

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
**FAKULTA STROJNÍ**

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 2302T013 Stavba energetických strojů a zařízení

# **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Proudění teplotnosného oleje při předeřevu lisovací formy

Autor: **Bc. Marek ŠVEJNOHA**

Vedoucí práce: **Ing. Vladimír KŘENEK**

Akademický rok 2019/2020

## **Prohlášení o autorství**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské/diplomové práce.

V Plzni dne: .....

.....  
podpis autora

## ANOTAČNÍ LIST DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>AUTOR</b>	<b>Příjmení</b> Švejnoha	<b>Jméno</b> Marek	
<b>STUDIJNÍ OBOR</b>	2302T013	Stavba energetických strojů a zařízení	
<b>VEDOUCÍ PRÁCE</b>	<b>Příjmení (včetně titulu)</b> Ing. Křenek	<b>Jméno</b> Vladimír	
<b>PRACOVISŤE</b>	ZČU – FST – KKE		
<b>DRUH PRÁCE</b>	<b>DIPLOMOVÁ</b>	<b>BAKALÁŘSKÁ</b>	<b>Nehodící se škrtněte</b>
<b>NÁZEV PRÁCE</b>	Proudění teplotnosného oleje při předehřevu lisovací formy		

<b>FAKULTA</b>	strojní	<b>KATEDRA</b>	KKE	<b>ROK ODEVZD.</b>	2020
----------------	---------	----------------	-----	--------------------	------

### POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)

<b>CELKEM</b>	66	<b>TEXTOVÁ ČÁST</b>	58	<b>GRAFICKÁ ČÁST</b>	0
---------------	----	---------------------	----	----------------------	---

<b>STRUČNÝ POPIS</b> <b>ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL</b> <b>POZNATKY A PŘÍNOSY</b>	<p>Cílem této práce je analýza proudění teplotnosného oleje a přenos tepla při předehřevu lisovací formy na vstříkávání plastů. Analýza byla provedena pomocí numerické simulace.</p> <p>Teoretická část práce pojednává o proudění tekutin a přenosu tepla a popisuje numerické metody používané k modelování těchto fyzikálních jevů.</p> <p>Praktická část popisuje řešení zadané úlohy, které zahrnuje vytvoření a úpravu výpočtového modelu, vytvoření výpočetní sítě, nastavení a průběh numerického výpočtu a vyhodnocení výsledků výpočtu. Na závěr jsou uvedeny doporučení pro úpravu tvaru formy za účelem optimalizace proudění oleje a přenosu tepla.</p>
<b>KLÍČOVÁ SLOVA</b>	numerická simulace, numerické modelování, proudění tekutin, přenos tepla, Fluent

## SUMMARY OF DIPLOMA SHEET

<b>AUTHOR</b>	Surname Švejnoha	Name Marek		
<b>FIELD OF STUDY</b>	2302T013      Design of power machines and equipment			
<b>SUPERVISOR</b>	Surname (Inclusive of Degrees) Ing. Křenek		Name Vladimír	
<b>INSTITUTION</b>	ZČU – FST – KKE			
<b>TYPE OF WORK</b>	<b>DIPLOMA</b>	<b>BACHELOR</b>	<b>Delete when not applicable</b>	
<b>TITLE OF THE WORK</b>	Flow of heat transfer oil during compression mould preheating			

<b>FACULTY</b>	Mechanical Engineering	<b>DEPARTMENT</b>	Power System Engineering	<b>SUBMITTED IN</b>	2020
----------------	---------------------------	-------------------	--------------------------------	---------------------	------

### NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

<b>TOTALLY</b>	66	<b>TEXT PART</b>	58	<b>GRAPHICAL PART</b>	0
----------------	----	------------------	----	-----------------------	---

<b>BRIEF DESCRIPTION TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS</b>	<p>The aim of the thesis is to analyse a flow and heat transfer of oil during preheating of a compression mould for injection moulding. The analysis was carried out by numerical simulation.</p> <p>The theoretical part of the thesis discusses fluid flow and heat transfer and describes numerical methods used for modeling of these physical phenomena.</p> <p>The practical part of the thesis describes a solution of given task consisting of a model creation and adjustment, a mesh generation, a simulation setup and process and evaluation of results. Finally, recommendations for the mould shape adjustment are stated in order to optimize an oil flow and heat transfer.</p>
<b>KEY WORDS</b>	numerical simulation, numerical modeling, fluid flow, heat transfer, Fluent

## **Poděkování**

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce, panu Ing. Vladimíru Křenkovi, a konzultantce práce, slečně Ing. Elišce Blažkové, za pomoc při vypracování.

Poděkovat bych chtěl také společnosti AFRY CZ s.r.o. za poskytnutí zadání a prostoru pro řešení.

Práci bych chtěl věnovat své mamince, která si ji už nepřečte, ale vždy mě bezmezně podporovala ve všem, čeho jsem se kdy snažil dosáhnout.

# Obsah

1	Úvod.....	1
	Část teoretická.....	2
2	Analytický popis přenosu .....	3
2.1	Kontinuum.....	3
2.2	Fyzikální vlastnosti látek .....	3
2.3	Přenos tepla.....	5
2.3.1	Přenos tepla kondukcí.....	5
2.3.2	Přenos tepla konvekcí.....	6
2.3.3	Kombinovaný přenos tepla.....	7
2.3.4	Rovnice energie .....	7
2.4	Přenos hmoty a hybnosti.....	8
2.4.1	Základní dělení proudění .....	8
2.4.2	Laminární a turbulentní proudění .....	9
2.4.3	Smykové oblasti .....	10
2.4.4	Stavové parametry .....	11
2.4.5	Stavová rovnice .....	12
2.4.6	Rovnice kontinuity .....	12
2.4.7	Navier-Stokesova rovnice.....	13
3	Numerické modelování .....	13
3.1	Diferenční metoda .....	14
3.2	Metoda konečných objemů.....	15
3.3	Chyba řešení .....	16
3.4	Iterace a reziduály.....	17
3.5	Numerické modelování proudění .....	18
3.5.1	DNS .....	18
3.5.2	LES .....	19
3.5.3	RANS .....	19
3.5.4	Operace časového středování .....	20
3.5.5	Reynoldsovy rovnice .....	20
3.5.6	Boussinesquova hypotéza.....	22
3.6	Modely turbulence RANS .....	22
3.6.1	Spalart-Allmaras.....	22
3.6.2	Modely $k-\epsilon$ .....	23
3.6.3	Modely $k-\omega$ .....	26

3.6.4	Model k-kl- $\omega$ Transition.....	27
3.6.5	Model Transition SST .....	27
3.6.6	Model RSM .....	27
3.7	Modely turbulence SRS .....	28
3.7.1	Model LES.....	28
3.7.2	Model DES .....	29
3.7.3	Model SAS .....	29
3.7.4	Model ELES .....	29
3.8	Model proudění u stěny .....	30
3.8.1	Přímé modelování.....	30
3.8.2	Stěnové funkce .....	31
3.9	Okrajové podmínky .....	31
3.9.1	OP kontinuity.....	31
3.9.2	OP turbulence .....	32
3.9.3	OP přenosu tepla.....	32
4	Výpočetní síť.....	33
4.1	Typy sítě .....	33
4.1.1	Hexahedrální síť .....	33
4.1.2	Tetraedrální síť .....	33
4.1.3	Polyhedrální síť .....	34
4.1.4	Kombinované sítě .....	34
	Část praktická.....	35
5	Zadání úlohy .....	36
5.1	Geometrický model .....	36
5.2	Cíl úlohy .....	38
5.3	Zadané parametry .....	38
5.3.1	Teplota oleje .....	38
5.3.2	Rychlost a tlak proudění systémem.....	38
5.3.3	Materiálové vlastnosti .....	38
5.3.4	Okrajové podmínky tepelného toku .....	39
5.3.5	Charakter proudění .....	39
6	Řešení úlohy.....	40
6.1	Příprava modelu.....	40
6.2	Úprava modelu .....	42
6.3	Vytvoření výpočetní sítě.....	43

6.4	Numerická simulace .....	44
6.4.1	Proudění studeného oleje.....	44
6.4.2	Proudění horkého oleje.....	45
7	Vyhodnocení výsledků.....	47
7.1	Proudění studeného oleje.....	47
7.1.1	Tlaková ztráta .....	47
7.1.2	Rychlost proudění.....	47
7.2	Proudění horkého oleje .....	49
7.2.1	Tlaková ztráta .....	49
7.2.2	Rychlost proudění.....	49
7.2.3	Přestup tepla .....	51
8	Návrh optimalizace .....	51
9	Závěr .....	54
	Seznam použitých symbolů.....	55
	Seznam obrázků .....	56
	Seznam tabulek .....	57
	Seznam použité literatury.....	58



# 1 Úvod

Cílem této diplomové práce je provedení analýzy proudění a přenosu tepla při předeřevu formy vstřikovacího lisu pomocí teplotního oleje. Analýza byla provedena numerickou simulací vytvořenou v programu Ansys Fluent.

Písemná část diplomové práce je rozdělena na dvě hlavní části: část teoretickou a část praktickou.

Teoretická část práce pojednává o řešení přenosu tepla, hmoty a hybnosti přístupem analytickým a přístupem numerického modelování. Obsahuje shrnutí důležitých poznatků teorie přenosu tepla a teorie laminárního a turbulentního proudění opírajících se o hypotézu o kontinuu. Dále obsahuje přiblížení metod numerického modelování přenosu tepla, hmoty a hybnosti a popis výpočetní sítě, na níž tyto metody operují. Závěr teoretické části je věnován prostředí programu Ansys Fluent a jeho jednotlivým modulům používaným v různých fázích numerické simulace.

Praktická část je věnována hlavnímu cíli diplomové práce, tedy samotné analýze proudění a přestupu tepla při předeřevu formy vstřikovacího lisu a následné optimalizaci tohoto procesu. Tato část je rozdělena na rozbor a popis daného problému, vytvoření výpočetní sítě, definování charakteristických vlastností teplotního oleje a materiálů formy důležitých pro výpočet, samotnou numerickou simulaci a následné vyhodnocení kritických oblastí problému a optimalizaci tvaru formy pro zefektivnění procesu jejího předeřevu.

Diplomová práce byla vytvořena pod záštitou firmy AFRY CZ s.r.o. (dodávna AF Engineering s.r.o.).

# Část teoretická

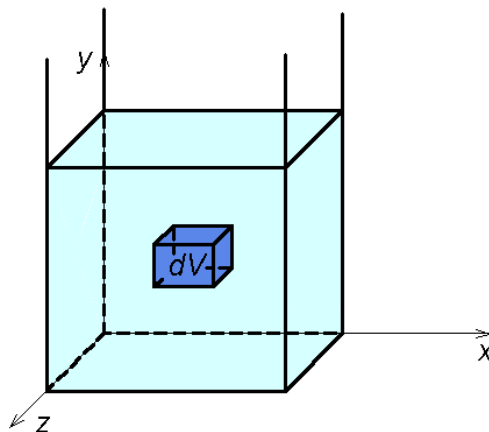
## 2 Analytický popis přenosu

Pro obor termomechaniky je zásadním úkolem sledování tepla a hybnosti hmoty v prostoru a čase a působení změn těchto vlastností jak na sledovanou oblast samotnou, tak na její bezprostřední okolí. Pro porozumění těmto jevům a možnost jejich analýzy je důležité definovat fyzikální vlastnosti a strukturu daného termomechanického systému.

### 2.1 Kontinuum

Z fyzikálního hlediska je struktura látek tvořená jejími stavebními částicemi, tedy molekulami. Molekuly se v látce mohou hýbat a interagovat mezi sebou. Tato molekulární struktura však není ideálním modelem pro výpočetní teorie v oblasti termomechaniky. Proto byla nahrazena příhodnějším modelem zvaným kontinuum.

Hypotéza o kontinuu představuje nahrazení molekulové struktury látky množinou jejích fyzikálních vlastností. Hodnoty těchto fyzikálních vlastností jsou přiřazeny každému bodu látky a při přechodu mezi jednotlivými body v prostoru a čase je možno je vyjádřit spojitými funkcemi. Tyto body jsou dostatečně malé vzhledem k rozměru sledované oblasti látky, ale zároveň dostatečně velké vzhledem ke střední délce volné dráhy molekuly. Bod, takto představující určité místo sledované oblasti látky, je nazýván elementárním objemem (nejedná se tedy o bod v pravém slova smyslu, neboť má objem).



Obrázek 2.1.1: Elementární objem tekutiny [1]

### 2.2 Fyzikální vlastnosti látek

Pro řešení proudění tekutin a přenos tepla do jejich okolí i uvnitř jich samotných jsou podstatné následující fyzikální veličiny.

#### Hustota $\rho$

Hustota neboli měrná hmotnost látky je definována jako poměr hmotnosti a objemu určité sledované části látky.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (2.2.1)$$

#### Teplota $T$

Teplota vyjadřuje vnitřní energii látky. Z molekulárního hlediska se jedná o míru kmitání částice látky kolem své středové polohy.

$$T = t[^\circ\text{C}] + 273,15 \quad [\text{K}] \quad (2.2.2)$$

### Tlak $p$

Tlak je definován jako síla působící na jednotku plochy. Pokud je tlak v tekutině rozložen rovnoměrně, lze ho vyjádřit jako poměr velikosti tlakové síly a plochy, na kterou působí.

$$p = \frac{F}{S} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}] = [\text{Pa}] \quad (2.2.3)$$

### Dynamická vazkost $\eta$ a kinematická vazkost $\nu$

Vazkost se projevuje při pohybu tekutiny. Představíme-li si pohyb tekutiny v řezu jako po sobě se vzájemně pohybující plochy mezi nimiž vzniká tření, je velikost tohoto tření rovna gradientu rychlosti ve směru kolmém na pohyb ploch vynásobenému právě dynamickou vazkostí  $\eta$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ] = [Pa·s] (tzv. Newtonův zákon pro laminární proudění).

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad [\text{Pa}] \quad (2.2.4)$$

Kinematická vazkost je pak rovna vazkosti dynamické dělené hustotou kapaliny.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (2.2.5)$$

### Specifické teplo $c$

Specifické teplo, nebo jiným názvem měrná tepelná kapacita, je definováno jako množství tepla, které je potřeba dodat jednomu kilogramu látky pro zvýšení její teploty o 1 K.

$$c = \frac{dQ}{m dT} \quad [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}] \quad (2.2.6)$$

Tento součinitel se vyskytuje ve dvou podobách  $c_p$  a  $c_v$ , které představují měrnou tepelnou kapacitu za konstantního tlaku a za konstantního objemu.

### Součinitel tepelné vodivosti $\lambda$

Součinitel tepelné vodivosti udává schopnost látky vést teplo. Je definován jako množství tepla, které projde jednotkovou plochou desky homogenního materiálu o jednotkové tloušťce za jednotku času směrem kolmým na plochu, je-li mezi oběma stranami desky jednotkový rozdíl teplot.

$$\lambda = \frac{d}{t S \Delta T} Q \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}] \quad (2.2.7)$$

### Teplotní roztažnost ( $\gamma$ )

Teplotní roztažnost způsobuje změnu objemu látky při změně její teploty a za konstantního tlaku. Míru této změny vyjadřuje součinitel teplotní roztažnosti  $\gamma$ .

$$\gamma = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad [-] \quad (2.2.8)$$

### Objemová stlačitelnost ( $\epsilon$ )

Objemová stlačitelnost způsobuje změnu objemu látky při změně jejího tlaku a za konstantní teploty. Míru této změny vyjadřuje součinitel objemové stlačitelnosti  $\epsilon$ .

$$\epsilon = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad [-] \quad (2.2.9)$$

### Tlaková rozpínavost ( $\beta$ )

Tlaková rozpínavost způsobuje změnu tlaku látky při změně její teploty a za konstantního objemu. Míru této změny vyjadřuje součinitel tlakové rozpínavosti  $\beta$ .

$$\beta = \frac{1}{p} \frac{dp}{dT} \quad [-] \quad (2.2.10)$$

## 2.3 Přenos tepla

Přenos tepla sestává ze tří základních mechanismů:

- Kondukcce (vedení)
- Konvekce (proudění)
- Radiace (sálání)

Konduktivní přenos tepla probíhá v pevných látkách, kapalinách a plynech. U kapalin a plynů tento jev probíhá zejména v klidovém stavu (bez proudění) nebo při laminárním proudění (v tom případě je směr kondukcce kolmý na směr proudění). Při proudění turbulentním ke kondukcce dochází také, ovšem v tak malé míře ve srovnání s konvektivním prouděním, že lze jeho vliv na přenos tepla mnohdy zanedbat. Jedná se o předávání tepla mezi jednotlivými částicemi látky na základě teplotního gradientu a bez jejich pohybu a vzájemného přemísťování a mísení.

Konvektivní přenos tepla probíhá v kapalinách a plynech. Jedná se o přenos tepla pohybem a mísením částic látky. Teplo tedy v tomto případě nepřestupuje mezi jednotlivými částicemi, jako je tomu u kondukcce, ale je přenášeno společně s pohybující se částicí. Při laminárním proudění tedy probíhá konvekce pouze ve směru rovnoběžném se směrem proudění, zatímco při proudění turbulentním respektuje různé směry pohybu všech jednotlivých molárních částic (shluků molekul) látky. Tyto molární částice formují turbulentní víry, díky nimž dochází k masivnímu mísení částic a návazně i přenosu tepla.

Radiační přenos tepla probíhá u pevných látek, kapalin a plynů složených ze tří a víceatomových molekul (např. vodní pára sálá, kyslík nesálá). Jedná se o přenos tepla elektromagnetickým vlněním. Do okolí těles sálá slabá povrchová vrstva o tloušťce cca  $10^{-12}$  m, přičemž tepelné účinky mají pouze vlny o vlnové délce  $0,35 \div 40 \mu\text{m}$ . Elektromagnetické vlnění, a tedy i radiační přenos tepla, se šíří i ve vakuu.

V této práci bude dále věnována pozornost prvním dvěma mechanismům (kondukcce a konvekce).

### 2.3.1 Přenos tepla kondukcce

Základní princip vedení tepla vyjadřuje tzv. Fourierův zákon

$$q = -\lambda \nabla T \quad [W \cdot m^{-2}], \quad (2.3.1)$$

kde  $q$  je hustota tepelného toku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti a  $\nabla T$  je teplotní gradient, který představuje podíl přírůstku teploty  $dT$  mezi dvěma izotermními plochami ku kolmé vzdálenosti těchto ploch  $dx$ .

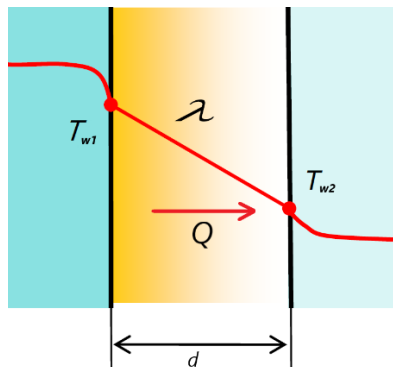
$$\nabla T = \frac{dT}{dx} \quad [K \cdot m^{-1}] \quad (2.3.2)$$

Záporné znaménko na pravé straně rovnice 2.3.1 vyjadřuje skutečnost, že tepelný tok vždy proudí ve směru záporného teplotního gradientu, tedy z místa vyšší teploty do místa teploty nižší.

Při uvažování vedení tepla plochou desky homogenního materiálu a konstantní tloušťky s rozdílnou teplotou na obou stranách se dá množství tepla, které projde deskou za určitý časový interval vyjádřit jako

$$Q = \lambda S \frac{\Delta T}{d} t \quad [J], \quad (2.3.3)$$

kde  $Q$  je množství převedeného tepla,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti desky,  $S$  je plocha prostupu deskou,  $d$  je tloušťka desky,  $\Delta T$  je rozdíl teplot a  $t$  je časový interval.



Obrázek 2.3.1: Vedení tepla deskou [1]

### 2.3.2 Přenos tepla konvekcí

Přenos tepla konvekcí je jev úzce spjatý s prouděním tekutiny, neboť teplo je v tomto případě transportováno spolu s jeho nositelem, částicí. V návaznosti na úvahu z předešlého oddílu 2.3.1 o vedení tepla homogenní deskou lze uvažovat následný přestup tepla z okraje desky do okolního prostředí tvořeného tekutinou. K čisté kondukcí tepla do okolní tekutiny by docházelo v případě, kdy by tekutina byla v naprostém klidu (s nulovou rychlostí), proudila by laminárně anebo, v případě turbulentního proudění, jen ve velmi tenké vazké podvrstvě v blízkosti stěny, kde má proudění laminární charakter. V opačném případě je teplo přenášeno kombinací mechanismů kondukcí a konvekcí, z nichž v závislosti na míře turbulence proudění mívá konvekce větší význam.

Konvekci dělíme na dva základní typy:

- Volnou (přirozenou) konvekci
- Nucenou konvekci

Volná konvekce je zapříčiněna pouze vztlakovou silou (vlivem gravitace), kdy tekutina o vyšší teplotě (a nižší hustotě) stoupá vzhůru, zatímco tekutina o nižší teplotě (a vyšší hustotě) klesá dolů. Naproti tomu nucená konvekce je vyvolána vnějšími silovými účinky na tekutinu (např. čerpadlem nebo ventilátorem) a účinky gravitace jsou v tomto případě zanedbatelné.

Množství tepla při přestupu z okraje tělesa do okolního prostředí je dán vztahem:

$$Q = \alpha(T_f - T_w)St \quad [J], \quad (2.3.4)$$

kde  $Q$  je množství tepla,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $T_f$  je ustálená teplota tekutiny v dostatečné vzdálenosti od stěny,  $T_w$  je teplota stěny,  $S$  je plocha přestupu a  $t$  je časový interval.

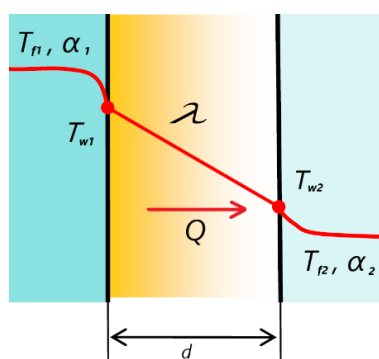
Součinitel přestupu tepla  $\alpha$  pak vyjadřuje míru přestupu tepla ze stěny do tekutiny (nebo opačným směrem) a závisí především na charakteru proudění tekutiny. Je definován vztahem

$$\alpha = \frac{q}{\Delta T} \quad [W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}]. \quad (2.3.5)$$

Pro prostup tepla z jedné tekutiny do druhé přes homogenní desku lze použít vztah:

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} (T_{f1} - T_{f2}) St = k(T_{f1} - T_{f2}) St \quad [J], \quad (2.3.6)$$

kde  $Q$  je množství tepla,  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou součinitele přestupu tepla na jedné a druhé straně desky,  $d$  je tloušťka desky,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti desky,  $T_{f1}$  a  $T_{f2}$  jsou teploty tekutiny na jedné a druhé straně desky,  $S$  je plocha prostupu a  $t$  je časový interval. Proměnná  $k$  [ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ] je pak součinitel prostupu tepla.



Obrázek 2.3.2: Prostup tepla deskou

### 2.3.3 Kombinovaný přenos tepla

Přenos tepla v tekutině bývá kombinací přenosu konduktivního a konvektivního. Poměr těchto dvou mechanismů, a tedy charakter přenosu tepla, vystihuje Nusseltovo podobnostní číslo:

$$Nu = \frac{\alpha d_h}{\lambda} \quad [-] \quad (2.3.7)$$

kde  $d_h$  je charakteristický rozměr oblasti.

Nusseltovo číslo bývá odhadováno empirickými vztahy většinou v závislosti na Reynoldsově čísle  $Re$ , které vystihuje charakter proudění tekutiny. V příslušné literatuře lze tak vyhledat empirické vzorce, určené pro výpočet Nusseltova čísla v závislosti na materiálových vlastnostech proudící tekutiny, charakteru proudění a geometrii průtočného prostředí.

