

**Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd**

**MODELOVÁNÍ AEROELASTICKÝCH JEVŮ
SE ZAMĚŘENÍM NA PREDIKCI FLUTTERU
TURBÍNOVÝCH LOPATEK**

Ing. Jitka Klečková

**Disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Aplikovaná mechanika**

Školitel: doc. Ing. Jan Vimmer, Ph.D.

Katedra: Katedra mechaniky

Plzeň 2019

**University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences**

**NUMERICAL SIMULATION
OF AEROELASTICITY PHENOMENA
WITH A VIEW TO A PREDICTION
OF TURBINE BLADE FLUTTER**

Ing. Jitka Klečková

**A dissertation
submitted for the degree of Doctor of Philosophy
in Applied Mechanics**

Supervisor: Assoc. Prof. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.

Department: Department of Mechanics

Pilsen 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně s použitím pramenů uvedených v seznamu literatury v závěru této práce.

V Plzni, 18. 3. 2019

.....

Předkládaná disertační práce shrnuje výsledky vědecko-výzkumné práce, která vznikala za podpory projektu Centra kompetence TE01020068 CESEN „Centrum výzkumu a experimentálního vývoje spolehlivé energetiky“ Technologické agentury ČR, do kterého jsem byla zapojena v rámci ZČU v Plzni a VZÚ Plzeň s.r.o.

Poděkování

Děkuji svému školiteli doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D. za vedení, podporu a cenné rady v průběhu celého mého studia na Katedře mechaniky, děkuji svým kolegům Ing. Ondřeji Bublíkovi, Ph.D. a Ing. Janu Hamzovi za odborné rady a spolupráci při řešení problematiky uvedené v této práci. Dále děkuji svým rodičům za všeobecnou podporu při mém vysokoškolském studiu, svému příteli za psychickou podporu a pochopení při dokončování této práce a svému synovi, že mi v prvních dvou týdnech svého života dal prostor pro dopsání posledních řádků této disertační práce.

Abstrakt

Předkládaná disertační práce se zabývá oblastí aeroelastických jevů, které vznikají díky vzájemné interakci tekutiny a struktury, se zaměřením na metody matematického modelování jevů vyskytujících se v parních turbínách. Jedním z nejznámějších jevů je flutter lopatek parních turbín. Prvním cílem této práce a prvním krokem k modelování úloh aeroelasticity bylo numerické řešení proudění stlačitelné neviské tekutiny na oblastech s pohyblivou hranicí, které je popsáno nelineárním systémem Eulerových rovnic v ALE formulaci. Prostorová diskretizace tohoto systému je v této práci provedena metodou konečných objemů a neviské numerické toky jsou aproximovány pomocí Rusanovova toku a Van Leerova schématu s lineární rekonstrukcí řešení s Barthovým limiterem. Na základě této metodiky byl v prostředí Matlab vytvořen výpočetní software pro řešení proudění stlačitelné neviské tekutiny na nepohyblivých oblastech a na oblastech s pohyblivou hranicí. Numerické výsledky získané pomocí tohoto softwaru jsou v práci porovnány s numerickými výsledky dalších autorů a s experimentálně naměřenými daty. Ve druhé části této disertační práce je popsána a aplikována tzv. energetická metoda pro posouzení možnosti vzniku nestability typu flutter u dlouhé zkroucené oběžné lopatky předposledního stupně parní turbíny pomocí nástrojů obsažených v systému ANSYS. Jako první je uvedena metoda rychlé predikce flutteru turbínových lopatek navržená autory Kielb a Panovsky, založená na 2D analýze proudění tekutiny. Modální analýza lopatky byla provedena ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical a pro modelování obtékání 2D profilu lopatky byl použit výpočetní systém ANSYS Fluent. Metodika založená na modelování proudění tekutiny okolo 2D profilů by mohla selhávat při posuzování stability dlouhých zkroucených lopatek, proto byla dále provedena analýza 3D lopatky, kdy byl použit výpočtový systém ANSYS CFX, vhodný pro modelování proudění v lopatkových řadách parních turbín. Matematické modelování prostorově i časově periodického proudového pole bylo zajištěno pomocí metody Fourierovy transformace a metody harmonické analýzy.

Klíčová slova: aeroelasticita, ALE popis kontinua, flutter lopatek parních turbín, ANSYS Fluent, ANSYS CFX, metoda Fourierovy transformace, metoda harmonické analýzy

Abstract

This thesis is devoted to a field of aeroelasticity phenomena, which appears due to interaction of fluid and structure. This work is especially aimed at methods of mathematical modelling of aeroelasticity phenomena in steam turbines, where one of the best known is a flutter of turbine blades. The first objective of this thesis and the first step for modelling of aeroelasticity problems was a numerical solution of compressible inviscid fluid flow in deforming domains that is described by non-linear system of Euler equations in ALE formulation. Spatial discretization of this system is accomplished by finite volume method and inviscid numerical fluxes were approximated by Rusanov flux and Van Leer scheme with linear reconstruction with Barth limiter. Based on this methodology the computational software for solving of compressible inviscid fluid flow in non-deforming and deforming domains was created. Numerical results of this software are compared with numerical results of other authors and with experimentally measured data. The second part of this thesis is devoted to a description of Energy method used for assessment of possibility of occurrence of blade flutter in case of a long and curved rotor blade of a penultimate turbine stage by means of system ANSYS. At first is introduced a method of quick prediction of turbine blade flutter designed by authors Kielb and Panovsky which is based on 2D CFD simulation. Modal analysis of the turbine blade was accomplished by a software ANSYS Mechanical and a two-dimensional fluid flow around a blade profile was provided by computational system ANSYS Fluent. This method based on two-dimensional CFD (*Computational Fluid Dynamics*) simulations could be unreliable by assessing a stability of long curved turbine blades, so a three-dimensional CFD analysis was accomplished next by using computational system ANSYS CFX which is convenient for modeling of fluid flow through the turbine blade rows. The numerical simulation of spatially and time-periodic turbulent fluid flow was carried out by Fourier transformation and Harmonic balance method.

Keywords: aeroelasticity, ALE description of continuum, steam turbine blade flutter, ANSYS Fluent, ANSYS CFX, Fourier transformation method, Harmonic balance method

Obsah

1. Úvod.....	6
1.1 Motivace a cíle práce.....	6
1.2 Členění práce.....	7
2. Aeroelastické jevy a jejich modelování.....	9
2.1 Pohled do historie modelování aeroelastických jevů a řešerše.....	10
2.2 Základní matematické přístupy pro modelování aeroelastických jevů.....	13
2.2.1 Systém rovnic popisující proudění stlačitelné vazké tekutiny v nepohyblivé oblasti.....	15
2.2.2 Zákony zachování v ALE formulaci.....	16
2.2.3 FSI metody a jejich dělení.....	18
3. Matematické modelování proudění stlačitelné nevazké tekutiny se zaměřením na obtékání kmitajících těles.....	21
3.1 Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivé oblasti.....	21
3.2 Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí.....	25
3.3 Lineární rekonstrukce řešení s Barthovým limiterem.....	27
3.4 Implementace okrajových podmínek.....	28
3.5 Algoritmus deformace sítě.....	31
4. Vlastní výpočetní software vyvinutý v systému Matlab.....	34
4.1 Algoritmus výpočetního softwaru.....	34
4.1.1 Proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivé oblasti.....	34
4.1.2 Proudění stlačitelné nevazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí.....	36
4.2 Numerické výsledky a ověření softwaru vyvinutého v systému Matlab.....	39
4.2.1 Numerické řešení proudění v nepohyblivé oblasti.....	39
4.2.2 Numerické řešení proudění na oblasti s pohyblivou hranicí.....	44
5. Flutter lopatek parních turbín.....	48
5.1 Základní pojmy a parametry.....	48
5.2 Analýza flutteru - energetická metoda.....	51
5.2.1 Analýza flutteru ve 2D podle autorů Panovsky a Kielb.....	52
5.2.2 Analýza flutteru ve 3D - TBR metody.....	56
5.3 Problém vlastních hodnot a modální analýza turbínové lopatky.....	63
6. Predikce flutteru lopatek parních turbín pomocí systému ANSYS.....	70
6.1 Predikce flutteru pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent.....	70
6.1.1 Příprava výpočtového modelu a nastavení úlohy.....	71

6.1.2	Dosažené numerické výsledky	77
6.2	Predikce flutteru pomocí výpočtového systému ANSYS CFX	79
6.2.1	Příprava výpočtového modelu a nastavení úlohy	80
6.2.2	Dosažené numerické výsledky	84
6.3	Zhodnocení dosažených výsledků a diskuse	88
7.	Závěr	90
	Literatura a podklady	92
	Publikace autorky související s tématem disertační práce	96

