Trendy v podnikání - Business Trends (2020), 10(3), 57-63.
https://doi.org/10.24132/jbt.2020.10.3.57_63

OPTIMALIZAČNÍ PROCEDURA PRO AGREGACI POŘADÍ V ÚLOHÁCH VÍCEKRITERIÁLNÍHO ROZHODOVÁNÍ
OPTIMIZATION-BASED PROCEDURE FOR AGGREGATION OF RANKINGS IN MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING PROBLEMS

Josef Jablonský[1]

[1] prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie, jablon@vse.cz

Abstract: There are many different methods for analysis of multiple criteria decision-making problems. Considering the problems for evaluation of alternatives, a typical situation is that the application of various methods leads to different results, i.e. each method generates different ranking of alternatives. A similar situation occurs in case a certain number of individual decision-makers participates in the analysis of a problem. The paper contains a proposal of optimization procedures that aggregates several individual rankings into one final ranking. As a result, the decision-maker obtains an aggregated ranking that is based either on the minimization of the weighted sum of deviations of individual rankings from the final ranking or on the minimization of the maximum deviation over all individual rankings. The applicability of the procedures is illustrated on a simple numerical example.

Keywords: multiple criteria decision-making, ranking, optimization, goal programming

JEL Classification: C44

ÚVOD

V mnoha reálných situacích se rozhodovatelé setkávají s potřebou získat finální pořadí analyzovaných jednotek na základě několika individuálních pořadí. Taková potřeba může vzniknout při řešení úloh vícekriteriálního hodnocení variant, kde je soubor variant posuzovaný podle celé řady hodnotících kritérií. Při použití různých metod, kterých byla navržena v minulosti celá řada, dochází zpravidla k výsledkům, které nejsou typicky identické, a často se poměrně významně liší. Mezi nejčastěji používané metody vícekriteriálního hodnocení variant patří AHP, metody třídy ELECTRE, metody třídy PROMETHEE, TOPSIS, WSA a nemálo dalších. Je tedy nutná agregace individuálních pořadí do jednoho finálního. Možností, jak k tomu přistoupit, je celá řada – od prostého součtu individuálních pořadí až po různé více či méně sofistikované přístupy.

Potřeba agregace individuálních pořadí se vyskytuje dále v úlohách skupinového rozhodování, kde každý rozhodovatel jistým způsobem dojde ke „svému“ pořadí hodnocených jednotek, kandidátů apod. Podobné úlohy se vyskytují ve volebních systémech nebo v modelech hodnocení efektivnosti produkčních jednotek pomocí modelů analýzy obalu dat. Jedním z často požadovaných uživatelských výstupů v modelech analýzy obalu dat (DEA modely) je uspořádání hodnocených jednotek. Při použití různých modelů bývají častá různá pořadí, která je potom nutné agregovat do finálního uspořádání. Otázky uspořádání hodnocených jednotek jsou vůbec v DEA modelech velmi často a podrobně diskutované. Základní DEA modely, tak jak byly navrženy v (Charnes, Cooper a Rhodes, 1978) a dále v (Banker, Charnes, a Cooper, 1884), rozdělují hodnocené jednotky na efektivní a neefektivní. Neefektivní lze uspořádat podle jejich měr efektivnosti (čím vyšší, tím lépe hodnocená). Efektivní jednotky mají ovšem identickou maximální míru efektivnosti (100%) a tudíž je nelze podle této charakteristiky rozlišit. Z tohoto důvodu byla navržena řada modelů pro uspořádání efektivních jednotek. Jejich aplikace vede pochopitelně zpravidla k různým výsledkům. Prvním z modelů této kategorie byl model super efektivnosti (Andersen a Petersen, 1993). Hojně využívanými DEA modely jsou SBM modely, které byly navrženy v (Tone, 2001) a následně rozpracovány v (Tone, 2002). Přehled DEA modelů této třídy je možné nalézt v monografii (Dlouhý, Jablonský a Zýková, 2018) nebo v článku (Jablonský, 2012).

Článek se věnuje modelům pro agregaci individuálních pořadí a formuluje originální modely této kategorie. V následující kapitole budou formulovány dva optimalizační modely pro agregaci pořadí. Další kapitola ukazuje podrobněji jejich možnosti aplikací. Další část článku ilustruje použití uvedených modelů na numerickém příkladu. Závěrečná část sumarizuje výsledky výzkumu a diskutuje potenciální oblasti dalšího rozvoje.