### 2.3.4 Rovnice energie

Rovnice energie bilancuje změnu vnitřní energie ve sledovaném elementárním objemu spolu s příčinami této změny. Její obsah a význam je odvozen z univerzální bilance obecné fyzikální veličiny podle následujícího principu [2]:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Rychlost} \\ \text{akumulace} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Rychlost} \\ \text{přívodu} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Rychlost} \\ \text{odvodu} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Rychlost} \\ \text{vzniku} \end{array} \right] \quad (2.3.8)$$

Matematická formulace konkrétního případu, zde tedy energetické rovnice, potom uvažuje všechny možné způsoby a mechanismy změny a přenosu energie daného typu. Energetická rovnice je pak odvozena ve tvaru:

$$\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{\tau_{kl}}{\rho} \frac{\partial u_k}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_k}{\partial k} + \frac{q_z}{\rho}, \quad (2.3.9)$$

kde  $h$  je entalpie,  $p$  je tlak,  $\tau$  je smykové napětí,  $u$  je rychlost proudění,  $q_k$  je konduktivní teplo,  $q_z$  je teplo zdroje,  $\rho$  je hustota,  $t$  je čas a  $k, l$  jsou sčítací indexy. Levá strana rovnice představuje změnu energie látky v čase a členy na pravé straně představují postupně přeměnu kinetické energie na teplo třením (disipaci), difuzi tepla do okolí a generování tepla zdrojem.

Energetická bilanční rovnice se dále upravuje do tvaru tzv. Fourier-Kirchhoffovy rovnice

$$\underbrace{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}}_1 + \underbrace{\rho c_v u_k \frac{\partial T}{\partial k}}_2 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial k} \right)}_3 - \underbrace{T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \frac{\partial u_k}{\partial k}}_4 + \underbrace{\eta \phi_u}_5 + \underbrace{q_z}_6, \quad (2.3.10)$$

kde  $c_v$  je měrná tepelná kapacita za konstantního objemu,  $T$  je teplota,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\eta$  je dynamická vazkost a  $\phi_u$  je disipační funkce. Disipační funkce je složitou funkcí rychlostních gradientů, která zde podrobně rozepsána nebude. Jednotlivé členy rovnice mají následující význam:

1. člen – rychlost akumulace tepla na jednotku objemu
2. člen – rychlost konvektivního přívodu tepla
3. člen – rychlost konduktivního přívodu tepla
4. člen – rychlost změny energie od tlaku
5. člen – rychlost disipace kinetické energie na teplo
6. člen – rychlost přívodu tepla zdrojem

## 2.4 Přenos hmoty a hybnosti

Proudění tekutin, představující přenos hmoty a hybnosti, zkoumá velice rozsáhlý a složitý vědní obor. Pro jeho přiblížení k účelům této práce budou popsány základní charakteristiky, znaky a jevy vyskytující se v proudění a základní vztahy a metody, které proudění tekutin popisují.

### 2.4.1 Základní dělení proudění

Proudění lze rozdělit podle různých kritérií na následující základní typy [3].

Dle fyzikálních vlastností:

- Proudění ideální (dokonalé) kapaliny
  - Potenciální proudění (nevířivé) – částice se pohybují po svých přímočarých nebo křivočarých drahách, přičemž se neotáčí kolem vlastních os.
  - Vířivé proudění – částice se při translačním pohybu po svých drahách zároveň otáčejí kolem vlastních os.
- Proudění skutečných tekutin (s vnitřním třením)
  - Laminární proudění – částice se nepřemisťují po příčném průřezu proudění a pohybují se po drahách, které se navzájem nekřížují.
  - Turbulentní proudění – částice mají kromě své postupné rychlosti ještě flukтуаční (turbulentní) složku rychlosti, kvůli které se přemisťují po příčném průřezu proudění.

Dle kinematických hledisek:

- Dle prostorového uspořádání
  - Třírozměrné proudění (prostorové):  $u = u(x, y, z)$



- Dvourozměrné proudění (rovinné):  $u = u(x, y)$
- Jednorozměrné proudění (po křivce):  $u = u(s)$
- Dle rozložení rychlosti v prostoru
  - Rovnoměrné proudění:  $u = konst.$  [ $u \neq u(x, y, z)$ ;  $u \neq u(s)$ ]
  - Nerovnoměrné proudění:  $u \neq konst.$  [ $u = u(x, y, z)$ ;  $u = u(s)$ ]
- Dle závislosti na čase
  - Ustálené proudění (stacionární):  $u \neq u(t)$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
  - Neustálené proudění (nestacionární):  $u = u(t)$

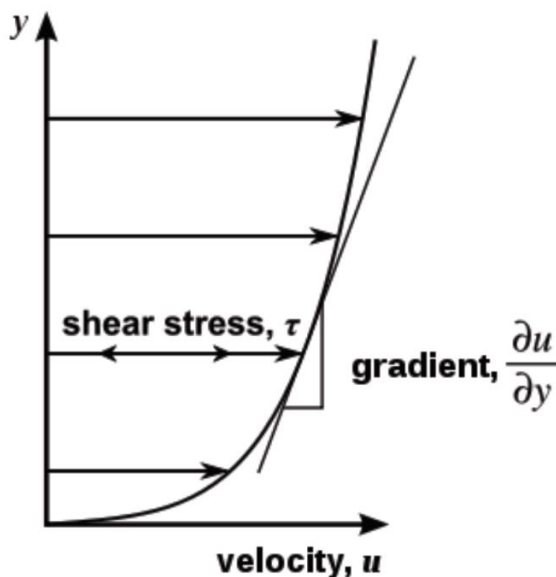
## 2.4.2 Laminární a turbulentní proudění

Hranice mezi laminárním a turbulentním prouděním není jednoznačná a na tyto dvě charakteristiky proudění má vliv velké množství parametrů týkajících se jak vlastností tekutiny samotné, tak prostředí, kterým proudí. Nejčastějším ukazatelem charakteru proudění je Reynoldsovo číslo  $Re$  vyjadřující poměr setrvačných a třecích sil.

$$Re = \frac{ud_h}{\nu} \quad [-], \quad (2.4.1)$$

kde  $u$  je rychlost proudění,  $d_h$  je charakteristický rozměr a  $\nu$  je kinematická vazkost. Pro dané podmínky bývá pak stanovena kritická hodnota Reynoldsova čísla  $Re_k$ , od které se laminární proudění pravděpodobně může měnit v turbulentní. Na tento přechod má ovšem vliv množství dalších podmínek. Jako příklad poslouží proudění uvnitř potrubí, pro které se často uvádí hodnota  $Re_k = 2\,320$ . Záleží ovšem na dalších faktorech jako například na drsnosti stěny, tvaru počáteční části potrubí, intenzitě turbulence přitékajícího proudu atd. Výsledkem je existence přechodové oblasti  $Re_c$ , ve které se proudění v závislosti na konkrétních podmínkách může vyskytovat jak v laminární, tak v turbulentní formě. Pro zmíněný příklad proudění potrubím se tato oblast podle experimentů pohybuje v rozmezí  $2\,320 < Re_k < 14\,000$  [3].

V případě laminárního proudění se částice tekutiny pohybují paralelně vedle sebe a jejich dráhy se navzájem neprotínají. Vlivem tření mezi jednotlivými pomyslnými vrstvami proudící tekutiny zapříčiněným vazkostí tekutiny (rovnice 2.2.4 – tzv. Newtonův zákon) a skutečnosti, že tekutina ulpívá na stěně (rychlost proudění u stěny je rovna nule), se ve směru kolmém na obtékanou stěnu tvoří typický profil podélné rychlosti.

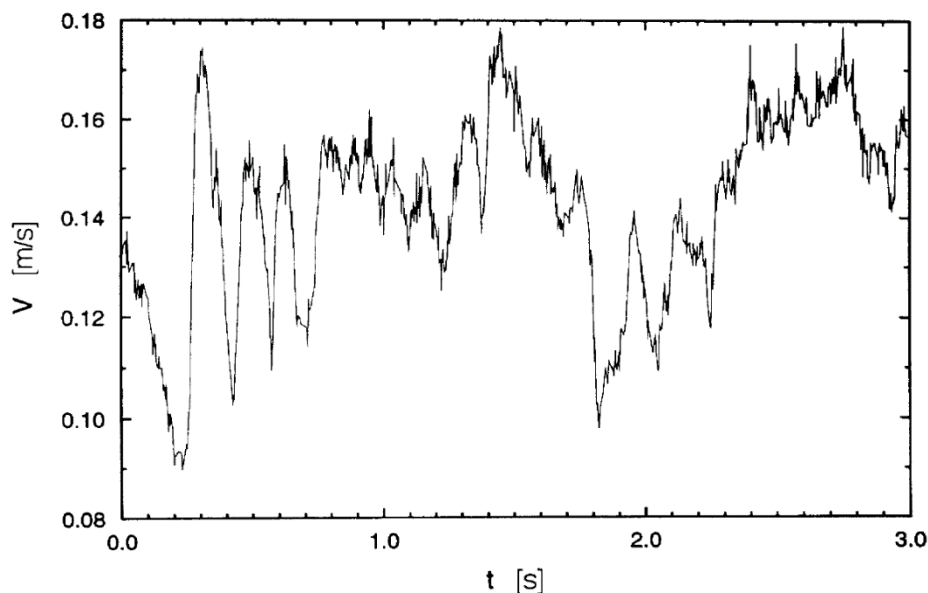


Obrázek 2.4.1: Rychlostní profil laminárního proudění [4]

Turbulentní proudění je oproti laminárnímu značně složitější jev a jeho hlavní vlastnosti jsou následující [5]:

- Náhodný pohyb – molární částice (shluk většího počtu molekul) se při turbulentním proudění pohybují náhodným způsobem, který je složený z uspořádaného středního pohybu a náhodných fluktuací rychlosti i směru. Tímto způsobem se částice o určité rychlosti může dostat do oblasti s rychlostí rozdílnou a v této oblasti je zpomalená nebo zrychlena (dojde k výměně hybnosti s okolím). Tímto způsobem probíhá sdílení hybnosti mezi oblastmi tekutiny s rozdílnou rychlostí. Ve výsledku se tento jev projevuje zvýšeným odporem tekutiny proti proudění.
- Tečné napětí – vedle vnitřního tření daného Newtonovým zákonem se u turbulentního proudění vyskytuje ještě tzv. turbulentní napětí, které je způsobeno právě změnou hybnosti molárních částic při pohybu mezi oblastmi různé rychlosti.
- Turbulentní vazkost – na rozdíl od molekulové vazkosti popsané v kapitole 2.2, která je fyzikální konstantou tekutiny, je turbulentní vazkost složitou funkční závislostí vlastností tekutiny a zároveň stavu proudění, a je tak proměnlivá s polohou i časem. Turbulentní vazkost ovlivňuje rychlostní profil turbulentního proudění, který je na rozdíl od laminárního více plochý.
- Difuzivní charakter proudění – turbulentní fluktuace vyvolávají rychlostní gradienty v jejichž důsledku vznikají vazká napětí a dochází k disipaci kinetické energie na tepelnou. Proto je pro udržení turbulence potřebný stálý přísun energie do proudu.

Navzdory náhodnosti fluktuací se ukazuje, že turbulentní proudění je tvořeno prostorovými strukturami nazývanými turbulentní víry („eddies“). Tyto víry se v proudění pohybují velikostně od úrovně molárních částic (disipační víry) až po úroveň velikosti průtočného prostředí (energetické víry).



Obrázek 2.4.2: Rychlost jako funkce času u turbulentního proudění [1]

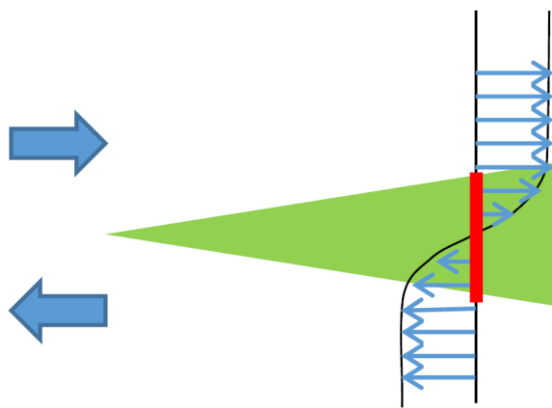
### 2.4.3 Smykové oblasti

Hlavními zdroji turbulentního proudění bývají tzv. smykové oblasti. Jedná se o místa v proudu tekutiny s výrazným gradientem rychlosti proudění, které ve spojení s vnitřním třením tekutiny způsobuje fluktuace rychlosti, a tedy turbulizaci proudu.

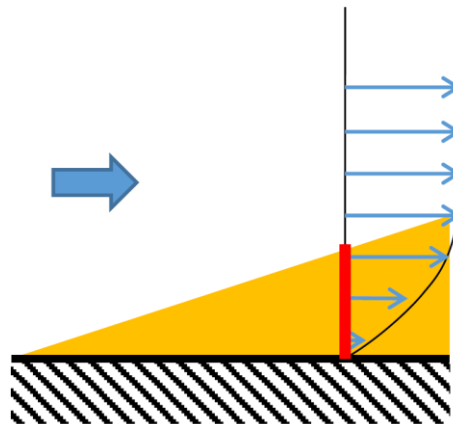
Základní dva typy smykových oblastí jsou:

- Volná smyková oblast – vzniká gradientem rychlosti uvnitř proudu (Obrázek 2.4.3)
- Stěnová smyková oblast (mezní vrstva) – vzniká na rozhraní proudící tekutiny a obtékaného tělesa (Obrázek 2.4.4)

Mezní vrstva je způsobena ulpíváním tekutiny (nulovou rychlostí) na stěně obtékaného tělesa a má své specifické části – laminární, přechodovou a turbulentní.

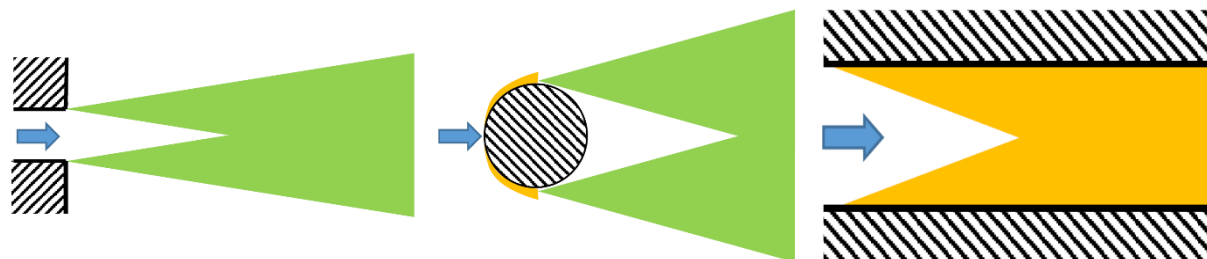


Obrázek 2.4.3: Volná smyková oblast [4]



Obrázek 2.4.4: Stěnová smyková vrstva [4]

Ze základních smykových oblastí se potom podle tvaru obtékaného tělesa tvoří smykové oblasti kombinované – např. paprsek, úplav či typické mezní vrstvy v potrubí (Obrázek 2.4.5).



Obrázek 2.4.5: Kombinované smykové vrstvy – paprsek, úplav a potrubí [4]

#### 2.4.4 Stavové parametry

Proudící tekutina se dá popsat čtyřmi stavovými parametry, kterými jsou hustota  $\rho$ , tlak  $p$ , rychlost  $u$  a teplota  $T$ . Pro určení těchto parametrů je třeba řešit soustavu čtyř lineárně nezávislých rovnic. Pro tento účel jsou zpravidla používány rovnice následující:

$$\left. \begin{matrix} \rho \text{ [kg} \cdot \text{m}^3] \\ p \text{ [Pa]} \\ u \text{ [m} \cdot \text{s]} \\ T \text{ [K]} \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \left. \begin{matrix} \text{Stavová rovnice} \\ \text{Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity)} \\ \text{Zákon zachování hybnosti (Navier – Stokesova rovnice)} \\ \text{Zákon zachování energie (energetická rovnice)} \end{matrix} \right\}$$

Jistého zjednodušení, a tedy snížení počtu rovnic řešené soustavy, lze dosáhnout, pokud některý ze stavových parametrů budeme uvažovat jako konstantní. Například při uvažování izotermického proudění lze zavést podmínku  $T = konst.$  a nahradit jí energetickou rovnici. Podobně při uvažování nestlačitelné kapaliny lze zavést podmínku  $\rho = konst.$  a nahradit jí v tomto případě rovnici stavu [6].

### 2.4.5 Stavová rovnice

Stavová rovnice představuje vzájemný vztah mezi tlakem, hustotou a teplotou dané látky. Její tvar se různí podle charakteru uvažované látky. Pro ideální plyn vypadá následovně

$$\frac{p}{\rho} = rT, \quad (2.4.2)$$

kde  $r$  je plynová konstanta. Pro reálný plyn pak stavová rovnice nabývá podoby

$$\frac{p}{\rho} = rT[1 + \rho a_1(T) + \rho^2 a_2(T) + \dots], \quad (2.4.3)$$

kde  $a_1, a_2, \dots$  jsou opravné funkce závislé na teplotě.

Pro ideální (nestlačitelnou) kapalinu se potom k základní podobě stavové rovnice zavádí podmínka  $\rho = konst.$ , zatímco pro kapalinu reálnou platí vztah

$$\frac{\varepsilon \beta p_N}{\gamma} = 1, \quad (2.4.4)$$

kde  $\varepsilon$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  jsou součinitele objemové stlačitelnosti, tlakové rozpínivosti a teplotní roztažnosti a  $p_N$  je normální tlak, který ve fyzice představuje hodnotu  $p_N = 1,01325 \cdot 10^5$  Pa.

### 2.4.6 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity (spojitosti) reprezentuje zákon zachování hmotnosti. Její smysl názorně vystihuje tvar odvozený pro elementární objem proudové trubice (Obrázek 2.4.6)

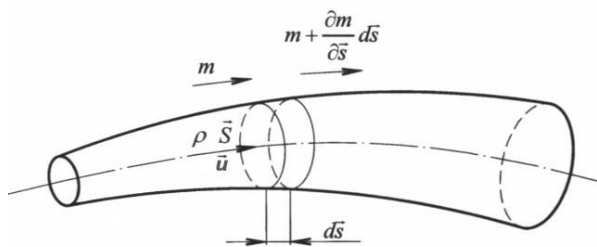
$$\frac{\partial m}{\partial \vec{s}} d\vec{s} = - \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt, \quad (2.4.5)$$

kde levá strana rovnice vyjadřuje změnu hmotnosti tekutiny  $m$  na úseku trubice  $d\vec{s}$  způsobenou rozdílem hmotnosti tekutiny do objemu vstupující a z něj vystupující. Tato změna musí být na druhé straně rovnice vykompenzována buď časovou změnou hustoty tekutiny  $\rho$ , nebo časovou změnou objemu  $dV$  v důsledku časové změny průřezu trubice  $\vec{S}$  (neboť  $dV = \vec{S} d\vec{s}$ ).

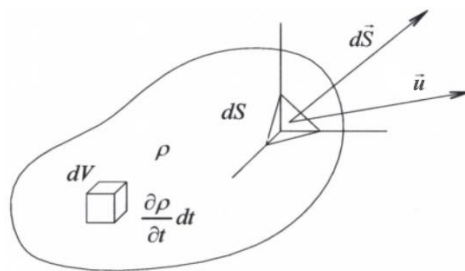
Pro prostorové proudění (Obrázek 2.4.7) je pak rovnice kontinuity odvozena ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.4.6)$$

kde první člen představuje časovou změnu hustoty tekutiny  $\rho$  a druhý člen představuje rozdíl rychlosti tekutiny  $u$  do objemu vstupující a z něj vystupující ve třech směrech kartézského systému  $x, y, z$ . V tomto případě se uvažovaný elementární objem  $dV$  považuje za neměnný.



Obrázek 2.4.6: Proudová trubice [6]



Obrázek 2.4.7: Prostorové proudění [6]

### 2.4.7 Navier-Stokesova rovnice

Pohybová rovnice pro třírozměrné vazké proudění, takzvaná Navier-Stokesova rovnice, bilancuje vnější i vnitřní síly působící na proudící tekutinu a změnu rychlosti proudění, kterou tyto síly zapříčiňují. Tato rovnice vychází ze základního tvaru pohybové rovnice

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \sum_1^N \vec{F}_i, \quad (2.4.7)$$

kde levá strana představuje časové zrychlení hmoty  $m$  a pravá strana představuje součet sil způsobujících toto zrychlení působením na danou hmotu.

Odvozením, detailně popsaným v [6], jsou do součtu sil působících na hmotu zahrnuty účinky sil vnějších, sil tlakových a sil třecích (od vazkosti).

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_1 + \underbrace{u_k \frac{\partial u_i}{\partial k}}_2 = \underbrace{R_i}_3 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}}_4 + \underbrace{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial k^2}}_5 + \underbrace{\frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial k} \right)}_6 \quad (2.4.8)$$

Tento tvar Navier-Stokesovy rovnice obsahuje šest členů, které jednotkově odpovídají zrychlení a mají následující význam [6]:

1. **člen** – místní (lokální) zrychlení – zaznamenané při sledování určitého bodu proudového pole v průběhu času.
2. **člen** – vnitřní setrvačné zrychlení – zaznamenané při posunu do sousedního bodu prostoru, kde je rozdílná rychlost
3. **člen** – vnější setrvačné zrychlení – dané vnějšími účinky na proudové pole (gravitační zrychlení, odstředivé zrychlení apod.).
4. **člen** – zrychlení od tlakových sil – od rozložení tlaku v proudovém poli.
5. **člen** – zrychlení od třecích sil bez ohledu na stlačitelnost proudění.
6. **člen** – zrychlení od třecích sil s ohledem na stlačitelnost proudění.

První a druhý člen N-S rovnice je tzv. substanciální derivace rychlosti, kterou lze psát

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial k} \quad (2.4.9)$$

Rovnice se dále běžně rozepisuje na soustavu tří rovnic podle souřadnicového systému. Pro každý směr systému je potom řešena jedna rovnice. Jelikož z pohledu matematiky představuje Navier-Stokesova rovnice parciální diferenciální rovnici druhého řádu, je její analytické řešení možné jen v případě zavedení fyzikálních zjednodušení, tedy vynecháním určitých členů rovnice. Pro použití v numerickém modelování proudění se z důvodu nedostatečného výpočetního výkonu rovnice dále běžně upravuje tzv. ustředněním. O této problematice bude blíže pojednáno v kapitole 3.5.5.

## 3 Numerické modelování

Numerické modelování fyzikálních problémů funguje na principu diskretizace. Na rozdíl od hypotézy o kontinuu, užívané v analytickém přístupu, se v tomto případě zkoumaný prostor rozdělí na konečně malé dílky (objemy). Pro každý tento objem je pak určována jedna reprezentativní hodnota zkoumané fyzikální veličiny pomocí gradientů mezi jednotlivými na sebe navazujícími objemy.

V případě nestacionárních úloh závislých na čase je také potřeba provést diskretizaci časovou, která je měřítkově spjata s diskretizací prostorovou. Tedy v závislosti na tom, jak prostorově velké (nebo naopak malé) fyzikální jevy mají být modelovány, je třeba stanovit časové měřítko tak, aby tyto jevy byly postižitelné v čase.

Nad diskretizovanou výpočetní mříží následně může operovat řada numerických metod, opírajících se o různé fyzikální principy, vhodně vybraných pro daný výpočet podle fyzikálního charakteru zkoumaného problému.

Velikost výpočtem postižitelných jevů, míra analogie jejich chování s reálnou fyzikou, a tedy i přesnost výpočtu a vyhodnocovaných výsledků je v současné době značně omezena dostupným výpočetním výkonem. Různé druhy matematických modelů a různá měřítko diskretizace jsou proto používány například pro řešení inženýrských a vědeckých problémů, kdy míra požadované přesnosti výsledků se značně liší a dá se jí přizpůsobit i požadavek na použitou výpočetní techniku.