Seznam symbolů a označení

A^n, B^n	Fourierovy koeficienty
a	rychlost zvuku
b	polynomiální „blending“ funkce
c	délka tětiny leteckého profilu
c_L	součinitel vztlaku
c_p	tlakový koeficient
D	průměr kružnice vepsané trojúhelníkové buňce
d	vzdálenost
dl	element délky
dS	element plochy
dV	element objemu
$d\Omega$	element kontrolního objemu
E	celková energie tekutiny na jednotku objemu
E_k	kinetická energie
E_p	potenciální energie
e	měrná vnitřní energie tekutiny
F	skalární fyzikální veličina
f	frekvence kmitání
h_{max}	maximální výchylka lopatky
k	redukovaná frekvence
L, R	index aktuální a sousední buňky
l_i^j	délka j-té hrany i-tého kontrolního objemu
M	Machovo číslo
m	index časového kroku

m_B	hmotnost turbínové lopatky
N	dimenze prostoru
N_B	počet lopatek na disku
N_{cv}	počet kontrolních objemů výpočetní oblasti
N_e	počet hran kontrolních objemů výpočetní oblasti
N_f	počet Fourierových koeficientů
N_p	počet uzlů výpočetní oblasti
n_1, n_2	složky vektoru vnější normály
p	tlak tekutiny
q	výchylka struktury
R	disipační energie
r	poloměr kružnice
S	plocha
s	zkosení buňky
T	perioda kmitavého pohybu
t	čas
t^*	duální čas
U_∞	rychlost nerušeného proudu
u	skalární veličina
\bar{u}	časově středovaná hodnota veličiny u
u'	fluktuační veličiny u
u, v, w	kartézské složky vektoru rychlosti \mathbf{v}
u_i, v_i, w_i	složky vektoru posuvů i -tého elementu
V	objem
V_n	normálová složka rychlosti
W	aerodynamická práce tekutiny
x, y, z	kartézské složky vektoru prostorových souřadnic \mathbf{y}

B	matice tlumení
E	jednotková matice řádu $2N$
$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$	vektor vnějších sil
f_1, f_2, f_3	vektory ne vazkých toků ve směrech os x, y, z
f_n	vektor normálových ne vazkých toků
G	matice gyroskopických účinků
g_n	vektor modifikovaných ne vazkých normálových toků
K_D	matice dynamické tuhosti
K_S	matice statické tuhosti
K_ω	matice vyztužení vlivem odstředivých sil
M	matice hmotnosti
n	jednotkový vektor vnější normály
Q	vektor objemových sil
$\mathbf{q}(t)$	vektor zobecněných souřadnic
\mathbf{q}_i^e	vektor zobecněných souřadnic i -tého elementu
\mathbf{q}_v	pravostranný vlastní vektor
R₁, R₂, R₃	vektory vazkých toků ve směrech os x, y, z
r	polohový vektor
\mathbf{r}_v	levostranný vlastní vektor
S	vektor zdrojových členů
T	matice rotace
U	matice pravostranných vlastních vektorů ve stavovém prostoru
$\mathbf{u}(t)$	vektor zobecněných souřadnic ve stavovém prostoru
\mathbf{u}_v	pravostranný vlastní vektor ve stavovém prostoru
v	vektor rychlosti tekutiny
\hat{v}	vektor rychlosti sítě
W	matice levostranných vlastních vektorů ve stavovém prostoru

\mathbf{w}_v	levostranný vlastní vektor ve stavovém prostoru
\mathbf{w}	vektor konzervativních proměnných tekutiny
\mathbf{X}	vektor materiálových souřadnic
\mathbf{X}_s	kartézské souřadnice středu hrany kontrolního objemu
\mathbf{x}_p	vektor posuvů tělesa ve směrech souřadnicových os
\mathbf{y}	vektor prostorových souřadnic
α	úhel náběhu proudu
α_v	reálná část vlastního čísla
β	Barthův limiter
β_v	imaginární část vlastního čísla
γ	difúzní koeficient
$\partial\Omega$	hranice výpočtové oblasti
ε	pomocný parametr
κ	Poissonova adiabatická konstanta
λ_v	vlastní číslo
μ	koeficient viskozity
Θ	vnitřní úhel buňky
Ξ	koeficient aerodynamického tlumení
ξ, η, ζ	osy souřadnicového systému spojeného s lopatkou
ρ	hustota tekutiny
ρ_∞	hustota nerušeného proudu
σ	mezilopatkový fázový úhel
φ, ϑ, ψ	složky vektoru natočení profilu
Ω	omezená výpočtová oblast
ω	úhlová frekvence kmitání
ω_0	úhlová rychlost
Λ	spektrální matice

σ	tenzor napjatosti tekutiny
χ	vektor referenčních souřadnic

ZKRATKY

<i>ALE</i>	Arbitrary Lagrangian - Eulerian
<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>FT</i>	Fourier Transformation
<i>FSI</i>	Fluid – Structure Interaction
<i>HBM</i>	Harmonic Balance Method
<i>IBPA</i>	Interblade Phase Angle
<i>ND</i>	Nodal Diameter
<i>TBR</i>	Turbine Blade Row
<i>TWM</i>	Travelling Wave Mode

1. Úvod

Jevy interakce tekutiny a struktury (zn. FSI = *Fluid – Structure Interaction*) mají značný vliv na stabilitu např. turbínových lopatek, křídel letadel nebo konstrukcí visutých mostů a je třeba je brát v úvahu při návrhu mnoha technických aplikací. Předkládaná disertační práce se zaměřuje především na oblast tzv. aeroelastických jevů u turbínových strojů. Dlouhodobým cílem výrobců parních turbín je zvyšování jejich účinnosti a provozní spolehlivosti. Jednou z možností zvýšení účinnosti turbínového stupně je použití zkroucených lopatek, které oproti přímým prizmatickým lopatkám respektují proměnlivý charakter proudového pole a tlakové rozdíly mezi patou a špičkou lopatky. Geometrický tvar průřezu lopatky je navrhován na několika poloměrech tak, aby bylo dosaženo co nejnižších ztrát stupně. Cílem návrhu tvaru lopatkového profilu je zajištění co nejnižší absolutní rychlosti na výstupu ze stupně a dosažení co nejmenšího úhlu vstupní rychlosti nabíhajícího proudu tekutiny. Nevýhody dlouhých zkroucených lopatek, které jsou používány u koncových stupňů parních turbín, jsou vyšší výrobní náklady, nižší tuhost, a tedy zvýšení rizika poškození lopatky při provozu.

Jedním ze závažných problémů vyskytujících se u lopatek nízkotlakých dílů parních turbín je únavové poškození spojené s vysokocyklickým zatěžováním lopatek. Může zde dojít ke vzniku destruktivních samobuzených vibrací lopatek, tzv. flutteru. Tento jev, byť jen u jedné lopatky, může mít katastrofální dopad na celou turbínu. Vypořádat se s následky takového poškození je finančně velmi nákladné, proto stojí za to vyvíjet metody, které by pomohly předpovědět nestabilní chování nově vyrobené lopatky v provozu a předejít tak vzniku nežádoucího kmitání.

1.1 Motivace a cíle práce

Motivací pro zpracování této disertační práce byly výzkumné činnosti vyplývající z řešení dílčího úkolu projektu Centra kompetence TE01020068 CESEN „Centrum výzkumu a experimentálního vývoje spolehlivé energetiky“ Technologické agentury ČR, do kterého jsem byla zapojena v rámci ZČU v Plzni a VZÚ Plzeň, s.r.o.

Hlavním cílem této disertační práce je aplikovat získané teoretické poznatky z oblasti aeroelasticity pro vytvoření metodiky, pomocí níž lze efektivně posuzovat riziko možného vzniku nestability typu flutter u dlouhých zkroucených turbínových lopatek.

Dílčím cílem v teoretické rovině bylo vyvinutí vlastního výpočtového softwaru ve výpočetním prostředí Matlab pro numerické řešení proudění stlačitelných tekutin na oblastech s pohyblivou hranicí, konkrétně se jedná o řešení obtékání kmitajícího tělesa stlačitelnou nevázkou tekutinou.

Dalším cílem byla aplikace tzv. energetické metody při posuzování stability dlouhé zkroucené lopatky předposledního dílu parní turbíny. Z důvodu komplexnosti problému byly pro řešení tohoto problému použity nástroje obsažené v profesionálním výpočtovém systému ANSYS.

