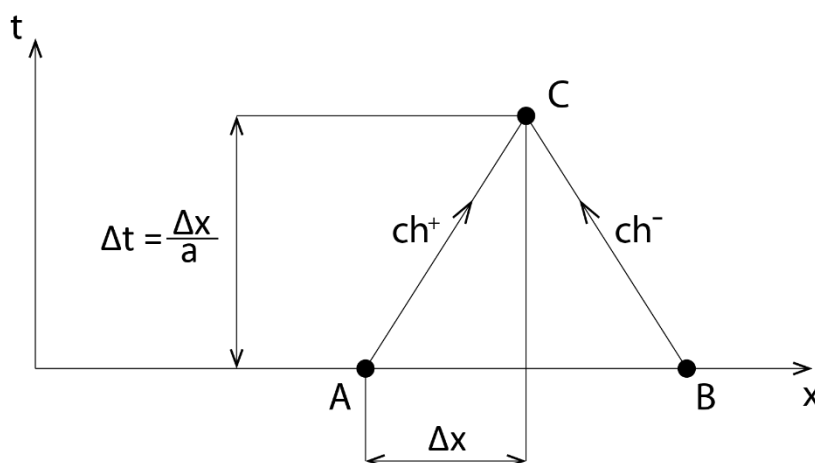
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda} \wedge \frac{dx}{dt} = \lambda a^2, \quad (4.22)$$

jedná se o charakteristiku diferenciální rovnice a tato rovnice má tvar

$$\lambda \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dw}{dt} + \frac{f\rho w|w|}{2d} = 0 \quad (4.23)$$

Rovnice ze vztahu (4.22) má ale dvě řešení, kterým také odpovídají dvě charakteristické křivky  $ch^+$  a  $ch^-$ , které jsou rozdílné svým sklonem

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{a} \quad (4.24)$$



Obrázek 4.1: Charakteristické křivky hyperbolické parciální diferenciální rovnice

Rovnici (4.23) integrujeme pro každou křivku. Časový úsek do průtnutí křivek je určen rychlostí šíření tlakové vlny (tedy rychlostí zvuku  $a$ ) a zvolené jemnosti výpočetní sítě  $\Delta x$ . Dále použijeme zjednodušení ve formě zanedbání proměnnosti třecích ztrát po délce charakteristiky. Výsledné rovnice budou potom ve tvaru

$$\frac{1}{a}(p_C - p_A) + \rho(w_C - w_A) + \frac{\Delta x f \rho}{a 2d} w_A |w_A| = 0 \quad (4.25)$$

$$-\frac{1}{a}(p_C - p_B) + \rho(w_C - w_B) + \frac{\Delta x f \rho}{a 2d} w_B |w_B| = 0 \quad (4.26)$$

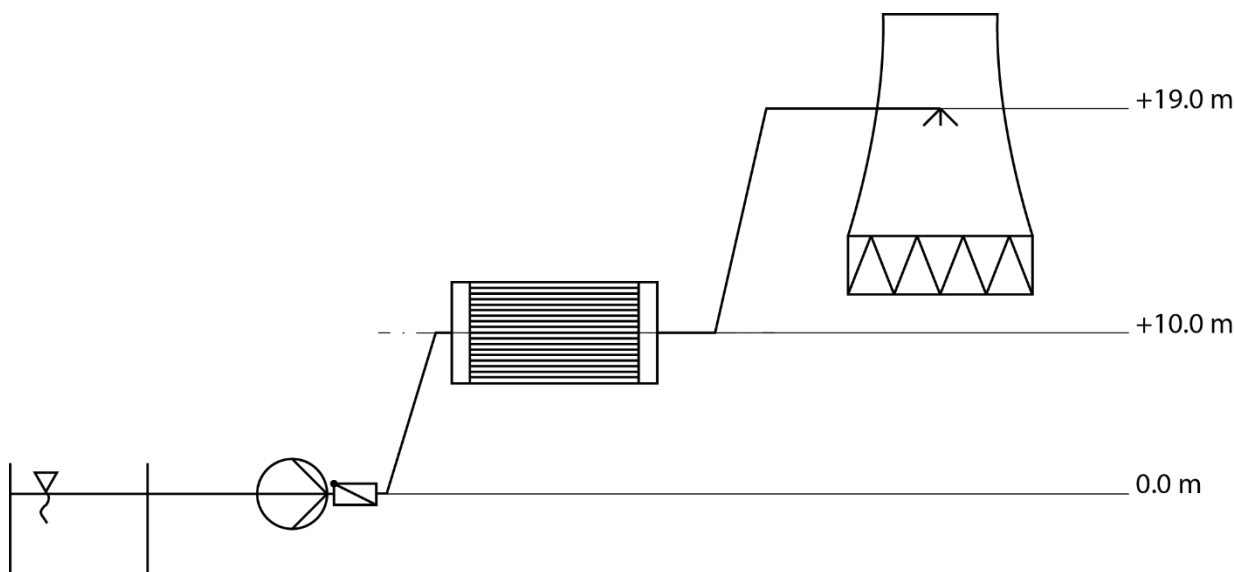
Sečtením nebo odečtením předchozích dvou rovnic pak získáme algebraické rovnice pro tlak a rychlost proudění média v explicitním tvaru:

$$w_C = \frac{1}{2} \left( \frac{p_A - p_B}{\rho a} + (w_A + w_B) - \frac{\Delta x f \rho}{a 2d} (w_A |w_A| + w_B |w_B|) \right) \quad (4.27)$$

$$p_C = \frac{a}{2} \left( \frac{p_A + p_B}{a} + \rho(w_A - w_B) + \frac{\Delta x f \rho}{a 2d} (w_B |w_B| - w_A |w_A|) \right) \quad (4.28)$$

## 5. Zadání příkladu a prvotní výpočty

Následující příklad popisuje případ výpadku čerpadla chladicí vody pro chlazení kondenzátoru parní turbíny. Voda je čerpána z bazénu chladicí věže skrz kondenzátor na rozliv chladicí věže. Pro zjednodušení je uvažováno pouze jedno čerpadlo – chladicí okruhy mají obvykle minimálně dvě. Dále je uvažována samočinná zpětná klapka na přírubě výtlačku čerpadla. To znamená, že klapka úplně uzavře ve chvíli, kdy by došlo ke zpětnému proudění. Na úrovni osy kondenzátoru je uvažován zavzdušňovací ventil jako ochrana proti nebezpečnému poklesu tlaku v potrubí a hrozící kavitaci.



Obrázek 5.1: Schéma řadu chladicí vody skrze kondenzátor na rozliv chladicí věže

Základní informací pro řešení tohoto příkladu bude rychlost, jakou budou po výpadku čerpadla klesat jeho otáčky. Od této rychlosti se bude odvíjet síla následného rázu.

### 5.1. Pokles otáček při výpadku čerpadla

Zjednodušeně řečeno, odstředivé čerpadlo předává energii svojí rotující masy čerpanému médiu. Při výpadku pohonu čerpadla se čerpadlo pohybuje pouze vlastní setrvačností a hydraulický výkon čerpaného média slouží jako brzda. Bilance energií tedy vypadá následovně:

$$\frac{P}{\eta} dt = -I\omega d\omega, \quad (5.1)$$

kde  $P$  je hydraulický výkon média,  $\eta$  je účinnost čerpadla,  $I$  je moment setrvačnosti čerpadla a jeho pohonu a  $\omega$  je úhlová rychlost čerpadla. Moment setrvačnosti točivých strojů je často výrobcem udáván pomocí hodnoty  $GD^2$  (případně  $WR^2$  pro imperiální jednotky), kde platí  $I = GD^2/4g$ . Kde  $g$  je tíhové zrychlení,  $G$  označuje hmotnost rotačních částí čerpadla a  $D$  označuje dvojnásobek tzv. *gyračního poloměru*. Hodnota  $GD^2$  se tak dá vypočítat, nicméně je běžně poskytována výrobcem již v této podobě.

Kvůli zjednodušení bude uvažován hydraulický výkon konstantní po dobu časového kroku  $\Delta t$ . Rovnice (5.1) bude po integraci ve tvaru

$$\frac{\Delta p \cdot Q}{\eta} \Delta t = -\frac{GD^2}{4g} \cdot \frac{1}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2), \quad (5.2)$$

kde  $\Delta p$  je tlakový spád na čerpadle v [Pa] a  $Q$  je objemový průtok média v [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]. Po úpravě rovnice a vyjádření úhlové rychlosti pomocí otáček stroje  $n$  získáme

$$n_2 = \sqrt{n_1^2 - \frac{7200 \cdot g \cdot \Delta p \cdot Q}{\pi^2 \cdot \eta \cdot GD^2} \Delta t}. \quad (5.3)$$

Při iteračním výpočtu jsou za  $n_1, \Delta p, Q$  dosazovány hodnoty z předchozího časového kroku, protože  $\Delta p$  a  $Q$  jsou funkcemi otáček čerpadla a snižují se s jejich poklesem.

Pro výpočet rovnice (5.3) však ještě neznáme časový úsek  $\Delta t$ . Pro výpočet metodou charakteristik je dán zvolenou hustotou výpočetní sítě (viz obrázek 4.1). Pro graficko-početní metodu lze tento úsek libovolně volit. Pro dobu běhu vlny je navíc třeba vypočítat skutečnou rychlost šíření tlakové vlny v elastickém potrubí.

## 5.2. Rychlost šíření vlny

Rychlost šíření vlny  $a$  je součinem teoretické rychlosti zvuku v médiu  $a_t$ , která je vlastností média a funkcí tlaku a teploty, a součinitele  $\kappa$ , který zohledňuje roztažnost potrubí (podrobněji v kapitole 2.1).

Teoretická rychlost zvuku ve vodě je při teplotě  $25^\circ\text{C}$  přibližně  $1500 \text{ m/s}$  a hustota  $997 \text{ kg/m}^3$ . Modul objemové pružnosti tekutiny  $K$  lze pak vypočítat z rovnice (2.18) – jeho hodnota bude  $2,24 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Při znalosti těchto hodnot lze potom vypočítat rychlost šíření vlny podle rovnice (2.17). Při zadaných rozměrech  $2 \times 0,01 \text{ m}$  a hodnotě modulu pružnosti pro ocel  $2,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  bude hodnota rychlosti šíření vln  $498 \text{ m/s}$ .

## 5.3. Doba běhu vlny

Dobu běhu vlny  $T$  lze vypočítat podle rovnice (2.20). Pro výše zadané a vypočítané hodnoty  $L = 500 \text{ m}$  a  $a = 498 \text{ m/s}$  bude doba běhu vlny  $T = 2 \text{ s}$ .

## 5.4. Žukovského vztah

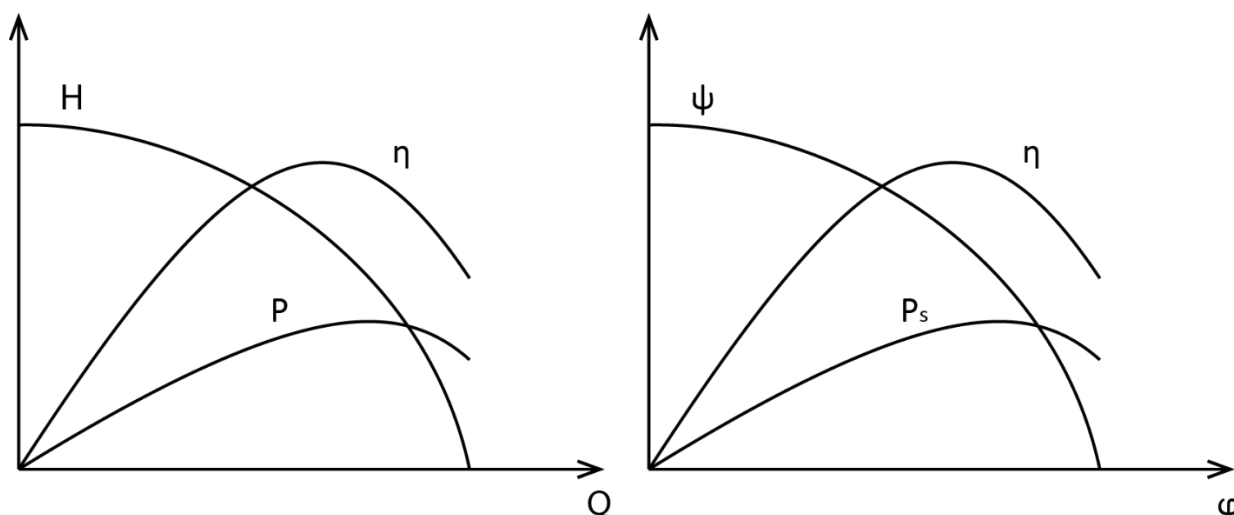
Žukovského vztah není příliš vhodný pro použití v tomto případě. Důvod je ten, že vztah (2.14), respektive (2.21) předpokládá, že potrubí bude úplně uzavřeno pro průtok média a doba uzavření je známá. V případě výpadku čerpadel toto ale neplatí. Úplné zastavení čerpadla totiž přímo neznamená zastavení toku média. Médium vlastní setrvačností pokračuje v pohybu původním směrem ještě určitý čas po zastavení čerpadla a tento čas není a priori znám.

## 6. Graficko-početní metoda

Základním podkladem pro výpočet tohoto příkladu graficko-početní metodou jsou charakteristické křivky čerpadla. Za použití určitého zjednodušení lze charakteristiku čerpadla aproximovat pomocí paraboly při znalosti alespoň tří jejích bodů při nominálních otáčkách. Tyto hodnoty jsou základním podkladem pro poptávku čerpadla a měly by být známe. Nominální otáčky čerpadla by pak měl poskytnout dodavatel na základě výběru konkrétního čerpadla pro zadané provozní body.

### 6.1. Charakteristické křivky za změněných podmínek

Pro získání charakteristiky při změněných otáčkách je nejdříve třeba tyto otáčky získat. To se provede pomocí rovnice (5.3). Následně se vypočtou provozní body změněné charakteristiky. K tomu se využije teorie podobnosti, která říká, že charakteristiky čerpadla pro různé provozní režimy jsou si podobné a odpovídají bezrozměrným charakteristikám. To znamená, že charakteristika  $H - Q$  pro jakékoliv otáčky je podobná bezrozměrné charakteristice  $\psi - \varphi$  (viz obrázek 6.1), která je pro všechny otáčky stejná.



Obrázek 6.1: Konkrétní a bezrozměrné charakteristiky čerpadla ( $H, \psi$  – dopravní výška, zátěžový součinitel;  $\eta$  – účinnost;  $P, P_s$  – výkon, bezrozměrný výkon;  $Q, \varphi$  – objemový průtok, průtokový součinitel)

Ze součinitelů  $\varphi$  a  $\psi$  lze vyjádřit vztahy pro výpočet průtoku a dopravní výšky za změněných otáček. Pro průtok za změněných otáček tedy platí

$$\varphi = \text{konst.} = \frac{Q_1}{n_1 \cdot D_{\check{c}}^3} = \frac{Q_2}{n_2 \cdot D_{\check{c}}^3} \quad (6.1)$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{n_2}{n_1} \quad (6.2)$$

a pro změněnou dopravní výšku

$$\psi = \text{konst.} = \frac{\Delta H_1}{n_1^2 \cdot D_{\check{c}}^2} = \frac{\Delta H_2}{n_2^2 \cdot D_{\check{c}}^2} \quad (6.3)$$

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2. \quad (6.4)$$

$D_{\xi}$  v rovnicích (6.1) a (6.3) je charakteristický rozměr čerpadla – typický průměr oběžného kola. Při znalosti provozních bodů za změněných otáček lze tedy znovu aproximovat charakteristiku parabolou a stejným způsobem postupovat, dokud se čerpadlo nezastaví.