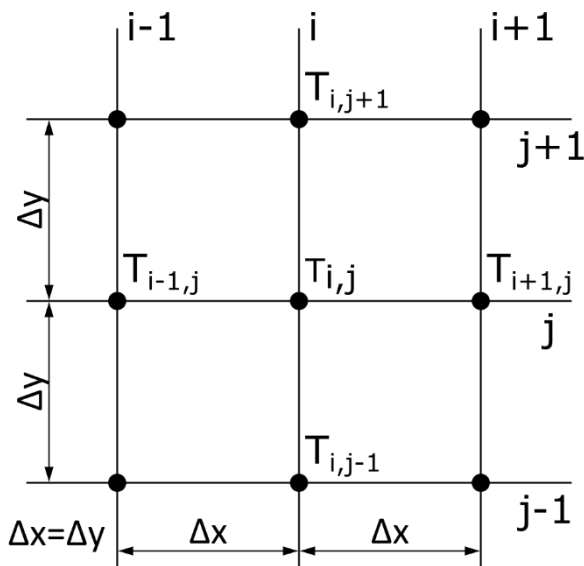
### 3.1 Diferenční metoda

Příkladem principu numerických metod je diskretizace Fourier-Kirchhoffovy rovnice a její řešení diferenční (síťovou) metodou (jako příklad poslouží dvojrozměrný problém). Tvar F-K rovnice je v tomto případě zjednodušen na dvojrozměrný přenos tepla pevnou látkou s tepelným zdrojem.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_z}{c_p \rho}, \quad (3.1.1)$$

kde  $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  je součinitel teplotové vodivosti.

Těleso se v tomto případě diskretizuje na pravoúhlou síť bodů s konstantními rozestupy v obou směrech (Obrázek 3.1.1).



Obrázek 3.1.1: Prostorová diskretizace síťové metody

Užitím Taylorovy řady se časová derivace teploty vyjádří diferenčním tvarem, který může vyjadřovat centrální (3.1.2), dopřednou (3.1.3) nebo zpětnou derivaci (3.1.4). Řád chyby dalšího řešení pak závisí na použitém řádu Taylorova rozvoje.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^{t-1}}{2\Delta t} \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^t - T_{i,j}^{t-1}}{\Delta t} \quad (3.1.4)$$

Dosažením dopředné derivace teploty podle času 3.1.3 do F-K rovnice 3.1.1 získáme explicitní formulaci síťové diskretizace F-K rovnice:

$$T_{i,j}^{t+1} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \left[ T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t + T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t + T_{i,j}^t \left( \frac{\Delta x^2}{a\Delta t} - 4 \right) + \frac{q_z \Delta x^2}{\lambda} \right] \quad (3.1.5)$$

a dosažením zpětné derivace teploty podle času 3.1.4 do F-K rovnice 3.1.1 získáme její implicitní formulaci síťové diskretizace:

$$(T_{i,j}^t - T_{i,j}^{t-1}) \frac{\Delta x^2}{a\Delta t} = [T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t + T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t - 4T_{i,j}^t] + \frac{q_z \Delta x^2}{\lambda} \quad (3.1.6)$$

Výpočet teplotního pole za použití implicitní metody má výhody v jednoduchosti výpočtu, neboť vycházíme-li z počátečních podmínek, pak teplotu každého bodu v následujícím časovém kroku vypočteme pouze z jediné rovnice. Nevýhodou pak je značná nestabilita výpočtu, kdy výsledky mohou nabývat nereálných hodnot.

U explicitní metody je naopak výpočet složitější kvůli nutnosti vytvoření soustavy rovnic pro všechny body, ale výhodou je vyšší stabilita výpočtu.

Komplikací síťové metody jsou případy kdy prostorový krok není v různých směrech shodný ( $\Delta x \neq \Delta y$ ), zdroj tepla je funkcí prostoru nebo času ( $q_z = q_z(x, y, z)$ ,  $q_z = q_z(t)$ ), součinitel vedení tepla je funkcí teploty ( $\lambda = \lambda(T)$ ), látka projde změnou fáze nebo při nevhodných okrajových podmínkách. V tom případě je vhodnější použití metody konečných objemů (tepelných bilancí).

Pro zajištění stability výpočtu je potřeba zvolit vhodnou velikost prostorového a časového kroku. Velikost prostorového a časového kroku samostatně závisí na tom, jak přesný výpočet je požadován, avšak pro stabilitu výpočtu je důležité zvolit mezi nimi vhodný poměr. Ten udává tzv. Courantovo číslo:

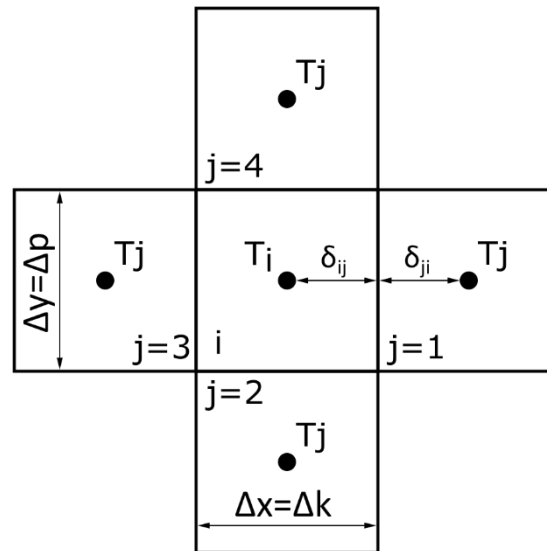
$$1D: Co = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \quad 2D: Co = a\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right), \quad (3.1.7)$$

pro které je vhodná hodnota  $Co < 0,5$  a tedy v tomto případě, kdy  $\Delta x = \Delta y$ , vychází pro stabilní výpočet vztah  $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} < 0,25$  [7].

## 3.2 Metoda konečných objemů

V případě metody konečných objemů se v bodově diskretizované síti z kapitoly 3.1 přiřadí každému bodu konečný objem definovaný stěnami. Tyto konečné objemy se navzájem nepřekrývají a navazují na sebe právě svými stěnami (Obrázek 3.2.1) Pro každou stěnu je pak (v případě navázání na příklad s Fourier-Kirchhoffovou rovnicí 3.1.1) počítán průchod tepla mezi dvěma objemy, které tuto stěnu sdílí, podle vztahu pro průchod tepla složenou stěnou:

$$Q_{ij} = \frac{T_j - T_i}{\frac{\delta_{ji}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}} \Delta p = K_{ij}(T_j - T_i) \quad (3.1.8)$$



Obrázek 3.2.1: Prostorová diskretizace metody tepelných bilancí

Dosazením vztahu 3.1.8 do F-K rovnice 3.1.1 a následnou úpravou vznikne rovnice, která pro každý konečný objem bilancuje teplo jím přijaté z okolí a odevzdané do okolí (metoda tepelných bilancí):

$$C_i^\xi (T_i^{t+1} - T_i^t) = \sum_{j=1}^4 K_{ij}^\xi T_j^\xi - K_i^\xi \sum_{j=1}^4 K_{ij}^\xi + (q_z \Delta V_i)^\xi, \quad (3.1.9)$$

kde  $C_i = \frac{c_p \rho \Delta V_i}{\Delta t}$ ,  $K_{ij} = \frac{\Delta p}{\frac{\delta_{ji}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}}$ ,  $\Delta V_i = \Delta p \cdot \Delta k$  a  $\xi$  je časový index.

Při dosazení do 3.1.9  $\xi = t$  vzniká explicitní formulace, zatímco při dosazení  $\xi = t + 1$  vzniká formulace implicitní. Jejich výhody a nevýhody jsou analogické s formulacemi síťové metody.

Stejně jako u síťové metody je i v tomto případě nutno zajistit stabilitu výpočtu vhodnou volbou velikosti prostorového a časového kroku. Pro metodu tepelných bilancí platí zajištění této stability vztah [7]:

$$\Delta t < \frac{C_i}{K_{ij}} \quad (3.1.10)$$

### 3.3 Chyba řešení

Chyby řešení numerických metod se dělí na dva druhy

- **numerické** (zaokrouhlovací) – závisí na počtu desetinných míst, na který se při výpočtu zaokrouhluje, přičemž chyba se zvětšuje při násobení nebo dělení.



- **diskretizační** – odvíjí se od zanedbání vyšších členů Taylorovy řady, přičemž jejich snížení lze dosáhnout zmenšením prostorového a časového kroku, což ovšem vede k prodloužení a vyšší složitosti výpočtu.

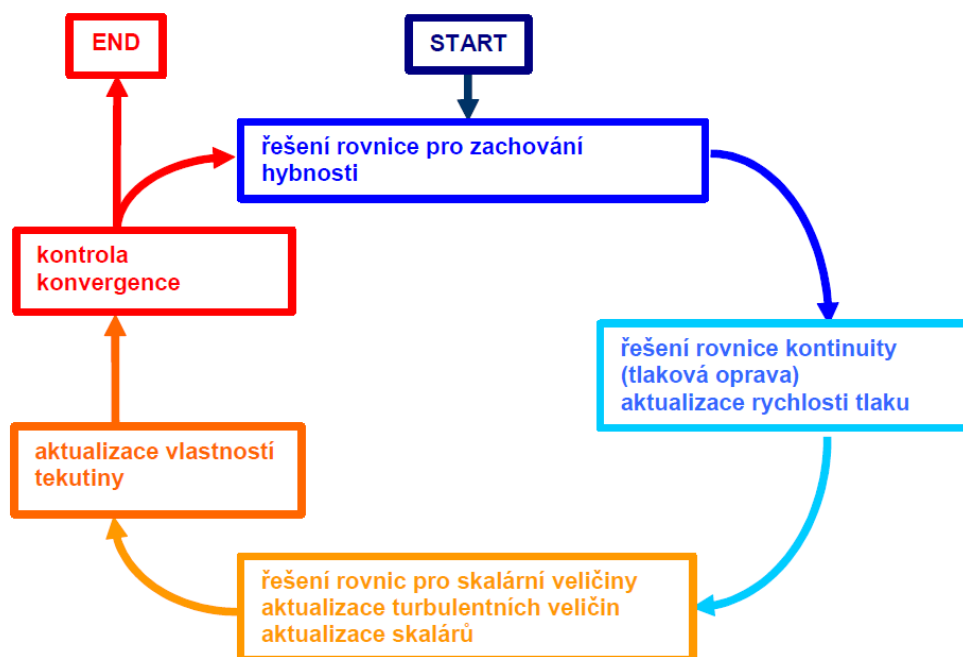
### 3.4 Iterace a reziduály

Řešení numerickou simulací je založeno na iterační metodě. Výpočet první iterace vychází z počáteční aproximace a každá další iterace je zpřesněním výsledku iterace předchozí. Ukazatelem pro ukončení iteračního cyklu jsou tzv. reziduály neboli maximální rozdíl hodnot veličiny ve stejném bodě výpočetní sítě mezi dvěma po sobě následujícími iteracemi. U jednotlivých sledovaných veličin výpočtu se tak nastaví požadovaná hodnota reziduálů, pod kterou když klesnou, výpočet se zastaví.

V případě časově závislého řešení tento proces probíhá pro každý časový krok. Vytvořením přiměřeně jemné výpočetní sítě a nastavením časového kroku lze pak dosáhnout počtu iterací v určitém doporučeném rozmezí. Dle [1] se toto rozmezí pohybuje mezi 10 a 20 iteracemi. Větší počet znamená nastavení příliš velkého časového kroku a naopak. Doporučeno je také pro začátek výpočtu nastavit poměrně malý časový krok a v průběhu výpočtu jej postupně zvyšovat.

Každá iterace výpočtu sestává z několika kroků, které naznačuje Obrázek 3.4.1 a které jsou popsány následovně

- Řešení pohybových rovnic (Navier-Stokesových rovnic) na základě hodnot tlaků a následná aktualizace rychlostního pole.
- Určení korekcí tlaku a rychlostního pole pro splnění rovnice kontinuity.
- Řešení přídavných transportních rovnic k určení turbulentních veličin pomocí rychlostního pole (více o transportních rovnicích v kapitole 3.5 a 3.6).
- Řešení dalších rovnic k určení dalších skalárních veličin (např. energetická rovnice k určení teplotního pole).
- Aktualizace fyzikálních veličin tekutiny (např. vazkost).
- Kontrola konvergence (podle hodnot reziduálů).

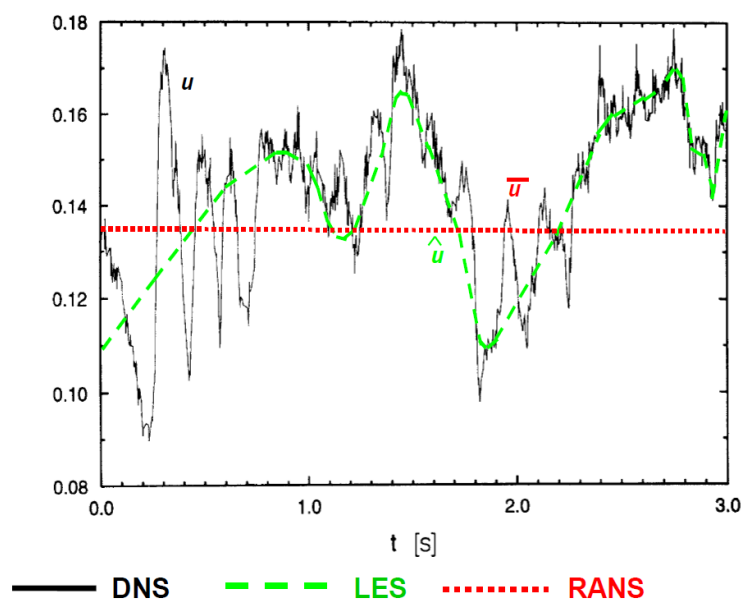


Obrázek 3.4.1: Jednotlivé kroky každé iterace výpočtu

### 3.5 Numerické modelování proudění

V kapitole 2.4.2 bylo uvedeno rozdělení proudění reálných tekutin na laminární a turbulentní. Navzdory tomu, jak dlouho je jev turbulence zkoumán (první práce na toto téma sepsal Osborn Reynolds roku 1883), není tento jev z daleka dostatečně popsán a oblast vyčerpána. Je sice znám tvar Navier-Stokesových rovnic, který dostatečně popisuje fyzikální podstatu turbulentního proudění, avšak kvůli složitosti těchto rovnic není dosud možné analyticky nalézt jejich hladké řešení bez zavedení zjednodušení.

V numerickém modelování proudění je sice možné tyto rovnice k výpočtu použít, ale vyvstává zde jiný problém, a sice enormně vysoké nároky na výpočetní výkon. Proto existují odlišné metody modelování proudění s různou výpočetní náročností a zároveň s různě uspokojivými výsledky. Základní tři metody jsou DNS, LES a RANS. Obrázek 3.4.1 názorně ukazuje, porovnání těchto metod z pohledu zjednodušení reálných hodnot rychlosti jako funkce času. Princip těchto metod je popsán níže.



Obrázek 3.5.1: Metody modelování turbulence [1]

#### 3.5.1 DNS

Přímá numerická simulace (Direct Numerical Simulation – DNS) modeluje proudění pomocí Navier-Stokesových rovnic v jejich úplném tvaru s prostorovou a časovou diskretizací natolik jemnou, aby bylo možné zachytit chování těch nejmenších struktur, tedy disipačních vírů. Zároveň nemá smysl provádět simulaci ve zmenšeném počtu rozměrů, neboť takto nezjednodušené turbulentní proudění, které je vhodné metodou DNS modelovat, má vždy prostorový charakter.

Lze dokázat, že potřebný výpočetní výkon v souvislosti s jemností prostorové i časové diskretizace roste s šestou mocninou Reynoldsova čísla. To je důvodem extrémních nároků na výpočetní výkon, neboť s desetinásobným nárůstem  $Re$  se požadovaný výpočetní výkon zvyšuje milionkrát.

Nejvýkonnější počítače dnešní doby jsou schopné modelovat metodou DNS problémy proudění s Reynoldsovým číslem pohybujícím se maximálně v řádu  $10^3$  v poměrně jednoduché

geometrii, přičemž u inženýrsky zajímavých úloh proudění ve strojích se Reynoldsovo číslo pohybuje zhruba od hodnot  $10^5$  výš.

Metoda DNS je tedy používána jen pro zkoumání jednoduchých principů proudění daných nízkým Reynoldsovým číslem a jednoduchou geometrií. Pro praktické inženýrské využití je prozatím nepoužitelná.

### 3.5.2 LES

Simulace velkých vírů (Large Eddy Simulation – LES) spočívá ve filtraci turbulentního pole určitým měřítkem (většinou je tímto měřítkem velikost elementů prostorové diskretizace). Touto filtrací je možno nastavit takovou jemnost výpočetní sítě, aby víry větší, než je tato limitní velikost, šlo se současným výkonem výpočetní techniky modelovat metodou přímé numerické simulace (DNS).

Víry o velikosti menší, než je limitní velikost filtrace, se sice nepodílejí velkou měrou na transportních jevech, ale zapříčiňují disipaci kinetické energie na tepelnou. Tyto struktury jsou parametrizovány a řešeny tzv. subgrid modely využívajícími podobných principů jako modely RANS.

Velké víry, jež jsou hlavními nositeli přenosu hmoty, hybnosti a kinetické energie, jsou tedy metodou LES simulovány přímo, zatímco malé víry, jež jsou spíše nositeli jevu disipace a díky jejich větší izotropii je snazší nalézt univerzální model jejich zjednodušeného popisu, jsou modelovány zvláště subgrid modely. Tento přístup umožňuje nalézt optimální poměr mezi výpočetní náročností simulace a uspokojivostí výsledků podchycujících reálný pohled na podstatné vlastnosti proudění.

### 3.5.3 RANS

Metoda pracující s Reynoldsovým středováním Navier-Stokesovy rovnice (Reynolds Average Navier-Stokes – RANS) je založena na principu středování veličin, což je rozdělení funkční hodnoty určité veličiny (v tomto případě rychlosti) na její střední hodnotu a časové fluktuace (princip je popsán níže). Metoda RANS pak pracuje s těmito středními hodnotami jako s konstantami v čase a fluktuace se v rovnici nacházejí jako další člen ovlivňující charakter proudění. Různé modely turbulence pak modelují tyto fluktuace přidávanými transportními rovnicemi. Výsledkem simulace RANS je potom střední proudové pole.

Časově závislé, nestacionární úlohy je možné řešit metodami URANS (Unsteady-RANS). Tyto metody předpokládají, že časové měřítko turbulentních jevů je mnohonásobně menší než časové měřítko středního proudu. Časový krok simulace je tedy nastaven menší než časové měřítko hlavního proudu, ale větší než turbulentní časové měřítko, čímž je simulace schopna podchytit nestability, jako například uvolňování velkých vírů, ale neumí modelovat turbulentní nestability.

Tato metoda je z pohledu výpočetního výkonu nejdostupnější, avšak tomuto faktu odpovídají i výsledky výpočtů. Už ze stručného popisu časového středování je zřejmé, že metoda není schopna věrohodně podchytit turbulentní jevy závislé na čase a výsledky simulací popisují proudění spíše ze statistického hlediska. Vytvoření dalšího členu v N-S rovnici procesem středování navíc způsobuje neuzavřenost soustavy těchto rovnic, metody RANS se proto soustředí na jejich uzavření.

I přes zjevné nedostatky a zjednodušení jsou metody RANS nejpoužívanějším prostředkem k numerické simulaci běžných inženýrských problémů. K této skutečnosti vede hlavně předpoklad jejich relativně nízké náročnosti na výpočetní výkon.

### 3.5.4 Operace časového středování

Operace středování rozděluje veličinu  $a$  proměnnou v čase následujícím způsobem

$$a = \bar{a} + a' \quad (3.5.1)$$

na časově střední složku  $\bar{a}$  a flukтуаční složku  $a'$ , která je v čase stále proměnná. Časově střední složku  $\bar{a}$  vyhodnocenou na časovém úseku  $T$  lze vyjádřit jako

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a \, dt \quad (3.5.2)$$

Pro libovolné dvě funkce  $a(x, t)$  a  $b(x, t)$  a konstantu  $\lambda$  dále platí následující

$$\overline{a + \lambda b} = \bar{a} + \lambda \bar{b}$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

$$\overline{\int a \, dx} = \int \bar{a} \, dx$$

$$\overline{\bar{a}} = \bar{a}$$

$$\overline{a'} = 0$$

$$\overline{a \bar{b}} = \bar{a} \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{\bar{a} \cdot b'} = \bar{a} \cdot \overline{b'} = 0$$

$$\overline{a' \cdot b'} \neq 0$$

### 3.5.5 Reynoldsovy rovnice

Pohybové rovnice odvozené z Navier-Stokesových rovnic operací středování popsal Osborn Reynolds. Po něm jsou tedy pojmenovány jako Reynoldsovy rovnice.

Při jejich odvození se přihlíží k faktu, že pole okamžitých rychlostí proudění tekutiny je solenoidální a tím pádem jsou solenoidální i pole rychlostí středních a flukтуаčních. Rovnici kontinuity, která platí pro pole okamžitých rychlostí lze pak aplikovat i na pole rychlostí středních a jejich fluktuací následovně

$$\frac{\partial u_k}{\partial k} = 0, \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial k} = 0, \frac{\partial u'_k}{\partial k} = 0. \quad (3.5.3)$$

Dále uvažujme středovaný člen vnitřního setrvačného zrychlení N-S rovnice upravený pomocí derivování per partes jako

$$u_k \frac{\partial u_i}{\partial k} = u_k \frac{\partial u_i}{\partial k} + u_i \frac{\partial u_k}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \overline{u_i u_k}. \quad (3.5.4)$$

Člen  $u_i \frac{\partial u_k}{\partial k}$  je podle 3.5.3 roven nule, a tedy platí

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial k}} = \frac{\partial}{\partial k} \overline{u_i u_k}. \quad (3.5.5)$$

Nyní ustředníme nejprve substanciální derivaci Navier-Stokesovy rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial k}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k)}{\partial k}} = \\ &= \overline{\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial[(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_k + u'_k)]}{\partial k}} = \\ &= \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \overline{\frac{\partial u'_i u'_k}{\partial k}} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Z poslední operace můžeme vidět, že výsledkem středování substanciální derivace okamžité rychlosti je substanciální derivace střední rychlosti navýšená o další člen  $\frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial k}$ . Vystředováním celé N-S rovnice pak dostáváme Reynoldsovu rovnici

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial k^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial i} \quad (3.5.7)$$

a po úpravě ve tvaru

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = R_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial k} \left[ -\bar{p} \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_k} \right]. \quad (3.5.8)$$

Tři členy v hranaté závorce na pravé straně rovnice představují svým rozměrem napětí a mají následující význam:

**1. člen** – napětí způsobené středním tlakem, kde  $\delta_{ik}$  je jednotkový Kroneckerův tenzor

$$\delta_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

**2. člen** – tenzor středního vazkého napětí

**3. člen** – tenzor Reynoldsových napětí

Reynoldsovy rovnice se v modelování proudění používají v kombinaci s ustředněnou rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_k)}{\partial k} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_k}}{\partial k} = 0, \quad (3.5.10)$$

kde třetí člen je tzv. kovariance fluktuací, nebo s jejím tvarem pro nestlačitelné proudění

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial k} = 0. \quad (3.5.11)$$

Kombinací čtyř rovnic (třemi Reynoldsovými rovnicemi a rovnicí kontinuity) je tedy zajištěno řešení čtyř proměnných (tři složky rychlosti a tlak). V Reynoldsových rovnicích ovšem procesem středování substanciální derivace přibyl nový člen tzv. Reynoldsových (turbulentních) napětí, který představuje dalších šest proměnných a způsobuje neuzavřenost soustavy rovnic. Pro jednoznačné řešení této soustavy rovnic (její uzavření) se do soustavy přidávají další doplňkové rovnice, tzv. transportní. [6] [8]

### 3.5.6 Boussinesquova hypotéza

Aby bylo možné řešit soustavu Reynoldsových rovnic a rovnice kontinuity, a tedy řešit Reynoldsova turbulentní napětí, je nejprve nutné tato napětí definovat. Zřejmě nejpoužívanější uchopení tohoto problému je tzv. Boussinesquova hypotéza.