1. OPTIMALIZAČNÍ MODELY PRO AGREGACI POŘADÍ

Agregací pořadí se v poslední období věnovali (Mohammadi a Rezaei, 2020). Jejich přístup je však založený na jiném principu než ten, který budeme formulovat v tomto oddílu. Předpokládejme, že je k dispozici n individuálních uspořádání m jednotek (variant), kde r_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, je pořadí i-té jednotky v j-tém uspořádání. Cílem níže uvedeného modelu je agregovat individuální uspořádání všech jednotek, tzn. odvodit vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ s prvky, které představují agregované pořadí i-té jednotky. Optimalizační model, který minimalizuje vážený součet odchylek výsledného pořadí ode všech individuálních pořadí, vypadá takto:

Minimalizovat

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_j (d_{ij}^- + d_{ij}^+) \tag{1}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
& r_{ij} + d_{ij}^- - d_{ij}^+ = x_i, && i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n,\\
& \sum_{k=1}^{m} y_{ik} = 1, && i = 1,\dots,m,\\
& \sum_{i=1}^{m} y_{ik} = 1, && k = 1,\dots,m,\\
& x_i = \sum_{k=1}^{m} k.y_{ik}, && i = 1,\dots,m,\\
& y_{ik} - binary, && i,k = 1,\dots,m,\\
& d_{ij}^- \ge 0, d_{ij}^+ \ge 0, && i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n,
\end{aligned} \tag{2}$$

kde d_{ij}^-, d_{ij}^+ jsou záporné a kladné odchylkové proměnné prvků agregovaného uspořádání od prvků jednotlivých individuálních pořadí, w_j, $j = 1, \dots, n$, je váha j-tého individuálního uspořádání (v typickém případě jsou tyto váhy identické a nemusí proto být uvažovány). Binární proměnné y_{ik}, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, m$, jsou použity pro zajištění jednoznačnosti finálního agregovaného uspořádání (každé pořadí musí být ve výsledku obsažené pouze jednou). Hodnota $y_{ik} = 1$ vyjadřuje, že je i-tá jednotka ve výsledném agregovaném uspořádání na k-tém místě. Je-li tedy například $y_{51} = 1$, znamená to, že pátá jednotka je ve výsledném agregovaném uspořádání nejlepší, tedy na prvním místě.

Model (1)-(2) je možné modifikovat v tom smyslu, že nebudeme minimalizovat součet všech odchylek, ale součet maximálních odchylek výsledného uspořádání od jednotlivých dílčích uspořádání. Označme D_j, $j = 1, \dots, n$, maximální odchylku prvků agregovaného uspořádání od prvků j-tého individuálního uspořádání. Účelovou funkci je tedy možné zapsat jako:

Minimalizovat

$$\sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{3}$$

V upraveném modelu musí být dále soubor omezujících podmínek (2) rozšířený o podmínky:

$$d_{ij}^- + d_{ij}^+ \le D_j, \qquad i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n. \tag{4}$$

https://doi.org/10.24132/jbt.2020.10.3.57_63

Tyto podmínky zajišťují, že je absolutní hodnota všech odchylek prvků výsledného uspořádání od prvků j-tého uspořádání menší nebo rovna hodnotě proměnné Dj. Tímto způsobem se vlastně minimalizuje průměrná maximální odchylka výsledného pořadí od všech individuálních uspořádání. V případě, že bychom preferovali minimalizaci celkové maximální odchylky přes všechny jednotky a přes všechna individuální uspořádání, potom by se účelová funkce (3) a podmínky (4) musely modifikovat následovně:

Minimalizovat *DMAX* (5)

za podmínek (2) a podmínek

$$d_{ij}^{-} + d_{ij}^{+} \leq DMAX, \qquad i = 1,...,m, j = 1,...,n. \tag{6}$$

Oba upravené modely (2)-(4), a (2) a (5)-(6), mají obvykle více optimálních řešení. Proto je užitečné aplikovat v návaznosti na tento model lexikografický přístup. V prvním kroku tedy optimalizovat účelovou funkci (3) resp. (5) a následně minimalizovat součet odchylek (1) za podmínek

$\sum_{j=1}^{n} w_j D_j = D^*$ resp. $DMAX = DMAX^*$

kde D^* a $DMAX^*$ jsou optimální hodnoty účelových funkcí (3) a (5) z prvního kroku výpočtu.