Alternativně lze ze znalosti předpisu charakteristiky čerpadla sestavit jakousi fiktivní charakteristiku a s tou dále pracovat. Hočevar [19] uvádí vztah pro výpočet statického tlaku odstředivého čerpadla (rovnice (6.5) je mírně upravená pro dopravní výšku) ve tvaru

$$\Delta H = \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\pi \cdot n \cdot D_{\xi}}{60} \right)^2 - \frac{Q^2}{(\pi \cdot D_{\xi} \cdot b \cdot tg\beta)^2} \right]. \quad (6.5)$$

Z rovnice (6.5) vidíme, že při daném průtoku a otáčkách závisí dopravní výška na kvadrátu průměru oběžného kola čerpadla  $D_{\xi}$  a kvadrátu součinu  $\pi \cdot b \cdot tg\beta$ , kde  $b$  je šířka oběžného kola a  $\beta$  je výstupní úhel lopatek. Můžeme substituovat za součin např.  $x = \pi \cdot b \cdot tg\beta$  a  $x$  vyjádřit jako

$$x = \sqrt{\frac{Q^2}{D_{\xi}^2 \left[ \left( \frac{\pi \cdot n \cdot D_{\xi}}{60} \right)^2 - 2g\Delta H \right]}}. \quad (6.6)$$

Tato hodnota je pro čerpadlo konstantní, protože se jedná o součin jeho geometrických parametrů. To znamená, že při dosazení hodnot  $Q$  a  $\Delta H$  jiného bodu stejné charakteristiky, získáme stejnou hodnotu  $x$ . Pomocí tohoto předpokladu lze z rovnosti  $x_1 = x_2 = konst.$  vyjádřit  $D_{\xi}$  jako

$$D_{\xi} = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{n^2} \cdot \frac{Q_1^2 H_2 - Q_2^2 H_1}{Q_1^2 - Q_2^2}}. \quad (6.7)$$

Hodnota  $D_{\xi}$  je pak také zřejmě konstantní. Výhoda tohoto způsobu je, že po původním výpočtu hodnot  $x$  a  $D_{\xi}$  lze vykreslovat charakteristickou křivku pouze funkcí  $\Delta H = f(Q, n)$ . Také je k vykreslení charakteristiky potřeba pouze dvou bodů oproti třem, přičemž jeden bod je dán požadavkem na průtok kondenzátorem v nominálním provozu a pro druhý bod lze použít závěrný bod čerpadla. Nicméně hodnoty  $x$  a  $D_{\xi}$  jsou zde pouze jakýmsi fiktivními parametry a se skutečnými rozměry čerpadla nemají moc společného.

Přesnost a věrnost druhé metody je třeba ověřit.

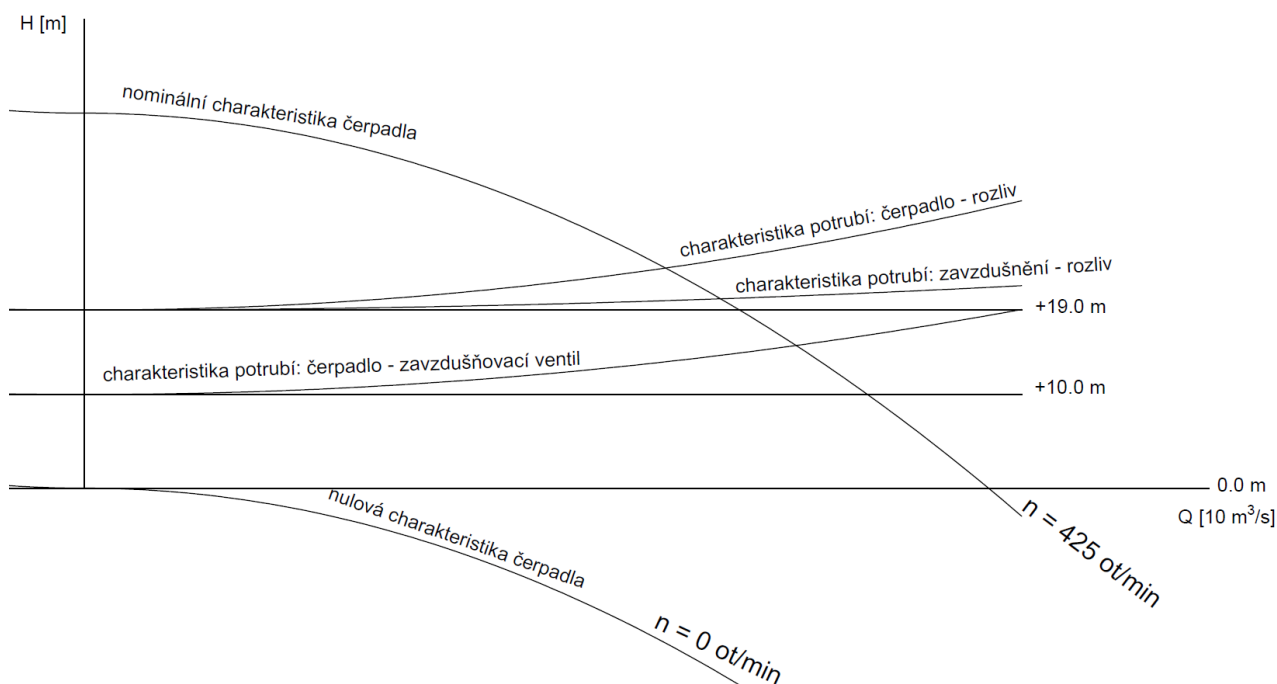
## 6.2. Řešení

V této podkapitole projdeme jednotlivé kroky řešení zadaného příkladu grafickou metodou. Kompletní řešení bude umístěno v příloze. Řešení bude provedeno pouze pro trasu výtlačku a bude se především soustředit na nárůst tlaku vlivem rozdělení a následného spojení vodního sloupce, kterýžto nárůst bude během výpadku čerpadel dominantní.

### 6.2.1. Zakreslení zadání

Prvním krokem by mělo být zakreslení křivek plynoucích ze zadání konkrétního příkladu. Obvykle to budou osy, výškové hladiny umístění jednotlivých zařízení, paraboly charakteristik potrubí pro jednotlivé úseky potrubí, odporové charakteristiky při uzavírání ventilu nebo křivka charakteristiky čerpadla pro nominální či nulové otáčky.

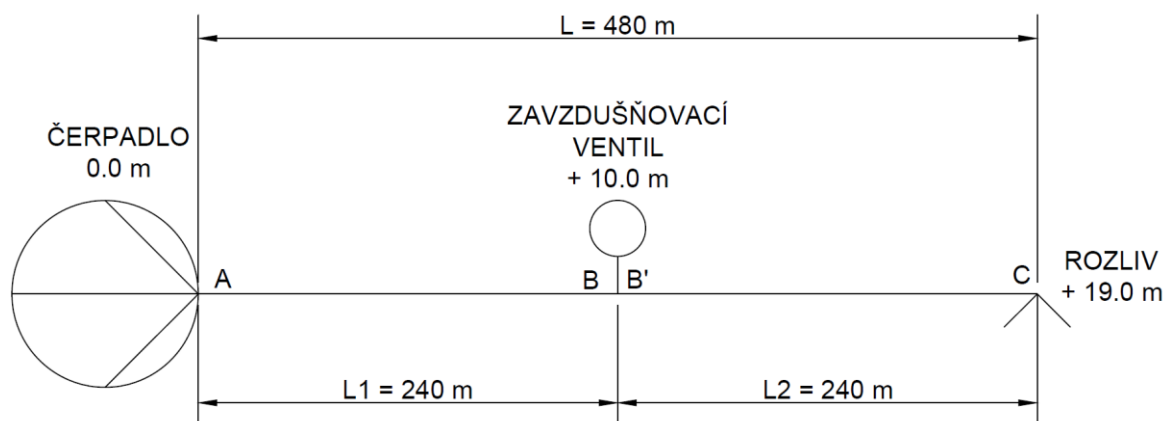




Obrázek 6.2: Okrajové podmínky příkladu

### 6.2.2. Definice časového kroku

Definice časového kroku by měla vycházet hlavně z potřeby znát hodnoty tlaku a rychlosti v daných bodech v určitém čase a z požadavku na přesnost výsledků. Příliš hrubý výpočtový časový krok může vést k poměrně velkým nepřesnostem výsledků a příliš jemný krok zase k nepřehlednosti a časové náročnosti řešení. Z důvodu, který bude vysvětlen dále v kapitole popisující výpočet přetržení sloupce, bude pro tento příklad vhodné, abychom znali v daný časový okamžik hodnoty v bodech B a B' tak, jak jsou zobrazeny na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Zjednodušené schéma trasy výtaku čerpadla pro zadaný příklad

Pro výpočet je příhodné, aby po přetržení sloupce, kdy rázy probíhají v obou částech sloupce nezávisle, byla doba oběhu vlny v obou částech stejná. Tedy to, že vlna s původem v bodě A v čase 1 dorazila do bodu B ve stejnou chvíli jako vlna s původem v bodě C v čase 1 do bodu B'. V tomto případě je zavzdušňovací ventil umístěn příhodně v polovině trasy. Pro potřeby výpočtu tak postačí časový krok odpovídající jedné čtvrtině doby oběhu vlny.

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2L}{4a} = \frac{480}{2 \cdot 498} = 0,482 \text{ s.} \quad (6.8)$$

### 6.2.3. Pokles otáček čerpadla

Pokles otáček lze vypočítat podle rovnice (5.3). Může se stát, že brzdicí moment působící na čerpadlo bude natolik velký, že se čerpadlo zastaví ještě před uplynutím zvoleného kroku  $\Delta t$ . To je také případ tohoto příkladu. Na obrázku 6.2 tedy v průběhu řešení nepřibude další křivka charakteristiky čerpadla a hodnoty tlaku a průtoku v bodě A před zastavením toku budou ležet na nulové charakteristice. Dobu zastavení čerpadla lze získat úpravou rovnice (5.3).

$$\Delta t_{stop} = (n_1^2 - n_2^2) \cdot \frac{\pi^2 \cdot \eta \cdot GD^2}{7200 \cdot g \cdot \Delta p \cdot Q} \quad (6.9)$$

kde za  $n_2$  dosadíme  $0 \text{ ot/min}$ . Získáme potom hodnotu doby do zastavení čerpadla při konstantním brzdicím momentu odpovídajícímu nominálnímu pracovnímu bodu čerpadla  $\Delta t_{stop} = 0,036 \text{ s}$ .

### 6.2.4. Směrnice rázových přímek

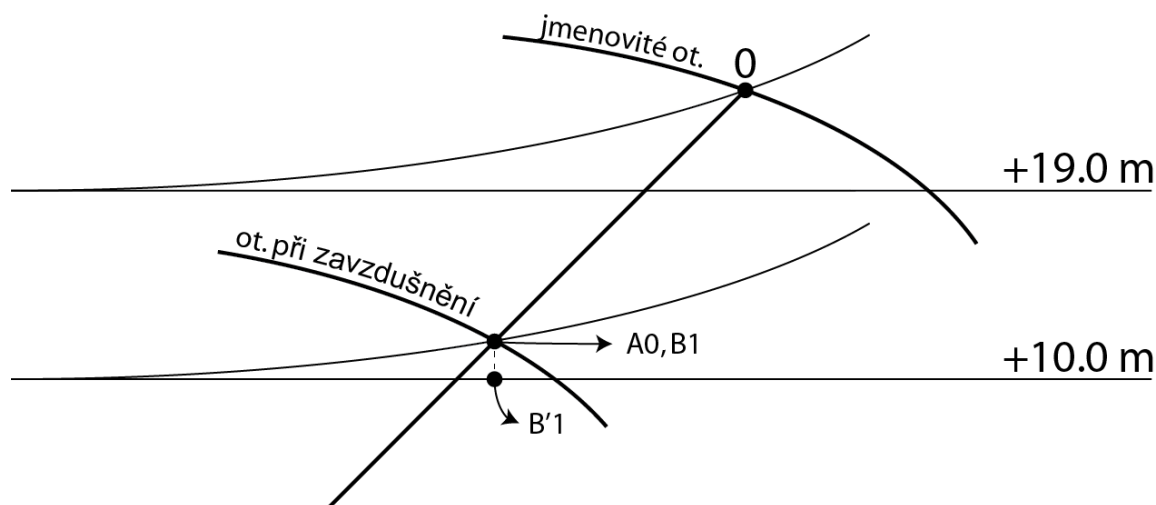
Z rovnice (3.46) víme, že rázové přímky mají směrnici

$$k = \frac{a}{gA} = \frac{498}{9,81 \cdot 3,08} = 16,49 [-]. \quad (6.10)$$

Pro grafické řešení je tak vhodné si do řešení zakreslit vzorové rázové přímky pro přímou i zpětnou vlnu jako předlohy pro rovnoběžnost přímek užívaných ve výpočtu.

### 6.2.5. Výběr počátečního bodu řešení

Jak bylo již zmíněno v úvodu kapitoly 6.2, dominantním zdrojem nárůstu tlaku bude přetržení a následné spojení vodního sloupce. Od toho by se měla také odvíjet volba počátečního bodu řešení příkladu. Nasnadě je využít časový okamžik výpadku zdroje čerpadla (na obrázku 6.4 označen bodem 0), který leží na průsečíku nominální charakteristiky čerpadla a charakteristiky potrubí mezi čerpadlem a rozlivem chladicí věže.



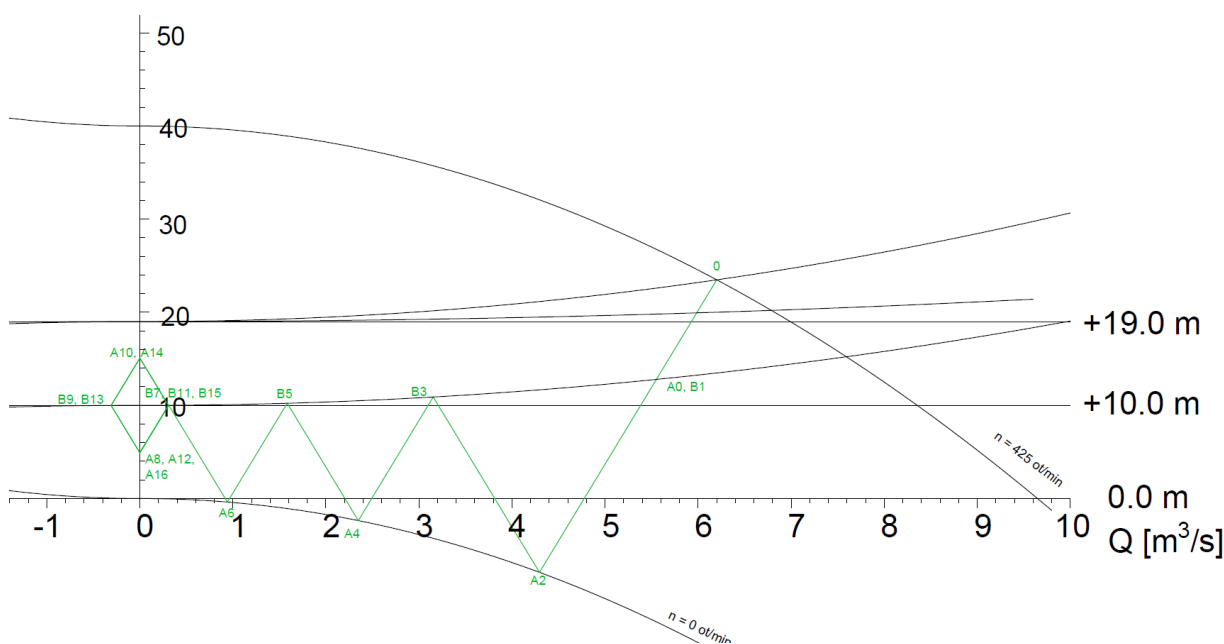
Obrázek 6.4: Volba počátku výpočtu v momentě zavzdušnění

Zde bude ale využit bod představující moment přetržení sloupce a počátek tvorby vzduchové dutiny mezi sloupci. Tento bod bude ležet na průsečíku rázové přímky vycházející z bodu 0 a charakteristiky potrubí mezi čerpadlem a zavzdušňovacím ventilem. Tento průsečík totiž představuje poslední časový okamžik, kdy je čerpadlo ještě schopné vytlačit médium na úroveň zavzdušňovacího ventilu. Poté už nemá čerpadlo dostatek energie, v místě zavzdušňovacího ventilu se vytvoří podtlak a prostor se skrz ventil zavzdušní. V čase 0 (není bod 0) je od čerpadla (bod A) tedy vyslána vlna, která ještě dorazí do bodu B v čase 1, ale dalším okamžiku již nastává zavzdušnění, a bod B' tak už bude v čase 1 ležet na úrovni hydrostatické výšky osy kondenzátoru. Tato volba počátku výpočtu umožní jednodušší výpočet velikosti vzduchové dutiny.