Boussinesquova hypotéza předpokládá určitou analogii mezi turbulentním a laminárním napětím (daným Newtonovým vztahem 2.2.4) v proudící tekutině. Tedy při zjednodušení na dvourozměrné proudění

$$\tau_T = -\overline{\rho u'_x u'_y} = \eta_T \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}, \quad (3.5.12)$$

kde  $\eta_T$  je turbulentní vazkost, která je vyjádřena jako

$$\eta_T = \frac{-\overline{\rho u'_x u'_y}}{\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}} \quad (3.5.13)$$

Je vidět, že na rozdíl od laminární vazkosti je turbulentní vazkost dána nejen fyzikálními vlastnostmi látky (hustotou  $\rho$ ), ale také vlastnostmi proudění tekutiny (gradientem střední rychlosti  $\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}$  a kovariancí fluktuací rychlosti  $\overline{u'_x u'_y}$ ).

Reynoldsovo napětí se dá obecně vyjádřit jako

$$-\overline{\rho u'_i u'_k} = \eta_T \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial k} + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ik}, \quad (3.5.14)$$

kde  $k$  je turbulentní kinetická energie.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_k{}^2} \quad (3.5.15)$$

S využitím Boussinesquovy hypotézy jsou dále sestavovány modely turbulence uzavírající soustavu rovnic Reynoldsových a rovnice kontinuity transportními rovnicemi různých typů. Podle tvaru dané transportní rovnice a vyjádření turbulentní vazkosti jsou tyto modely vhodné pro modelování různých typů proudění tekutin. [5] [6]

## 3.6 Modely turbulence RANS

Modely turbulence typu RANS řeší Reynoldsova napětí pomocí přídavných, transportních rovnic. Podle typu a počtu použitých transportních rovnic se liší ve vhodnosti pro různé typy řešených problémů, i v náročnosti výpočtu.

Níže jsou uvedeny nejrozšířenější druhy modelů turbulence.

### 3.6.1 Spalart-Allmaras

Jednorovnicový model, který je založen na Boussinesquově hypotéze a pracuje s transportní rovnicí pro turbulentní vazkost. Model byl navržen pro výpočet obtékání stěn v leteckém oboru. Poskytuje dobré výsledky pro mezní vrstvy s vysokým tlakovým gradientem, avšak není vhodný pro obecnější použití, neboť vytváří značné chyby u volných smykových vrstev proudění.

### 3.6.2 Modely k-ε

Modely k-ε jsou řadou dvourovnicových modelů turbulence řešících dvě transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii  $k$  a disipaci kinetické energie  $\varepsilon$  pomocí turbulentní vazkosti  $\eta_T$  při uvažování Boussinesquovy hypotézy. Jedná se o historicky nejpoužívanější modely v průmyslovém použití. Třemi zástupci jsou modely Standard, RNG a Realizable, jejichž hlavní rozdíly spočívají ve způsobu vyjádření turbulentní vazkosti, hodnotě Prandtlova čísla (poměr kinematické vazkosti a teplotní vodivosti  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ ) řídicího turbulentní difúzi  $k$  a  $\varepsilon$  a podmínkách pro generaci a zánik disipace kinetické energie  $\varepsilon$ .

#### Standard k-ε

Standard k-ε je semiempirický model, jehož rovnice se do značné míry opírají o úvahy a empirické vztahy. Model předpokládá plně vyvinuté turbulentní proudění, a tedy zanedbatelný vliv molekulární vazkosti oproti vazkosti turbulentní. Z tohoto důvodu je standard k-ε vhodný pro proudění s vysokým Reynoldsovým číslem, a naopak méně vhodný pro případy proudění s nízkým Reynoldsovým číslem, velkým zakřivením proudu, víry, rotací či odtržením proudění.

Turbulentní vazkost je vyjádřena jako

$$\eta_T = \rho C_\eta \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.6.1)$$

kde  $C_\eta$  je konstanta modelu.

Pro výpočet kinetické energie turbulence  $k$  a disipace kinetické energie  $\varepsilon$  jsou použity následující transportní rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (3.6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon, \quad (3.6.3)$$

kde  $G_k$  je generace  $k$  vlivem gradientu střední rychlosti,  $G_b$  je generace  $k$  vlivem vztlaku,  $Y_M$  je příspěvek k celkové disipaci energie od fluktuujících dilatací při stlačitelném turbulentním proudění,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$  jsou konstanty modelu,  $\sigma_k$  a  $\sigma_\varepsilon$  jsou turbulentní Prandtlova čísla pro  $k$  a  $\varepsilon$  a  $S_k$ ,  $S_\varepsilon$  jsou zdrojové členy.

Hodnoty jednotlivých konstant modelu byly určeny experimentálně pro základní typy turbulentního proudění. Jejich výchozí hodnoty obsahuje Tabulka 3.6.1, dají se však uživatelsky přenastavit.

Tabulka 3.6.1: Výchozí hodnoty konstant modelu Standard k-ε [9]

$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_\eta$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
1,44	1,92	0,09	1,0	1,3

Konstanta  $C_{3\varepsilon}$  vyjadřující míru ovlivnění  $\varepsilon$  vztlakem je pak dána vztahem

$$C_{3\varepsilon} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right|, \quad (3.6.4)$$

kde  $v$ , resp.  $u$  je rovnoběžná, resp. kolmá složka rychlosti proudění na směr gravitace [9].

## RNG k-ε

Model RNG k-ε je založen na statistické metodě tzv. renormalizačních grup (renormalisation group method – RNG). Oproti modelu Standard k-ε obsahuje několik rozdílností. Zahrnuje nový člen  $R_\varepsilon$ , který zlepšuje výpočet při velkých rychlostech deformace, zahrnuje účinek vírů na turbulenci, používá analytický vzorec pro určení turbulentního Prandtlova čísla a analyticky odvozenou diferenciální rovnici efektivní vazkosti  $\eta_{ff} = \eta + \eta_T$ . Díky těmto modifikacím je model RNG k-ε vhodnější a spolehlivější pro větší rozsah problémů zahrnujících oproti modelu Standard k-ε i vířivé proudění [9].

Turbulentní vazkost je zde počítána ze vztahu

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon\eta}}\right) = 1,72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}} d\hat{v}, \quad (3.6.5)$$

kde  $\hat{v} = \eta_{eff}/\eta$  a  $C_v \approx 100$ . Pro vysoká Reynoldsova čísla potom při výpočtu podle 3.6.5 vychází turbulentní vazkost stejná jako podle 3.6.1.

Pro výpočet kinetické energie turbulence  $k$  a disipace kinetické energie  $\varepsilon$  jsou použity následující transportní rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial j}\left(\alpha_k \eta_{eff} \frac{\partial k}{\partial j}\right) + G_k + G_b - \rho\varepsilon - Y_M + S_k, \quad (3.6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial j}\left(\alpha_\varepsilon \eta_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial j}\right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k}(G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon, \quad (3.6.7)$$

kde  $G_k$  je generace  $k$  vlivem gradientu střední rychlosti,  $G_b$  je generace  $k$  vlivem vztlaku,  $Y_M$  je příspěvek k celkové disipaci energie od fluktuujících dilatací při stlačitelném turbulentním proudění,  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$  jsou konstanty modelu,  $\alpha_k$ ,  $\alpha_\varepsilon$  jsou inverzní efektivní Prandtlova čísla pro  $k$  a  $\varepsilon$ ,  $S_k$ ,  $S_\varepsilon$  jsou zdrojové členy a

$$R_\varepsilon = \frac{C_\eta \rho \mu^3 (1 - \mu/\mu_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \mu^3} \frac{1}{k}, \quad (3.6.8)$$

přičemž  $\mu \equiv S k/\varepsilon$ ,  $\mu_0 = 4,38$ ,  $\beta = 0,012$  a  $C_\eta$  je konstanta modelu.

Konstanty modelu jsou odvozeny z teorie RNG. Jejich hodnoty uvádí Tabulka 3.6.2.

Tabulka 3.6.2: Výchozí hodnoty konstant modelu RNG k-ε [9]

$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_\eta$
1,42	1,68	0,0845

## Realizable k-ε

Posledním a nejnovějším z řady modelů k-ε je Realizable k-ε model. Ve srovnání s modelem Standard k-ε obsahuje dvě hlavní odlišnosti. Turbulentní vazkost vyjadřuje jiným výrazem a transportní rovnice pro  $\varepsilon$  je v něm odvozena z rovnice pro transport střední kvadratické fluktuace vířivosti. Název „Realizable“ značí, že model lépe ctí fyziku turbulentního proudění překlenutím určitých matematických překážek u Reynoldsových napětí. Podobně jako RNG k-ε poskytuje tento model oproti Standard k-ε věrohodnější výsledky pro proudění se zakřiveným proudem, víry nebo rotací. Z modelů typu k-ε vykazuje Realizable nejlepší výkon.



Slabinou tohoto modelu je naopak vytváření nefyzikální turbulentní vazkosti v případě, že výpočetní oblast sestává z rotační a stacionární oblasti. Tento nedostatek je způsoben zahrnutím účinků střední rotace do vyjádření turbulentní vazkosti [9].

Turbulentní vazkost je v tomto případě vypočtena stejně jako u modelu Standard k- $\varepsilon$  podle vztahu 3.6.1 s tím rozdílem, že  $C_\eta$  nepředstavuje konstantu, ale určí se ze vzorce

$$C_\eta = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}}, \quad (3.6.9)$$

kde

$$U^* = \sqrt{S_{ij}^2 + \tilde{\Omega}_{ij}^2},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j} \right),$$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk} \omega_k,$$

$$\Omega_{ij} = \overline{\Omega_{ij}} - \varepsilon_{ijk} \omega_k,$$

kde  $\overline{\Omega_{ij}}$  je střední hodnota tenzoru vířivosti zobrazeného v pohybující se vztažné soustavě s otáčkami  $\omega_k$  a kde konstanty jsou  $A_0 = 4,04$ ,  $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$ , přičemž

$$\phi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W),$$

$$W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3},$$

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}^2}$$

Právě člen  $-2\varepsilon_{ijk} \omega_k$  zapříčiňuje při simulaci s rotační a stacionární oblastí nefyzikální turbulentní vazkost.

Pro výpočet kinetické energie turbulence  $k$  a disipace kinetické energie  $\varepsilon$  jsou použity následující transportní rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (3.6.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial j}(\rho \varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon, \quad (3.6.11)$$

kde  $G_k$  je generace  $k$  vlivem gradientu střední rychlosti,  $G_b$  je generace  $k$  vlivem vztaku,  $Y_M$  je příspěvek k celkové disipaci energie od fluktuujících dilatací při stlačitelném turbulentním proudění,  $C_2$ ,  $C_{1\varepsilon}$  jsou konstanty modelu,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  jsou turbulentní Prandtlova čísla pro  $k$  a  $\varepsilon$ ,  $S_k$ ,  $S_\varepsilon$  jsou zdrojové členy a

$$C_1 = \max \left[ 0,43; \frac{\mu}{\mu + 5} \right], \quad (3.6.12)$$

přičemž  $\mu = S k / \varepsilon$  a  $S = \sqrt{2S_{ij}^2}$ .

Výchozí hodnoty konstant modelu uvádí Tabulka 3.6.3.

Tabulka 3.6.3: Výchozí hodnoty konstant modelu Realizable k-ε [9]

$C_{1\varepsilon}$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
1,44	1,9	1,0	1,2

### 3.6.3 Modely k-ω

Modely turbulence k-ω, podobně jako modely k-ε, pracují se dvěma transportními rovnicemi: rovnicí pro turbulentní kinetickou energii  $k$  a rovnicí pro specifickou disipaci kinetické energie  $\omega$ , kterou lze s výhodou integrovat přes vazkou podvrstvy. Modely tohoto typu obvykle lépe simulují záporný tlakový gradient, mezní vrstvy a odtržení proudění od stěny. Dvěma zástupci jsou modely Standard a SST.

#### Standard k-ω

Model Standard k-ω vychází z úpravy Wilcoxova modelu k-ω. Ten zahrnuje modifikace pro nízká Reynoldsova čísla, stlačitelnost tekutiny a smykové proudění, a naopak jeho slabinou je značná citlivost hodnot  $k$  a  $\omega$  u volného proudění mimo smykové vrstvy. Model Standard k-ω tuto slabinu částečně překonává. Tento model je tedy vhodný pro simulaci proudění v blízkosti stěny, přičemž s narůstající vzdáleností od stěny se jeho výsledky zhoršují [9].

Turbulentní vazkost je u tohoto modelu vyjádřena jako

$$\eta_T = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}, \quad (3.6.13)$$

kde koeficient  $\alpha^*$  představuje vliv turbulentní vazkosti podle velikosti Reynoldsova čísla, kdy pro vysoká Reynoldsova čísla je  $\alpha^* = 1$ .

Pro výpočet kinetické energie turbulence  $k$  a specifické disipace kinetické energie  $\omega \sim \varepsilon/k$  jsou použity následující transportní rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial j} \right) + G_k - Y_k + S_k, \quad (3.6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega, \quad (3.6.15)$$

kde  $G_k$  je generace  $k$  vlivem gradientu střední rychlosti,  $G_\omega$  je generace  $\omega$ ,  $Y_k$  a  $Y_\omega$  je disipace  $k$  a  $\omega$  vlivem turbulence,  $S_k$ ,  $S_\omega$  jsou zdrojové členy a  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_\omega$  představují efektivní difuzivitu  $k$  a  $\omega$ , přičemž

$$\Gamma_k = \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k}, \quad (3.6.16)$$

$$\Gamma_\omega = \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\omega}, \quad (3.6.17)$$

kde  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$  jsou turbulentní Prandtlova čísla.

#### SST k-ω

SST (Shear-Stress Transport) k-ω model je v podstatě hybridem mezi modely k-ε a k-ω vytvořeným konvertováním modelu k-ε do formulace k-ω. Používá oba tyto modely zároveň a násobí je funkcí, která v blízkosti stěny aktivuje model k-ω lépe fungující v této oblasti, a naopak dále od stěny aktivuje model k-ε s lepšími výsledky zde. Tato a další vlastnosti dělají model SST k-ω spolehlivý pro velkou oblast typů proudění [9].

Turbulentní vazkost je zde vyjádřena jako

$$\eta_T = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}; \frac{SF_2}{a_1\omega}\right]} \quad (3.6.18)$$

Pro výpočet kinetické energie turbulence  $k$  a specifické disipace kinetické energie  $\omega \sim \varepsilon/k$  jsou použity následující transportní rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial j} \right) + \tilde{G}_k - Y_k + S_k, \quad (3.6.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega, \quad (3.6.20)$$

kde  $\tilde{G}_k$  je generace  $k$  vlivem gradientu střední rychlosti vypočtené z  $G_k$  a  $D_\omega$  je příčná difuze.

### 3.6.4 Model k-kl- $\omega$ Transition

K-kl- $\omega$  Transition je třírovnicový model používaný speciálně pro simulaci vývoje mezních vrstev a jejich přechodu z laminárního režimu do turbulentního.

### 3.6.5 Model Transition SST

Transition SST model využívá výše popsany model SST k- $\omega$  ve spojení s dalšími dvěma rovnicemi. Uplatnění nachází v simulaci přechodového proudění.

### 3.6.6 Model RSM

RMS (Reynolds Stress Model) je založen na řešení Reynoldsových napětí přímo jejich šesti diferenciálními rovnicemi, přičemž je doplněn ještě rovnicí disipace. To z něj dělá výpočetně jeden z nejsložitějších modelů RANS, neboť pracuje až s dvanácti rovnicemi: rovnicí kontinuity, třemi Reynoldsovými rovnicemi, šesti rovnicemi pro Reynoldsova napětí, rovnicí disipace a případně rovnicí energie.

Silnou stránkou tohoto modelu je především simulace proudění s výraznou rotací či víry díky tomu, že neuvažuje izotropní turbulentní vazkost. Nicméně v jiných, obecnějších případech proudění není jeho vysoká výpočetní náročnost vyvážena dle očekávání lepšími výsledky simulace ve srovnání s běžnějšími dvourovnicovými modely, a proto se jeho použití příliš nedoporučuje [9].

Přesná transportní rovnice popisující Reynoldsova napětí má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial k}(\rho u_k \overline{u'_i u'_j}) = D_{T,ij} + D_{L,ij} + P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} + F_{ij} + S, \quad (3.6.20)$$

kde

$$D_{T,ij} = -\frac{\partial}{\partial k} \left[ \overline{\partial u'_i u'_j u'_k} + \overline{p'(\delta_{kj} u'_i + \delta_{ki} u'_j)} \right] \quad \text{je turbulentní difuze,}$$

$$D_{L,ij} = \frac{\partial}{\partial k} \left[ \eta \frac{\partial}{\partial k} (\overline{u'_i u'_j}) \right] \quad \text{je molekulární difuze,}$$

$$P_{ij} = -\rho \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial k} \right) \quad \text{je napěťový člen,}$$

$$G_{ij} = -\rho \beta (g_i \overline{u'_j \theta} + g_j \overline{u'_i \theta}) \quad \text{je vztakový člen,}$$

$$\phi_{ij} = p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial j} + \frac{\partial u'_j}{\partial i} \right) \quad \text{je tlakový člen,}$$

$$\varepsilon_{ij} = -2\eta \frac{\partial u'_i}{\partial k} \frac{\partial u'_j}{\partial k} \quad \text{je disipace,}$$

$$F_{ij} = -2\rho\Omega_k \left( \overline{u'_j u'_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \varepsilon_{jkm} \right) \quad \text{je člen popisující rotaci systému,}$$

S

je zdrojový člen.

### 3.7 Modely turbulence SRS

Modely skupiny SRS (Scale Resolve Simulation) řeší nestacionární proudění tekutin, tedy výsledky simulace jsou vždy časově závislé. Úroveň detailu výsledků závisí na rozsahu turbulentních měřítek, který daná simulace zahrnuje, tedy na kvalitě výpočetní sítě.

#### 3.7.1 Model LES

LES (Large Eddy Simulation), neboli simulace velkých vírů, je metoda založená na filtrování vírových struktur podle velikosti (turbulentního měřítka).

Velké vírové struktury, zachytitelné jemností výpočetní sítě, jsou modelovány Navier-Stokesovými rovnicemi. Tyto velké vírové struktury jsou hlavním nositelem hybnosti hmoty a energie. Malé vírové struktury, které jsou modelem odfiltrovány, a které jsou nositelem disipace kinetické energie na tepelnou, jsou modelovány zvlášť pomocí tzv. subgridních modelů.

Nevýhodou LES modelů je nutnost vytvoření velmi jemné sítě ve všech směrech v blízkosti stěn, neboť i velká turbulentní měřítka jsou v této oblasti rozměrově velmi malá. Tato skutečnost limituje LES modely na použití pro nízká Reynoldsova čísla a geometricky malé oblasti proudění. Pro odstranění této nevýhody jsou vyvíjeny hybridní modely RANS/LES nebo stěnové funkce.

Díky filtrování vírových struktur je možné u modelů LES použít podstatně hrubší výpočetní síť než u modelů DNS, což znamená i značně snadnější výpočet. Naopak oproti modelům RANS je síť podstatně jemnější a výpočet náročnější. Této skutečnosti odpovídá i porovnání kvality výsledků simulací DNS, LES a RANS [9].

Subgridní modely řešící subgridní turbulentní napětí jsou založeny na Boussinesquově hypotéze

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\eta_T \overline{S_{ij}}, \quad (3.7.1)$$

kde  $\eta_T$  je subgridní turbulentní vazkost,  $\tau_{kk}$  je symetrická část subgridního napětí, která není modelována, ale je přidána k filtrovanému statickému tlaku a  $\overline{S_{ij}}$  je tenzor rychlosti deformace definovaný jako

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial i} \right). \quad (3.7.2)$$

Subgridní turbulentní vazkost může být modelována různými modely s různou přesností a uspokojivostí výsledků. Jejich zástupci jsou

- Smagorinsky-Lilly Model
- Dynamic Smagorinsky-Lilly Model
- Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity (WALE) Model

- Dynamic Kinetic Energy Subgrid-Scale Model
- Algebraic Wall-Modeled LES (WMLES) Model

### 3.7.2 Model DES

DES (Detached Eddy Simulation) je hybridní model kombinující přístup RANS (URANS) a LES. Přístup LES je použit v oblastech turbulentního jádra ve větší vzdálenosti od stěn, kde podává dobré výsledky při modelování velkých turbulentních struktur. Naopak v blízkosti stěn, kde přístup LES vyžaduje neúměrně vysoký výpočetní výkon, je aktivován příslušný přístup RANS, který v těchto oblastech vykazuje dobrou schopnost predikce mezní vrstvy.

Přechod mezi LES a RANS modelem je dán poměrem turbulentního délkového měřítka a velikosti buňky sítě. Je-li turbulentní délkové měřítka větší než velikost buňky, je aplikován princip LES a naopak.

Přechod může být také kontrolován použitím DDES (Delayed DES). V tomto případě model zabráňuje použití principu LES u buněk s vysokým poměrem délek stran, který bývá typický pro síťování v blízkosti stěn při simulaci modelem RANS [9].

Fluent nabízí modely DES s implementací RANS modelů Spalart-Allmaras, Realizable k- $\epsilon$  a SST k- $\omega$ .

### 3.7.3 Model SAS

SAS (Scale-Adaptive Simulation) je model vylepšující funkci modelů URANS, umožněním rozlišení turbulentního spektra při nestacionárním proudění. V případě SST k- $\omega$  modelu zavádí do transportní rovnice pro  $\omega$  tzv. von Kármánovo délkové měřítka. Tato modifikace umožňuje SAS modelu dynamicky přizpůsobovat řešené turbulentní struktury URANS simulace, díky čemuž je dosaženo podobné simulace nestacionárních oblastí proudění jako u metod LES. V oblastech stacionárního proudění nebo v případě příliš hrubé výpočetní sítě či příliš velkého časového kroku je aplikován klasický přístup RANS. Výpočetně je model SAS nejméně náročný ze skupiny SRS [9].

Transportní rovnice pro  $k$  a  $\omega$  v případě SAS modelu založeném na SST k- $\omega$  jsou ve tvaru

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial i}(\rho u_i k) = G_k - \rho c_\eta k \omega + \frac{\partial}{\partial j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial j} \right], \quad (3.7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial i}(\rho u_i \omega) = & \alpha \frac{\omega}{k} G_k - \rho \beta \omega^2 + Q_{SAS} + \frac{\partial}{\partial i} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial j} \right] + \\ & (1 - F_1) \frac{2\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial j} \frac{\partial \omega}{\partial j} \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

kde  $Q_{SAS}$  je přidáný zdrojový člen

$$Q_{SAS} = \max \left[ \rho \mu_2 \kappa S^2 \left( \frac{L}{L_{vK}} \right)^2 - C \frac{2\rho k}{\sigma_\phi} \max \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial j} \frac{\partial \omega}{\partial j}; \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial j} \frac{\partial k}{\partial j} \right); 0 \right] \quad (3.7.5)$$

### 3.7.4 Model ELES

ELES (Embedded Large Eddy Simulation) je, podobně jako DES, model založený na kombinaci LES a RANS přístupů simulace. V tomto případě však přechod mezi oběma případy není vyhodnocován automaticky modelem, ale výpočetní oblast proudění je rozdělena uživatelsky na jednotlivé zóny, pro které je princip výpočtu předem určen (LES zóny a RANS zóny). Tyto zóny na sebe navazují rozhraním, na kterém je řešena konverze modelované energie turbulence na energii řešenou.

Model ELES je použitelný v případech, kdy tekutiny proudí jedním primárním směrem a na jednotlivých rozhraních výpočetních zón nedochází ke zpětnému proudění [9].