Na řešení problému byly aplikovány dva rozdílné přístupy – prvním je rychlá predikce flutteru, kterou se zabývá například skupina autorů Kielb, Panovsky, a kol, [34], [35], [40], [41], a která je založená na 2D analýze proudění tekutiny. Pro CFD analýzu byl v tomto případě použit výpočtový systém ANSYS Fluent. Druhý přístup je založen na 3D modelování proudění s aplikací Fourierovy transformace (Fourier transformation - FT) a metody harmonické rovnováhy nebo také harmonické analýzy (Harmonic balance method - HBM), které umožňují zjednodušit výpočtovou oblast na jednu či dvě lopatkové pasáže a není tak nutné modelovat celý olopatkový disk. Tato 3D úloha byla řešena pomocí výpočtového systému ANSYS CFX. V závěru práce je uvedeno porovnání těchto dvou přístupů, a to z hlediska použitelnosti pro daný problém, a také z hlediska časové náročnosti a složitosti provedení.

1.2 Členění práce

Druhá kapitola této práce je věnována přehledu aeroelastických jevů a metod jejich modelování, a to zejména se zaměřením na jevy vyskytující se při provozu parních turbín. V kapitole je uvedena ALE formulace zákonů zachování a jsou zde také popsány algoritmy pro řešení úloh interakce tekutiny a struktury (FSI).

Ve třetí kapitole předkládané disertační práce jsou popsány numerické metody pro řešení proudění stlačitelné neviské tekutiny na nepohyblivé oblasti a okolo kmitajícího nedeformujícího se tělesa, jehož pohyb je zadán časově závislou funkcí. Nedochozí tedy k oboustranné interakci a je řešeno jen proudění tekutiny ovlivněné pohybujícím se tělesem. Úloha je řešena prostřednictvím ALE přístupu. Proudění stlačitelné neviské tekutiny bylo řešeno pomocí metody konečných objemů, přičemž neviské toky byly aproximovány nejdříve pomocí Rusanovova schématu a poté pomocí Van Leerova schématu. Ve druhém případě byla pro zvýšení prostorové přesnosti metody provedena lineární rekonstrukce řešení s Barthovým limiterem.

Ve čtvrté kapitole je popsán algoritmus výpočetního softwaru, který byl vytvořen v prostředí Matlab na základě metodiky uvedené ve třetí kapitole, a který slouží pro modelování proudění stlačitelné neviské tekutiny na pohyblivých i nepohyblivých oblastech. V posledním odstavci kapitoly jsou pak uvedeny výsledky testovacích problémů vnitřní i vnější aerodynamiky řešených za účelem validace vlastního výpočetního softwaru porovnáním numerických výsledků získaných pomocí vyvinutého softwaru s experimentálně naměřenými daty a numerickými výsledky dostupnými v literatuře.

Pátá kapitola této práce je věnována metodice určování stability turbínové lopatky se zaměřením na predikci flutteru použitím tzv. energetické metody založené na určení aerodynamické práce tekutiny na povrchu lopatky a posouzení stability/nestability lopatky pomocí kladné/záporné hodnoty koeficientu

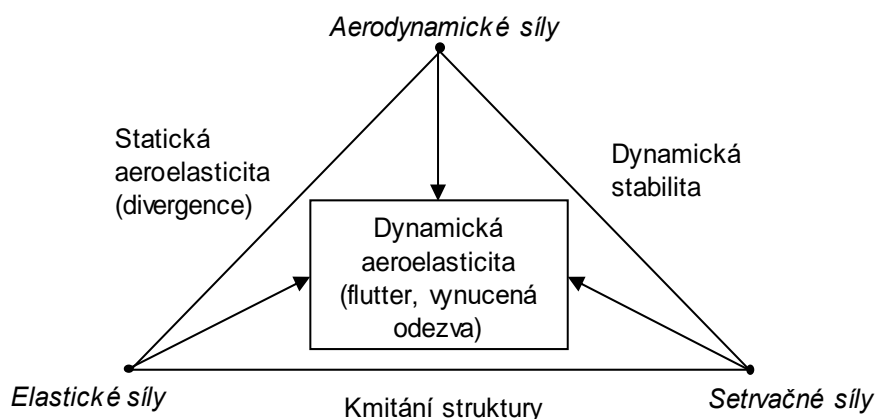
aerodynamického tlumení. V další části kapitoly jsou uvedeny dva přístupy posouzení možnosti vzniku nestability turbínové lopatky založené na 2D a 3D analýze proudění. Poslední odstavec stručně popisuje metodiku modální analýzy a řešení problému vlastních hodnot turbínové lopatky.

V šesté kapitole je uveden postup posouzení stability oběžné lopatky předposledního stupně parní turbíny pomocí výpočetních nástrojů obsažených v systému ANSYS a aplikací znalostí popsanych v páté kapitole. Modální analýza, jejímž výsledkem jsou vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu lopatky, byla provedena ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical. Jako první byla stabilita lopatky posuzována prostřednictvím metodiky založené na analýze obtékání 2D lopatkového profilu, jehož kmitavý pohyb byl definován pomocí harmonické funkce závislé na čase. Výpočtová oblast obsahovala tři profily a každému páru sousedících lopatkových profilů byl předepsán kmitavý pohyb s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem (IBPA – InterBlade Phase Angle).

CFD analýza byla provedena pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent pro takový počet fázových uhlů z intervalu $(-180^\circ, 180^\circ)$, aby proložením výsledných hodnot aerodynamického tlumení mohla být určena stabilita lopatky pro celý tento interval. Protože průřez dlouhé zkroucené lopatky po výšce od paty ke špičce zásadně mění tvar, nemusí být v tomto případě 2D analýza spolehlivá, a proto bylo dále modelováno obtékání 3D lopatky ve výpočtovém systému ANSYS CFX. Tento systém byl použit z důvodu možnosti přenesení vlastního tvaru kmitu lopatky z výpočtového systému ANSYS Mechanical, což bylo u dlouhé zkroucené lopatky významným usnadněním práce, oproti možnosti modelovat obtékání 3D lopatky ve výpočtovém systému ANSYS Fluent, kde by bylo velice obtížné správně nadefinovat pohyb lopatky pomocí uživatelských funkcí, které by každému uzlu na povrchu lopatky předepisovaly kmitavý pohyb na základě výsledků modální analýzy. Oproti tomu, pro modelování obtékání kmitajícího 2D profilu bylo výhodnější použít systém ANSYS Fluent, protože výpočtový systém ANSYS CFX není pro 2D analýzy proudění určen. Pro řešení proudění tekutiny ve výpočtové oblasti s podmínkou periodicity s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem jsou v této disertační práci použity následující dvě metody. V časové oblasti je to metoda Fourierovy transformace a ve frekvenční oblasti metoda harmonické analýzy. V závěru této kapitoly jsou poté uvedeny výsledky analýzy stability turbínové lopatky dosažené pomocí obou zmíněných metod. Řešení probíhalo v úzké spolupráci s výrobcí parních turbín Doosan Škoda Power, s.r.o.

2. Aeroelastické jevy a jejich modelování

Aeroelastické jevy jsou důsledkem vzájemné interakce proudící tekutiny a obtékaného tělesa. Tyto jevy dělíme na statické a dynamické. Ke vzniku statických aeroelastických jevů přispívají aerodynamické a elastické síly. V případě dynamických aeroelastických jevů se jedná o interakci aerodynamických, elastických a setrvačných sil. Takto definoval příčiny vzniku aeroelastických jevů v roce 1947 A. R. Collar pomocí tzv. Collarova trojúhelníku, Obr. 2.1, [13]. Příklady nežádoucích aeroelastických jevů vyskytujících se u lopatek turbín i křídel letadel jsou divergence, vynucená odezva a flutter.



Obr. 2.1 Collarův trojúhelník sil

Divergence patří do skupiny statických aeroelastických jevů. Vnější aerodynamické účinky rozkmitávají strukturu, a pokud není struktura dostatečně tuhá, amplituda kmitů roste nade všechny meze. Vzniku divergence lze zabránit zvýšením tuhosti tak, aby nikdy nedošlo k překročení kritické meze rozkmitání struktury.

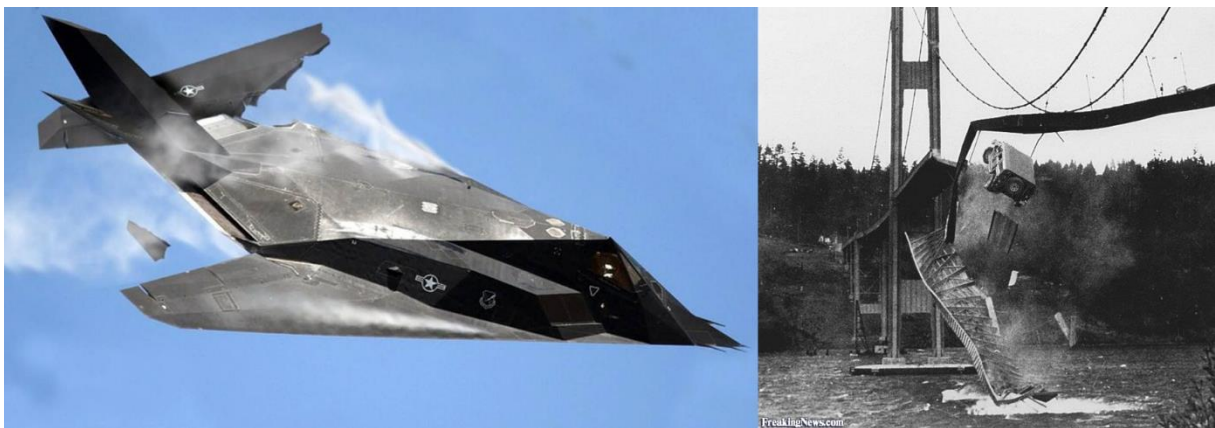
Dynamické aeroelastické jevy (vynucená odezva, flutter) závisí kromě aerodynamických a elastických sil i na silách setrvačných. Velký vliv na jejich vznik má tedy hmotnost struktury, obzvláště tedy její rozložení, které ovlivňuje tzv. modální vlastnosti struktury – vlastní tvary kmitu a vlastní frekvence, které jsou klíčovými parametry při navrhování tvaru lopatek.