### 6.2.6. Vykreslení rázových přímek

V tuto chvíli máme zakresleno zadání, zobrazené výchozí body pro řešení obou vodních sloupců po přetržení a vzhledem k velmi rychlému doběhu čerpadla také všechny potřebné křivky charakteristik čerpadla. Následně tedy provedeme řešení pomocí zakreslování rázových křivek až do splnění okrajových podmínek.

Připomeňme ještě pravidla pro vykreslování rázových přímek. Pro přímou vlnu  $f$  putující ve směru toku média platí záporná směrnice  $k = -\frac{a}{g_A}$  a její rázová přímka spojuje body A v čase  $x$  a B v čase  $x+\Delta t$  (např. A1  $\rightarrow$  B2). Pro odraženou vlnu  $F$  putující proti směru toku média platí kladná směrnice  $k = \frac{a}{g_A}$  a její rázová přímka spojuje body B v čase  $x$  a A v čase  $x+\Delta t$  (např. B2  $\rightarrow$  A3). Totéž samozřejmě platí i pro druhý sloupec mezi body B' a C.



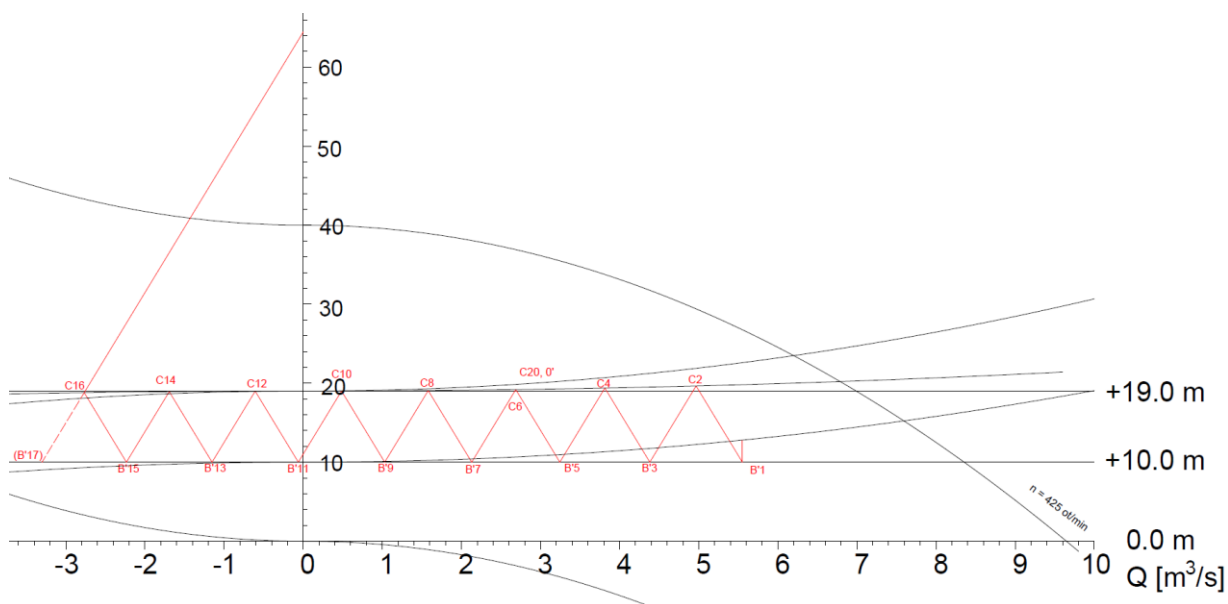
Obrázek 6.5: Rázové přímky pro vodní sloupec mezi čerpadlem a zavzdušňovacím ventilem

Pro vodní sloupec mezi čerpadlem a zavzdušňovacím ventilem platí, že bod A bude vždy ležet na křivce charakteristiky čerpadla pro otáčky v daném čase. V našem případě platí, že čerpadlo již došlo, a body A tak budou ležet na křivce charakteristiky pro nulové otáčky<sup>1</sup>. Bod B bude

<sup>1</sup> Pro korektnější výpočet by bylo vhodné získat od výrobce čerpadla skutečné křivky získané měřením. Body A by pak neměly dosáhnout křivky nulových otáček, ale otáček volně se protáčejiho čerpadla při nulovém

ležet na charakteristice potrubí mezi čerpadlem a zavzdušňovacím ventilem. Na úrovni zavzdušňovacího ventilu se totiž vytvoří hladina kvůli vzduchové dutině mezi oběma sloupci. Toto bude platit až do chvíle, kdy by rázová přímka pro vlnu putující směrem k čerpadlu měla dosáhnout záporných hodnot průtoku. V tu chvíli uzavře zpětná klapka umístěná na přírubě čerpadla a průtok v bodě A bude roven nule. Rázové přímky pro tento vodní sloupec lze vidět na obrázku 6.5.

Pro vodní sloupec mezi zavzdušňovacím ventilem a rozlivem chladicí věže platí, že bod B' bude ležet na hladině +10,0 m (zanedbáváme tlakové ztráty ventilu), která označuje bod v místě zavzdušňovacího ventilu při atmosférickém tlaku – platí při zavzdušněném potrubí. Bod C pak bude ležet na charakteristice potrubí mezi místem zavzdušnění a rozlivem (tato charakteristika je oproti té původní pozvolnější, protože voda již neprotéká kondenzátorem s významnou tlakovou ztrátou). Významnými body na obrázku 6.6, který zobrazuje řešení pro tento sloupec, jsou body B'15, C16, (B'17) a A18. Tyto totiž představují již zmíněný dominantní nárůst tlaku při spojení vodního sloupce. Způsob zjištění okamžiku spojení sloupce bude popsán v další podkapitole.



Obrázek 6.6: Rázové přímky pro vodní sloupec mezi zavzdušňovacím ventilem a rozlivem chladicí věže

### 6.2.7. Řešení přetržení vodního sloupce

K přetržení vodního sloupce dojde následkem podtlaku, který během výpadku čerpadel vznikne v místě zavzdušňovacího ventilu. Aby se zabránilo dalšímu poklesu tlaku a následné kavitaci, zavzdušňovací ventil umožní tok vzduchu z okolí dovnitř potrubí. Dokud podtlak v místě ventilu trvá, přisává se více a více vzduchu a narůstá objem vzduchové dutiny mezi oběma sloupci vody v potrubí.

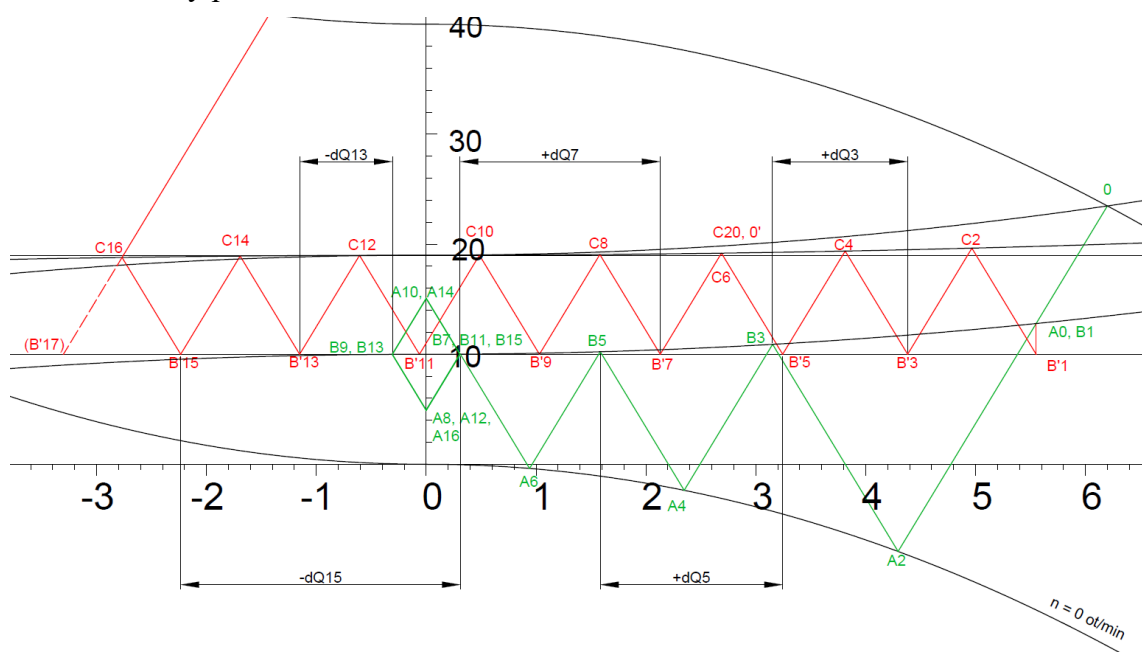
Podtlak vzniká, protože čerpadlo kvůli výpadku jeho pohonu již nedokáže předat dostatek energie dopravovanému médiu, aby vytlačilo potřebné množství vody do potřebné výšky. Průtočné množství i dopravní výška tak rychle klesají. Masa dopravované vody ale vlastní

---

kroticím momentu. Tato křivka by se měla nacházet v oblasti nad nulovými otáčkami a měla by procházet bodem Q-H (0,0).

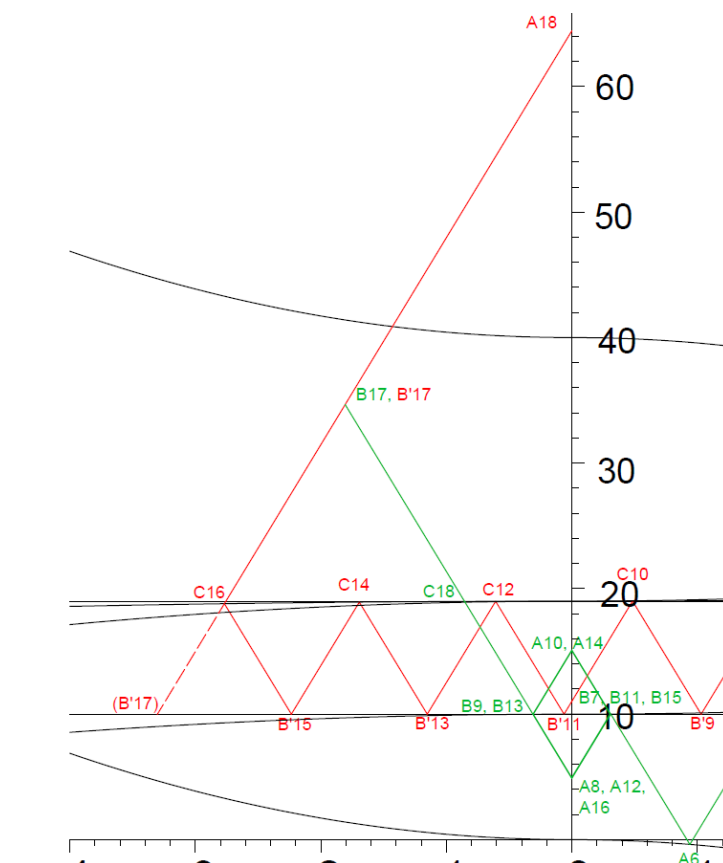
setrvačností pokračuje v pohybu potrubím. Nastane tak okamžik, kdy do určitého místa v potrubí přitéká menší množství vody v důsledku poklesu výkonu čerpadla, než z tohoto místa odtéká vlivem svojí setrvačnosti. Na základě této úvahy, lze vypočítat velikost vzduchové dutiny v potrubí, která se za určitý čas vytvoří.

Hlavním zjednodušením pro výpočet je předpoklad, že průtok daným místem je po dobu  $2 \cdot \Delta t$  konstantní. Odečtením objemu vody, která za časový úsek z místa zavzdušnění odeče, a vody, která do místa přiteče, získáme velikost vzduchové dutiny, která se v potrubí vytvořila. Na obrázku 6.7 můžeme vidět znázornění rozdílů průtoku ( $dQ$ ) v místě zavzdušnění pro různé časové okamžiky (z důvodu přehlednosti jsou uvedeny jen některé). Rozdíly průtoku s kladným znaménkem označují případ, kdy průtok z místa zavzdušnění je větší než do něj, a objem vzduchové dutiny proto narůstá.



Obrázek 6.7: Rozdíly průtoku v místě zavzdušňovacího ventilu

V tabulce 3 vidíme vývoj objemu vzduchové dutiny v místě zavzdušnění. Zajímavý je objem mezi okamžiky 15 a 17. V okamžiku 15 stále ještě vzduchová dutina existuje. Rázová vlna se tak odrazí v bodě B', cestuje zpět do bodu C, kde se opět odrazí, a teprve zpět v bodě B' v čase 17 získává informaci o již proběhlém spojení vodního sloupce. Vlna tak pokračuje v cestě potrubím až do bodu A v čase 18, který leží na průsečíku rázové přímky F s kladnou směrnicí a osy H kvůli podmínce nulového průtoku zpětnou klapkou v bodě A. Bod B'17 potom neleží v místě na obrázku 6.7 označeném jako (B'17), protože již neplatí okrajová podmínka atmosférického tlaku na úrovni zavzdušňovacího ventilu. Bod B'17 je teď již incidentní s bodem B17 a oba leží na průsečíku rázových přímek  $C16 \rightarrow A18$  a  $A16 \rightarrow C18$ . To lze vidět na obrázku 6.8.



Obrázek 6.8: Získání bodů B a B' po spojení vodního sloupce

### 6.2.8. Maximální nárůst tlaku

Nyní zvažme hodnotu maximálního nárůstu tlaku vlivem spojení vodního sloupce. Body (B'17) a A18 leží na stejné přímce odražené vlny F. Velikost průtoku v bodě (B'17) tedy přímo ovlivňuje hodnotu tlaku v bodě A18. Z tabulky 3 vidíme, že v bodě (B'17) již nějakou dobu vodní sloupec spojený je. Pokud bychom ale posunuli rázovou přímku do bodu spojení sloupce, který musí zřejmě ležet někde mezi body B'15 a (B'17), výsledný nárůst tlaku v bodě A bude menší. Taková přímka by představovala rázovou vlnu, která jako první získá informaci o spojení vodního sloupce a která tak jako první dorazí do bodu A, kde začne budovat nárůst tlaku. Tento nárůst se bude zřejmě budovat až do chvíle, kdy dorazí poslední vlna, která získá informaci o spojení sloupce. Jako poslední získá tuto informaci vlna, která byla v bodě B' odrazena směrem k bodu C nekonečně malý časový úsek před spojením vodního sloupce.

Na obrázku 6.9 lze vidět oranžově zakreslené body a rázové přímky odpovídající maximálnímu nárůstu tlaku v potrubí vlivem spojení sloupce. Bod B'x představuje okamžik spojení sloupce v neznámém čase x. Těsně, než tento okamžik nastane, bude odrazena rázová vlna do bodu C, kam dorazí v čase x+1. Toto bude poslední vlna, která získá informaci o spojení sloupce, a to se stane po jejím návratu do bodu B' v čase x+2. Zároveň to tedy bude vlna, která završí budování tlaku v bodě A v čase x+3.