### 3.8 Model proudění u stěny

Při turbulentním proudění tekutin vzniká v blízkosti stěn mezní vrstva dělí se na vazkou podvrstvu, přechodovou oblast a turbulentní vrstvu. Vzhledem k vysokým rychlostním i teplotním gradientům mezní vrstvy je třeba pro modelování proudění v této oblasti věnovat zvláštní pozornost. Při modelování proudění numerickou simulací existují dva odlišné přístupy k této problematice:

- Přímé modelování
- Stěnová funkce

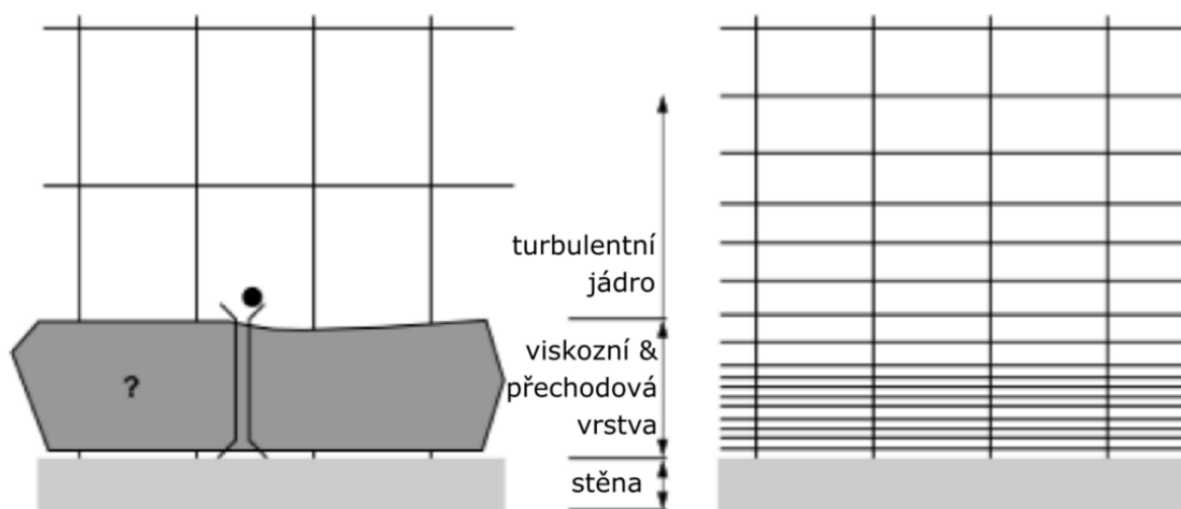
Pro přizpůsobení výpočetní sítě použitému přístupu modelování proudění v blízkosti stěny je třeba zavést pojem bezrozměrné vzdálenosti od stěny

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (3.8.1)$$

kde  $y$  je vzdálenost od stěny,  $\nu$  je kinematická vazkost a  $u_\tau$  je stěnová smyková rychlost

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (3.8.2)$$

kde  $\tau$  je vnitřní tření tekutiny podle Newtonova zákona 2.2.4 a  $\rho$  je hustota.



Obrázek 3.8.1: Modelování stěnovou funkcí a přímé modelování [1]

#### 3.8.1 Přímé modelování

Přímé modelování používá pro proudění tekutiny u stěny stejný výpočet jako pro volný proud dle zvoleného výpočtového modelu. Kvůli vysokým gradientům je však nutno výpočtovou síť u stěny výrazně zjemnit, jak ukazuje pravá část Obrázek 3.8.1. Pro zajištění věrohodných výsledků výpočtu je doporučováno pro první buňku výpočetní sítě u stěny dosáhnout hodnoty alespoň  $y^+ < 5$  [10].

### 3.8.2 Stěnové funkce

Stěnové funkce představují semi-empirické vztahy, které při numerické simulaci překlenou laminární a přechodovou oblast mezní vrstvy, ve kterých je značný vliv molekulární vazkosti oproti vazkosti turbulentní. Stěnová funkce tak tvoří jakýsi matematický most mezi obtékanou stěnou a turbulentní částí mezní vrstvy. Stěnové funkce obecně nevyžadují vysokou jemnost výpočetní sítě v blízkosti stěny, jako je tomu u přímého modelování. Doporučovaná hodnota bezrozměrné vzdálenosti první buňky od stěny záleží na zvoleném typu stěnové funkce a obecně se pohybuje v rozmezí  $20 < y^+ < 200$  [10].

### 3.9 Okrajové podmínky

Pro korektní uzavření oblasti simulace je potřeba definovat dostatečné okrajové podmínky (OP). U úlohy proudění tekutiny s přenosem tepla je z fyzikálního hlediska tyto podmínky možné rozdělit do tří skupin:

- OP kontinuity
- OP turbulence
- OP přenosu tepla

Z hlediska geometrického lze okrajové podmínky pak rozdělit do skupin dvou:

- OP průtočných ploch
- OP stěn

Z hlediska zjednodušení výpočtu lze potom aplikovat následující OP

- Symetrie
- Osa symetrie

V následujícím textu jsou popsány vybrané, často používané okrajové podmínky.

#### 3.9.1 OP kontinuity

Okrajové podmínky kontinuity slouží k bilancování zákona zachování hmotnosti. Tyto podmínky se proto zadávají na všech průtočných plochách, které se dělí na vstupní a výstupní. OP vstupů a výstupů definovatelné v programu Fluent obsahuje Tabulka 3.9.1.

Tabulka 3.9.1: Okrajové podmínky kontinuity

	Typ podmínky	Zadávaná veličina
Vstup	Velocity inlet	Rychlost $u$ [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
	Mass flow rate	Hmotnostní průtok $Q_m$ [ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
	Pressure inlet	Celkový (totální) tlak $p_{tot} [\text{Pa}] = p_{stat} + p_{dyn} = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho u^2$
Výstup	Outflow	Podmínka ustáleného proudu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$
	Pressure outlet	Statický tlak $p_{stat}$ (při výtoku do atmosféry roven nule)
	Mass flow rate	Hmotnostní průtok $Q_m$

### 3.9.2 OP turbulence

Při simulaci proudění za užití modelů turbulence je zapotřebí zadat na průtočných plochách kromě OP kontinuity ještě OP turbulence. V tomto případě výběr typů okrajových podmínek závisí na zvoleném modelu turbulence. Tabulka 3.9.2 obsahuje veličiny, které je možné zadat v programu Fluent jako OP turbulence průtočných ploch při použití modelu k-ε.

Tabulka 3.9.2: Veličiny okrajových podmínek turbulence [1]

Intenzita turbulence	$I = \sqrt{\frac{\overline{u'_j u'_j}}{3\overline{u_i u_i}}}$
Turbulentní měřítko	$l = 0,07L$
Hydraulický průměr	$d_h = \frac{4A}{P}$
Poměr turbulentní vazkosti $\frac{\eta_T}{\eta}$	$\bar{v} = \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{u} l$
Turbulentní kinetická energie	$k = \frac{2}{3} (\overline{u'})^2 \text{ nebo } k = \frac{2}{3} (\bar{u} l)$
Rychlost disipace	$\varepsilon = C_\eta \frac{3}{4} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} = \rho C_\eta \frac{k^2}{\eta} \left(\frac{\eta_T}{\eta}\right)^{-1}$

V Tabulka 3.9.2 představuje  $L$  charakteristický rozměr oblasti proudění, případně hydraulický průměr,  $A$  průtočnou plochu,  $P$  smáčený obvod a  $C_\eta$  konstantu modelu k-ε.

Jelikož model k-ε je dvourovnicový, je třeba zadat v okrajové podmínce turbulence dvě veličiny. nabízené kombinace jsou

- Turbulentní kinetická energie a rychlost disipace
- Intenzita turbulence a turbulentní měřítko
- Intenzita turbulence a poměr turbulentní vazkosti
- Intenzita turbulence a hydraulický průměr

### 3.9.3 OP přenosu tepla

Pro průtočné plochy je nutno definovat teplotu tekutiny proudící do výpočetní oblasti vstupy, případně výstupy dojde-li na výstupu ke zpětnému toku tekutiny do oblasti.

U stěn je možno definovat okrajové podmínky tepelné vodivosti následujícími veličinami:

- Konstantní teplotou  $T$  [K]
- Konstantní hustotou tepelného toku  $q$  [ $W \cdot m^{-2}$ ]
- Nulovou hustotou tepelného toku (izolací)  $q = 0$
- Konvekcí (součinitelem přestupu tepla  $\alpha$  [ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ] a referenční teplotou okolí  $T_{ref}$  [K])

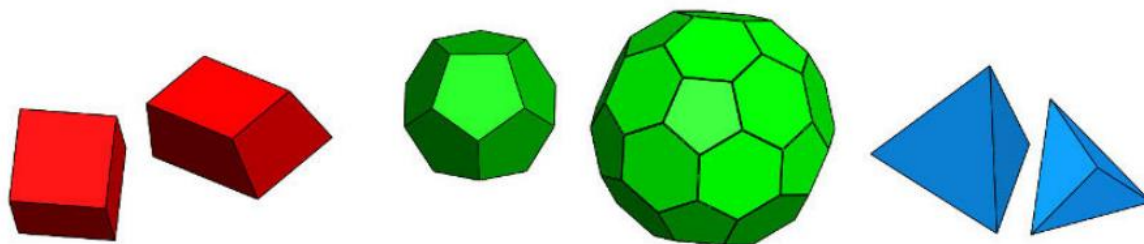


## 4 Výpočetní síť

Důležitou součástí numerické simulace je vytvoření optimální výpočetní sítě. Kvalita výpočetní sítě má značný vliv na rychlost výpočtu, konvergenci výpočtu a přiblížení výsledků realitě.

### 4.1 Typy sítě

Výpočetní síť může být tvořena několika typy tvaru prvků, z nichž každý přináší do výpočtu určité výhody a nevýhody. Základní typy těchto prvků u 3D sítí jsou hexahedrony (šestistěny), tetrahedrony (čtyřstěny) a polyhedrony (mnohostěny), které znázorňuje Obrázek 4.1.1 [11].



Obrázek 4.1.1: Hexahedrál (červený), polyhedrál (zelený) a tetrahedrál (modrý) prvek sítě [11]

#### 4.1.1 Hexahedrál síť

Hexahedrál síť je tvořena výhradně hexahedrony. Takováto síť je nazývána též strukturovaná, neboť hrany všech na sebe navazujících hexahedronů tvoří síť linek strukturovaných do tří směrů. Linky náležící k totožnému směru se v tomto případě nekříží.

Výhodou tohoto typu výpočetní sítě jsou poměrně přesné výsledky výpočtu z důvodu nízké numerické difuze, obzvláště v případě směru hlavního proudu kolmo na stěny jednotlivých elementů sítě. Prvky tohoto druhu sítě, hexahedrony, je také možné snadno protahovat v určitém směru a tím je zplošťovat bez zásadního zhoršení jejich vlivu na výpočet, čehož se s výhodou využívá například při síťování oblastí mezní vrstvy.

Bohužel právě kvůli zmiňované strukturovanosti není možné tento typ výpočetní sítě aplikovat na složité geometrie výpočetních oblastí. Další nevýhodou je nemožnost zhuštění sítě ve výpočetně zajímavých oblastech bez ovlivnění zbytku výpočetní modelu podobným zhuštěním.

#### 4.1.2 Tetrahedrál síť

Tetrahedrál, nebo také nestrukturovaná, síť se skládá z tetrahedronů. Tento typ výpočetní sítě odbourává nevýhody hexahedrál síť ve smyslu lepší přizpůsobivosti sítě složitým geometriím výpočetních oblastí a zároveň dovoluje lokální zhuštění sítě v zajímavých oblastech výpočtu.

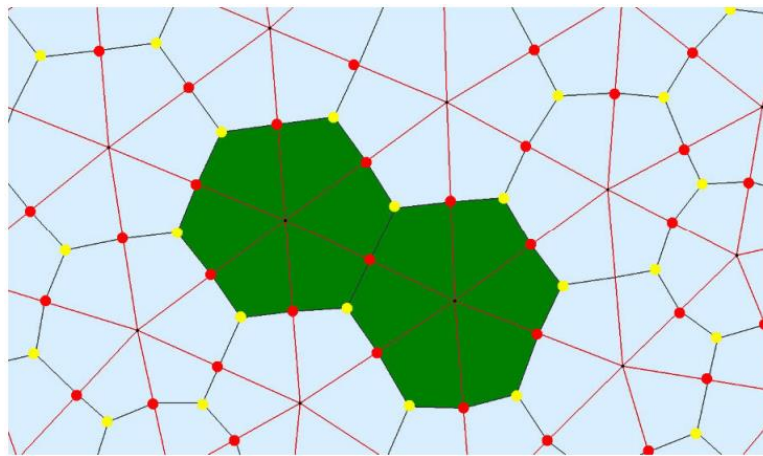
Přizpůsobivost tetrahedrál síť geometrii je však vykoupena řadou nevýhod. Čtyřstěnné prvky není možné protahovat v jednom směru, například pro pokrytí oblastí mezní vrstvy proudění. Při dostatečném zhuštění tetrahedrál síť ve směru tečném k obtékané stěně tedy značně narůstá celkový počet prvků sítě, což prodlužuje i následnou délku výpočtu. Kvůli malému počtu stěn je i nižší počet sousedních prvků každého prvku, což může mít za následek problematické počítání gradientů a vyšší numerickou difuzi oproti hexahedrál síti. Nekvalitní tetrahedrál síť tak může způsobovat obtížnější konvergenci a snížení přesnosti výsledků.

### 4.1.3 Polyhedrální síť

Polyhedrální síť vzniká konverzí tetrahedrální sítě, jak ukazuje Obrázek 4.1.2, kde žluté body jsou těžiště jednotlivých trojúhelníkových oblastí a červené body jsou těžiště jejich stran.

Tento typ sítě kombinuje výhody hexahedrální a tetrahedrální sítě a zároveň odstraňuje některé jejich nedostatky. Výhodami polyhedrální sítě je vysoký počet sousedních elementů každého elementu, což přináší přesnější výpočet gradientů. Prvky jsou také poměrně málo náchylné k protahování v určitém směru, což má za následek lepší výpočetní stabilitu modelu a snazší konvergenci výpočtu. Při konverzi na polyhedrální síť také dochází ke značnému snížení počtu prvků sítě, což má za následek urychlení následného výpočtu.

Polyhedrální síť vykazuje vyšší stabilitu a přesnost výpočtu než síť tetrahedrální, srovnatelnou přesnost výpočtu jako síť hexahedrální, avšak v obou srovnáních za značného snížení počtu prvků sítě, což pozitivně ovlivňuje potřebnou dobu výpočtu.



Obrázek 4.1.2: Konverze tetrahedrální na polyhedrální síť [11]

### 4.1.4 Kombinované sítě

V praxi se často používají kombinace zmíněných typů sítí, kdy různé oblasti výpočetní geometrie jsou pokryty rozdílným typem sítě. Podle návaznosti jednotlivých oblastí je pak celá výpočetní síť konformní nebo nekonformní.

- Konformní síť – na rozhraních oblastí s různým typem sítě na sebe jednotlivé prvky svými stěnami navazují (jeden prvek se svou stranou náležící rozhraní dotýká přesně jednoho prvku za rozhraním).
- Nekonformní síť – na rozhraních oblastí s různým typem sítě na sebe jednotlivé prvky svými stěnami nenavazují (jeden prvek se svou stěnou náležící rozhraní dotýká jednoho nebo více prvků za rozhraním).

# Část praktická

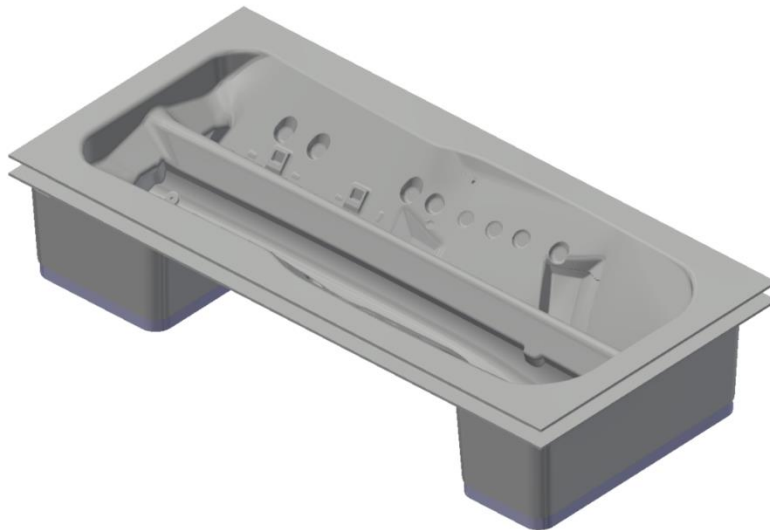
## 5 Zadání úlohy

Předmětem úlohy je numerická simulace proudění teplotosného oleje při předehevu lisovací formy pro vstřikování plastů.

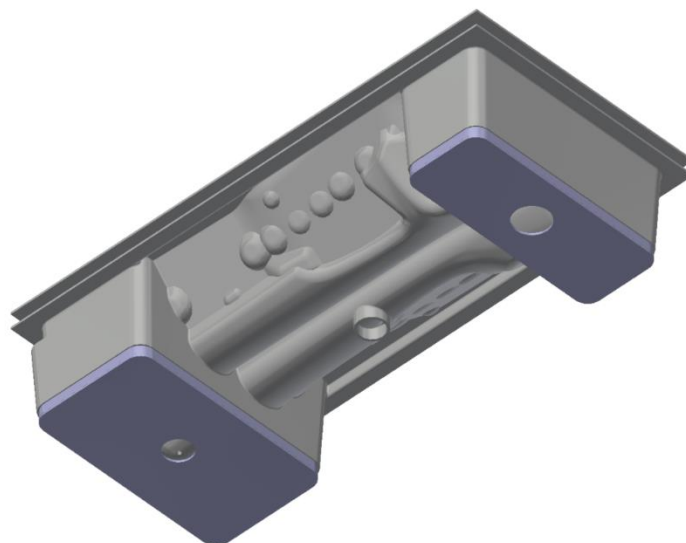
### 5.1 Geometrický model

Počítačový model formátu *.stp* poskytnutý k řešení úlohy obsahuje sadu čtyř lisovacích forem pro vstřikování plastů. Z těchto čtyř forem jsou vždy dvě formy totožného tvaru i velikosti a v této práci je dále věnována pozornost simulaci proudění jednou z těchto forem.

Dutina určená k průtoku teplotosného oleje je tvořena shora tvarovaným plechem samotné lisovací formy a zdola plechem podobného profilu pro docílení tvaru průtočné dutiny o přibližně stejné tloušťce po celé ploše lisovací formy. Spodní plech dále vytváří dvě vany určené ke vstupu a výstupu oleje do a z hlavní průtočné dutiny. Dno těchto van tvoří nástavec a uzavírací plech s otvorem pro vstupní, resp. výstupní potrubí. Model formy ukazuje Obrázek 5.1.1 a Obrázek 5.1.2.

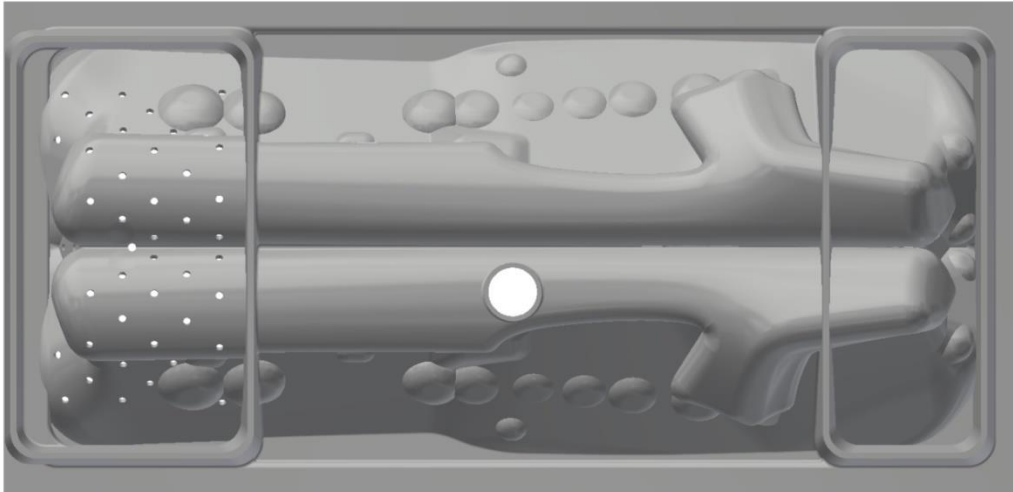


Obrázek 5.1.1: Forma – pohled shora



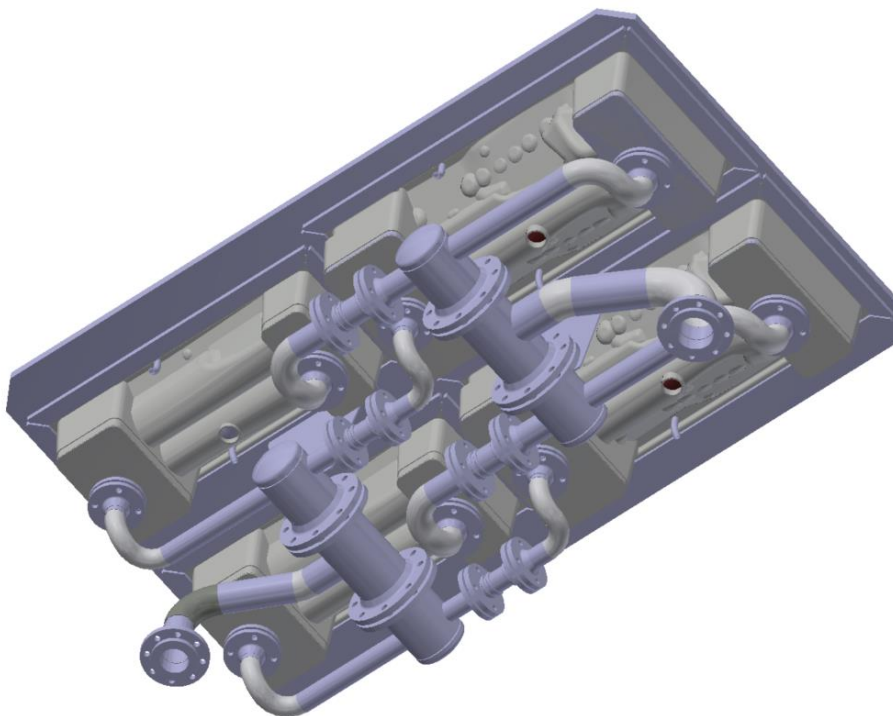
Obrázek 5.1.2: Forma – pohled zdola

Spodní plech průtočné dutiny obsahuje vtokové otvory určené k průtoku teplotosného oleje z oblasti vtokové vany do oblasti hlavní průtočné dutiny. Tyto otvory jsou rozmístěny rovnoměrně po ploše plechu oddělující hlavní průtokovou dutinu od vtokové vany. Jejich rozmístění je vidět v levé části Obrázek 5.1.3.



Obrázek 5.1.3: Vtokové otvory do průtočné dutiny

Sada forem je upevněna v základové desce pomocí montážních plechů a teplotosný olej je do a z forem veden systémem přívadčícího a odvádčícího olejového potrubí. Konfiguraci celé sady forem a potrubního systému ukazuje Obrázek 5.1.4.



Obrázek 5.1.4: Sada forem a potrubní systém

## 5.2 Cíl úlohy

Předmětem úlohy je numerický výpočet rozložení proudění oleje v průtočné dutině a jeho vlivu na rovnoměrnost ohřevu spodní části lisovací formy pro vstřikování plastů. Úloha je rozdělena do dvou částí, a to na výpočet proudění studeného oleje a proudění horkého oleje. Součástí úlohy je také rozmístění výtokových otvorů určených k průtoku oleje z oblasti hlavní průtočné dutiny do oblasti výtokové vany.