Vynucená odezva a flutter patří mezi nežádoucí aeroelastické jevy vyskytující se u lopatek parních turbín. V prvním případě jsou lopatky rozkmitány proudem tekutiny a hlavní vliv na pohyb lopatky zde mají úplavy od lopatek v předchozí kaskádě. Flutter je samobuzené kmitání struktury, na jehož vznik mohou mít vliv následující faktory: modální vlastnosti struktury, tedy vlastní tvary kmitu a vlastní frekvence, úhel náběhu proudu a poměr frekvence kmitání lopatky vůči rychlosti proudění okolní tekutiny vyjádřený pomocí parametru redukované frekvence, která je paralelou ke Strouhalově číslu, používanému v oblasti vnější aerodynamiky těles.

2.1 Pohled do historie modelování aeroelastických jevů a řešerše

Potřeba věnovat se aeroelastickým jevům přišla s rozvojem letectví v průběhu první světové války. Před Collarovým vysvětlením příčiny vzniku dynamických aeroelastických jevů byly problémy s nestabilitou křídel letadel řešeny jejich zpevněním, což mělo díky zvýšení hmotnosti, a tedy i setrvačných účinků spíše negativní vliv na jejich chování při letu.

Poprvé byl flutter zaznamenán na vodorovné ocasní ploše dvouplošníku O/400 v roce 1916, krátce po jeho uvedení do provozu, kde došlo ke spojení torzních kmitů trupu a vibrací pravých kormidel trupu a ocasu, které kmitaly ve vzájemně opačné fázi, [31]. Problém byl vyřešen propojením kormidel tak, aby kmitaly vždy ve stejné fázi. K první tragédii v oblasti letecké přepravy osob došlo v roce 1919 v Itálii, kde nastal flutter křídla trojplošníku Caproni Ca.4. Známým příkladem flutteru z novodobé historie je havárie stíhačím letounu AF-117 na letecké přehlídce v Marylandu v roce 1997. Tato havárie byla dokonce zaznamenána na videu, pilot se stihl katapultovat a nikomu se naštěstí nic nestalo. Fotografie pořízená při této události je zobrazena na Obr. 2.2, vlevo. Dalším příkladem nežádoucího aeroelastického jevu je například rozkmitání visutých mostních konstrukcí vlivem větru, které může vést až k porušení struktury. Nejznámějším případem z této oblasti je zhroucení Tacoma Narrows Bridge v roce 1940. K neštěstí došlo v důsledku sledu několika událostí, na jejichž počátku bylo uvolněné závěsné lano a jako příčina konečné destrukce mostu byl určen torzní flutter, Obr. 2.2, vpravo.

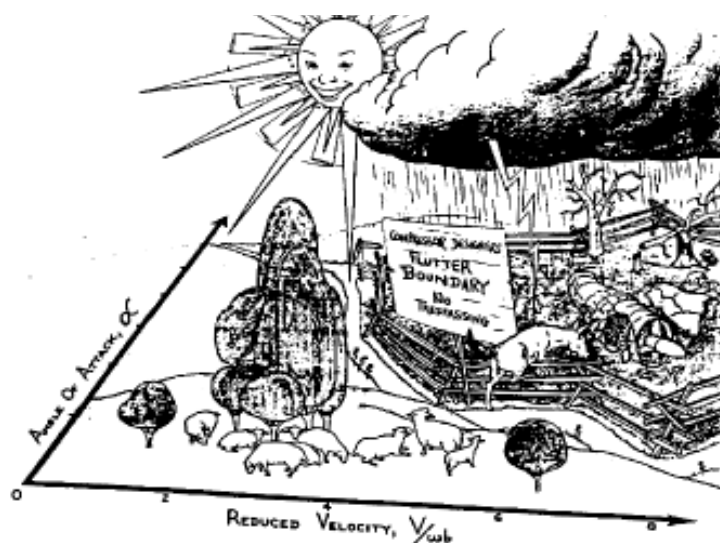


Obr. 2.2 Následky flutteru křídla stíhačky (vlevo), zhroucení Tacoma Narrows Bridge (vpravo)

Ve druhé polovině 20. století poté dochází k výraznému rozvoji metod modelování aeroelastických jevů v lopatkových strojích. Zde je potřeba brát v úvahu, že na pohyb a stabilitu lopatky má vliv také pohyb sousedních lopatek v kaskádě a úplavy od lopatek z předcházejícího olopatkovaného disku, čímž se úloha liší od popisu kmitání leteckého profilu.

Okolo poloviny 20. století byly empiricky odvozovány hraniční hodnoty parametrů, jejichž překročení zvyšuje riziko vzniku flutteru. Na Obr. 2.3 je kresba neznámého autora z 50. let 20. století

ztvárnující vážnost rizika vzniku flutteru v závislosti na úhlu náběhu a tzv. redukované rychlosti, která je převrácenou hodnotou redukované frekvence.



Obr. 2.3 Hranice flutteru v závislosti na redukované rychlosti a úhlu náběhu, autor neznámý, [46]

Přehled metod vyvíjených pro popis chování turbínových lopatek v proudu tekutiny předkládá dvoudílný AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) manuál shrnující články a poznatky několika autorů z 60. – 80. let minulého století, [43]. Za účelem sjednotit terminologii a sepsat experimentální výsledky v oblasti testování lopatkových kaskád byla vydána studie [6] a na ni navazující práce [21]. Metodami modelování aeroelastických jevů v parních turbínách se zabývá výzkumná zpráva [A10].

Rešerši aeroelastických metod v oblasti letectví a turbínových strojů za období 50. – 90. let 20. století vydala v roce 1996 dvojice J. G. Marshall a M. Imregun, [37]. Autoři uvádí seznam aeroelastických jevů vyskytujících se při provozu parních turbín. Kromě dříve zmíněných jevů (divergence, flutter a vynucená odezva) je v práci uvedena akustická rezonance, která je vybuzena odtrháváním vírů za lopatkami. Vznik tohoto jevu nemusí být nutně doprovázen vibracemi struktury, ale nestacionární síly, které jsou výsledkem akustické rezonance, mohou způsobit rozkmitání a následné porušení lopatky.

Dále je práce [37] věnována matematickým metodám pro modelování nestacionárního proudění tekutiny. Možnosti v této oblasti jsou a byly vždy závislé především na kapacitě výpočetní techniky, proto byly první výpočtové softwary, vyvíjené od 70. let 20. století, založené na potenciálním a nevazkém proudění s linearizovaným systémem rovnic popisujících proudění tekutiny. V počátcích zkoumání aeroelastických jevů v parních turbínách byly vyvíjeny metody pro popis 2D proudění nestlačitelné nevazké tekutiny kolem rovných plochých lopatek (*flat plate*) kmitajících ohybovým tvarem kmitu, [56]. 3D analýzu stability torzně kmitajících plochých lopatek (*flat plate*) pak popisuje například práce [25], ve které je uvažováno nevazké proudění řešené systémem linearizovaných Eulerových rovnic. Výpočetní kódy, které již zahrnují i nelinearitu systému rovnic popisujícího

proudění tekutiny, byly vyvinuty na přelomu 80. a 90. let minulého století. Stále se ovšem jedná o metody zanedbávající vazkost. Softwary založené na modelování nestacionárního turbulentního proudění tekutiny byly v době vydání práce [37] zatím vyvíjeny. Následující kapitola této práce shrnuje metody používané pro aeroelastickou analýzu v oblastech letectví a turbínových strojů. Tyto metody jsou zde děleny podle toho, zda respektují vzájemné ovlivňování struktury a tekutiny, anebo tuto interakci zanedbávají. Metody patřící do první zmíněné skupiny se nazývají také FSI (Fluid – Structure Interaction) metody a jejich princip je popsán v odstavci 2.2.3.