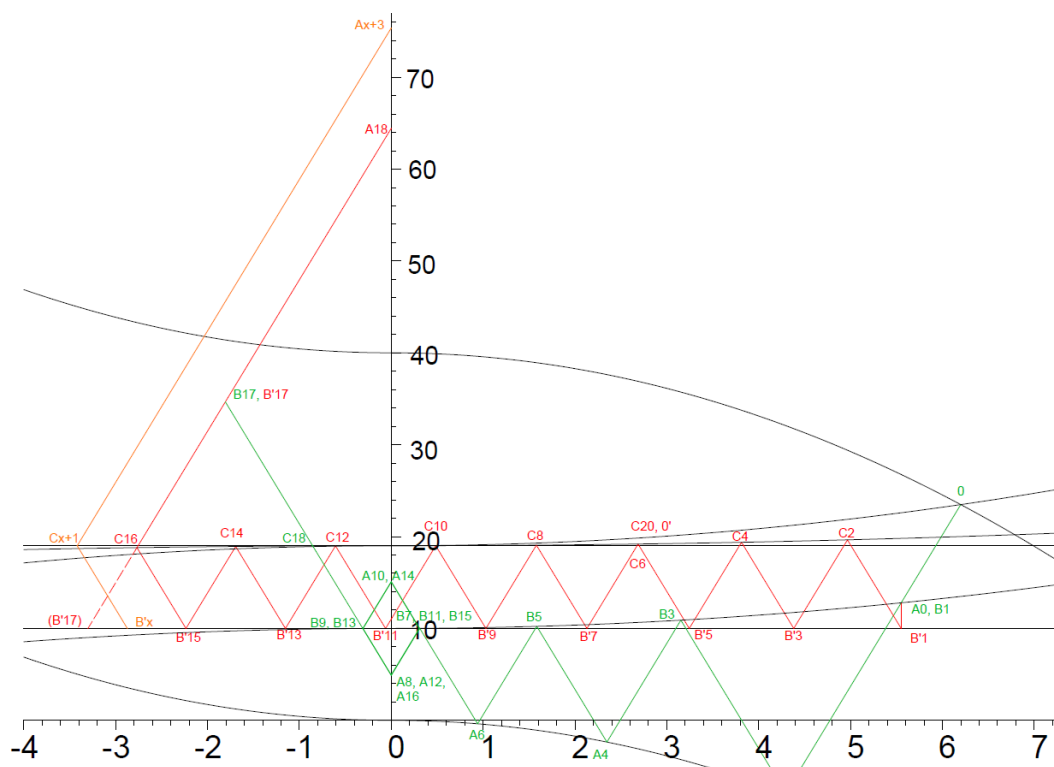
Problémem je však zjištění polohy bodu B'x. Víme, že bude ležet někde mezi body B'15 a (B'17). To jsou ale všechny vodítka, která k jeho poloze máme. Hodnota průtoku v B'x lze vypočítat podle rovnice

$$V(x) = 0 = V(15) + (x - 15) \cdot \Delta t \cdot (Q_{B'x} - Q_{Bx}), \quad (6.11)$$

kde  $V(15)$  označuje velikost vzduchové dutiny v čase  $15 \cdot \Delta t$ ,  $x$  je časový okamžik spojení sloupce a  $Q_{B'x}$  a  $Q_{Bx}$  jsou průtoky v příslušných bodech a čase  $x$ . Bohužel v rovnici (6.11) jsou tři neznámé  $x, Q_{B'x}, Q_{Bx}$ , které nelze spolehlivě určit. Např. hodnota  $Q_{Bx}$  se pohybuje v poměrně velkém rozsahu a její velikost je ovlivňována už velikostí průtoku  $Q_{B1}$ .

Tabulka 3: Vývoj objemu vzduchové dutiny po zavzdušnění potrubí

Časový úsek [0,482 s]	rozdíl průtoku [ $m^3/s$ ]	objem dutiny [ $m^3$ ]
3	+1,229	1,1848
5	+1,66	2,785
7	+1,819	4,5385
9	+1,341	5,8312
11	-0,373	5,4717
13	-0,8439	4,6581
15	-2,566	2,1845
17	-3,061	-0,7663



Obrázek 6.9: Znázornění maximálního nárůstu tlaku po spojení vodního sloupce

### 6.2.9. Rozbor výsledků

Nejzřejmější informací získanou výpočtem je jistě vysoký nárůst tlaku po spojení vodního sloupce, který dokonce přesahuje závěrný bod čerpadel. Bude tedy vhodné vybavit potrubní trasu dalším zařízením, které bude sloužit k redukci nárůstu tlaku. Pro chladicí okruhy se často k tomuto účelu využívá řízení zpětného průtoku pomocí buďto zpětné klapky s řízeným

dovíráním listu klapky, kdy se umožní čerpadlu dostat se do turbínové oblasti, nebo regulačního ventilu v obtoku čerpadla.

Další informací je potřebný průtok vzduchu skrz zavzdušňovací ventil. Ventil musí být schopen propustit dostatečné množství vzduchu, aby byly splněny hodnoty v tabulce 3 a nedošlo ke kavitaci.

Zajímavé budou také průběhy tlaku v jednotlivých místech potrubí, které dokážeme z výpočtu extrahovat a vykreslit. Tyto průběhy pak budou sloužit jako podklad pro dynamickou analýzu potrubí. Ta pak zkoumá silovou nerovnováhu vzniklou vlivem průchodu rázové vlny např. na koleni potrubí, která vede k buzení kmitání potrubního systému ve větší či menší míře. Toto je důležitá informace pro pevnostní výpočet potrubí z hlediska umístění druhu uložení a jeho dostatečného dimenzování.

Nakonec můžeme vidět, že dosahujeme velkého podtlaku u čerpadla v bodě A. Bylo by tak vhodné zařadit na výtlač čerpadla například malou jednocestnou vyrovnávací nádrž.



## 7. Numerické řešení metodou charakteristik

Způsob numerického řešení byl převzat s jistými úpravami od Wileya a Streetera [7]. Řešení se odvíjí od rovnic (4.25) a (4.26). Pro účely výpočtu byly tyto rovnice však zjednodušeny do tvaru

$$p_C = c_A - B \cdot Q_C \quad (7.1)$$

$$p_C = c_B + B \cdot Q_C, \quad (7.2)$$

kde  $p_C$  a  $Q_C$  jsou hledané hodnoty tlaku a průtoku v dalším časovém okamžiku (viz obrázek 4.1),  $c_A$  a  $c_B$  jsou parametry shrnující v sobě známé hodnoty tlaku a průtoku v bodech A a B a  $B$  je konstanta

$$B = \frac{\rho \cdot a}{A}. \quad (7.3)$$

Stejně označení bodu B a konstanty  $B$  je použito trochu nešťastně. Značení bylo převzato z Wylieho a Streetera [7], ale je samozřejmě libovolné. Označení bodů A a B je však jak v kódu, tak v rovnicích použito pouze jako indexy ostatních proměnných (zejména  $Q$  a  $p$ ) a označení  $B$  a  $A$  jako samostatných proměnných vždy označuje právě konstantu  $B$  nebo plochu průřezu  $A$ .

Hodnoty  $c_A$  a  $c_B$  lze vyjádřit z rovnic (4.25) a (4.26) jako

$$c_A = p_A + B \cdot Q_A - R \cdot Q_A \cdot |Q_A| \quad (7.4)$$

$$c_B = p_B - B \cdot Q_B + R \cdot Q_B \cdot |Q_B|, \quad (7.5)$$

kde  $R$  je konstanta

$$R = \Delta x \frac{f\rho}{2dA^2}. \quad (7.6)$$

Řešení příkladu bylo provedeno vlastním skriptem v jazyce Python. Hlavní skript v jednotlivých krocích využívá speciální funkce podle toho, který bod potrubí je předmětem výpočtu. Speciální funkce na základě hodnot z předchozího kroku ( $p_A$ ,  $p_B$ ,  $Q_A$  a  $Q_B$ , popř. ještě  $p$  a  $Q$ ) vypočítají nové hodnoty tlaku a průtoku v bodě C a tyto nahrají do globálních proměnných  $p_C\_var$  a  $Q_C\_var$ , odkud si hodnoty pak hlavní skript přebírá. Obdobně fungují také funkce  $c_A()$  a  $c_B()$ , které plní globální proměnné  $c_A\_var$  a  $c_B\_var$ . V následujících podkapitolách budou osvětleny jednotlivé okrajové podmínky a jejich výpočet použitý v řešení.

### 7.1. Hlavní funkce výpočtu

Kód hlavní funkce je uveden v příloze C. Funkce sestává z několika částí. Vstupem do programu je soubor .xls. Z tohoto souboru se načítají potřebná data o topologii trasy a parametrech jednotlivých zařízení. V tabulce 4 lze vidět tabulku topologie trasy pro výpočet zadaného příkladu. Můžeme vidět, že délka potrubní trasy v místě okrajové podmínky je uváděna s hodnotou 0. Pro výpočet je ale třeba i pro okrajové podmínky uvažovat délku úseku ve velikosti  $\Delta x$ . K navýšení výpočetní délky trasy  $L\_steps$  o potřebný počet elementárních úseků slouží první část hlavní funkce.

Další část definuje pole pro ukládání vypočtených hodnot o velikosti  $L\_steps$  pro prostorovou souřadnici a  $t\_steps$  (podíl zadaného časového úseku a časového výpočetního kroku) pro časovou souřadnici.

Tabulka 4: Tabulka zadání topologie trasy pro numerický výpočet

délka úseku [m]	výška konce úseku [m]	výpočtová funkce
0	0	tank(p[i][K+1], Q[i][K+1])
20	0	pipeline()
0	0	pumpB(p[i][K], dpPump0, p[i][K-1], p[i][K+1], Q[i][K], Q[i][K-1], Q[i][K+1])
240	10	pipeline()
0	0	airInlet(p[i][K], p[i][K-1], p[i][K+1], Q[i][K-1], Q[i][K+1], hCondenser, i)
240	19	pipeline()
0	0	outletB(p[i+1][K-1], Q[i+1][K-1])

Následně se vypočtou hodnoty v jednotlivých bodech potrubí v čase 0 s, které představují hodnoty v ustáleném stavu před počátkem vodního rázu.

Následně se již přistoupí k výpočtu průběhu vodního rázu. Funkce sleduje hodnotu délky úseku v prvním sloupci tabulky 4. Pokud je hodnota rovná nule, funkce pozná okrajovou podmínku a pomocí funkce `eval()` spustí výpočet pomocí funkce uvedené ve třetím sloupci. U potrubí je postup trochu odlišný. Zde funkce podle hodnoty v prvním sloupci rozdílné od nuly pozná výpočet úseku potrubí a funkci `pipeline()` včetně jejích vstupů volá přímo bez použití funkce `eval()`.

Nakonec se získaná data zapíší do dvou souborů .csv zvlášť pro výsledné hodnoty tlaku a průtoku. Variací velikosti časového kroku se zjistilo, že tato část programu je z hlediska času úzkým místem numerického výpočtu a může trvat i stejně dlouho jako výpočet samotný. Ten byl poměrně dobře optimalizován a bylo by možné relativně jednoduše dále snižovat výpočetní čas pomocí překladač do nativního kódu a částečnou paralelizací.

## 7.2. Potrubí

Výpočet potrubí se provede pomocí rovnic (7.1) a (7.2) jejich sečtením (pro  $p_C$ ) nebo odečtením (pro  $Q_C$ ).

*Kód 1: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku v potrubí*

```
def pipeline(pA, pB, QA, QB):
    global cB_var, cA_var, pC_var, QC_var
    cA(pA, QA)
    cB(pB, QB)
    pC_var = (cA_var + cB_var) / 2
    QC_var = (cA_var - cB_var) / (2 * B)
```

### 7.3. Zavzdušnění

Výpočet v místě zavzdušnění se dělí na několik případů. Běžným stavem za normálního provozu je, že v potrubí není žádný vzduch a oproti okolní atmosféře je v potrubí přetlak ( $v_v \leq 0$  and  $\beta > 1$ ). V případě, že se v místě zavzdušnění vytvoří vůči atmosféře podtlak ( $\beta < 1$ ), vzduch se začne přisávat. V momentě, kdy v místě zavzdušnění naroste tlak nad hodnotu okolní atmosféry ( $v_v > 0$  and  $\beta > 1$ ), začne se vzduch vytlačovat skrz ventil ven z potrubí. Může se také stát, že tlak v potrubí bude v daném čase rovný tlaku atmosférickému. Pak je  $\beta$  rovná jedné ( $\beta == 1$ ) a vzduch se ani nepřisává ani nevyfukuje. Poslední částí funkce `airInlet` je kontrola nově vypočteného tlaku na podtlak. Pokud by se výpočtem dosáhlo v bodě zavzdušnění podtlaku, hodnota tlaku se přepočítá a tlak se nastaví na hodnotu okolní atmosféry. Pro délku kódu byl kód funkce pro zavzdušňovací ventil umístěn do přílohy B.

### 7.4. Rozliv

Pro rozliv chladicí věže platí, že hodnota tlaku bude odpovídat okolní atmosféře. V případě, že čerpadlo dodává stále ještě dostatek energie pro vytlačení vody až na rozliv, bude tato hodnota navýšena o tlakové ztráty trasy. V kódu 2 je pro zjednodušení používán nominální bod čerpadla. Hodnotu průtoku lze potom dopočítat z rovnice (7.1).

*Kód 2: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku na rozlivu chladicí věže*

```
def outletB(pA, QA):  
    global pC_var, QC_var, cA_var  
    cA(pA, QA)  
    if pA > hDest*rho*g + pa:  
        pC_var = pOut  
    else:  
        pC_var = hDest*rho*g + pa  
    QC_var = (cA_var-pC_var)/B
```

### 7.5. Čerpadlo

Výpočet čerpadla se dělí na několik případů. Buď se čerpadlo ještě nezastavilo a jeho otáčky jsou stále kladné ( $n_{var} > 0$ ), nebo má již čerpadlo otáčky rovné nule (záporné otáčky neuvažujeme) a průtok je kladný, nebo médium proudí směrem do čerpadla, čímž se uzavírá zpětná klapka na výstupní přírubě ( $QC_{var} < 0$ ).

V prvním případě postupujeme podle rovnic (5.3) a (6.4). To znamená, že nejdříve vypočítáme pokles otáček, následně tlak  $p_C$  a jako poslední podle rovnice (7.2) dopočítáme hodnotu průtoku. V druhém případě počítáme hodnoty tlaku a průtoku stejně, jako v případě úseku potrubí. Ve třetím případě se  $Q_C$  rovná nule a  $p_C$  lze dopočítat z rovnic (7.1) nebo (7.2).

Kód 3: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku v místě zpětné klapky na přírubě čerpadla

```
def pumpB(p, dp0, pA, pB, Q, QA, QB):
    global pC_var, QC_var, n_var, cA_var, cB_var

    dp = pB-pA
    cA(pA, QA)
    cB(pB, QB)
    QC_var = (cA_var - cB_var) / (2 * B)
    n0 = n_var

    # čerpadlo stále dobíhá
    if n_var > 0:
        n2 = (n_var**2 - (g*7200*dp*Q) / (math.pi**2*eta*GD2)*dt)
        # otáčky ještě neklesnou na 0
        if n2 > 0:
            n_var = n2**(1/2)
            #dp = dp0*(n_var/nj)**2
            pC_var = p*(n_var/n0)**2#dp + pA
            QC_var = (pC_var-cB_var)/B
        # otáčky klesnou na 0
    else:
        n_var = 0
        pC_var = cB_var + B*QC_var

    # čerpadlo doběhlo
    elif n_var == 0:
        pC_var = (cA_var + cB_var)/2

    # médium proudí směrem do čerpadla - zpětná klapka uzavírá
    if QC_var < 0:
        QC_var = 0
        pC_var = cB_var + B * QC_var
```

## 7.6. Nádrž

Okrajová podmínka nádrže předpokládá konstantní hladinu v bazénu chladicí věže. Hodnota  $p_C$  je tedy konstantní a je součtem tlaku ve zdrojové nádrži ( $p_{Source}$ ), který je zde roven atmosférickému tlaku, a hydrostatického tlaku způsobeného sloupcem kapaliny ( $h_{Source}$ ) v nádrži. Hodnotu  $Q_C$  lze potom dopočítat z rovnic (7.1) nebo (7.2).