Cílem úlohy je identifikace kritických oblastí proudění teplotněsensitiveho oleje a návrh možné optimalizace proudění a rovnoměrného ohřevu formy pomocí úpravy konfigurace výtokových a výtokových otvorů mezi hlavní průtokovou dutinou a výtokovou, resp. výtokovou vanou.

## 5.3 Zadané parametry

### 5.3.1 Teplota oleje

Pro případ proudění studeného oleje je teplota oleje přiváděného do formy zadána hodnotou  $t_1 = 40$  °C.

Pro případ proudění horkého oleje je teplota oleje přiváděného do formy zadána hodnotou  $t_2 = 250$  °C.

### 5.3.2 Rychlost a tlak proudění systémem

Olej je přiváděn hlavní trasou potrubního systému o jmenovité světlosti DN80 objemovým průtokem 38 m<sup>3</sup>/h. Rychlost oleje v této části přiváděcího potrubí je zadána jako 2,01 m/s.

Po rozdělení hlavního toku do čtyř tras přívodního potrubí jmenovité světlosti DN50 je objemový průtok každou z tras 9,5 m<sup>3</sup>/h. Rychlost oleje v této části přívodního potrubí je zadána jako 1,344 m/s.

Maximální tlak v potrubí je dle zadání 5 bar a v průtočné části formy 0,5 bar.

### 5.3.3 Materiálové vlastnosti

Jako teplotněsensitive médium je v daném případě ohřevu lisovací formy použit olej s označením Farolin U. Zadané vlastnosti tohoto oleje za dvou výpočtových teplot uvádí Tabulka 5.3.1.

Tabulka 5.3.1: Vlastnosti oleje Farolin U

Teplota $t$ [°C]	40	250
Hustota $\rho$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	863,0	725,5
Měrná tepelná kapacita $c$ [J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	2070,0	2795,0
Součinitel tepelné vodivosti $\lambda$ [W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	0,1320	0,1195
Dynamická vazkost $\eta$ [kg·m <sup>-1</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	$26,753 \cdot 10^{-3}$	$0,60981 \cdot 10^{-3}$
Kinematická vazkost $\nu$ [m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	$31,0 \cdot 10^{-6}$	$0,84 \cdot 10^{-6}$

Spodní plech tvořící dno hlavní průtočné dutiny i výtokovou a odtokovou vanu je vyroben z oceli s označením ST 52-3. Horní plech náležící samotné lisovací formě je vyroben z niklu. Zadané vlastnosti obou těchto materiálů uvádí Tabulka 5.3.2

Tabulka 5.3.2: Vlastnosti použité oceli a niklu

Materiál	Ocel ST 52-3	Nikl
Hustota $\rho$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	7850,0	8898,2
Měrná tepelná kapacita $c$ [J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	470,0	430,5
Součinitel tepelné vodivosti $\lambda$ [W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	55,0	92,0

### 5.3.4 Okrajové podmínky tepelného toku

Okrajové podmínky tepelného toku jsou zadány v oblastech pod spodním plechem a nad horním plechem ohraničujícím průtočný prostor. V obou oblastech je okrajová podmínka dána tepelným tokem tvořeným prostupem tepla plechem a přestupem tepla do okolního prostředí, tedy

$$\dot{q} = k(t_w - t_0) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{s}{\lambda}} (t_w - t_0), \quad (5.3.1)$$

kde  $k$  je součinitel prostupu tepla,  $t_w$  je teplota oleje na stěně,  $t_0$  je teplota okolního prostředí,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla mezi stěnou do okolním prostředí,  $s$  je tloušťka stěny (plechu) a  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti plechu.

Proměnná  $\lambda$  je materiálová vlastnost zadaná v Tabulka 5.3.2 a  $s$  je pro oba plechy rovno 5 mm (ačkoliv se tloušťka vnějších stěn vtokové a výtokové vany po výšce vany mírně odchyloje od hodnoty 5 mm, byla ve výpočtu použita jednotná tloušťka  $s = 5$  mm, neboť při uvažování řádů dosazovaných veličin vychází, že  $\frac{1}{\alpha} \gg \frac{s}{\lambda}$  a odchylka tloušťky stěny má tak na  $k$  zanedbatelný vliv).

Pro obě prostředí je  $\alpha = 5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  a pod spodním plechem, resp. nad horním plechem je  $t_{ob} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ , resp.  $t_{ot} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Nedefinované oblasti mají být považovány za adiabatické.

### 5.3.5 Charakter proudění

Z geometrie, rychlosti a kinematické vazkosti v oblasti vstupního potrubí a oblasti hlavní průtočné dutiny plyne Reynoldsovo číslo za obou výpočtových teplot proudícího oleje. Tyto hodnoty obsahuje Tabulka 5.3.3.

Tabulka 5.3.3: Vlastnosti proudění

Re pro 40/250 °C	Re <sub>40</sub>	Re <sub>250</sub>
Vstup ( $d = 50$ mm)	2168	79999
Dutina ( $h = 8,5$ mm)	197	7286
Charakter proudění	Laminární	Turbulentní

V Tabulka 5.3.3 značí  $d$  vnitřní průměr vstupního potrubí a  $h$  nejmenší výšku hlavní průtočné dutiny.

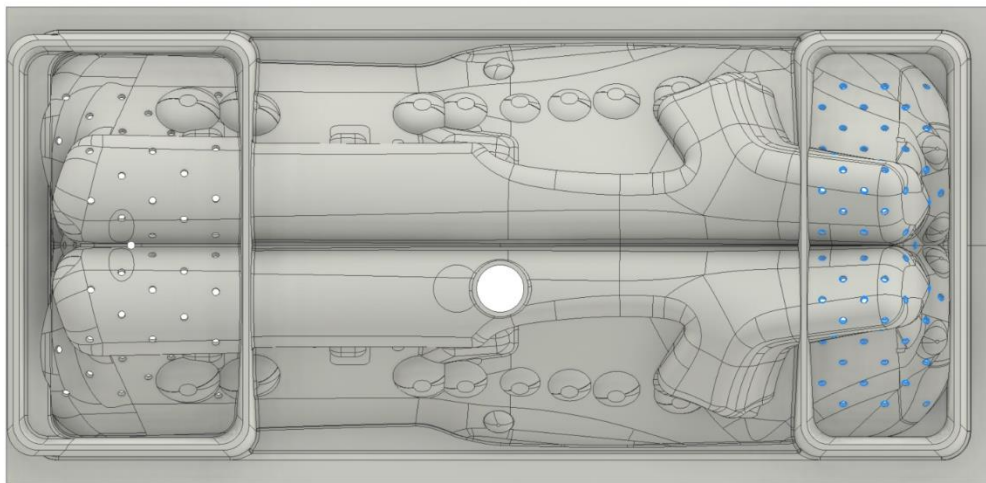
## 6 Řešení úlohy

### 6.1 Příprava modelu

Příprava modelu byla provedena v programu Autodesk Inventor.

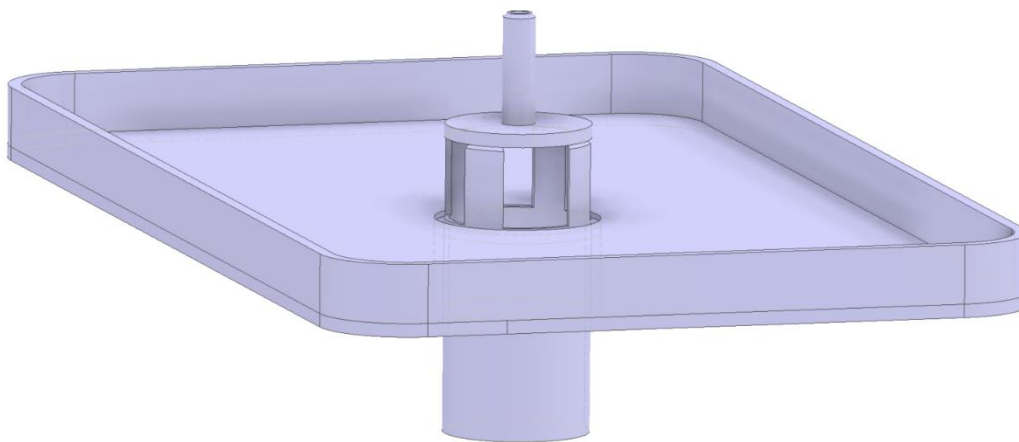
První část přípravy modelu spočívala ve vytvoření výtokových otvorů ve spodním plechu průtočné formy. Tyto otvory slouží k průtoku teplotného oleje z oblasti hlavní průtočné dutiny do oblasti výtokové vany.

Dle vzoru dispozice vtokových otvorů bylo ve výtokové části spodního plechu formy rovnoměrně rozmístěno 55 děr o průměru 8 mm. Součet ploch děr, a tedy celková průtočná plocha do výtokové vany, činí  $0,00276 \text{ m}^2$  a je shodná s celkovou průtočnou plochou ze vtokové vany do hlavní průtočné dutiny. Rozmístění výtokových děr ukazuje pravá část Obrázek 6.1.1.



Obrázek 6.1.1: Výtokové otvory z průtočné dutiny

Druhou částí přípravy modelu bylo vytvoření celkového objemu průtočné části formy. Do tvaru průtočné části byly zahrnuty i krátké části vstupního a výstupního potrubí a nástavec vstupního potrubí do vtokové vany tvarovaný k rozdělení vstupního proudu oleje do celého objemu vany, který ukazuje Obrázek 6.1.2.

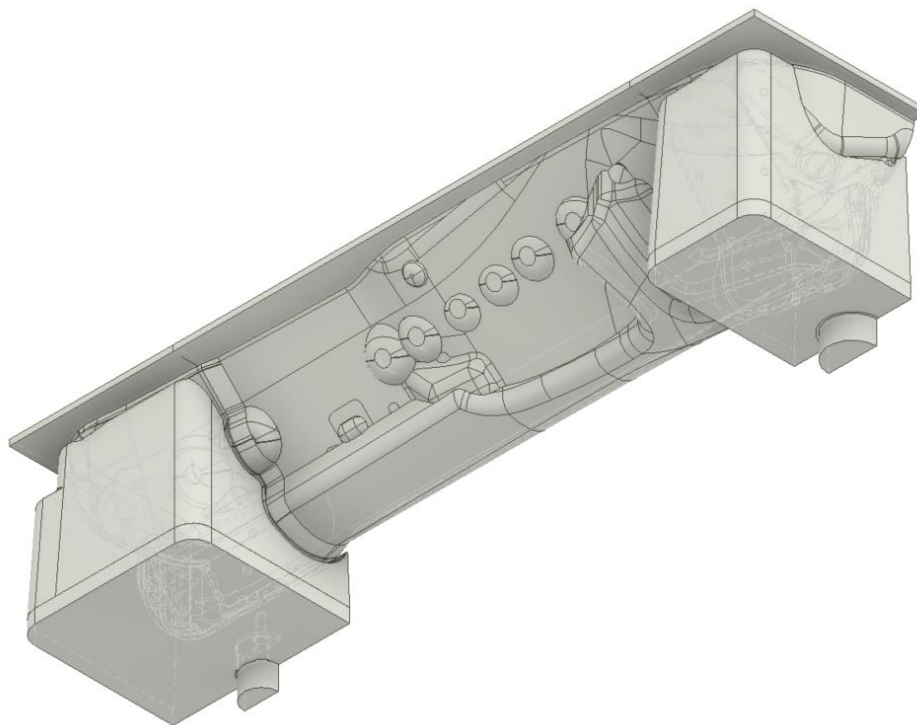


Obrázek 6.1.2: Nástavec vstupního potrubí

Průtočný objem mohl být díky podélné symetrii formy rozdělen na dvě tvarově shodné, zrcadlově obrácené poloviny, z nichž pro výpočet byla použita jen jedna. Vnější rozměry



výsledné průtočné části jsou 1100 mm délky, 266 mm hloubky a 250 mm šířky symetrické poloviny (500 mm šířky celé průtočné části před rozpůlením). Výslednou podobu výpočtového objemu ukazuje Obrázek 6.1.3 a Obrázek 6.1.4.



Obrázek 6.1.3: Výpočtový objem – pohled zdola



Obrázek 6.1.4: Výpočtový objem – pohled shora

## 6.2 Úprava modelu

Úprava modelu byla provedena v programu SpaceClaim.

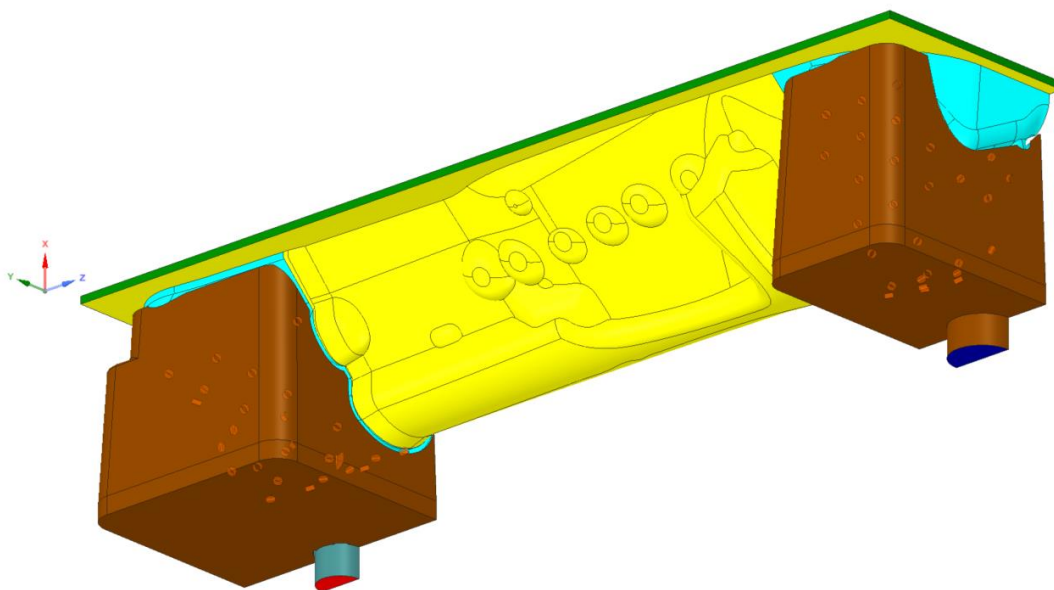
Geometrie modelu byla upravena pro hladší průběh sítování následujícími operacemi:

- Eliminací příliš malých ploch jejich spojením s většími sousedními plochami
- Sjednocením zbytečně rozdělených hran
- Úpravou nejasně definovaných hran mezi vzájemně navazujícími plochami
- Vyplněním mezer mezi špatně navazujícími plochami

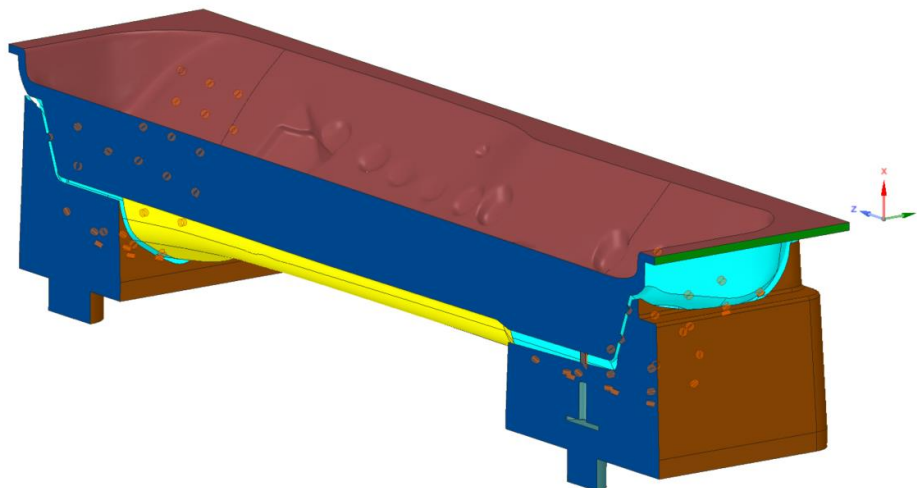
Povrch modelu byl rozdělen na oblasti pojmenovaných výběrů (tzv. named selections), které jsou popsány v Tabulka 6.2.1 a zobrazeny na Obrázek 6.2.1 a Obrázek 6.2.2.

Tabulka 6.2.1: Named selections

Oblast	Název	Barva
Vstupní průřez	Inlet	Red
Výstupní průřez	Outlet	Blue
Vstupní nástavec	Wall_baffle	Grey
Stěna mezi vtokovou vanou a okolním prostředím	Wall_feed_out	Brown
Stěna mezi výtokovou vanou a okolním prostředím	Wall_drain_out	Brown
Stěna mezi vtokovou vanou a hlavní dutinou	Wall_feed_in	Cyan
Stěna mezi výtokovou vanou a hlavní dutinou	Wall_drain_in	Cyan
Stěna mezi hlavní dutinou a vtokovou vanou	Wall_bottom_in	Cyan
Stěna mezi hlavní dutinou a výtokovou vanou	Wall_bottom_out	Cyan
Stěny vtokových otvorů	Wall_holes_in	Orange
Stěny výtokových otvorů	Wall_holes_out	Orange
Stěna spodního plechu do okolního prostředí	Wall_bottom_mid	Yellow
Boční stěny mezi dolním a horním plechem	Wall_side	Green
Stěna horního plechu do okolního prostředí	Wall_top	Brown
Rovina symetrie	Symmetry	Dark Blue



Obrázek 6.2.1: Named selections – pohled zdola



Obrázek 6.2.2: Named selections – pohled shora

### 6.3 Vytvoření výpočetní sítě

Vytvoření výpočetní sítě bylo provedeno v programu Fluent.

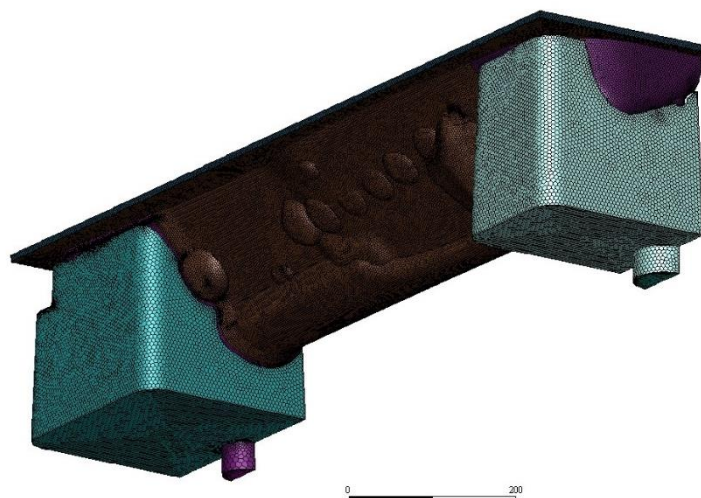
Při vytvoření výpočetní sítě byly zadány tři lokální podmínky velikosti buňky pro dosažení uspokojivé velikosti sítě:

- 0,5 mm pro oblasti *Wall\_holes\_in* a *Wall\_holes\_out*
- 3 mm pro oblasti *Wall\_top*, *Wall\_bottom\_in*, *Wall\_bottom\_mid* a *Wall\_bottom\_out*
- 5 mm pro oblasti *Wall\_feed\_out* a *Wall\_drain\_out*

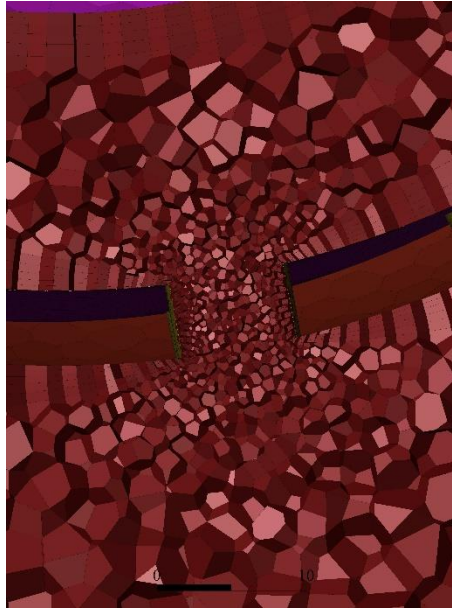
Byla vytvořena trojrozměrná polyhedrální výpočetní síť jejíž parametry uvádí Tabulka 6.3.1 a názorná místa v řezech ukazuje Obrázek 6.3.1, Obrázek 6.3.2 a Obrázek 6.3.3.

Tabulka 6.3.1: Parametry výpočetní sítě

Počet buňek	2 005 807
Maximum surface skewness	0,68
Minimum orthogonal quality	0,16
Maximum aspect ratio	5,9



Obrázek 6.3.1: Výpočetní síť – celek



Obrázek 6.3.2: Výpočetní síť – detail průtočného otvoru



Obrázek 6.3.3: Výpočetní síť – příčný řez

## 6.4 Numerická simulace

Numerická simulace byla provedena v programu Fluent.

Pro obě numerické simulace (proudění studeného a horkého oleje) byla vytvořena vlastní knihovna materiálů obsahující olej Farolin U, ocel ST 52-3 a nikl. Pro všechny tři materiály byly nastaveny vlastnosti dle zadaných hodnot. Pro olej s označením Farolin U byly vlastnosti závislé na teplotě nastaveny jako *piecewise-linear*, neboli pro dvě zadané teploty byli nastaveny odpovídající hodnoty zadaných materiálových vlastností, přičemž mezi těmito teplotami se vlastnosti dopočítávají podle lineární funkce proložené těmito dvěma hodnotami.

### 6.4.1 Proudění studeného oleje

Model proudění studeného oleje byl podle Reynoldsových čísel nastaven jako laminární a doplněn energetickou rovnicí.

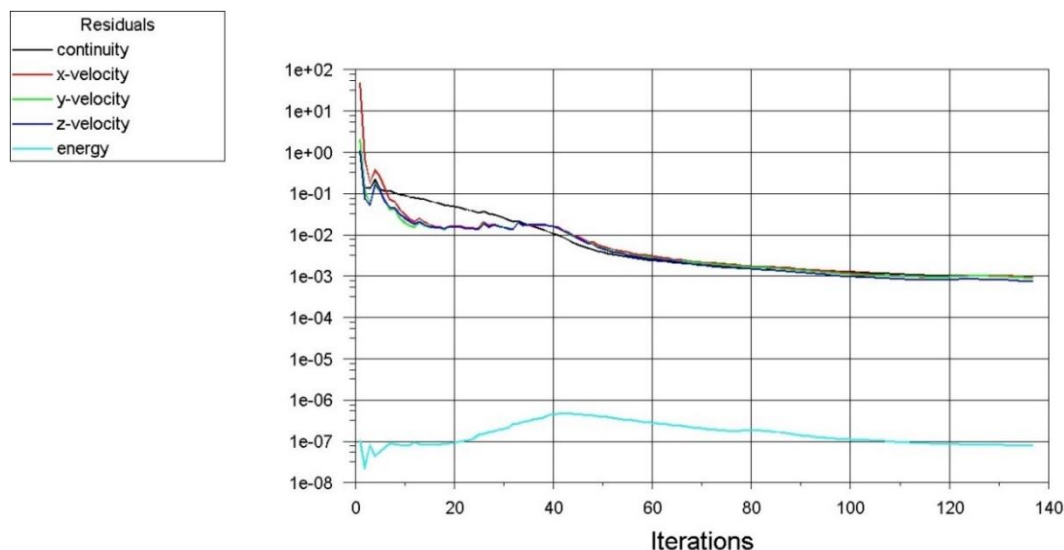
Vlastnosti materiálů byly nastaveny z vlastní knihovny materiálů dle zadání.