Mezi metody tzv. jednostranné interakce patří energetická metoda, která je všeobecně v publikacích nejčastěji uváděna jako nástroj pro predikci nestabilního chování turbínových lopatek (především flutteru). Metoda je založena na výpočtu celkové aerodynamické práce tekutiny na povrchu lopatky v průběhu kmitavého pohybu. Pokud je tato práce kladná, je lopatce dodávána energie a může se vyskytnout nestabilní chování. Zjednodušenou metodu pro predikci flutteru lopatek nízkotlakých dílů parních turbín založenou na principu energetické metody vyvinuli autoři Kielb a Panovsky, [34], [35], [40], [41], kteří se zaměřují na rychlou predikci flutteru lopatek s využitím 2D numerických simulací proudění. Energetická metoda je po teoretické stránce popsána podrobně v odstavci 5.2 této disertační práce. V šesté kapitole této práce je pak metoda aplikována na konkrétní problém posouzení stability turbínové lopatky.

U dlouhých zkroucených lopatek nemusí být 2D analýza spolehlivá a je potřeba provést numerické řešení ve 3D. S rychlým vývojem výpočetní techniky stoupaly možnosti více se přiblížit reálnému problému a modelovat 3D úlohy turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny okolo dlouhých tenkých a zkroucených lopatek kmitajících kombinací torzních a ohybových kmitů.

Takovou možnost nabízí například profesionální výpočtový systém ANSYS CFX. Metody implementované v tomto systému jsou přímo určené pro řešení problémů proudění v turbínových řadách a umožňují při předpokladu časově a prostorově periodické úlohy zjednodušit turbínovou řadu na jednu či dvě lopatkové pasáže. To je velkou výhodou z hlediska časové náročnosti výpočtu, proto se velký počet autorů zabývá analýzou flutteru turbínových lopatek pomocí tohoto systému a metod v něm obsažených, viz např. konferenční příspěvky [1] a [44]. Metodika posuzování stability turbínové lopatky je zde opět založená na výpočtu práce tekutiny na jejím povrchu, jedná se tedy o princip energetické metody. V příspěvku [1] je popsán postup, jak pomocí výpočtového systému ANSYS Mechanical a ANSYS CFX posoudit možnost vzniku flutteru u rovné turbínové lopatky a je určen interval mezilopátkových fázových úhlů, pro které by mohla nastat nestabilita typu flutter. V práci [44] je dále tento postup aplikován na rozváděcí a oběžné lopatce posledního stupně parní turbíny. Numerické simulace proudění vazké tekutiny jsou provedeny pomocí výpočtového systému ANSYS CFX a pomocí softwaru LUFT, založeném na modelování proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Výsledky získané pomocí obou nástrojů jsou v práci porovnány a je zde uveden graf znázorňující závislost koeficientu aerodynamického tlumení, který je normovanou hodnotou aerodynamické práce, na mezilopátkovém

fázovém úhlu. Z tohoto grafu je určeno rozmezí úhlů, pro které by mohla nastat nestabilita typu flutter. Výsledky získané použitím obou metod se téměř shodují.

Do úloh jsou dále zahrnovány další vlivy, například spojení lopatek bandáží, či zkoumání vlivu nesymetričnosti disku (tzv. *mistuning*), kdy se jednotlivé lopatky kola tvarově odlišují, [16]. Vliv velikosti mezery nad špičkou lopatky na její stabilitu je pro tvarově jednoduchou lopatku posuzován v práci [48].

2.2 Základní matematické přístupy pro modelování aeroelastických jevů

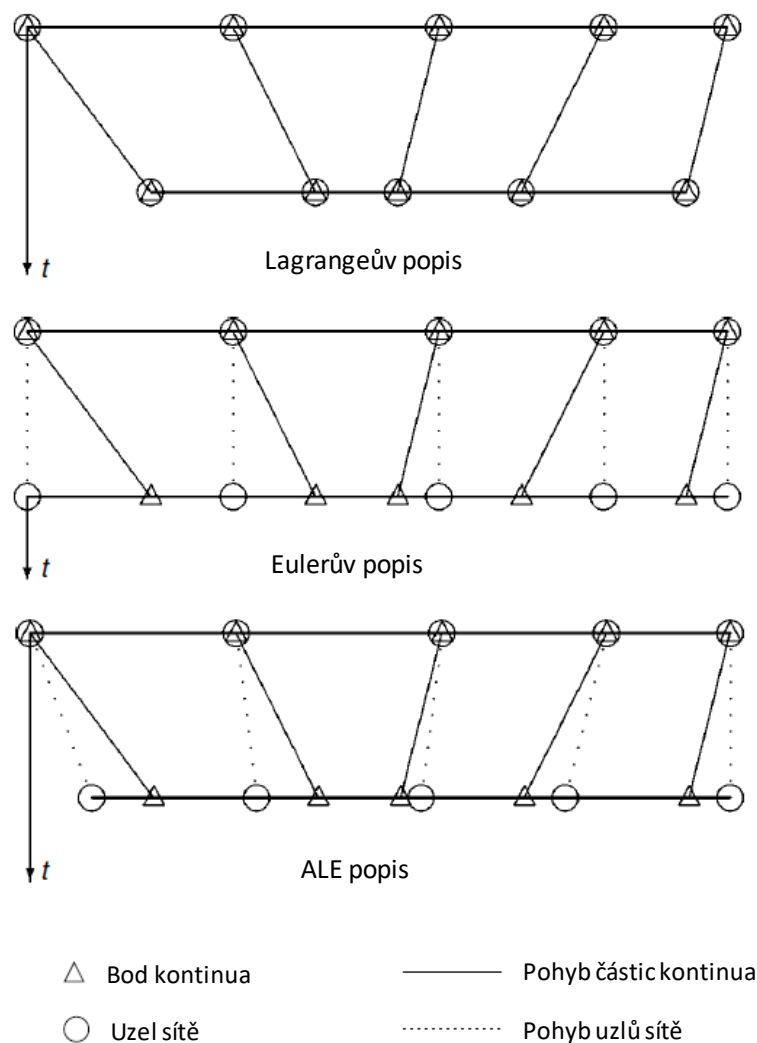
V tomto odstavci jsou prezentovány rovnice, které popisují chování kontinua. Tyto rovnice vycházejí ze tří základních fyzikálních principů: zákona zachování hmotnosti, zákona zachování hybnosti a zákona zachování celkové energie. Při numerickém řešení jsou rovnice diskretizovány, kontinuum je rozděleno pomocí výpočetní sítě na konečný počet elementů a hodnoty hledané veličiny jsou určeny v jednotlivých bodech kontinua. Pro popis chování kontinua jsou většinou používány dva základní přístupy: Lagrangeův a Eulerův.

V přístupu, který je znám jako Lagrangeův, jsou uzly výpočetní sítě pevně spojeny s kontinuem a pohybují se společně s ním. Tento přístup je používán především pro modelování deformací těles. Druhým nejčastěji používaným přístupem je Eulerův popis kontinua, kdy kontinuum prochází přes nehybnou výpočetní síť. Tento přístup je používán zejména pro modelování proudění tekutin. Uvedené přístupy mají ale svá omezení, jako například Lagrangeův popis v případě úloh, kde dochází k velkým deformacím těles a následkem toho mohou vzniknout vysoce zdeformované elementy výpočetní sítě, což může vést k chybám ve výpočtu. Eulerův přístup pak naráží na překážky při popisu proudění tekutiny v oblastech s pohyblivou hranicí. Pro řešení těchto problémů je výhodné používat zobecněný přístup, tzv. Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) přístup, který je kombinací Lagrangeova a Eulerova přístupu pro popis kontinua.

Uvažujme v čase $t = 0$ počáteční oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s hranicí $\partial\Omega$. Poloha oblasti je popsána vektorem materiálových souřadnic $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$. V obecném čase $t = t'$ se oblast přesune do nové polohy dané tzv. prostorovými souřadnicemi $\mathbf{y} = [x, y, z]^T$. Tuto oblast označíme jako okamžitou. Dále zavedeme referenční doménu, jejíž souřadnice $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T$ popisují polohu vztahenou k výpočetní oblasti a nemají fyzikální význam. Pokud referenční oblast splývá s počáteční doménou ($\boldsymbol{\chi} = \mathbf{X}$), jde o Lagrangeův přístup. Pokud referenční oblast splývá s okamžitou konfigurací, jedná se o Eulerův přístup ($\boldsymbol{\chi} = \mathbf{y}$). ALE přístup je pak kombinací Lagrangeova a Eulerova přístupu pro popis kontinua ($\boldsymbol{\chi} \neq \mathbf{y} \wedge \boldsymbol{\chi} \neq \mathbf{X}$). V tomto případě se uzly výpočetní sítě pohybují předepsaným způsobem nezávisle na materiálových a prostorových souřadnicích. Na schématickém obrázku, Obr. 2.4, je naznačen rozdíl mezi Lagrangeovým a Eulerovým přístupem ve 2D. V případě Lagrangeova přístupu se uzly sítě

pohybují společně s kontinuem, v případě Eulerova přístupu se kontinuum pohybuje v nehybném souřadnicovém systému prostorových souřadnic.