*Kód 4: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku na výstupu z nádrže*

```
def tank(pB, QB):  
    global cB_var, pC_var, QC_var  
    pC_var = pSource + rho*g*hSource  
    cB(pB, QB)  
    QC_var = (pC_var - cB_var) / B
```

## 8. Výsledky výpočtu

V této kapitole porovnáme výsledky získané numerickým výpočtem metodou charakteristik a graficko-početní metodou. V jednotlivých podkapitolách vztahujících se k jednotlivým významným místům zadaného potrubí budou popisovány výsledky získané pomocí obou metod. Budou zmíněny rozdíly mezi jednotlivými výsledky a jejich možné příčiny.

Několik poznatků je však společných pro všechny body řešení. Z důvodu problémů v počáteční fázi návrhu programu je bohužel zpracování numerického výpočtu provedeno v jednotkách tlaku (Pa). Naproti tomu graficko-početní metoda byla poté provedena v jednotkách výšky (m). Numerické řešení totiž počítá s hodnotami totální energie/entalpie média v daném místě. To znamená, že hodnota v daném čase a místě uvedená v grafu je součtem hodnot tlaku média v potrubí (statického a dynamického) a potenciální energie tohoto místa. Toto lze vidět například na obrázku 8.3. V časovém úseku  $t \in (0; 5)$  s lze vidět, že se hodnota tlaku ustaluje na hodnotě přibližně 100 kPa. To je zapříčiněno podtlakovou vlnou způsobenou doběhem čerpadla. Hodnotu udržuje bazén chladicí věže na sání čerpadla se zanedbatelnou výškou hladiny vody (uvažována výška 0,0 m, a tedy  $0 \cdot \rho \cdot g + p_{atm} = 101,325 \text{ kPa}$ ). V čase  $t > 6$  s už lze vidět oscilace tlaku okolo hodnoty přibližně 0,3 MPa. Tyto oscilace budou v průběhu času ustávat vlivem tření. Tlak 0,3 MPa vyvíjí vodní sloupec od čerpadla k rozlivu a atmosférický tlak. Toto mají obě metody společné, nicméně graficko-početní metoda vztahuje hodnoty k poloze 0,0 m, kdežto numerický výpočet k absolutní hodnotě tlaku 0 Pa. Hodnoty v grafech numerického řešení by tak měly být posunuté o 10 m nebo 0,1 MPa výše.

Dále jsou na grafech numerického řešení zřetelné výpočetní nestability. Ty jsou pravděpodobně způsobeny zjednodušeným výpočtem hodnoty na čerpadle. Pro potrubní trasu bez čerpadla se tyto nestability neprojeví.

Je také nutno upozornit na způsob čtení grafů graficko-početní metody. Přestože jsou v grafech uvedeny hodnoty maximálního tlaku, tyto hodnoty by se měly brát se značnou rezervou. Částečně je tento problém popsán v kapitole 6.2.8. Průběh tlaku je zde totiž řešen pouze pro jeden konkrétní set navazujících rázových vln. Skutečné hodnoty tak mohou dosahovat vyšších či nižších hodnot. Pro přesnější zjištění maximálních hodnot by se muselo graficko-početní řešení provést alespoň pro dva až tři sety rázových přímk ve speciálních časových okamžicích. Pro kompletní průběh pak pro mnoho setů přímk s jemným časovým krokem.

Hlavním rozdílem mezi výsledky obou metod je zřejmě vypočítaná hodnota maximálního nárůstu tlaku. Tento rozdíl je pravděpodobně způsoben rozdílným způsobem výpočtu přetržení sloupce. V graficko-početní metodě jsme velikost vzduchové dutiny počítali podle rozdílu průtoku do a z místa zavzdušnění, přičemž byla uvažována nulová tlaková ztráta zavzdušňovacího ventilu. Také byl použit předpoklad volného proudění vzduchu do potrubí a ven ve velikosti rovné rozdílu průtoků vody s tím, že průtok se zajistí dostatečným návrhem zavzdušňovacích ventilů (vzhledem k velikosti průtoku vzduchu by jich pravděpodobně bylo několik). Naopak při numerickém výpočtu byla velikost vzduchové dutiny počítána z poměru tlaků a při zadaných rozměrech velikosti zavzdušňovacího ventilu. Velikost toku vzduchu do a z potrubí (a tedy i velikost vzduchové dutiny) se tak řídí vztahem pro průtok dýzou

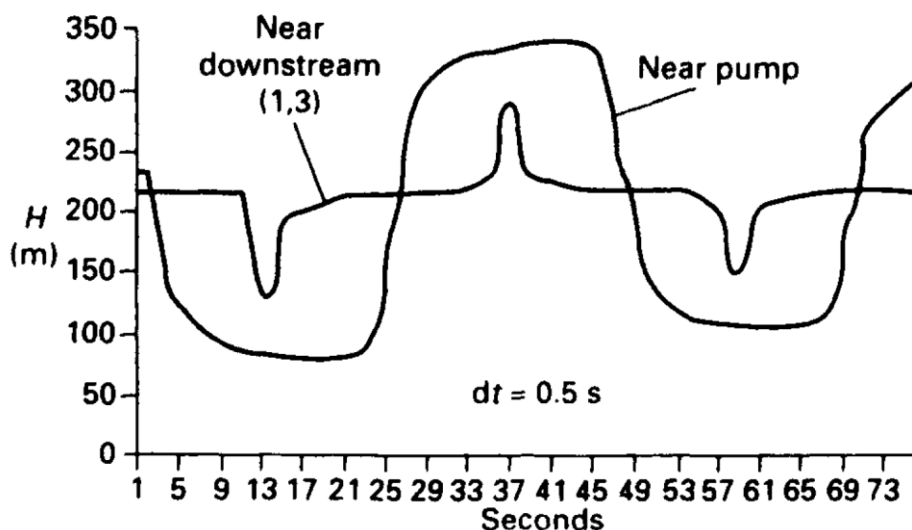
$$Q_v = \frac{\pi}{4} \cdot d_v^2 \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot r \cdot T \cdot \left(1 - \beta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}, \quad (8.1)$$

kde  $d_v$  je průměr otvoru zavzdušňovacího ventilu,  $\beta$  je tlakový spád na ventilu,  $\kappa$  je poissonovo číslo vzduchu,  $r$  je individuální plynová konstanta pro vzduch a  $T$  je teplota vzduchu. Vlivem

zpomalení výtoku vzduchu z potrubí odporem otvoru zavzdušňovacího ventilu se tak vytvoří vzduchový polštář sloužící jako nárazník, a zavzdušňovací ventil tak částečně pracuje jako vzdušník. Ve zdejší výpočtu navíc nebyl uvažován nárůst tlaku vytlačovaného vzduchu, pouze zpomalení spojení sloupce pomalejší změnou velikosti objemu vzduchové dutiny. Lze tak předpokládat, že skutečné hodnoty nárůstu tlaku by byly ještě o něco nižší.

Ohledně řešení graficko-početní metodou je také třeba zmínit, že nepokrývá celý průběh vodního rázu v čase, ale pouze první cyklus přetržení a spojení vodního sloupce. V řešení v příloze A končí řešení v čase  $20 \cdot \Delta t$  body C20 a 0'. A právě bod 0' označuje konec cyklu přetržení a spojení vodního sloupce. Od tohoto bodu bychom pro výpočet delšího časového úseku postupovali stejným způsobem jako mezi body 0 a 0'. Velikost rázu pozdějším opakovaným přetržením a spojením sloupce však bude postupně klesat. Pokud nám tedy ve výpočtu jde pouze o velikost rázu, řešení prvního cyklu postačuje.

Sharp a Sharp [9] uvádějí vzorový graf (obrázek 8.1) průběhu vodního rázu ve vodorovném potrubí při ideální funkci zpětné klapky a v případě, kdy je vliv přetržení vodního sloupce je velmi malý. Podoba celkového průběhu na grafech v následujících podkapitolách se porovnáním s obrázkem 8.1 zdá být v pořádku. Hodnoty samotné však budou podléhat určité nejistotě, kterou by bylo třeba ověřit.

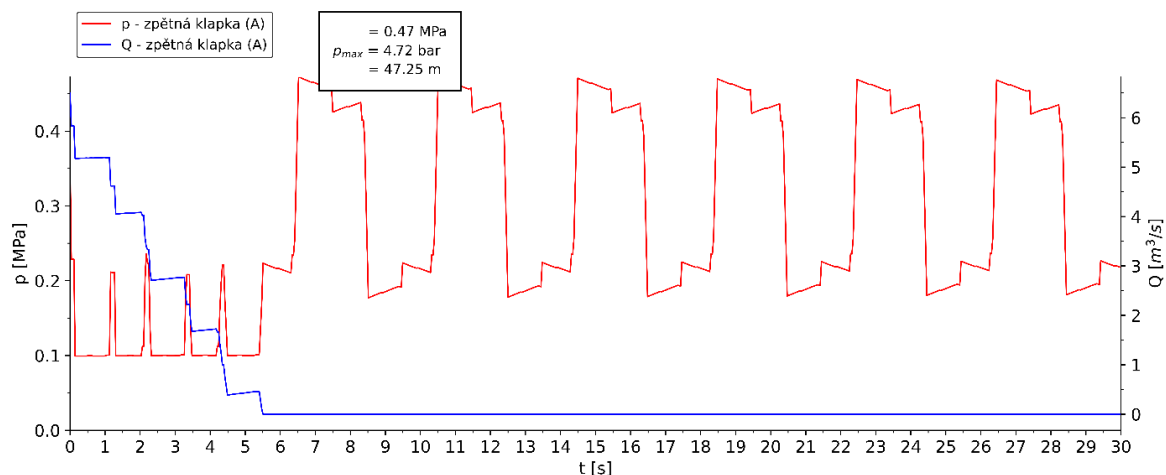


Obrázek 8.1: Graf průběhu vodního rázu ve vodorovném potrubí s ideálně fungující zpětnou klapkou a malým vlivem přetržení vodního sloupce (near downstream - poblíž konce potrubí, near pump - poblíž čerpadla) [9]

Při zjemňování časového kroku numerického výpočtu došlo ke změně výsledků (oproti výsledkům pro krok 2 ms) v řádu stovek pascalů, přičemž podoba průběhu tlaku zůstala zachována. Lze tak předpokládat, že nestability v maximech a minimech průběhu tlaku nejsou způsobeny numerickým výpočtem jako takovým, ale spíše porušením některé z podmínek zachování (energie, hmoty nebo hybnosti) v okrajových podmínkách. Nejmenší použitá velikost časového kroku byla 0,4 ms a kvůli neoptimalizovanému programu trval tento výpočet přibližně 30 minut. Oproti původní velikosti kroku 2 ms s dobou výpočtu přibližně 3 minuty se tak jedná o zbytečné navýšení výpočetní doby vzhledem k zanedbatelnému zpřesnění výpočtu.

Při zvyšování výpočetního kroku narůstaly na velikosti nestability výpočtu. Při dalším navyšování kroku (přibližně od hodnoty 35 ms) však nestability ustoupily a graf se vyhladil. Takto vyhlazený graf lze vidět na obrázku 8.2. Při takto velkém kroku se oproti výpočtu

s krokem 2 ms lišily výsledné hodnoty v bodech A a C v řádu jednotek barů a v bodech B a B' v řádech desetin baru. Je však třeba podotknout, že časový krok byl ve výpočtu pevně spjatý s prostorovým krokem podle obrázku 4.1. a časový krok v řádu desítek milisekund znamená prostorový krok v řádu metrů nebo desítek metrů.



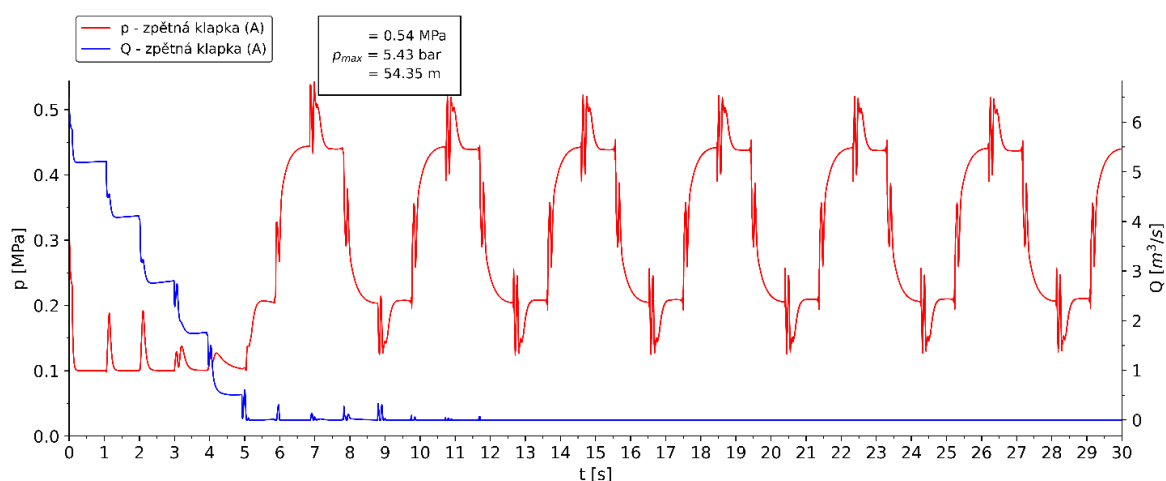
Obrázek 8.2: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný numerickým výpočtem při velikosti časového výpočetního kroku  $\Delta t = 36$  ms

### 8.1. Zpětná klapka – bod A

Na obrázcích 8.3 a 8.4 lze vidět průběhy tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky umístěné na výstupní přírubě čerpadla. Všimnout se můžeme několika věcí.

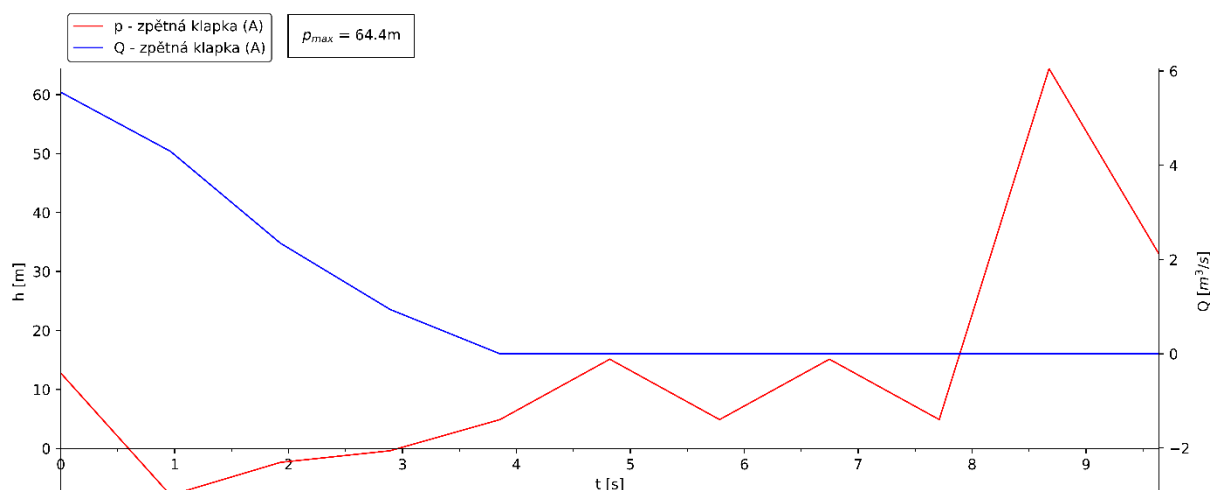
Za prvé je to rozdílná hodnota průtoku na počátku. To je způsobeno posunem počátečního bodu výpočtu v graficko-početním řešení do bodu přetržení vodního sloupce.

Dále je to rozdílná doba zastavení toku média. Ta je způsobená rozdílným výpočetním časovým krokem. V graficko-početní metodě byl použit krok 0,482 s oproti kroku 2 ms použitým v numerickém výpočtu. Na obrázku 8.4 se tedy jeví pokles tlaku falešně pomalý, kdy dosahuje svého minima až v čase 1 s. Při jemnějším časovém kroku by však byl pokles mnohem rychlejší. Z rovnice (5.3) můžeme zjistit, že čerpadlo doběhne za přibližně 0,11 s (při použití konstantního brzdícího momentu dopravovaného média).