Okrajová podmínka rychlosti na vstupu byla nastavena jako *velocity-inlet* s rychlostí proudění 1,344 m/s a teplotou 40 °C. Rychlostní profil na vstupu vytvořený prouděním oleje přírodním potrubím byl zanedbán z důvodu přítomnosti nástavce vstupního potrubí, který proud vtékajícího oleje do vany rozdělí a přesměruje do stran, čímž dojde ke znehodnocení vstupního rychlostního profilu. Na výstupu byla nastavena tlaková okrajová podmínka *pressure-outlet* o tlaku 30000 Pa (0,3 bar). Tento tlak odpovídá zadanému maximálnímu tlaku v průtočné části formy 0,5 bar sníženému kvůli bezpečnosti a předpokládanému poklesu tlaku po délce průtočné části formy. Teplota případného zpětného proudu byla nastavena na 40 °C.

Na všech stěnách průtočné části byla nastavena okrajová podmínka *no-slip* (ulpívání tekutiny na stěně). Na stěnách oddělujících vtokovou a výtokovou vanu od hlavní průtočné části, na bočních okrajích mezery mezi horním a dolním plechem přiléhajících k základové desce a na nástavci vstupního potrubí (oblasti *Wall\_bottom\_in*, *Wall\_bottom\_out*, *Wall\_feed\_in*, *Wall\_drain\_in*, *Wall\_holes\_in*, *Wall\_holes\_out*, *Wall\_side* a *Wall\_baffel*) byla nastavena adiabatická okrajová podmínka. Na zbytku stěn sousedících s okolním prostředím byla nastavena okrajová podmínka konvekčního přestupu tepla mezi stěnou a okolním prostředím v kombinaci s kondukcí tepla skrze materiál stěn formy. Hodnoty tepelných okrajových podmínek byly nastaveny dle zadání.

Na rovině symetrie byla nastavena okrajová podmínka symetrie (*symmetry*).

Reziduály sledovaných veličin výpočtu (kontinuita, rychlost ve směrech x, y, z a energie) zkonvergovaly pod požadované hodnoty ( $1 \cdot 10^{-6}$  pro energii a  $1 \cdot 10^{-3}$  pro zbylé reziduály) po 137 iteracích. Průběh reziduálů výpočtu ukazuje Obrázek 6.4.1.



Obrázek 6.4.1: Průběh reziduálů laminárního výpočtu

## 6.4.2 Proudění horkého oleje

Model proudění horkého oleje byl podle Reynoldsových čísel ze zadání nastaven jako turbulentní SST k- $\omega$  a doplněn energetickou rovnicí pro výpočet tepelných toků.

Na vstupu byla doplněna okrajová podmínka intenzity turbulence  $I = 10 \%$  a hydraulického průměru  $d_h = 50$  mm. Teplota vstupního proudu byla nastavena na 250 °C dle zadání.

Na výstupu byla doplněna okrajová podmínka intenzity turbulence případného zpětného proudu  $I = 20 \%$  a hydraulického průměru  $d_h = 70$  mm. Teplota zpětného proudu byla nastavena na 250 °C.

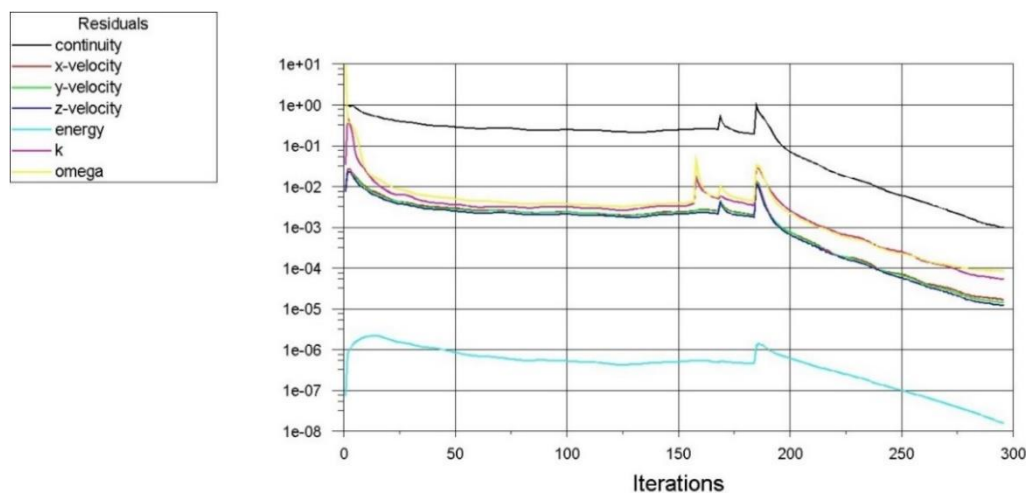
Ostatní okrajové podmínky se proti případu proudění studeného oleje nezměnily.

Reziduály sledovaných veličin výpočtu (kontinuita, rychlost ve směrech x, y, z, energie, turbulentní kinetická energie a disipace kinetické energie) se zhruba po 50 iteracích zastavily na příliš vysokých hodnotách a dále stagnovaly (zvláště reziduál kontinuity stagnoval na poměrně velmi vysoké hodnotě cca  $2,6 \cdot 10^{-1}$ ).

Za účelem dosáhnout konvergence výpočtu byly změněny metody výpočtu prostorové difference následovně:

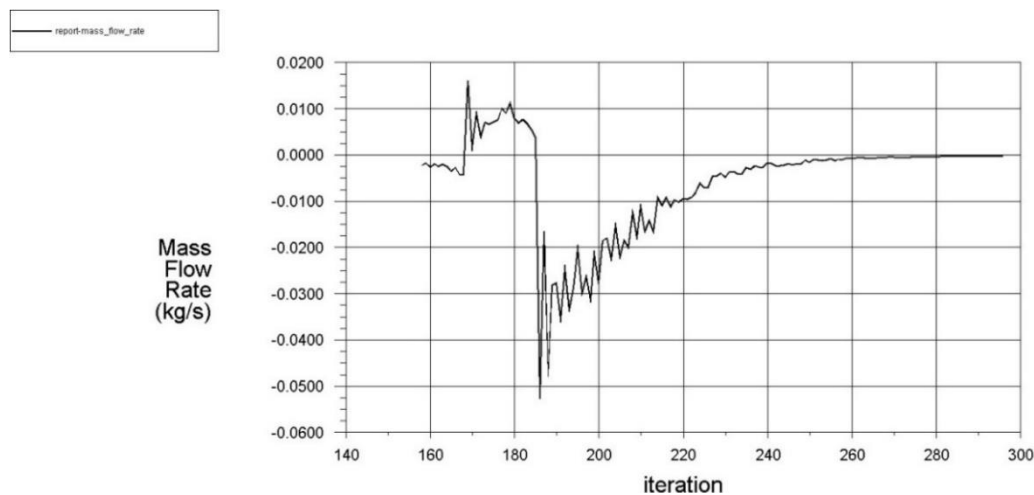
- pro tlak ze *Second Order* (druhého řádu) na *Standard* (standardní)
- pro hybnost ze *Second Order Upwind* (upwind druhého řádu) na *First Order Upwind* (upwind prvního řádu)
- pro turbulentní kinetickou energii z *First Order Upwind* na *Second Order Upwind*
- pro disipaci kinetické energie z *First Order Upwind* na *Second Order Upwind*

Po těchto úpravách začaly všechny reziduály opět klesat, až po 297 iteracích zkonvergovaly pod požadované hodnoty ( $1 \cdot 10^{-6}$  pro energii a  $1 \cdot 10^{-3}$  pro zbylé reziduály). Průběh sledovaných reziduálů výpočtu ukazuje Obrázek 6.4.2.



Obrázek 6.4.2: Průběh reziduálů turbulentního výpočtu

Stabilita výpočtu byla zhruba od 150. iterace sledována také podle součtu hmotnostního průtoku vstupem a výstupem výpočetního objemu. Tento součet postupně s klesáním reziduálů zkonvergoval k nule a potvrzuje tak stabilitu výpočtu, jak ukazuje Obrázek 6.4.3.



Obrázek 6.4.3: Součet hmotnostního průtoku

## 7 Vyhodnocení výsledků

### 7.1 Proudění studeného oleje

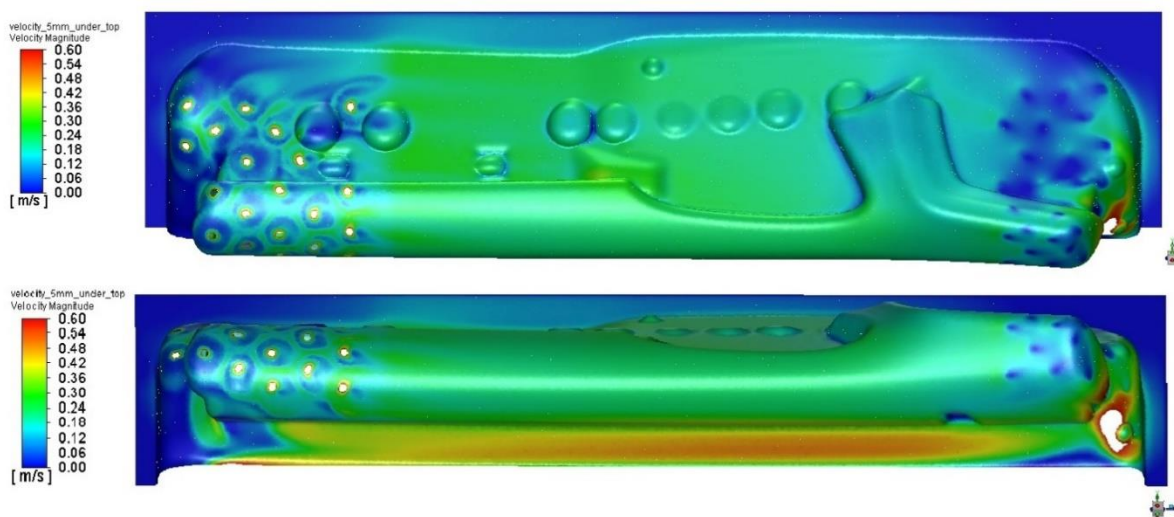
#### 7.1.1 Tlaková ztráta

Byl vyčíslen průměrný tlak na vstupu o hodnotě  $p_i = 33520$  Pa a průměrný tlak na výstupu o hodnotě  $p_o = 30252$  Pa. Tlaková ztráta průtočné části formy je tedy  $\Delta p = p_i - p_o = 33520 - 30252 = 3268$  Pa = 0,03268 Bar. Nejvyšší tlak dosažený v průtočné části formy má hodnotu  $p_{max} = 33642$  Pa = 0,33642 bar, což nepřesahuje maximální dovolený tlak 0,5 bar.

#### 7.1.2 Rychlost proudění

Pro vyhodnocení rozvržení rychlosti proudění v hlavní průtočné dutině byla pomocí funkce *transform surface* s využitím odsazení *iso-distance* od oblasti povrchu *Wall\_top* vytvořena plocha odsazená 5 mm pod stěnu horního plechu náležícího k samotné lisovací formě. Na této ploše byla zobrazena velikost rychlosti proudění oleje průtočnou dutinou. Maximální hodnota zobrazené rychlosti byla omezena na 0,6 m/s, neboť tuto hodnotu přesahuje rychlost proudění jen v místech přímo nad průtočnými otvory ze vtokové vany, která jsou z hlediska vyhodnocení proudění po celé délce průtočné dutiny nezajímavé.

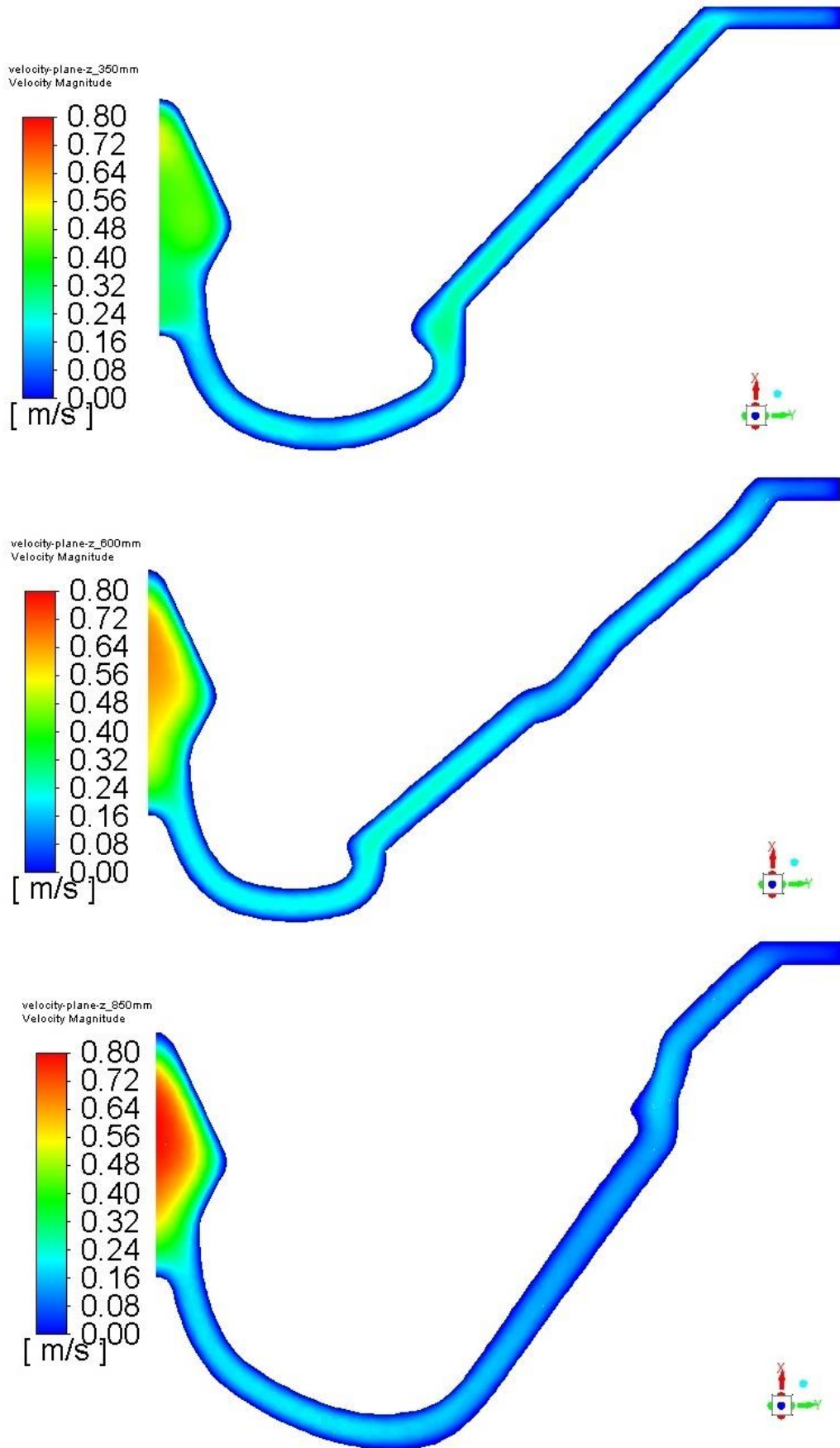
Rozložení velikosti rychlosti proudění ukazuje Obrázek 7.1.1, z něhož je patrné, že v oblasti blízké rovině symetrie proudí olej výrazně rychleji než v oblasti od roviny symetrie vzdálenější. Tato nerovnoměrnost proudění je zapříčiněna rozdílnou tloušťkou dutiny po příčném řezu formou.



Obrázek 7.1.1: Rychlost laminárního proudění 5 mm pod horním plechem

Pro bližší prozkoumání problému byly vytvořeny tři roviny v příčném řezu formou, a to ve vzdálenostech 350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje výpočtového objemu, což odpovídá třem příčným řezům rovnoměrně rozmístěným v oblasti mezi vtokovou a výtokovou vanou po směru proudu oleje. Rozložení velikosti rychlosti proudění ukazuje Obrázek 7.1.2.

Z Obrázek 7.1.2 je patrné, že proud oleje, který je průtočnými otvory rovnoměrně distribuován po šířce hlavní průtočné dutiny, se po délce této dutiny postupně přesouvá z okrajových oblastí dutiny do její středové oblasti v blízkosti roviny symetrie. To je zapříčiněno větším odporem proudění v místech s menší tloušťkou průtočné dutiny.



Obrázek 7.1.2: Rychlost laminárního proudění v příčných řezech (350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje)



## 7.2 Proudění horkého oleje

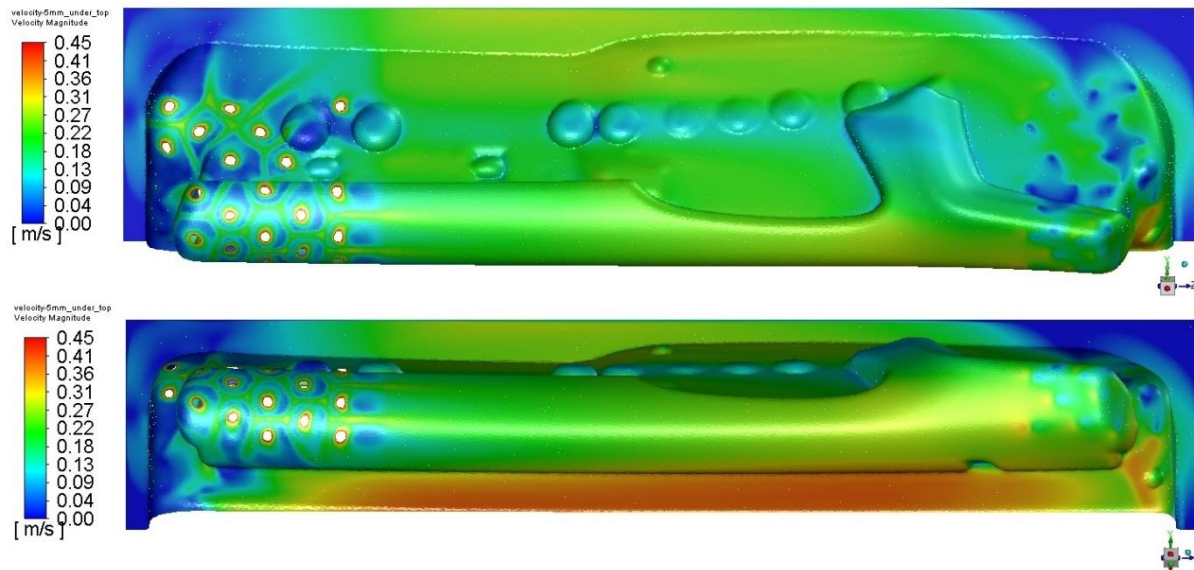
### 7.2.1 Tlaková ztráta

Byl vyhodnocen průměrný tlak na vstupu o hodnotě  $p_i = 32628$  Pa a průměrný tlak na výstupu o hodnotě  $p_o = 30188$  Pa. Tlaková ztráta průtočné části formy je tedy  $\Delta p = p_i - p_o = 32628 - 30188 = 2440$  Pa = 0,0244 Bar. Nejvyšší tlak dosažený v průtočné části formy má hodnotu  $p_{max} = 32861$  Pa = 0,32861 bar, což nepřesahuje maximální dovolený tlak 0,5 bar.

### 7.2.2 Rychlost proudění

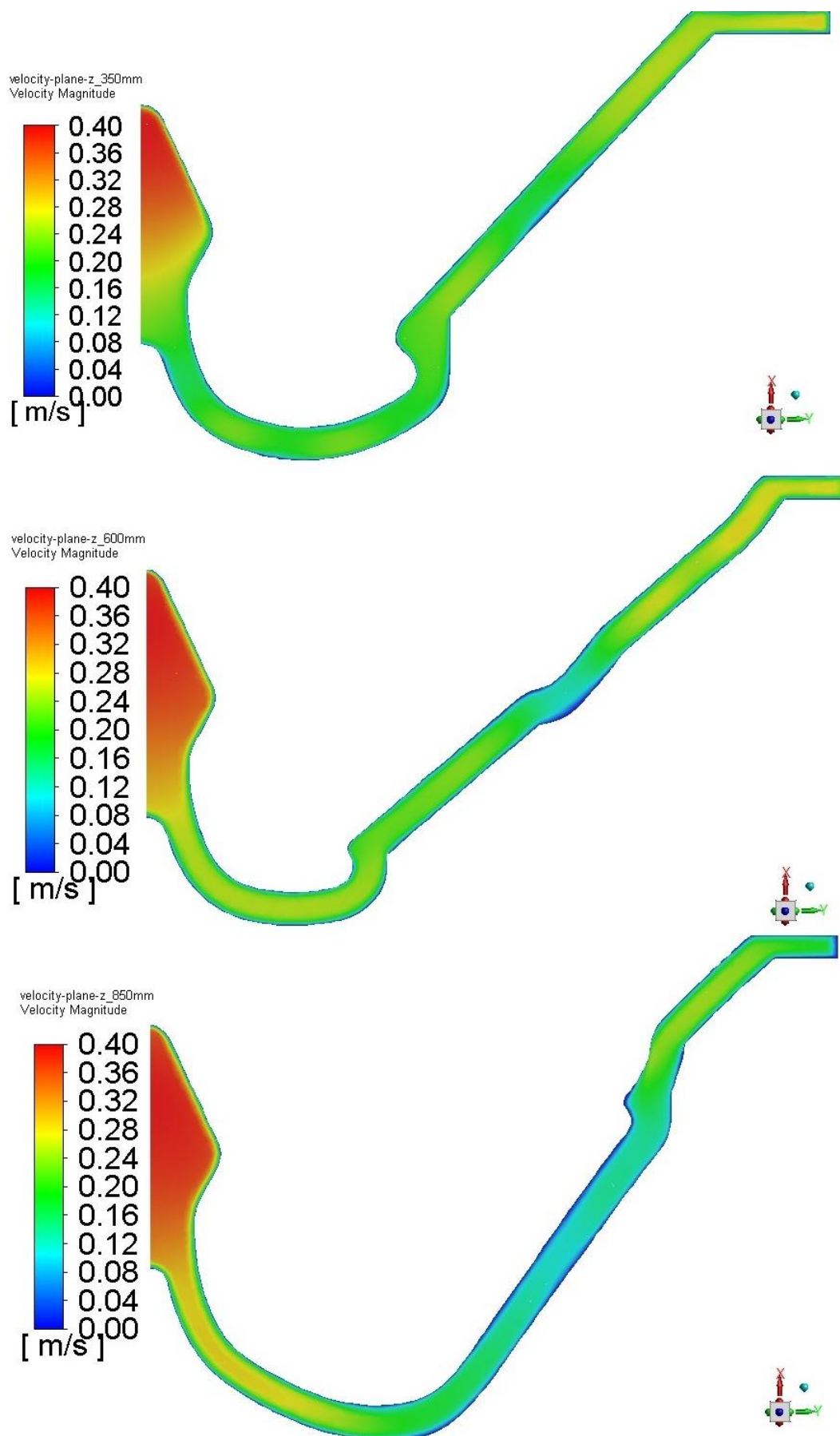
Rychlost proudění horkého oleje byla pro možnost srovnání vyhodnocena na stejné ploše a rovinách jako rychlost proudění oleje studeného, tedy na ploše odsazené funkcí *transform-surface* 5 mm pod stěnu horního plechu náležícího k samotné lisovací formě a ve třech příčných řezech ve vzdálenosti 350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje výpočtového objemu, tedy rovnoměrně rozmístěných mezi vtokovou a výtokovou vanou.

Obrázek 7.2.1 ukazuje rozložení velikosti rychlosti proudění na ploše odsazené 5 mm pod stěnou horního plechu. Oproti laminárnímu proudění studeného oleje je v tomto případě vidět, že maximální rychlost proudu je výrazně nižší a rychlost proudění je rovnoměrněji rozložena po celé šířce hlavní průtočné dutiny. I v tomto případě je ovšem patrné, že nejvyšší rychlosti dosahuje proud ve střední části šířky formy, tedy v oblasti roviny symetrie, kde je tloušťka průtočné dutiny největší. Z obrázku je dále možné vypočítat výrazné snížení rychlosti proudění v oblasti výraznějších prolisů v plechu formy. Lze předpokládat, že toto snížení rychlosti oleje je způsobeno náhlou změnou tvaru formy v podélném směru a stagnací proudu před překážkou, resp. vytvořením úplavu za takovouto překážkou.