2. MOŽNOSTI APLIKACÍ

Navržené modely mohou být aplikovány ve všech případech, kde je třeba pro získání celkového uspořádání hodnocených jednotek brát do úvahy individuální preference nebo dílčí uspořádání jednotek, ať se již k němu dojde jakýmkoliv způsobem. Následující 3 případy demonstrují pouze některé možné aplikace navržených procedur:

1. V úvodní části článku jsme se zmiňovali o tom, že tradiční DEA modely neumožňují rozlišit mezi jednotkami, které jsou identifikovány daným modelem jako efektivní, protože jim jsou přiřazeny maximální (a tedy identické) míry efektivnosti. Pro řešení tohoto problému byla v minulosti formulována celá řada modelů. Tyto modely jsou často založeny na velmi rozdílných principech a poskytují rozdílné výsledky. V obecném případě nejsou tedy uspořádání efektivních jednotek, získaná různými modely, identická. Navržené optimalizační procedury mohou být aplikovány pro získání jednoho finálního uspořádání buď efektivních, nebo i všech hodnocených jednotek. Tuto skutečnost budeme ilustrovat na numerickém příkladu v následující sekci článku.
2. Výše uvedené optimalizační procedury mohou být použity pro vlastní uživatelskou definici ukazatele, který umožní uspořádání efektivních nebo dokonce všech jednotek v DEA modelech. Pokud bychom v tradičním DEA modelu uvažovali *m* vstupů a *r* výstupů, potom je možné odvodit *m.r* dílčích měr efektivnosti jako poměrů jednotlivých výstupů a jednotlivých vstupů. Všechny efektivní jednotky podle některého z tradičních DEA modelů mohou být uspořádány podle všech takových dílčích měr efektivnosti. Potom lze těchto *m.r* dílčích pořadí agregovat pomocí navržených procedur do jednoho finálního pořadí a uvažovat jej jako výsledné uspořádání efektivních jednotek.

Jak již bylo uvedeno výše, uvedené optimalizační modely mohou být výhodně aplikovány pro získání celkového uspořádání hodnocených jednotek v úlohách vícekriteriálního hodnocení variant. Existuje celá řada metod pro tento typ problémů a obecně může každá z těchto metod vést k jiným výsledkům, tedy k jinému uspořádání variant. Mezi nejčastěji používanými metodami pro hodnocení variant jsou TOPSIS, metody tříd ELECTRE a PROMETHEE, AHP, VIKOR, WSA, a další. Podobně lze získat různá uspořádání variant, i když se použije pouze jedna metoda, ale na rozhodování se podílí více rozhodovatelů. Každý z nich má zpravidla jiné preference, což může významně ovlivnit celkové pořadí variant. Je tedy zřejmé, že agregační procedury formulované v tomto článku mohou být vhodným nástrojem i v takovém případě.

3. NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Pro ilustraci obou uvedených modelů budeme uvažovat příklad zpracovaný v článku (Jablonský, 2012). Jednalo se o hodnocení efektivnosti 194 bankovních poboček jedné komerční české banky. Jako vstupy byly použity provozní náklady v tisících Kč (I1), počet obyvatel v regionu působnosti dané pobočky (I2) a přepočtený počet zaměstnanců (I3). Jediné dva výstupy byly hodnota úvěrů v milionech Kč (O1) a celkový počet účtů spravovaných pobočkou (O2). Aplikace tradičního CCR DEA modelu vedla k tomu, že 12 poboček bylo identifikovaných jako efektivní. Úplný datový soubor se všemi vstupy a výstupy je k dispozici v (Jablonský, 2012) a na tomto místě jej nebudeme uvádět. Na základě všech dvojic výstupů a vstupů byly odvozeny dílčí míry efektivnosti, které jsou obsaženy v následující tabulce.