ALE forma zákonů zachování popisujících proudící tekutinu v oblasti s pohyblivou hranicí byla poprvé odvozena v 60. letech 20. století pro metodu konečných diferencí a uvedena pod názvy *Coupled Eulerian–Lagrangian approach* v práci [38] a *Mixed Eulerian–Lagrangian approach* v práci [20]. Autoři, kteří navázali na tuto práci, jsou například Trulio, [51], a dále v 70. letech 20. století Hirt, [29], který ve své práci již používá dodnes zavedený název *Arbitrary Lagrangian-Eulerian approach*. Dále byl tento přístup implementován pro metodu konečných prvků autory Donea a kol., [14] a [15], Belytschko a kol., [4], a Hughes a kol., [30], a metodu konečných objemů, uvedenou např. v práci [50].



Obr. 2.4 1D příklad popisu pohybu kontinua pomocí všech tří přístupů, [14]

2.2.1. Systém rovnic popisující proudění stlačitelné vazké tekutiny v nepohyblivé oblasti

Pro matematický popis tekutiny proudící nepohyblivou oblastí je používán Eulerův přístup, kdy je poloha kontinua definována pomocí prostorových souřadnic $\mathbf{y} = [x, y, z]^T$. Třírozměrné proudění stlačitelné vazké tekutiny v nepohyblivé oblasti je popsáno nelineárním parabolicko – hyperbolickým systémem Navierových – Stokesových rovnic, který vychází ze zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Pro nelineární systém Navierových – Stokesových rovnic zapsaný v diferenciálním tvaru, [19], platí

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \rho \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{Q}, \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} (\rho E) = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (k \nabla_{\mathbf{y}} T) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{Q}, \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$ je vektor rychlosti tekutiny, ρ je hustota tekutiny, E je celková energie tekutiny vztážená na jednotku objemu, $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3]^T$ je vektor vnějších objemových sil, k je tepelná vodivost tekutiny, T je termodynamická teplota a t je čas. Tenzor napjatosti tekutiny $\boldsymbol{\sigma}$ je vyjádřen ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \tau_{ij} = -\frac{2}{3} \mu \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right), \quad (2.4)$$

kde μ je koeficient dynamické viskozity. Nelineární systém Navierových – Stokesových rovnic (2.1) – (2.3) lze následně upravit do konzervativního kompaktního vektorového tvaru, [19], [15]

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial y_s} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial y_s} + \mathbf{S}, \quad (2.5)$$

který popisuje proudění stlačitelné vazké tekutiny. Vektor \mathbf{w} je hledaný vektor konzervativních proměnných, y_s , $s = 1, 2, 3$ představují složky vektoru prostorových souřadnic, $\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{w})$ jsou vektory nevazkých toků hranic výpočtové oblasti ve směrech souřadnicových os. Vektor konzervativních proměnných a vektory nevazkých toků jsou definovány následovně

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Vektory $\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(\mathbf{w})$ představují vektory vazkých toků hranic výpočtové oblasti ve směrech souřadnicových os, kde

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \\ k \frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{\tau}_{1j} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ \tau_{32} \\ k \frac{\partial T}{\partial y} + \boldsymbol{\tau}_{2j} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{33} \\ k \frac{\partial T}{\partial z} + \boldsymbol{\tau}_{3j} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

přičemž τ_{ij} je symetrický tenzor vazkých napětí. Vektor zdrojových členů \mathbf{S} obsahuje objemové síly

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho Q_1 \\ \rho Q_2 \\ \rho Q_3 \\ \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Je zřejmé, že nelineární systém Navierových - Stokesových rovnic (2.5) obsahuje více neznámých, než je počet rovnic, proto musí být doplněn konstitutivním vztahem pro tlak

$$p = (\kappa - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (2.9)$$

Celková energie tekutiny vztažená na jednotku objemu je daná podle [55] vztahem

$$E = \rho \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right], \quad (2.10)$$

přičemž e je měrná vnitřní energie, kterou určíme z termické stavové rovnice pro ideální plyn pomocí Mayerova vztahu pro měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku a objemu jako

$$e = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.11)$$

a $\kappa = 1,4$ je Poissonova adiabatická konstanta. Základní termodynamické vztahy a veličiny jsou podrobně popsány v práci [55].

2.2.2. Zákony zachování v ALE formulaci

Vyjádříme si nyní zákon zachování hmotnosti (2.1) pomocí materiálové derivace. Materiálová derivace fyzikální veličiny F v Eulerově popisu je podle [15] definována vztahem

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} F \quad (2.12)$$

a materiálovou derivaci veličiny F v ALE popisu jako

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} F, \quad (2.13)$$

kde jsme zavedli vektor rychlosti výpočetní sítě $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z]^T$. Porovnáním dvou uvedených vztahů pro materiálovou derivaci (2.12) a (2.13) dostáváme

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} F = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} F, \quad (2.14)$$

po úpravě lze vyjádřit ALE derivaci veličiny F následovně

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} F. \quad (2.15)$$

Odvodíme nyní zákon zachování hmotnosti v ALE formulaci. Vycházíme ze vztahu (2.1), tedy z diferenciálního tvaru zákona zachování hmotnosti v Eulerově formulaci. Vyjádříme první člen zákona zachování hmotnosti pomocí ALE derivace (2.15), kde za veličinu F dosadíme hustotu

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho \quad (2.16)$$

a na druhý člen rovnice (2.1) použijeme pravidlo o derivování součinu vektorové a skalární veličiny

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho. \quad (2.17)$$

Dosazením (2.16) a (2.17) do (2.1) dostáváme

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho = 0 \quad (2.18)$$

a po úpravě lze zapsat diferenciální tvar zákona zachování hmotnosti v ALE formulaci jako

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.19)$$

Podobně lze vyjádřit i zákon zachování hybnosti v ALE formulaci

$$\left. \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + ((\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \rho \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{Q}, \quad (2.20)$$

a zákon zachování celkové energie v ALE formulaci

$$\left. \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + ((\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \rho E = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (k \nabla_{\mathbf{y}} T) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{Q}. \quad (2.21)$$

Podotkněme, že ALE formulace zákonů zachování je kombinací Lagrangeova a Eulerova přístupu pro popis chování kontinua. Rovnice odpovídající Lagrangeovu popisu kontinua dostaneme, pokud položíme rychlost kontinua rovnou rychlosti sítě, tedy $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$. Eulerovu formulaci získáme položením $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$.

2.2.3. FSI metody a jejich dělení

Metody FSI (Fluid – Structure Interaction) jsou nástrojem pro modelování úloh aeroelasticity pro případy, kdy je proudové pole ovlivňováno pohybem obtékaného tělesa a pohyb tělesa je vybuzen silovým působením proudící tekutiny. Jedná se tedy o vzájemnou interakci proudící tekutiny a pohybující se struktury. FSI metody se v literatuře obvykle rozdělují na dvě hlavní skupiny podle způsobu řešení systému rovnic popisujících pohyb obou kontinuí (tekutiny a struktury), [10].

Sdružené metody (označují se také Monolithic Methods) řeší současně soustavy rovnic pro obě kontinua. Jejich výhodou je vyšší přesnost díky sloučení obou oblastí, kdy není nutné řešit přenos informací na hranici mezi strukturou a tekutinou. Nevýhodou tohoto přístupu je výpočtová náročnost a omezení, které se týká výběru metod pro řešení jednotlivých kontinuí. Dále je potřeba díky jednotné výpočetní síti vyřešit problém požadavku na rozdílnou velikost buněk dostatečně kvalitní sítě pro oblast struktury a pro oblast tekutiny a podobně i rozdílné požadavky na velikost časového kroku. Obecně platí, že pro oblast, kde je řešeno proudění tekutiny je potřeba vytvořit jemnější síť a pro výpočet je vhodný kratší časový krok, než při řešení úlohy deformace struktury.

Nesdružené metody (označují se také Staggered (nebo Partitioned) Methods) naopak řeší zvlášť rovnice popisující proudění tekutiny a rovnice popisující kmitání struktury. Chování jednoho kontinua je řešeno Eulerovým přístupem a chování druhého Lagrangeovým. Každá doména je diskretizována vlastní diskretizační technikou a výpočetní síť tak lze vytvořit v každé oblasti s rozlišením odpovídajícím danému problému. Vzniká pak potřeba vyřešit výměnu informací na hranici kontinuí mezi tekutinou a strukturou, které jsou předávány pomocí okrajových podmínek. Nesdružené metody se dále dělí podle toho, jak často jsou informace mezi tekutinou a strukturou předávány. Zpravidla se tak děje při každém časovém kroku. Další možností je, že pro jeden vnější časový krok, při kterém je řešena deformace struktury, je pro modelování proudění tekutiny provedeno několik vnitřních časových kroků.