Obrázek 7.2.1: Rychlost turbulentního proudění 5 mm pod horním plechem

Obrázek 7.2.2 ukazuje rozložení rychlosti proudění oleje v příčných řezech umístěných 350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje průtočného objemu ve směru proudění. Z obrázku je patrné, že rozložení rychlosti je rovnoměrnější a nedochází k jeho změně podél průtočné dutiny v takové míře jako u laminárního proudění.



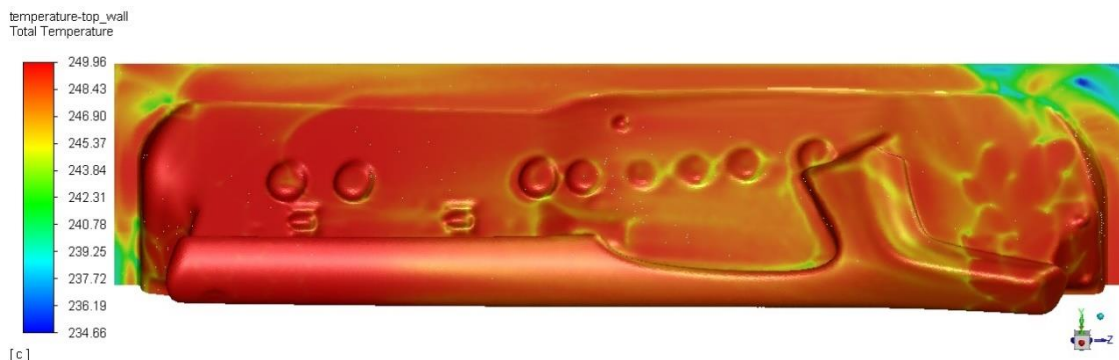
Obrázek 7.2.2: Rychlost turbulentního proudění v příčných řezech (350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje)

### 7.2.3 Přestup tepla

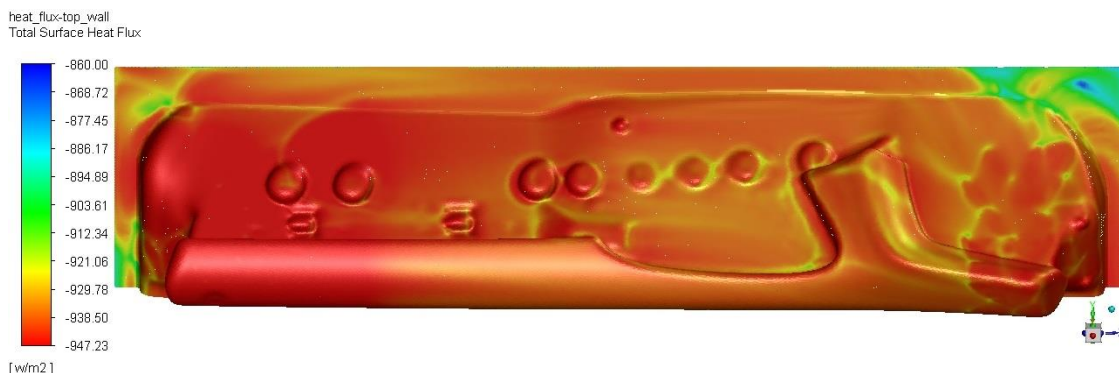
Pro zhodnocení přestupu tepla z horkého oleje do stěny horního plechu náležícímu k ohřívání lisovací formě bylo na stěně horního plechu (oblast *Wall\_top*) zobrazeno rozložení teploty a tepelného toku skrze stěnu.

Obrázek 7.2.3 ukazuje rozložení teploty na stěně horního plechu. Z obrázku je patrné mírné snížení teploty stěny v oblastech náhlé změny tvaru formy. Tento jev může být způsobem stagnací proudu před překážkou, resp. vytvořením úplavu za překážkou, a tím pádem nedostatečným přístupem horkého oleje do těchto oblastí.

S rozložením teploty na stěně horního plechu koresponduje i rozložení tepelného toku na téměř povrchu zobrazené na Obrázek 7.2.4.



Obrázek 7.2.3: Rozložení teploty na stěně horního plechu



Obrázek 7.2.4: Rozložení tepelného toku na stěně horního plechu

## 8 Návrh optimalizace

Z kvalitativního vyhodnocení výsledků byly vyzorovány dva hlavní nežádoucí jevy, které negativně ovlivňují proudění oleje průtočnou dutinou lisovací formy a její ohřev:

1. Většina proudu oleje se při průchodu dutinou po délce formy koncentruje ve středové oblasti šířky dutiny v blízkosti roviny symetrie.
2. Proud oleje v oblastech vzdálenějších od osy symetrie je negativně ovlivňován náhlými změnami tvaru formy (potažmo průtočné dutiny).

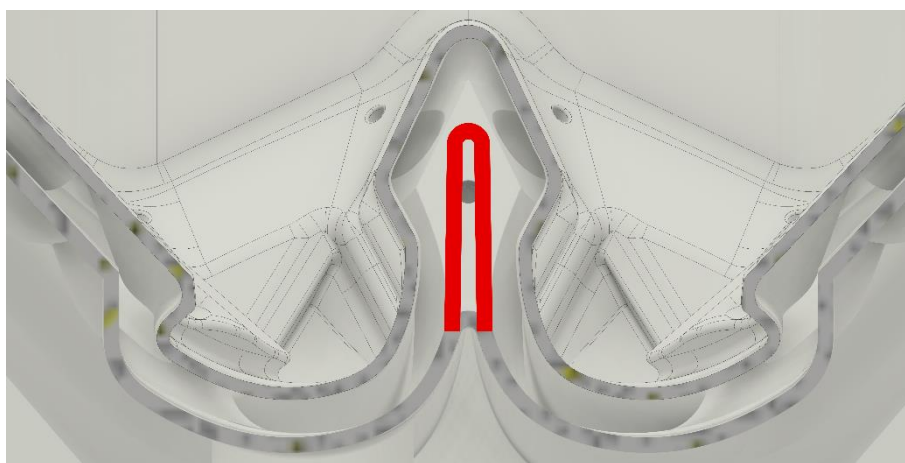
Bod první je patrně zapříčiněn rozdílnou tloušťkou průtočné dutiny po šířce formy. Z vyhodnocení výsledků je zřejmé, že hlavně při laminárním proudění studeného oleje kladou oblasti vzdálenější od roviny symetrie (tedy oblasti s menší tloušťkou dutiny) větší odpor proudění a většina průtočného množství se tak při průtoku dutinou přesouvá blíže k rovině

symetrie, kde se tloušťka dutiny výrazně zvětšuje a odpor proudění klesá. Turbulentní proudění horkého oleje vykazuje stejný jev s tím rozdílem, že rozložení rychlosti proudění v příčném řezu se po délce proudění mění jen mírně.

Bod druhý je zapříčiněn náhlými změnami tvaru dutiny hlavně v místech prolisů horního plechu lisovací formy, které kopíruje i plech dolní. Tyto překážky kladou proudů zvýšený odpor než okolní oblasti a dochází v jejich okolí ke stagnaci proudů oleje a vytváření úplavů.

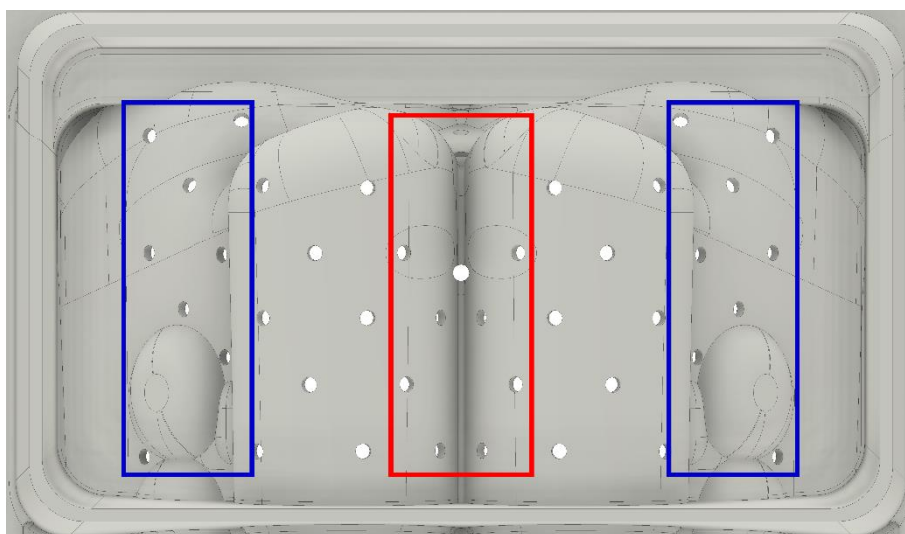
Pro zlepšení rozložení proudění teplotnosného oleje průtočnou dutinou a ohřevu lisovací formy byly navrženy tři způsoby optimalizace tvaru dutiny a průtočných otvorů:

1. Redukce tloušťky průtočné dutiny ve středové oblasti v okolí roviny symetrie zvýšením středového hřbetu dolního plechu průtočné dutiny dle Obrázek 7.2.1. Touto úpravou dojde ve středové části formy ke zvýšení odporu proudění a tím pádem k rovnoměrnějšímu rozložení rychlosti proudění do oblastí vzdálenějších od roviny symetrie.



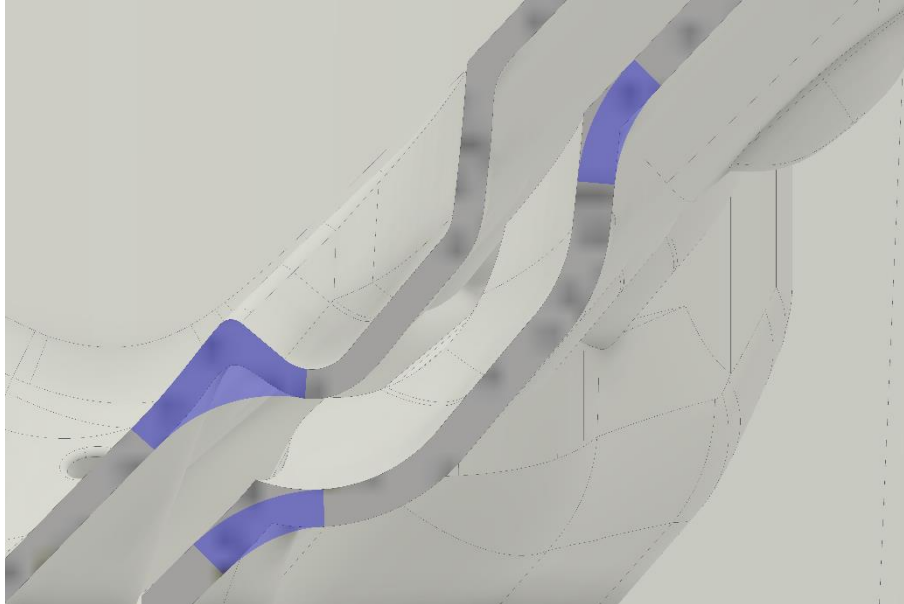
Obrázek 7.2.1: Zvýšení středového hřbetu dolního plechu

2. Navedení většího množství proudícího oleje do oblastí vzdálených od roviny symetrie úpravou velikosti průtočných otvorů ze vtokové vany do hlavní průtočné dutiny dle Obrázek 7.2.2. Na obrázku jsou znázorněny modré a červené oblasti. Otvory v modrých oblastech jsou určeny ke zvětšení průměru nebo zvýšení počtu, zatímco otvory v červené oblasti jsou určeny ke zmenšení průměru nebo snížení počtu.



Obrázek 7.2.2: Oblasti modifikace průtočných otvorů (modrá – zvětšení, červená – zmenšení)

3. Zaoblení ostrých hran a tvarových přechodů uvnitř průtočné dutiny. Touto úpravou dojde k redukci lokálního odporu proudění v oblastech náhlé změny tvaru průtočné dutiny a k částečné eliminaci stagnace proudu a tvoření úplavů v těchto oblastech. Příklad takové úpravy ukazuje Obrázek 7.2.3 na němž je modrou barvou naznačen optimalizovaný tvar ostrých záhybů průtočné dutiny.



Obrázek 7.2.3: Zaoblení náhlých změn tvaru dutiny

Navržené změny tvaru průtočné oblasti by měly vést k rovnoměrnějšímu rozložení rychlosti proudícího oleje po příčném průřezu hlavní průtočnou dutinou a tím k rovnoměrnějšímu ohřevu lisovací formy. Kombinací různé míry jednotlivých úprav může dojít k výslednému nárůstu nebo poklesu celkové tlakové ztráty při průtoku dutinou. Úprava č. 1 tlakovou ztrátu pravděpodobně zvýší. Úprava č. 2 v případě zmenšení průřezu děr a celkového snížení součtu průtočné plochy otvorů tlakovou ztrátu zvýší a naopak. Úprava č. 3 celkovou tlakovou ztrátu sníží.

Vzhledem k přítomnosti nástavce vstupního potrubí do oblasti vtokové vany, který proud oleje záměrně zahne a rozdělí do celého objemu vany, je vliv rychlostního profilu přitékajícího oleje zanedbatelný a optimalizace potrubního systému by zřejmě neměla znatelný dopad na průběh proudění průtočnou dutinou lisovací formy. Případnou optimalizací potrubního systému by se dala ovlivnit především tlaková ztráta samotného potrubního systému.

## 9 Závěr

Diplomová práce je rozdělena na dvě části: teoretickou a praktickou.

V teoretické části byly vysvětleny fyzikální jevy a mechanismy související s prouděním tekutin a přenosem tepla. Dále byly popsány numerické metody sloužící k výpočtům proudění a přenosu tepla a popsány nejpoužívanější modely těchto numerických metod, z nichž každý má své výhody a nevýhody při řešení specifických typů proudění v závislosti na použitých výpočtových rovnicích.

Praktická část práce je zaměřena na řešení úlohy proudění a přenosu tepla, jejímž cílem byl výpočet proudění teplonosného oleje průtočnou dutinou při předehřevu lisovací formy pro vstřikování plastů. Byl vytvořen a upraven výpočtový model průtočné oblasti sestávající ze vtokové vany, hlavní průtočné dutiny a výtokové vany. Na modelu byla dále vytvořena výpočtová síť a provedeny dva numerické výpočty: výpočet laminárního proudění studeného oleje a výpočet turbulentního proudění horkého oleje.

Výsledky laminárního výpočtu studeného oleje byly kvalitativně vyhodnoceny z hlediska proudění tekutiny a výsledky turbulentního výpočtu horkého oleje byly kvalitativně vyhodnoceny z hlediska proudění tekutiny a přenosu tepla.

Na závěr praktické části byly navrženy úpravy tvaru průtočné dutiny zahrnující následující tři doporučení:

- Redukce tloušťky středové oblasti příčného průřezu hlavní průtočné dutiny zvýšením hřbetu dolního plechu ohraničujícího dutinu.
- Zvětšení nebo přidání, resp. zmenšení nebo odebrání průtočných otvorů přivádějících olej ze vtokové vany do hlavní průtočné dutiny v různých částech stěny mezi vanou a dutinou.
- Zaoblení oblastí s náhlou změnou tvaru kladoucích zvýšený odpor proudění oleje.

Zpracování těchto doporučení do modelu průtočné části formy by mělo vést k dosažení rovnoměrnějšího rozložení rychlosti proudícího oleje po příčném průřezu hlavní průtočné dutiny a tím k zajištění rovnoměrnějšího přenosu tepla z oleje do materiálu lisovací formy.

Vliv tvaru olejového potrubního systému byl sledován jako zanedbatelný z důvodu přítomnosti nástavce vstupního potrubí do vtokové vany, který slouží k rozdělení a usměrnění proudu oleje po celém objemu vany. Optimalizace tvaru potrubního systému tak může výrazněji ovlivnit především tlakovou ztrátu samotného potrubního systému.

## Seznam použitých symbolů

Symbol	Název	Jednotka	Symbol	Název	Jednotka
c	Měrná tepelná kapacita	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	t	Teplota	$^{\circ}\text{C}$
Co	Courantovo číslo	-	t	Čas	s
d	Průměr / tloušťka	m	u	Rychlost	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
d <sub>h</sub>	Hydraulický průměr	m	V	Objem	$\text{m}^3$
F	Síla	N	x	Vzdálenost	m
h	Entalpie	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$	y	Vzdálenost	m
i	Index	-	y <sup>+</sup>	Bezrozměrná vzdálenost	-
I	Intenzita turbulence	%	z	Vzdálenost	m
j	Index	-	α	Součinitel přestupu tepla	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
k	Součinitel prostupu tepla	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$	β	Tlaková rozpínavost	-
k	Sčítací index	-	γ	Teplotní roztažnost	-
k	Turbulentní kinetická energie	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$	δ	Tloušťka	m
l	Sčítací index	-	δ <sub>ik</sub>	Kroneckerův tenzor	-
l	Turbulentní měřítko	m	ε	Objemová stlačitelnost	-
m	Hmotnost	kg	ε	Disipace kinetické energie	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$
Nu	Nusseltovo číslo	-	η	Dynamická vazkost	Pa·s
p	Tlak	Pa	λ	Součinitel tepelné vodivosti	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Pr	Prandtlovo číslo	-	ν	Kinematická vazkost	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
Q	Teplo	J	ξ	Časový index	-
q	Hustota tepelného toku	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$	ρ	Hustota	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
r	Specifická plynová konstanta	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	σ	Turbulentní Prandtlovo číslo	-
Re	Reynoldsovo číslo	-	τ	Smykové napětí	Pa
S	Plocha	$\text{m}^2$	Φ	Disipační funkce	-
s	Vzdálenost	m	ω	Specifická disipace energie	$\text{s}^{-1}$
T	Termodynamická teplota	K			

## Seznam obrázků

Obrázek 2.1.1: Elementární objem tekutiny [1].....	3
Obrázek 2.3.1: Vedení tepla deskou [1].....	6
Obrázek 2.3.2: Prostup tepla deskou.....	7
Obrázek 2.4.1: Rychlostní profil laminárního proudění [4].....	9
Obrázek 2.4.2: Rychlost jako funkce času u turbulentního proudění [1].....	10
Obrázek 2.4.3: Volná smyková oblast [4].....	11
Obrázek 2.4.4: Stěnová smyková vrstva [4].....	11
Obrázek 2.4.5: Kombinované smykové vrstvy – paprsek, úplav a potrubí [4].....	11
Obrázek 2.4.6: Proudová trubice [6].....	12
Obrázek 2.4.7: Prostorové proudění [6].....	12
Obrázek 3.1.1: Prostorová diskretizace síťové metody.....	14
Obrázek 3.2.1: Prostorová diskretizace metody tepelných bilancí.....	16
Obrázek 3.4.1: Jednotlivé kroky každé iterace výpočtu.....	17
Obrázek 3.5.1: Metody modelování turbulence [1].....	18
Obrázek 3.8.1: Modelování stěnovou funkcí a přímé modelování [1].....	30
Obrázek 4.1.1: Hexahedrální (červený), polyhedrální (zelený) a tetrahedrální (modrý) prvek sítě [11].....	33
Obrázek 4.1.2: Konverze tetrahedrální na polyhedrální síť [11].....	34
Obrázek 5.1.1: Forma – pohled shora.....	36
Obrázek 5.1.2: Forma – pohled zdola.....	36
Obrázek 5.1.3: Vtokové otvory do průtočné dutiny.....	37
Obrázek 5.1.4: Sada forem a potrubní systém.....	37
Obrázek 6.1.1: Výtokové otvory z průtočné dutiny.....	40
Obrázek 6.1.2: Nástavec vstupního potrubí.....	40
Obrázek 6.1.3: Výpočtový objem – pohled zdola.....	41
Obrázek 6.1.4: Výpočtový objem – pohled shora.....	41
Obrázek 6.2.1: Named selections – pohled zdola.....	42
Obrázek 6.2.2: Named selections – pohled shora.....	43
Obrázek 6.3.1: Výpočetní síť – celek.....	43
Obrázek 6.3.2: Výpočetní síť – detail průtočného otvoru.....	44
Obrázek 6.3.3: Výpočetní síť – příčný řez.....	44
Obrázek 6.4.1: Průběh reziduálů laminárního výpočtu.....	45
Obrázek 6.4.2: Průběh reziduálů turbulentního výpočtu.....	46
Obrázek 6.4.3: Součet hmotnostního průtoku.....	46
Obrázek 7.1.1: Rychlost laminárního proudění 5 mm pod horním plechem.....	47
Obrázek 7.1.2: Rychlost laminárního proudění v příčných řezech (350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje).....	48
Obrázek 7.2.1: Rychlost turbulentního proudění 5 mm pod horním plechem.....	49
Obrázek 7.2.2: Rychlost turbulentního proudění v příčných řezech (350 mm, 600 mm a 850 mm od okraje).....	50
Obrázek 7.2.3: Rozložení teploty na stěně horního plechu.....	51
Obrázek 7.2.4: Rozložení tepelného toku na stěně horního plechu.....	51
Obrázek 7.2.1: Zvýšení středového hřbetu dolního plechu.....	52
Obrázek 7.2.2: Oblasti modifikace průtočných otvorů (modrá – zvětšení, červená – zmenšení).....	52
Obrázek 7.2.3: Zaoblení náhlých změn tvaru dutiny.....	53



## Seznam tabulek

Tabulka 3.6.1: Výchozí hodnoty konstant modelu Standard k- $\epsilon$ [9].....	23
Tabulka 3.6.2: Výchozí hodnoty konstant modelu RNG k- $\epsilon$ [9] .....	24
Tabulka 3.6.3: Výchozí hodnoty konstant modelu Realizable k- $\epsilon$ [9] .....	26
Tabulka 3.9.1: Okrajové podmínky kontinuity .....	31
Tabulka 3.9.2: Veličiny okrajových podmínek turbulence [1] .....	32
Tabulka 5.3.1: Vlastnosti oleje Farolin U .....	38
Tabulka 5.3.2: Vlastnosti použité oceli a niklu .....	39
Tabulka 5.3.3: Vlastnosti proudění .....	39
Tabulka 6.2.1: Named selections .....	42
Tabulka 6.3.1: Parametry výpočtové sítě .....	43

## Seznam použité literatury

- [1] **Kozubková, Milada, Blejchař, Tomáš a Bojko, Marian.** *Modelování přenosu tepla, hmoty a hybnosti.* Ostrava : Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2019.
- [2] **Šesták, Jiří a Rieger, František.** *Přenos hybnosti, tepla a hmoty.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [3] **Noskievič, Jaromír a kol.** *Mechanika tekutin.* Praha : SNTL, 1987.
- [4] **Uruba, Václav.** *Přednášky z předmětu Mechanika Tekutin.* Plzeň : ZČU FST KKE, 2014.
- [5] **Kozubková, Milada.** *Matematické modely kavitace a hydraulického rázu.* Ostrava : VŠB - Technická univerzita, 2009. ISBN 978-80-248-2043-9.
- [6] **Linhart, Jiří.** *Mechanika tekutin I.* Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2006.
- [7] —. *Přednášky z předmětu Přenos tepla a hmoty.* Plzeň : ZČU FST KKE, 2017.
- [8] **Uruba, Václav.** *Turbulence.* Praha : ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2014 Druhé, přepracované vydání.
- [9] **Vlček, Petr.** *Modelování turbulentního proudění.* Praha : ČVUT.
- [10] **Hovorka, Martin.** *Odvod tepla axiálně chlazených forem.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2017.
- [11] **Sosnowski, Marcin, Krzywanski, Jaroslaw a Gnatowska, Renata.** Polyhedral meshing as an innovative approach to computational domain discretization of a cyclon in a fluidized CLC unit. *E3S Web of Conferences.* [Online] 2016. [https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/pdf/2017/02/e3sconf\\_ef2017\\_01027.pdf](https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/pdf/2017/02/e3sconf_ef2017_01027.pdf).
- [12] **Čermák, Libor.** *Numerické metody II.* Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2722-1.
- [13] **Maštovský, Otakar.** *Hydromechanika.* Praha : SNTL, 1964.