Tab. 1: Dílčí míry efektivnosti

DMU	O1/I1	O1/I2	O1/I3	O2/I1	O2/I2	O2/I3
26	0.90	2.01	18.39	158.38	0.35	3227.43
28	0.81	1.74	29.72	143.34	0.31	5242.80
37	0.94	0.42	33.33	133.90	0.06	4739.50
71	0.58	3.56	16.89	133.26	0.82	3896.29
79	0.52	5.72	22.00	95.10	1.05	4021.85
82	0.46	9.47	14.40	101.48	2.08	3170.80
83	0.55	5.72	14.50	123.70	1.29	3282.80
105	0.81	2.32	18.47	148.93	0.43	3390.00
133	0.68	6.52	18.98	115.96	1.11	3241.33
147	0.38	40.32	10.77	73.80	7.89	2107.33
182	0.80	4.63	28.77	116.56	0.67	4189.71
184	0.41	7.34	10.70	118.34	2.12	3091.00

Zdroj: Vlastní zpracování

Výsledky optimalizačních modelů jsou uvedeny v tab. 2. Prvních 6 sloupců obsahuje pořadí podle dílčích měr efektivnosti. Lze si všimnout, že jsou v některých případech výrazně odlišné. Poslední tři sloupce této tabulky obsahují agregované pořadí získané minimalizací součtu všech odchylek (SUM), minimalizací součtu maximálních odchylek (MM) a minimalizací celkové maximální odchylky (DMAX) s použitím dvoustupňového lexikografického přístupu. Poslední tři řádky tab. 2 ukazují hodnoty účelových funkcí všech tří modelů. V prvním případě je minimální součet všech odchylek 194, součet maximálních odchylek je 42 (průměrná maximální odchylka je tedy 7) a maximální celková odchylka je 11. Při minimalizaci součtu maximálních odchylek se výsledky samozřejmě otáčejí, tzn. minimální hodnota součtu maximálních odchylek je 34. Při tomto řešení je součet všech odchylek 214 a celková maximální odchylka je rovna 10. Poslední model dosahuje maximální odchylku pouze 7, ale suma všech odchylek je oproti dalším dvěma modelům extrémně vysoká.

Tab. 2: Uspořádání jednotek podle dílčích měr efektivnosti a výsledky agregace

DMU	O_1/I_1	O_1/I_2	O_1/I_3	O_2/I_1	O_2/I_2	O_2/I_3	SUM	MM	DMAX
26	2	10	7	1	10	9	9	5	3
28	3	11	2	3	11	1	2	1	4
37	1	12	1	4	12	2	1	2	5
71	7	8	8	5	7	5	7	8	12
79	9	5	4	11	6	4	4	6	11
82	10	2	10	10	3	10	10	10	9
83	8	6	9	6	4	7	8	9	10
105	4	9	6	2	9	6	6	7	2
133	6	4	5	9	5	8	5	4	6
147	12	1	11	12	1	12	12	11	8
182	5	7	3	8	8	3	3	3	1
184	11	3	12	7	2	11	11	12	7
Součet všech odchylek							**194**	**214**	**282**
Součet maximálních odchylek							**42**	**34**	**40**
Celková maximální odchylka *DMAX*							**11**	**10**	**7**

Zdroj: Vlastní zpracování

Výsledky, uvedené v tab. 2, jsme porovnali s pořadím efektivních jednotek, které bylo získáno pomocí několika běžných nástrojů pro uspořádání efektivních jednotek – převzato z (Jablonský, 2012). V této studii byly použity následující přístupy:

- AP - Andersen and Petersen model super efektivnosti (Andersen and Petersen, 1993).
- SBMT - SBM obecný model super efektivnosti (Tone, 2002).
- OPT/PES – koncept optimistické a pesimistické efektivnosti (Wang et al., 2007).
- CROSS – křížová efektivnost (Sexton et al., 1986).
- SBMG – model super efektivnosti na základě cílového programování (Jablonský, 2012).
- AHP - AHP míra super efektivnosti (Jablonský, 2012).

Uspořádání všech 12 efektivních jednotek podle uvedených 6 modelů je uvedené v tab. 3. Podobně jako v předchozí tabulce, obsahuje i tab. 3 výsledky agregace včetně hodnot účelových funkcí pomocí všech tří optimalizačních modelů.