Obrázek 8.3: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný numerickým výpočtem



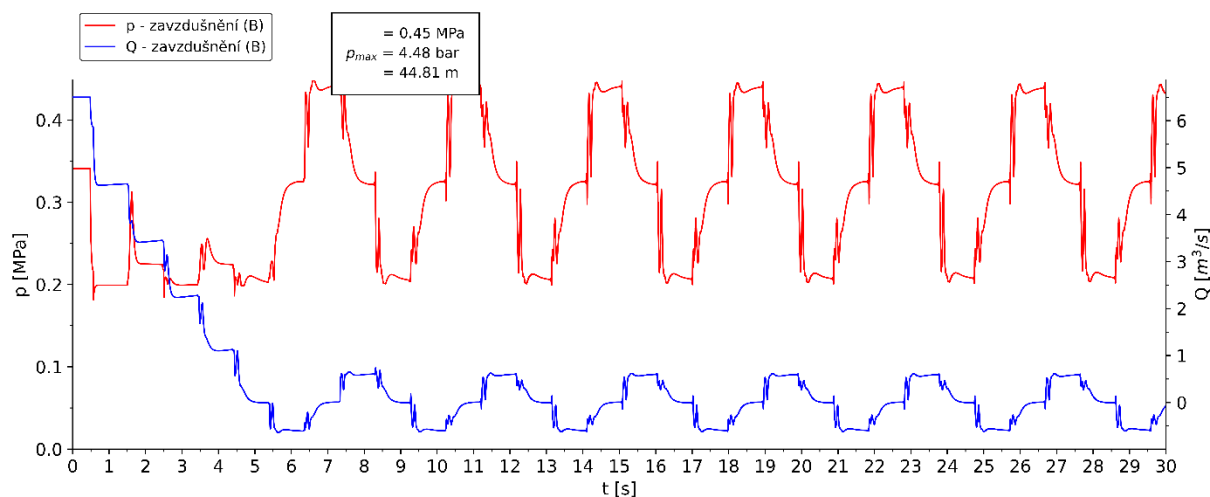


Obrázek 8.4: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zpětné klapky na výstupní přírubě čerpadla (bod A) získaný graficko-početní metodou

Rozdíl hodnot maximálního tlaku získaných jednotlivými metodami je zde poměrně velký. Z numerického výpočtu byla získána hodnota 5,44 bar (a) (vzhledem k nestabilitám v okolí maximálních hodnot spíše méně). Graficko-početní metodou byla získána hodnota 6,44 bar vztažená k poloze čerpadel na úrovni 0,0 m (tj. přibližně 7,44 bar (a), přičemž podrobnějším řešením by byla hodnota ještě o něco vyšší. Graficko-početní metodou jsme tak získali o přibližně 50 % vyšší hodnotu než numerickým výpočtem.

## 8.2. Zavzdušnění – bod B

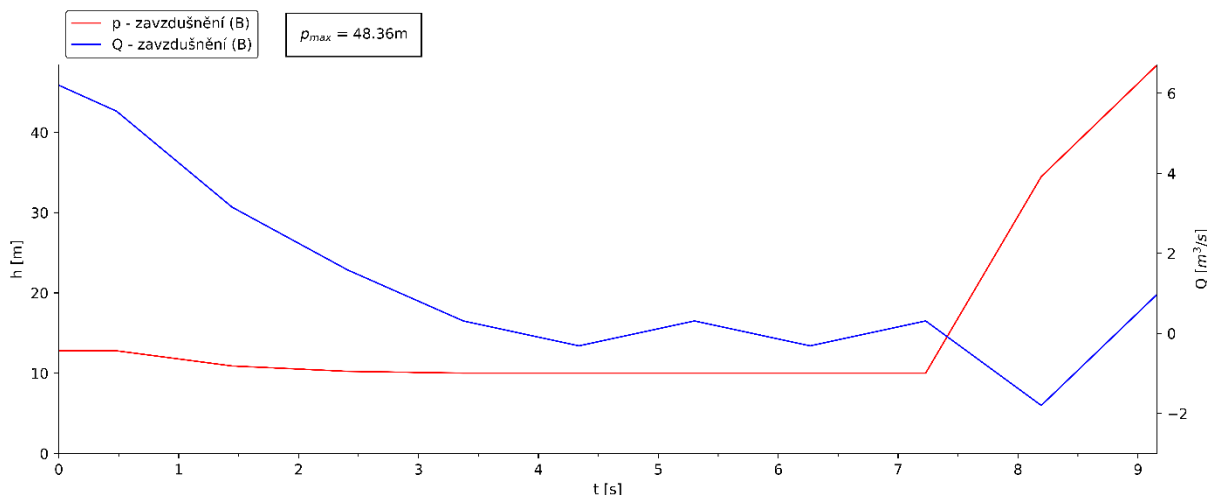
Na obrázcích 8.5 a 8.6 vidíme průběh tlaku a průtoku v místě zavzdušnění nalevo od zavzdušňovacího ventilu podle obrázku 6.3. Oproti bodu A je zde vidět oscilace průtoku. To je dáno právě stlačováním vodního sloupce mezi body A a B.



Obrázek 8.5: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B) získaný numerickým výpočtem

Také se lze všimnout různého tvaru tlakových oscilací na obrázcích 8.5 a 8.3. Různé tvary jsou zapříčiněny polohou daného místa v potrubí. Pro bod A platí, že zásadní změna se děje v intervalech o velikosti doby běhu vlny  $T = 1,93 s$  a do té doby je v tomto místě hodnota

veličiny víceméně konstantní. To proto, že na začátku děje, kdy je vyslána první rázová vlna, se tato vrátí s informací o odezvě systému právě za dobu  $T$ . V bodě B umístěném přibližně v polovině délky potrubí však platí, že informace o odezvě systému se do tohoto bodu dostává již po uplynutí poloviny doby  $\frac{T}{2} = 0,96$  s.

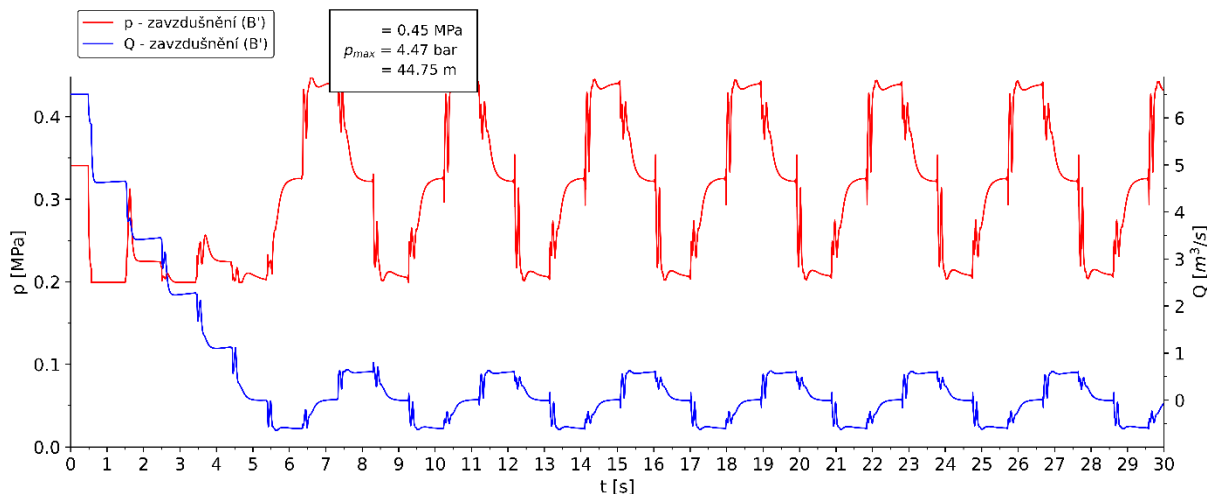


Obrázek 8.6: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B) získaný graficko-početní metodou

Maximální hodnota tlaku získaná numerickým výpočtem je 4,5 bar (a). Maximální hodnota tlaku získaná graficko-početní metodou je 5,84 bar (a). Zde lze oproti numerické metodě vidět výrazně menší rozdíl – přibližně o 30% vyšší.

### 8.3. Zavzdušnění – bod B‘

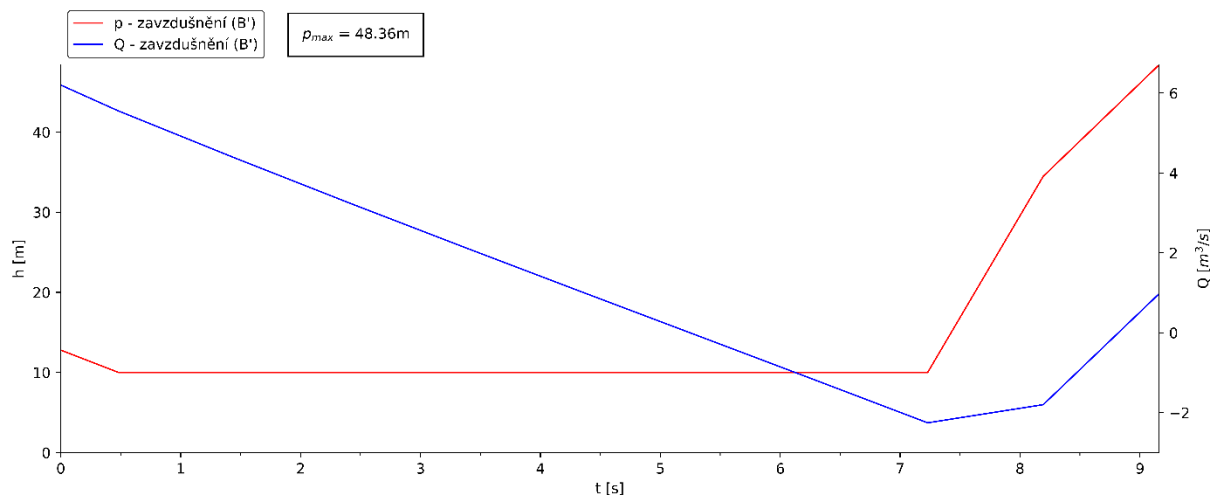
Na obrázcích 8.7 a 8.8.6 vidíme průběh tlaku a průtoku v místě zavzdušnění napravo od zavzdušňovacího ventilu podle obrázku 6.3.



Obrázek 8.7: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B‘) získaný numerickým výpočtem

Průběh i hodnoty jsou prakticky totožné s těmi v bodě B. Rozdíly lze vidět v grafu získaném graficko-početní metodou, kde oproti bodu B průtok v bodě B‘ klesá lineárně a dosahuje nižších

záporných hodnot. To je dáno tím, že zpětný průtok v bodě B znamená stlačování vodního sloupce v potrubí, kdežto v bodě B' se jedná o zaplňování vzduchové dutiny vzniklé přetržením vodního sloupce.

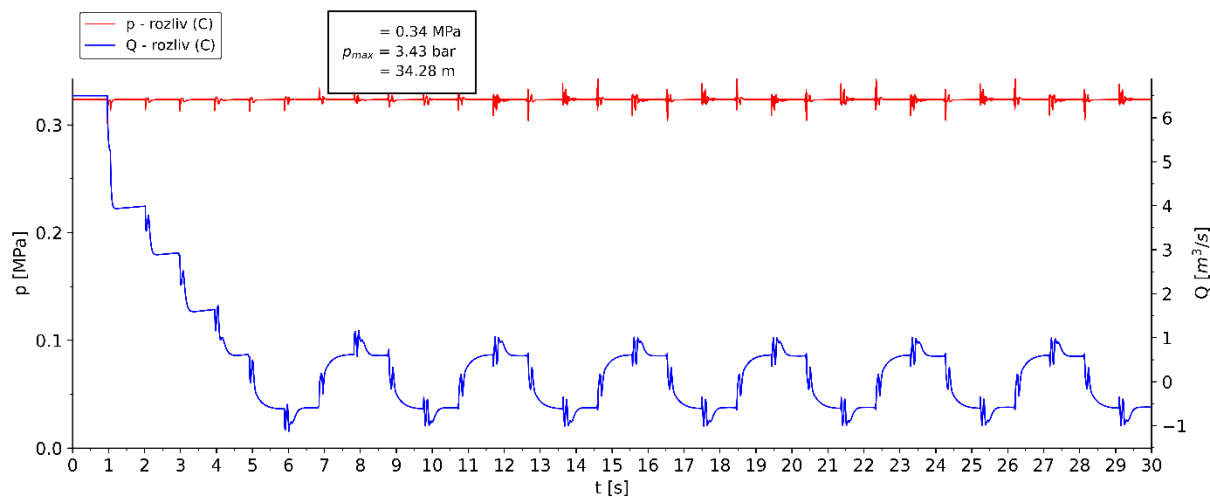


Obrázek 8.8: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě zavzdušnění (bod B') získaný graficko-početní metodou

Maximální hodnota tlaku získaná numerickým výpočtem je 4,47 bar (a). Maximální hodnota tlaku získaná graficko-početní metodou je 5,84 bar (a).

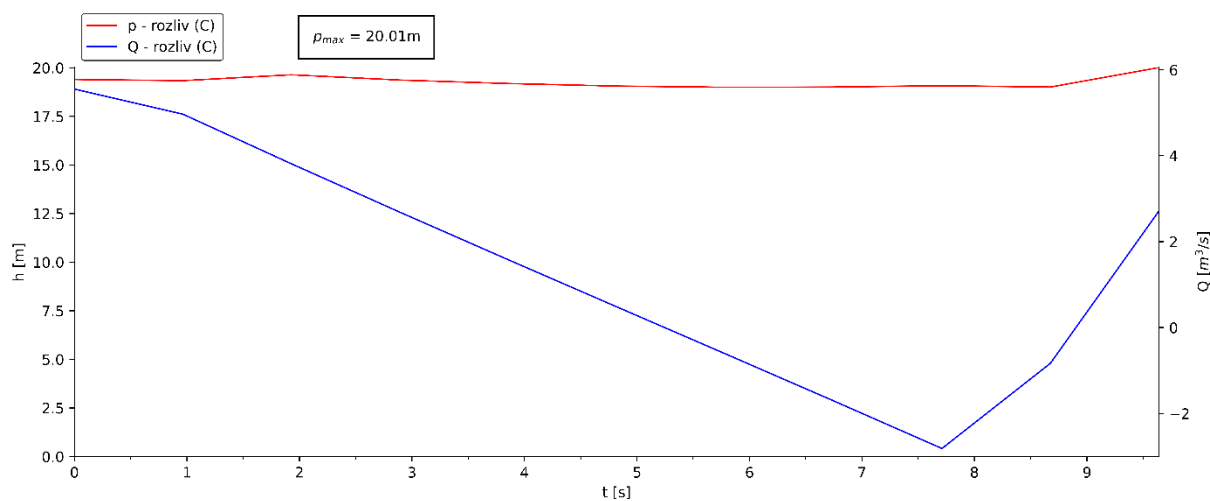
#### 8.4. Rozliv – bod C

Na obrázcích 8.9 a 8.10 vidíme průběh tlaku a průtoku v místě rozlivu chladicí věže.



Obrázek 8.9: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě rozlivu chladicí věže (bod C) získaný numerickým výpočtem

Z grafů na rozlivu je zajímavý snad jen rozdíl v hodnotách oscilujícího průtoku, kdy z graficko-početní metody vychází více než čtyřnásobná amplituda průtoku. To je pravděpodobně způsobeno rozdílným výpočtem velikosti vzduchové dutiny jednotlivými metodami.



Obrázek 8.10: Průběh tlaku a průtoku v čase v místě rozlivu chladicí věže (bod C) získaný graficko-početní metodou

Maximální hodnota tlaku získaná numerickým výpočtem je 3,45 bar (a), kdy je ale třeba brát v úvahu relativně velké nestability při výpočtu. Maximální hodnota tlaku získaná graficko-početní metodou je 3,001 bar (a).