Pokud je pro diskretizaci kontinuí použita metoda konečných prvků nebo metoda konečných objemů, je dále ke dvěma systémům rovnic popisujících proudění tekutiny a deformaci struktury potřeba přidat metodu pro řešení pohybu sítě a podmínky, které musí být splněny při přenosu dat na hranici obou kontinuí. Konkrétně musí být splněna rovnováha všech napětí, tedy tenzor napjatosti tekutiny σ (definovaný vztahem (2.4)) musí být roven tenzoru napjatosti struktury σ_s , [3], [11]

$$\sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \mathbf{n}, \text{ kde } \sigma \cdot \mathbf{n} = -p \cdot \mathbf{n} + \tau \cdot \mathbf{n} \quad (2.22)$$

a rovnost obou polí posuvů struktury i tekutiny

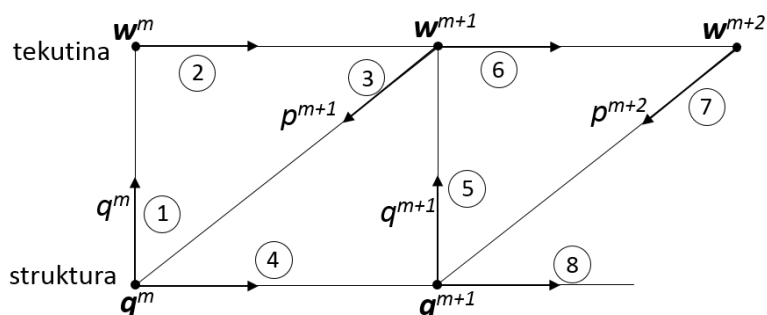
$$\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_F. \quad (2.23)$$

Při nesdruženém přístupu řešení FSI problému jsou pro danou počáteční polohu struktury řešeny rovnice pro proudění tekutiny ve výpočtové oblasti tak, aby bylo získáno proudové pole. Ve druhém

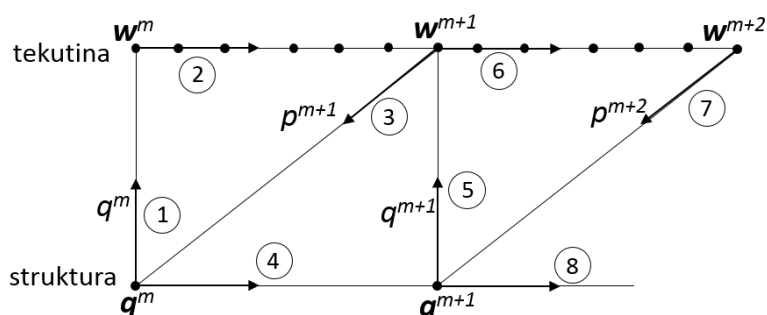
kroku je proveden výpočet deformace struktury po zatížení tlakem od tekutiny a je zjištěna její nová poloha. Posuv hranice pevné struktury je dále přepočítán i do oblasti tekutiny a pro tuto novou polohu struktury je opět přepočteno proudění tekutiny a napočítáno nové rozložení tlaku. A postup se znovu opakuje.

Pro ilustraci jsou zde uvedeny algoritmy popisující modelování FSI úlohy nesdruženým přístupem, které ve svých pracích popisuje Ch. Farhat, [17]. Proudění stlačitelné vazké tekutiny je v práci [17] popsáno nelineárním systémem Navierových – Stokesových rovnic a pohyb struktury pomocí pohybových rovnic buzené netlumené soustavy. Pro diskretizaci kontinuí jsou použity metody konečných objemů a konečných prvků. Tzv. *Staggered* algoritmus pro řešení problému FSI je ukázán na následujícím schématu, Obr. 2.5, kde q a w jsou stavové vektory obsahující neznámé parametry struktury a tekutiny, q je posuv hranice struktury a p je tlak, kterým působí tekutina na povrch lopatky. Index m značí m -tý časový krok.

Řešení problému proudění tekutiny zpravidla vyžaduje menší časový krok, než řešení strukturálních rovnic. Z tohoto důvodu a pro zvýšení přesnosti metody dále Ch. Farhat navrhl algoritmus, kdy během jednoho časového kroku v oblasti struktury je provedena smyčka několika vnitřních časových kroků pro oblast tekutiny, Obr. 2.6.



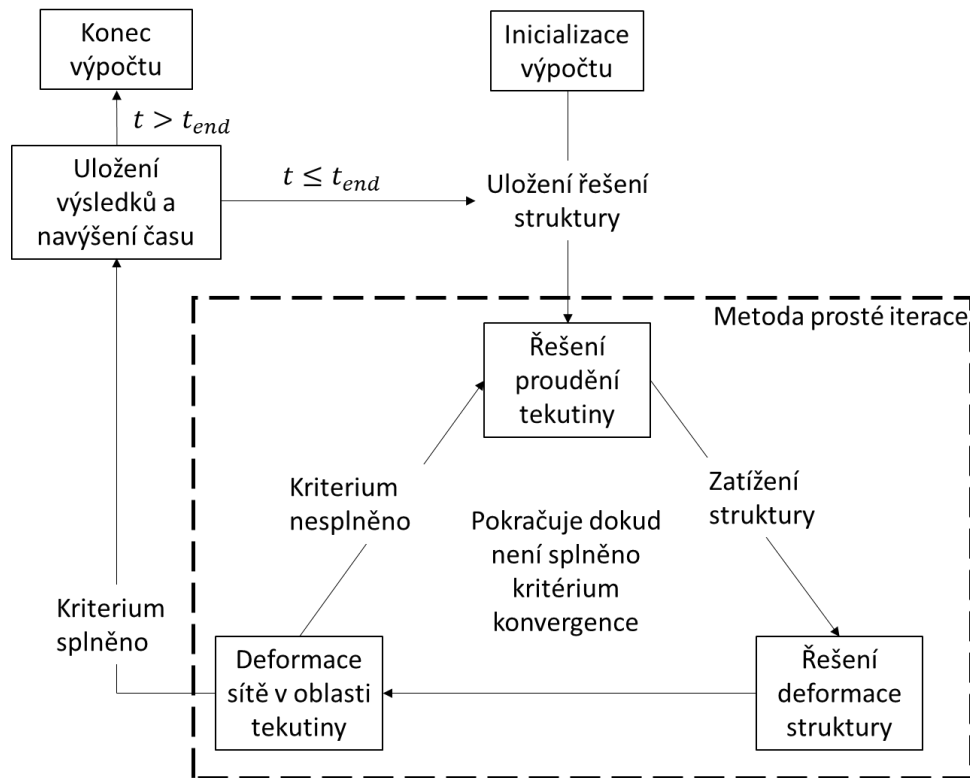
Obr. 2.5 Staggered algoritmus pro modelování interakce tekutina – struktura



Obr. 2.6 Staggered algoritmus s vloženým podcyklem pro výpočet proudění tekutiny

Na práci [17] navazuje příspěvek [11], kdy autor uvádí, že nevýhodou těchto algoritmů je nepřítomnost ověření konvergence v rámci jednoho kroku řešení interakce, protože zde chybí kontrola, zda predikovaná hodnota posunutí struktury q souhlasí s posunutím vypočteným na konci kroku. Autor nazývá na základě prací dalších autorů tento algoritmus slabou interakcí (*loose/weak coupling*). Čím

silnější algoritmus (*tight coupling*), tím je konvergence lépe zaručena. Slabý algoritmus lze na silný převést zavedením korektorového mezikroku, který zajistí shodu predikovaného posunutí s vypočteným posunutím při každém kroku řešení interakce tekutina - struktura. Autor používá metodu prosté iterace (*fixed-point iteration*) pro ověření konvergence. Na Obr. 2.7 je postup schematicky naznačen.



Obr. 2.7 Postup řešení FSI úlohy s korektorovým mezikrokem

3. Matematické modelování proudění stlačitelné nevazké tekutiny se zaměřením na obtékání kmitajících těles

V této kapitole je nejdříve v odstavci 3.1 popsána numerická metoda, která byla použita pro řešení proudění stlačitelné nevazké tekutiny ve 2D výpočtových oblastech s nepohyblivou hranicí. Pro modelování proudění v oblastech s pohyblivou hranicí byl použit nelineární hyperbolický systém Eulerových rovnic v ALE formulaci popsány v odstavci 3.2. Pro prostorovou diskretizaci systému Eulerových rovnic byla v obou případech použita metoda konečných objemů. V odstavci 3.3 je dále popsána lineární rekonstrukce řešení, která byla použita za účelem zvýšení řádu přesnosti metody. Okrajové podmínky odpovídající subsonické rychlosti proudu na vstupu i na výstupu výpočtové oblasti jsou uvedeny v odstavci 3.4. V odstavci 3.5 je pak popsán algoritmus definující pohyb výpočetní sítě.