Tab. 3 ukazuje, že je uspořádání získané pomocí modelů AP, SBMT, SBMG, a částečně i pomocí AHP, navzájem velmi blízké. Naopak, výsledky získané OPT/PES přístupem a pomocí křížové efektivnosti (CROSS) jsou od výsledků první skupiny relativně dost odlišné. Vzhledem k vyššímu počtu modelů první skupiny, vede aplikace optimalizační agregace k výsledkům, které jsou blízké k tradičním postupům (AP, SBMT). Porovnání agregovaných výsledků v obou tabulkách vykazuje značné rozdíly. Např. jednotka 147 je hodnocena jako úplně nejlepší pomocí tradičních DEA modelů stejně jako je nejlepší nebo téměř nejlepší při agregaci, jejíž výsledky jsou uvedené v tab. 3. Stejná jednotka je ovšem mezi nejhoršími při agregaci pořadí podle dílčích měr efektivnosti. Tento agregační výsledek je ovšem vcelku očekávaný, protože je tato jednotka nejhorší nebo téměř nejhorší podle všech dílčích měr efektivnosti s výjimkou dvou ukazatelů. Jednotka 147 má velmi nízký vstup I2 v porovnání s ostatními jednotkami, což vede k tomu, že dílčí poměry O1/I2 a O2/I2 jsou vůči ostatním extrémně vysoké. To vede k tomu, že tradiční modely super efektivnosti hodnotí tuto jednotku jako extrémně efektivní, ale agregační modely založené na dílčích měrách efektivnosti hodnotí tuto jednotku jako jednu z nejhorších.

Tab. 3: Uspořádání jednotek podle různých modelů a jejich agregace

DMU	AP	SBMT	OPT/PES	CROSS	SBMG	AHP	SUM	MM	DMAX
26	6	9	7	7	9	7	8	8	12
28	2	3	2	6	3	3	3	1	2
37	3	4	1	12	4	8	4	4	7
71	9	10	8	3	10	11	10	10	9
79	7	7	4	8	7	6	7	7	3
82	8	6	10	9	6	2	6	6	4
83	11	11	9	4	11	10	11	11	10
105	12	12	6	5	12	12	12	12	11
133	10	8	5	2	8	9	9	9	8
147	1	1	12	11	1	1	1	3	6
182	4	2	3	1	2	5	2	2	1
184	5	5	11	10	5	4	5	5	5
Součet všech odchylek							**134**	**146**	**11**
Součet maximálních odchylek							**29**	**27**	**9**
Ceková maximální odchylka *DMAX*							**200**	**33**	**6**

Zdroj: Vlastní zpracování

ZÁVĚR

Článek se věnuje modelům, které obecně umožňují agregovat dílčí pořadí (ať již získaná jakýmkoliv způsobem) do jednoho výsledného uspořádání hodnocených jednotek. Navržené modely mohou najít využití v úlohách vícekriteriálního hodnocení variant, skupinového rozhodování, v modelech analýzy obalu dat, ale i v dalších případech. Všechny použité modely jsou jednoduché, i když zatím nejsou zkušenosti s řešením úloh větších rozsahů. Modely mohou být rozšířeny v několika směrech, což poskytuje dobrý základ pro další výzkum. V mnoha případech jsou například dílčí pořadí uvažována jako velmi striktní. Tím je míněno, že velmi malý rozdíl v kriteriálních hodnotách vede k tomu, že je jedna jednotka třeba až několik míst za jednotkou jinou. Nastavení jistých prahů indiference by mohlo přinést řešení této nežádoucí situace. Modely mohu ovšem být rozšířeny i v dalších směrech.

Acknowledgements

Článek je zpracovaný v rámci projektu Interní grantové agentury VŠE v Praze, projekt č. F4/29/2020 – Dynamické modely analýzy obalu dat v ekonomickém rozhodování.

ZDROJE

Andersen, P. & Petersen, N.C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39(10), 1261–1264.

Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078–1092.

Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444.

Dlouhý, M., Jablonský, J. & Zýková, P. (2018). *Data Envelopment Analysis* (in Czech). Praha, Professional Publishing.

Jablonský, J. (2012). Multicriteria approaches for ranking of efficient units in DEA models. *Central European Journal of Operations Research*, 20(3), 435–449.

Mohammadi, M. & Rezaei, J. (2020). Ensemble ranking: Aggregation of rankings produced by different multiple-criteria decision-making methods. *Omega*, In press.

Sexton, T.R., Silkman, R.H. & Hogan, A.J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. In: Silkman RH (ed.) *Measuring efficiency: An assessment of data envelopment analysis*. CA: Jossey-Bass, San Francisco.

Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130(3), 498–509.

Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 143(1), 32–41.

Wang, Y.M., Chin, K.S. & Yang, J.B. (2007). Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society,* 58(7), 929–937.