## 9. Úvod do parního rázu

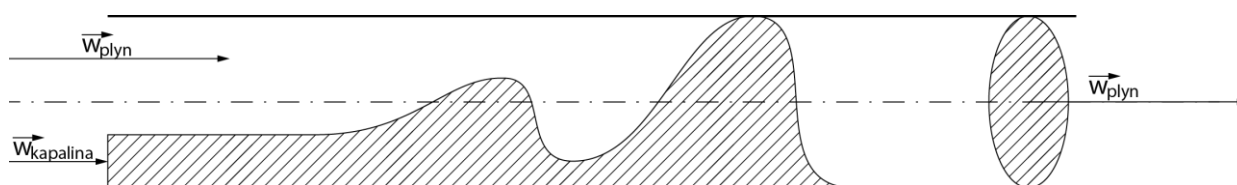
Problematika parního rázu je oproti vodnímu rázu poněkud složitější už v její definici. Vodní ráz jsme definovali jako nárůst tlaku média v důsledku prudké změny toku média. Tento jev samozřejmě nastává, ať už v potrubí proudí voda nebo pára. V případě páry ale může v potrubí dojít k dalším rázovým jevům, jejichž původ se od vodního rázu liší, jsou ale někdy označovány jako parní ráz (hlavně v angličtině pojmem *steam hammer*). Jsou to hlavně kavitace a tzv. *slug flow*. Kavitaci a slug flow je možné se vyhnout správným návrhem potrubní sítě a zajištěním správné funkce jejich komponent. Proto zde budou tyto dva jevy jen zběžně popsány.

### 9.1. Kavitace

Kavitace je jev, kdy tlak vody poklesne pod tlak sytosti a voda se tak začne vypařovat. Vzniklá pára však zabírá mnohonásobně větší objem. Snaha vtěsnat tento objem do dutiny po odpaření vodě a ochlazení páry okolní vodou vede k opětovnému nárůstu tlaku a kondenzaci páry. Tento cyklus se může dít v mnoha bodech potrubí zároveň a mnohokrát se opakovat. Implodování parních bublin zároveň vede k tvorbě tlakových pulzů, které se pak šíří dále potrubím a mohou vyvolávat nadměrné vibrace potrubí a jeho komponent.

### 9.2. Slug flow

Slug flow je stav, který může nastat při dvoufázovém proudění v potrubí, kdy nad sebou proudí plyn a na dně potrubí vrstva kapaliny. Každé médium proudí zpravidla různou rychlostí, což vyvolává povrchové tření mezi nimi. Tření následně vyvolává turbulenci a vlnění kapaliny vlivem Kelvin-Helmholtzovy nestability. Pokud by hladina kapaliny příliš stoupla a tření způsobilo vlnu, která by kompletně uzavřela průřez potrubí, zabrání tato zátka kapaliny volnému proudění plynu. Plyn pak na tuto zátku působí jako na píst a prakticky ji vystřelí po směru proudění. Zátka potom touto rychlostí narazí na první překážku v potrubí (např. kolena, clony, armatury apod.). Kinetická energie této masy kapaliny pohybující se rychlostí proudícího plynu může způsobit minimálně zvýšené chvění potrubí a namáhání jeho uložení a v horším případě i přímo poškození potrubí a jeho komponent. Toto je také důvod, proč je kladen velký důraz na správné odvodnění parních potrubí.

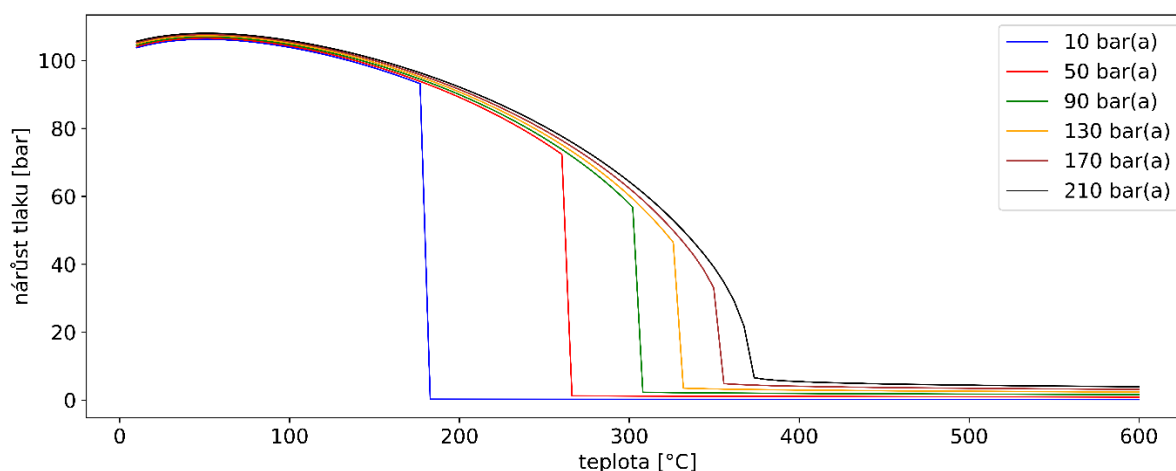


Obrázek 9.1: Průběh slug flow při dvoufázovém proudění

### 9.3. Ráz náhlou změnou toku média

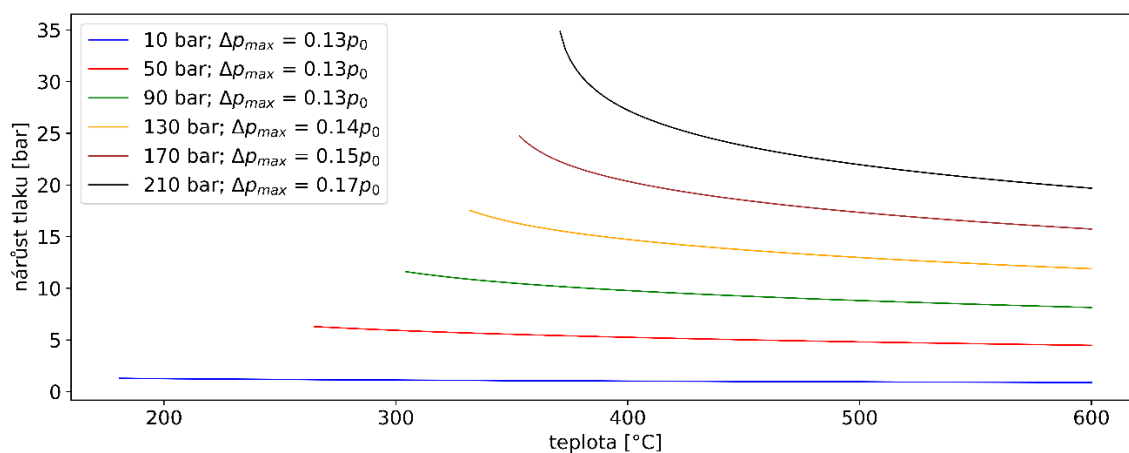
Ze Žukovského vztahu (2.14) se zdá, že velikost nárůstu tlaku, která je důsledkem náhlé změny toku média, bude klesat s klesající hustotou média (viz obrázek 9.2).

Obrázek 9.2 je však zavádějící, kvůli použité konstantní rychlosti média v potrubí (5 m/s) nehledě na jeho skupenství. Pokud vykreslíme hodnoty nárůstu tlaku pro stejné hodnoty tlaku ustáleného stavu a pro reálnou hodnotu rychlosti v parním potrubí (50 m/s), bude graf vypadat jako na obrázku 9.3. Stejný graf pro vodní fázi při reálné rychlosti proudění 3 m/s lze vidět na obrázku 9.4.



Obrázek 9.2: Závislost nárůstu tlaku na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu při konstantní rychlosti proudění (5 m/s – pro vodu i páru) a průřezu potrubí

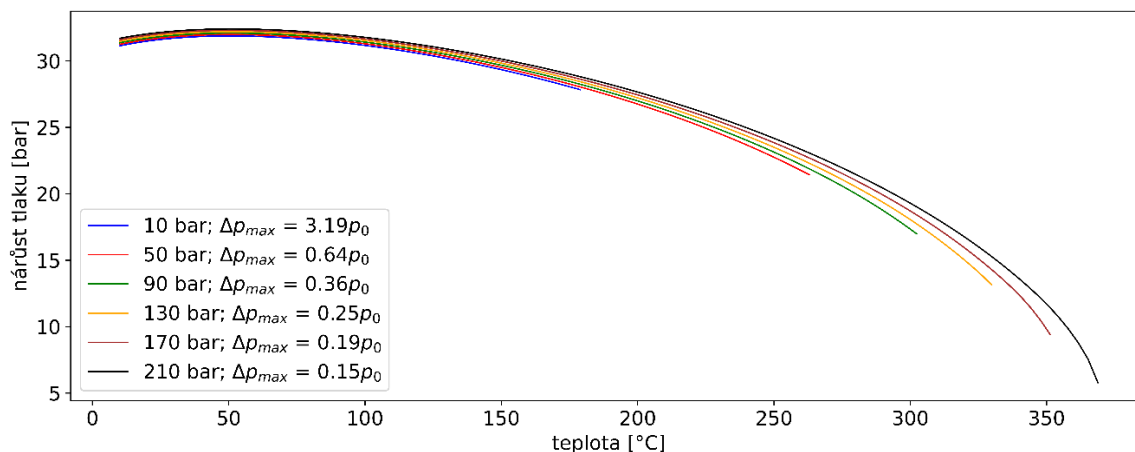
Porovnáním obou grafů lze vidět, že absolutní hodnoty nárůstu tlaku jsou pro vodu při daných podmínkách ustáleného proudění zhruba konstantní, kdežto pro páru se výrazně mění. Pokud se ale podíváme na maximální nárůst tlaku relativně k tlaku ustáleného stavu, zjistíme, že pro páru se tato hodnota příliš nemění a zůstává přibližně stejná - cca  $15 \pm 2$  % tlaku ustáleného stavu. Naopak v případě vody se tato relativní hodnota mění velmi výrazně. V případě ustáleného tlaku 10 bar lze dokonce vidět nárůst tlaku na 320 % ustálené hodnoty.



Obrázek 9.3: Závislost nárůstu tlaku v parním potrubí na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu pro konstantní rychlost proudění (50 m/s) a průřezu potrubí

Pokud bychom uvažovali navýšení návrhového tlaku potrubí z důvodu bezpečnosti pro parní i vodovodní potrubí o stejnou hodnotu, vodní ráz by se jevil jako podstatně nebezpečnější. Je však třeba uvědomit si i rozdílné hodnoty teplot pro parní a vodní aplikace. Parní potrubí, a to zejména ta pro páru o vysokých parametrech (např. ostrá pára pro parní turbínu), jsou totiž pevnostně velmi namáhána kombinací vysokého tlaku a teploty, kdy se materiál nachází v oblasti tečení (z angl. *creep*). V této oblasti je dovolené napětí výrazně nižší než u aplikací při nižších teplotách. V tomto případě může i nepříliš vysoký nárůst tlaku způsobit porušení celistvosti potrubního systému nebo jeho komponent. Také rychlost zapůsobení bezpečnostních prvků bývá u parních potrubí velmi rychlá, což vede k dosažení hodnot odpovídajících

totálnímu rázu. U vodovodních potrubí bývá naopak rychlost zapůsobení uzavíracích prvků řádově pomalejší. Vodovodní řady také bývají navrženy na nižší tlaky média a do jisté míry nemusí mít nárůst tlaku vlivem vodního rázu dopad do návrhu potrubí, protože potrubí může mít dostatečnou pevnostní rezervu. Je tedy nutné každou jednotlivou úlohu pečlivě zhodnotit a přistoupit k jejímu řešení vždy podle daných okrajových podmínek konkrétního případu.



Obrázek 9.4: Závislost nárůstu tlaku ve vodovodním potrubí na teplotě a tlaku v ustáleném stavu podle Žukovského vztahu pro konstantní rychlost proudění (3 m/s) a průřezu potrubí

## 10. Závěr

Tato práce slouží jako průzkum a základní shrnutí problematiky vodního rázu v soustavách potrubí, především v řadu chladicí vody pro chlazení kondenzátoru parní turbíny. Představuje způsoby výpočtu použitelné v projekční fázi a shrnuje výhody a nevýhody jednotlivých způsobů výpočtu.

V úvodu byl popsán základní princip, obecné příčiny a důsledky a způsoby tlumení vodního rázu. Dále byly popsány tři metody výpočtu vodního rázu – Žukovského metoda totálního a částečného rázu, graficko-analytická metoda a numerický výpočet metodou charakteristik. Pro jednotlivé metody bylo představeno jak jejich fyzikální pozadí včetně odvození, tak i jejich praktická aplikace. Byl představen reálný příklad potrubní trasy, kde vodní ráz běžně nastává a je třeba jeho velikost ověřovat. Na daný příklad byly aplikovány tři dříve popsané metody a výsledky jednotlivých metod byly následně vzájemně porovnány. Nakonec byl zhruba představen problém parního rázu hlavně z hlediska podobnosti a rozdílnosti vůči rázu vodnímu.

Žukovského metoda totálního a částečného rázu se ukázala jako nevhodná pro případ vodního rázu vlivem výpadku pohonu čerpadla. Důvodem byla neznalost doby do zastavení toku média ze zadání úlohy a její náročný výpočet.

Graficko-početní metodou bylo provedeno řešení příkladu pro jeden set rázových vln se zaměřením na problém přetržení vodního sloupce při nastalém podtlaku. Řešení bylo provedeno pouze pro trasu výtlačku čerpadla a také bylo omezeno na jeden cyklus přetržení a následné spojení vodního sloupce z důvodu přehlednosti. Kompletní řešení je přiloženo v příloze A. Bylo vysvětleno, že toto řešení je z vícera důvodů pouze orientační s možnou odchylkou i několika desítek procent. Nicméně vzhledem k průhlednosti a jednoduchosti zpracování základní podoby tohoto řešení je pro orientační výpočet daného příkladu vhodnější než v této práci použitá podoba numerického výpočtu.

Metodou charakteristik byl proveden numerický výpočet pro všechny body zadaného potrubí pro časový úsek 30 s od momentu výpadku pohonu čerpadla. Sledovány byly pouze hlavní body odpovídající okrajovým podmínkám trasy výtlačku čerpadla. Přímým výstupem numerického řešení byl textový soubor s výsledky pro všechny body výpočtu. Druhotným výstupem byly grafy průběhu hodnot v čase ve zmíněných bodech. Tyto grafy jsou v práci uvedeny a v příslušné kapitole byly popsány jejich hlavní znaky. Numerickým řešením byly zjištěny podstatně nižší hodnoty nárůstu tlaku oproti řešení graficko-početní metodou. Ač se od numerického řešení nižší hodnoty očekávaly, velikost jejich rozdílu vede k pochybám o správnosti řešení a použití dat získaných zde použitým numerickým výpočtem k návrhu skutečného potrubí je až do ověření jejich správnosti nevhodné. Správnost výsledků by však vyžadovala minimálně simulaci ověřeným výpočetním programem nebo lépe získáním skutečných naměřených dat na podobném potrubí. I do ověřeného programu by však byla vnášena nepřesnost neznalostí přesného chování čerpadla při jeho doběhu, a i toto řešení by se mohlo od skutečnosti značně lišit.

Pro získání spolehlivého a ověřitelného výpočtového modelu pro návrh a kontrolu skutečného potrubí by bylo zapotřebí tři až čtyř dalších prací rozsahem podobných této, které by se zaměřily na částečné problémy celkového výpočtu. Bylo by potřeba získat pochopení a výpočtový model přesného chování čerpadla při doběhu, který by se dal následně aplikovat jako okrajová podmínka výpočtu vodního rázu (tomuto problému věnovali kapitoly např. Wylie a Streeter [7] nebo Chaudry [10]). Dále by bylo potřeba získat detailní popisy funkcí a výpočtové modely dalších možných ochranných zařízení, jako jsou vzdušníky, vyrovnávací komory a zavzdušňovací a další ventily. Takto získané podrobné modely by se následně



zakomponovaly do řešení vodního rázu metodou charakteristik s důrazem na obecnost řešení a možností aplikace na různé skutečné případy potrubních tras včetně větvených potrubních sítí (způsoby řešení komplexních sítí popisují např. Wylie a Streeter [7] nebo Záruba [6]). Konečně by bylo třeba ověřit data získaná výpočtovým modelem. To by znamenalo buď získání dat z podobných realizovaných potrubních řadů, nebo vytvoření testovacího zařízení. Vytvoření testovacího zařízení by vzhledem k rozsáhlosti takovýchto sítí pravděpodobně vyžadovalo provedení dimenzionální analýzy problému vodního rázu a škálování zkoumané potrubní trasy na modelovou velikost a následné provedení měření na modelu (bezrozměrnému řešení vodního rázu se věnuje např. Allievi [3]).

## Reference

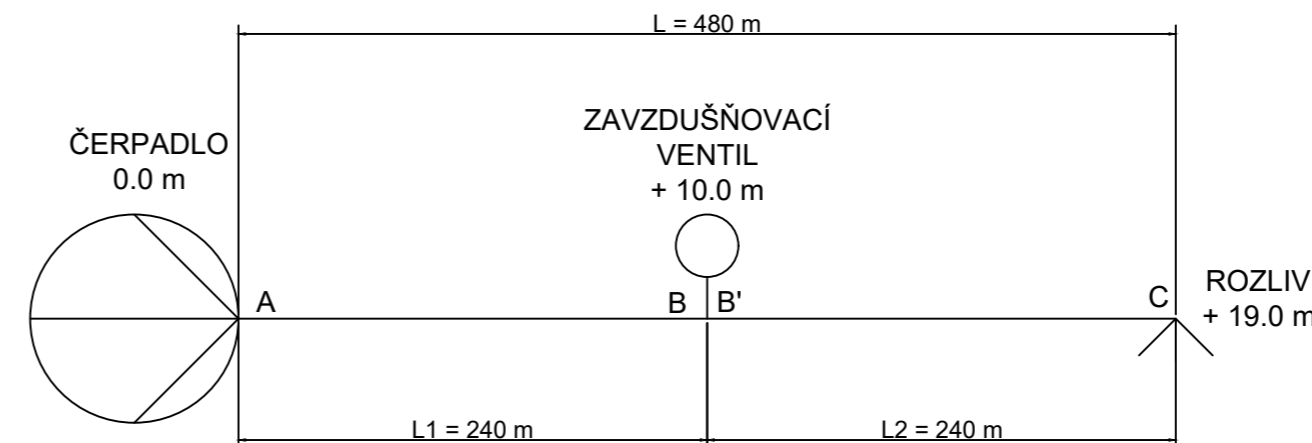
- [1] N. J. Žukovskij, Über den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren, Petrohrad: Císařská akademie věd v Petrohradu, 1900.
- [2] L. Allievi, „Teoria Generale del moto perturbato dell'aqua nei tubi in pressione (General Theory of the variable motion of water in pressure conduits),“ *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani*, 1902.
- [3] L. Allievi, Theory of Water-Hammer, Řím: Typography Riccardo Garroni, 1925.
- [4] R. Skalák, „An Extension of Theory of Water Hammer,“ *ASME Journal*, 1 Leden 1955.
- [5] K. Haindl, Hydraulický ráz ve vodovodních a průmyslových potrubích, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1963.
- [6] J. Záruba, Hydraulický ráz v soustavách potrubí, Praha: Academia - nakladatelství Československé akademie věd, 1984.
- [7] B. E. Wylie a V. L. Streeter, Fluid Transients, McGraw-Hill International Book Company, 1978.
- [8] B. B. Sharp, Water Hammer - Problems and Solutions, Londýn: Edward Arnold (Publishers) Ltd., 1981.
- [9] B. B. Sharp a D. B. Sharp, Water Hammer: Practical Solutions, Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996.
- [10] H. M. Chaudry, Applied Hydraulic Transients, New York: Springer-Verlag, 2014.
- [11] J. Noskovič, Hydromechanika, Ostrava: Vysoká škola báňská v Ostravě, 1980.
- [12] A. Tijsseling a A. Anderson, A. Isebre Moens and D. J. Korteweg: On the speed of propagation of waves in elastic tubes, Lisabon: BHR Group: Proceedings of 11th International Conferences on Pressure Surges, 2012.
- [13] Engineering Toolbox, „Young's Modulus - Tensile and Yield Strength for common Materials,“ 2003. [Online]. Available: [https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d\\_417.html](https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html). [Přístup získán 12 Květen 2021].
- [14] J. F. Kennedy a H. Kinno, „Water-Hammer Charts for Centrifugal Pump Systems,“ *Journal of the Hydraulics Division*, pp. 247-270, Květen 1965.
- [15] J. Parmakian, Waterhammer Analysis, New York: Dover Publications, 1963.
- [16] E. Ruus a B. Karney, „Charts for water hammer in pipelines resulting from valve closure from full opening only,“ *Canadian Journal of Civil Engineering*, pp. 241-264, Prosinec 1985.
- [17] E. Ruus, B. Karney a F. El-Fitiany, „Charts for water hammer in low head pump discharge lines resulting from water column separation and check valve closure,“ *Canadian Journal of Civil Engineering*, pp. 717-742, 11 1984.

- [18] R. Žitný, „Numerická analýza procesů,“ Ústav procesní a zpracovatelské techniky ČVUT FS, Praha, 2010.
- [19] M. Hočevar, Introduction to Turbine Machinery, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2018.

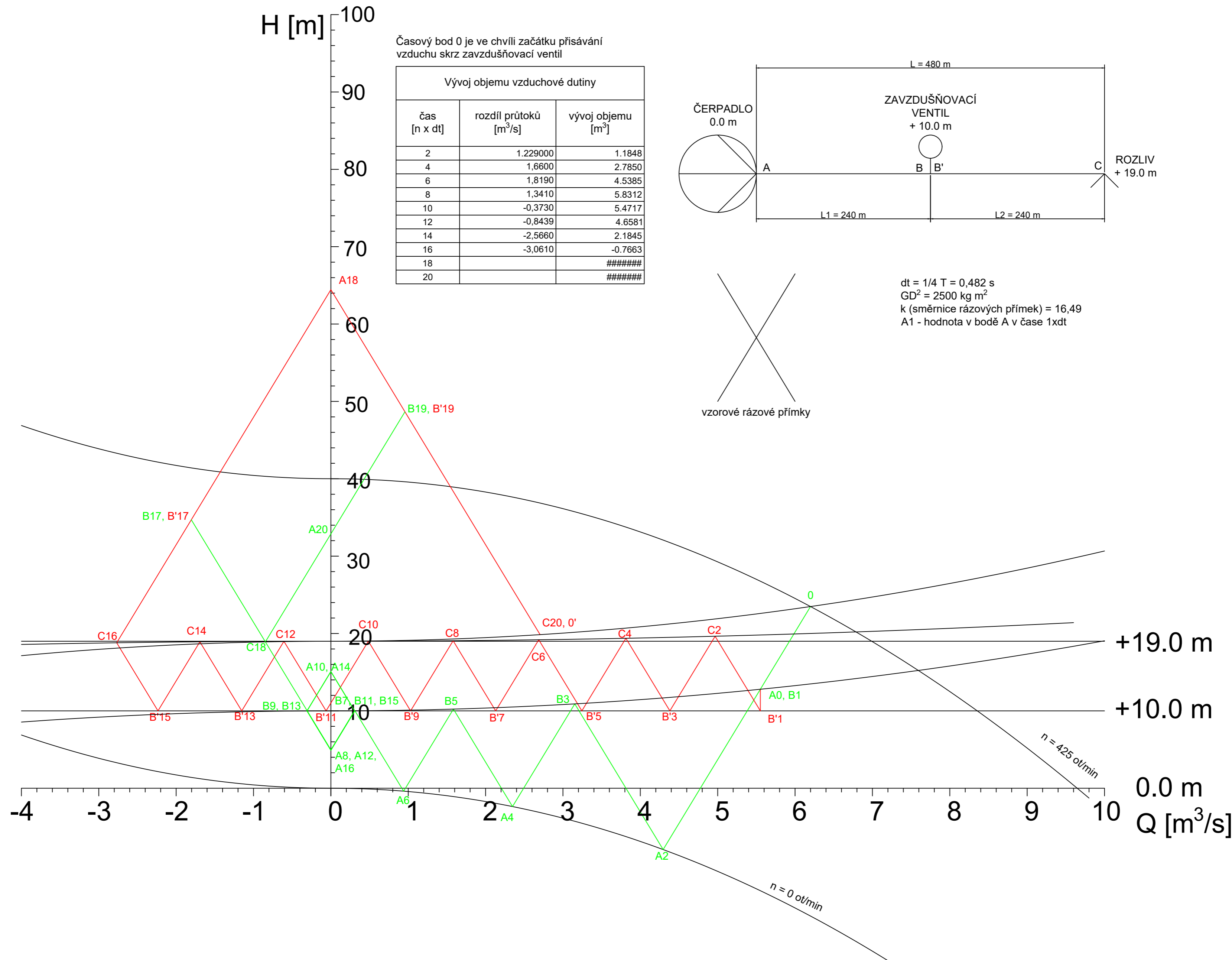
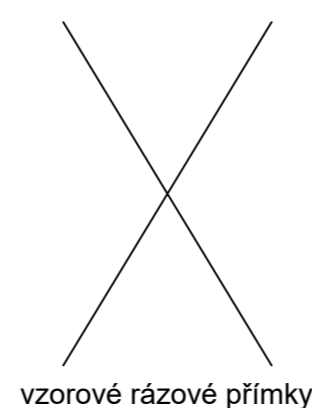
H [m]

Časový bod 0 je ve chvíli začátku přísávání vzduchu skrz zavzdušňovací ventil

Vývoj objemu vzduchové dutiny		
čas [n x dt]	rozdíl průtoků [m³/s]	vývoj objemu [m³]
2	1.229000	1.1848
4	1.6600	2.7850
6	1.8190	4.5385
8	1.3410	5.8312
10	-0.3730	5.4717
12	-0.8439	4.6581
14	-2.5660	2.1845
16	-3.0610	-0.7663
18		#####
20		#####



dt = 1/4 T = 0,482 s  
 GD² = 2500 kg m²  
 k (směrnice rázových přímek) = 16,49  
 A1 - hodnota v bodě A v čase 1xdt



## Kód 5: Funkce pro výpočet hodnot tlaku a průtoku v místě zavzdušnění

```

def airInlet(p, pA, pB, QA, QB, hAirInlet, time):
    global beta, QC_var, pC_var, Vv, Qv, cA_var, cB_var
    cA(pA, QA)
    cB(pB, QB)
    if (cA_var + cB_var) / 2 > hAirInlet*rho*g + pa:
        p = (cA_var + cB_var) / 2
    else:
        p = hAirInlet*rho*g + pa - dpv
        beta = p / (hAirInlet * rho * g + pa)
        if Vv <= 0 and beta > 1: # Ventil je zaplněn vodou a v potrubí je
přetlak
            pC_var = (cA_var + cB_var) / 2
            QC_var = (cA_var - cB_var) / (2 * B)
        elif Vv > 0 and beta > 1: # Ve ventilu je vzduch a v potrubí je
přetlak
            Qv = math.pi / 4 * dv ** 2 * (cAI * (1 - (1/beta) ** ((kappa - 1) /
kappa))) ** (1 / 2)
            pC_var = (cA_var + cB_var) / 2
            QC_var = (cA_var - pC_var) / B - Qv
            Vv = Vv - Qv * dt
            if Vv < 0:
                Vv = 0
                QC_var = (cA_var - cB_var) / (2 * B)
                pC_var = cA_var - B * QC_var
            elif beta < 1: # V potrubí je podtlak a ventil nasává vzduch
                Qv = math.pi / 4 * Dv ** 2 * (cAI * (1 - (beta) ** ((kappa - 1) /
kappa))) ** (1 / 2)
                pC_var = hAirInlet*rho*g + pa
                QC_var = (cA_var - pC_var) / B + Qv
                Vv = Vv + Qv * dt
            elif beta == 1: # V potrubí je atmosférický tlak
                pC_var = (cA_var + cB_var) / 2
                if pC_var < hAirInlet*rho*g + pa:
                    pC_var = hAirInlet*rho*g + pa - dpv
                QC_var = (cA_var - pC_var) / B
            if pC_var < hAirInlet*rho*g + pa: # kontrola nově vypočteného
tlaku na podtlak
                pC_var = hAirInlet*rho*g + pa
                QC_var = (cA_var - pC_var) / B

```

## Kód 6: Hlavní funkce numerického výpočtu

```

def MoC():

    print('výpočet množství úseků')
    # výpočet celkové délky trasy po elementárních úsecích
    L_steps = 0
    for i in range(0, len(topology)):
        if topology.iat[i,0] > 0:
            L_steps = L_steps + topology.iat[i,0]/dx
        else:
            L_steps = L_steps + 1
    L_steps = int(L_steps)

    # Definice polí
    print('definice polí')
    Q = [[0 for x in range(L_steps)] for y in range(t_steps)] # pole
průtoků v čase (y) a prostoru (x)
    p = [[0 for x in range(L_steps)] for y in range(t_steps)] # pole
tlaků v čase (y) a prostoru (x)
    dV = [A*dx for x in range(L_steps)] # pole zaplnění potrubí

    # Výpočet počátečního stavu
    print('výpočet ustáleného stavu')
    K = 1
    p[0][0] = p0 # tlak v prvním bodě systému v počátečním stavu
    Q[0][0] = Q0 # průtok v prvním bodě systému v počátečním stavu
    for j in range(1, len(topology)): # výpočet úseků potrubí
        if re.search('pump', topology.iat[j, 2]):
            Q[0][K] = Q0
            dpPump0 = p[0][K-1] + odporTrasy(Q0)
            p[0][K] = dpPump0
            K = K+1
        elif topology.iat[j,0] == 0: # výpočet součástí potrubí
            Q[0][K] = Q0
            p[0][K] = p[0][K-1]
            K = K+1
        else: # výpočet potrubí
            l_steps = int(topology.iat[j, 0] / dx) # délka úseku ve
formě elementárních částí
            dz = dx * topology.iat[j, 1] / topology.iat[j, 0] #
elementární převýšení
            for k in range(0, l_steps): # výpočet funkce úseku potrubí
                Q[0][K] = Q0
                p[0][K] = p[0][K-1]-R*Q[0][K]*abs(Q[0][K])
                K = K+1

    if j == len(topology)-1:
        global pOut
        pOut = p[0][K-1]

```

Pokračování na další straně.

## Pokračování kódu 6:

```

# výpočet průběhu rázu
print('výpočet rázu')
for i in range (0, t_steps-1): # výpočet v čase od 0 sekund do t
    sekund po úsecích dt
    percentage(i)
    K = 0

    for j in range (0, len(topology)): # výpočet úseků potrubí

        if topology.iat[j,0] == 0: # 0 znamená okrajovou podmínku
            eval(topology.iat[j, 2]) # výpočet funkce příslušné
okrajové podmínky
            p[i + 1][K] = pC_var
            Q[i + 1][K] = QC_var
            K=K+1
        else:
            l_steps = int(topology.iat[j,0]/dx) # délka úseku ve
formě elementárních částí
            for k in range (0, l_steps): # výpočet funkce úseku
potrubí
                pipeline(p[i][K-1], p[i][K+1], Q[i][K-1], Q[i][K+1],
i, K) # výpočet funkce potrubí
                p[i+1][K]=pC_var
                Q[i+1][K]=QC_var
                K=K+1

# zápis dat do souboru MoC_output.csv
print('zápis výsledků do souboru')
with open('D:\škola\DP_data\MoC_ex_output_p.csv', 'w', newline='') as
outputFile:
    writer = csv.writer(outputFile, delimiter=';', quotechar='|',
quoting=csv.QUOTE_MINIMAL)
    for i in range (0, t_steps-1):
        writer.writerow(p[i])
    with open('D:\škola\DP_data\MoC_ex_output_Q.csv', 'w', newline='') as
outputFile:
        writer = csv.writer(outputFile, delimiter=';', quotechar='|',
quoting=csv.QUOTE_MINIMAL)
        for i in range (0, t_steps-1):
            writer.writerow(Q[i])

```