3.1 Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivé oblasti

Uvažujme nepohyblivou výpočtovou oblast $\Omega \subset R^2$ s hranicí $\partial\Omega$. Proudění stlačitelné nevazké tekutiny na této oblasti je popsáno nelineárním systémem Eulerových rovnic, který je odvozen ze zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Systém Eulerových rovnic lze odvodit ze systému Navierových – Stokesových rovnic (2.1) – (2.3) popisujících proudění stlačitelné vazké tekutiny. Pro nevazkou a tepelně nevodivou tekutinu položíme součinitel dynamické viskozity a tepelné vodivosti roven nule, potom se tenzor napjatosti tekutiny redukuje na tvar $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu 2. Při předpokladu zanedbání objemových sil pak dostáváme systém Eulerových rovnic v diferenciálním tvaru ve 2D, který lze zapsat v kompaktním tvaru následovně

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial y_s} = \mathbf{0}, \quad s = 1, 2. \quad (3.1)$$

Poloha kontinua je popsána vektorem prostorových souřadnic $\mathbf{y} = [x, y]^T$. Vektor konzervativních proměnných \mathbf{w} a vektory nevazkých toků \mathbf{f}_s hranicí $\partial\Omega$ ve směrech souřadnicových os jsou potom definované jako

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

kde ρ je hustota tekutiny, $\mathbf{v} = [u, v]^T$ je vektor rychlosti tekutiny, p je tlak, E je celková energie tekutiny vztažená na jednotku objemu, kterou lze vyjádřit vztahem

$$E = \rho \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right], \quad (3.3)$$

kde e je měrná vnitřní energie.

Systém rovnic (3.1) obsahuje více neznámých, než je počet rovnic, proto je doplněn konstitutivním vztahem. Konstitutivní vztah pro tlak má podobně jako v předchozí kapitole tvar

$$p = (\kappa - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right]. \quad (3.4)$$

Pro vyjádření integrálního tvaru zákonů zachování použijeme Greenovu větu. Uvažujme nepohyblivou výpočtovou oblast $\Omega \subset R^2$ o ploše S s hranicí $\partial\Omega$ o délce l . Greenova věta udává ve 2D vztah mezi křivkovým a plošným integrálem veličiny F definované na této oblasti, [15]

$$\int_{\Omega} \nabla_y F \, dS = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \mathbf{n} \, dl, \quad (3.5)$$

$\mathbf{n} = [n_1, n_2]^T$ je jednotkový vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega$, dl je diferenciálně malá část hranice $\partial\Omega$. Integrujeme-li systém (3.1) přes celou oblast Ω a aplikujeme-li Greenovu větu na druhý člen obsahující prostorovou derivaci vektoru nevázkých toků, dostáváme integrální tvar systému Eulerových rovnic

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \Big|_y \, dS + \oint_{\partial\Omega} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s \, dl = \mathbf{0}, \quad s = 1, 2, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad \Omega \subset R^2. \quad (3.6)$$

Za účelem snadnější algoritmizace metody pro výpočty na nestrukturovaných trojúhelníkových výpočetních sítích zavedeme nyní normálovou rychlost tekutiny vztahem $V_n = \mathbf{v}^T \mathbf{n} = u n_1 + v n_2$ a vektor normálových nevázkých toků hranicí $\partial\Omega$ jako $\mathbf{f}_n(\mathbf{w}) = \mathbf{f}_1 n_1 + \mathbf{f}_2 n_2$, který lze pomocí normálové rychlosti tekutiny V_n upravit na tvar $\mathbf{f}_n(\mathbf{w}) = [\rho V_n, \rho u V_n + p n_1, \rho v V_n + p n_2, (E+p)V_n]^T$. Pak lze systém Eulerových rovnic (3.1) psát ve tvaru, [7]

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \Big|_y \, dS + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f}_n(\mathbf{w}) \, dl = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Prostorovou diskretizaci systému Eulerových rovnic (3.1) provedeme metodou konečných objemů. Omezenou výpočtovou oblast $\Omega \subset R^2$ s hranicí $\partial\Omega$ rozdělíme na konečný počet podoblastí (kontrolních objemů) Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N_{cv}$, které jsou navzájem disjunktní a oblast Ω zcela vyplňují. Integrujme nyní systém rovnic (3.7), který je platný pro každý kontrolní objem Ω_i oblasti Ω , přes časový interval $t \in \langle t^m, t^{m+1} \rangle$

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} \int_{\Omega_i} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} dS dt + \int_{t^m}^{t^{m+1}} \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{f}_n(\mathbf{w}(\mathbf{y}, t)) dl dt = \mathbf{0} . \quad (3.8)$$

Rovnici (3.8) dále aproximujeme v čase

$$\int_{\Omega_i} (\mathbf{w}(\mathbf{y}, t^{m+1}) - \mathbf{w}(\mathbf{y}, t^m)) dS + \Delta t \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{f}_n(\mathbf{w}(\mathbf{y}, t^m)) dl = \mathbf{0} . \quad (3.9)$$

Metoda konečných objemů vychází z předpokladu, že přesné řešení $\mathbf{w}(\mathbf{y}, t^m)$ je v čase t^m na kontrolním objemu Ω_i aproximováno po částech konstantní funkcí \mathbf{w}_i^m , která je střední hodnotou z přesného řešení, [18], [55]

$$\mathbf{w}_i^m \approx \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbf{w}(\mathbf{y}, t^m) dS , \quad (3.10)$$

kde $\mathbf{y} = [x, y]^T$ je vektor prostorových souřadnic a $|\Omega_i|$ je obsah kontrolního objemu Ω_i . Předpokládejme, že výpočtová oblast $\Omega \subset R^2$ je vyplněna trojúhelníkovými kontrolními objemy. První integrál rovnice (3.9) aproximujeme použitím vztahu (3.10), kdy nahradíme přesné řešení $\mathbf{w}(\mathbf{y}, t)$ v čase t^m a t^{m+1} střední hodnotou \mathbf{w}_i^m a \mathbf{w}_i^{m+1} . Druhý integrál nahradíme součtem numerických toků přes všechny tři hrany trojúhelníkového elementu výpočetní sítě

$$|\Omega_i| (\mathbf{w}_i^{m+1} - \mathbf{w}_i^m) + \Delta t \sum_{j=1}^3 \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^j = \mathbf{0} , \quad (3.11)$$

kde l_i^j je délka j -té hrany elementu Ω_i . Vektor konzervativních proměnných v i -tém kontrolním objemu Ω_i v časovém okamžiku t^{m+1} je pak vyjádřen schématem metody konečných objemů ve 2D pro výpočtovou oblast s nestrukturovanou výpočetní sítí jako

$$\mathbf{w}_i^{m+1} = \mathbf{w}_i^m - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j=1}^3 \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^j . \quad (3.12)$$

Časový krok Δt byl určen z CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) podmínky stability, která je uvedena ve tvaru vhodném pro úlohy s nestrukturovanými výpočetními sítěmi, [8]

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{CFL \cdot D_i}{\sqrt{u_i^2 + v_i^2} + a_i} \right), \text{ pro } i = 1, \dots, N_{cv} , \quad (3.13)$$

kde N_{cv} je počet trojúhelníkových buněk Ω_i výpočetní sítě, D_i průměr kružnice vepsané trojúhelníkové buňce Ω_i , $CFL \in (0,1)$, a je lokální rychlost zvuku

$$a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} . \quad (3.14)$$

Normálové nevazké toky f_n hranic $\partial\Omega$ výpočetní oblasti byly aproximovány pomocí Rusanovova numerického toku a Van Leerova schématu, založeného na štěpení vektoru nevazkých toků. Rusanovův numerický tok je definován, [18]

$$f_n(\mathbf{w}^L, \mathbf{w}^R) = \frac{1}{2} \left[f_n^L(\mathbf{w}^L) + f_n^R(\mathbf{w}^R) - (a + |V_n|)(\mathbf{w}^R - \mathbf{w}^L) \right], \quad (3.15)$$

kde L je index buňky, v níž se nacházíme, a R je index sousední buňky. Normálový nevazký tok $f_n^L(\mathbf{w}^L)$ určíme ze složek vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}^L = [w_1^L, w_2^L, w_3^L, w_4^L]^T = [\rho^L, \rho^L u^L, \rho^L v^L, E^L]^T$ jako $f_n^L(\mathbf{w}^L) = [\rho^L V_n^L, \rho^L u^L V_n^L + p^L n_1^L, \rho^L v^L V_n^L + p^L n_2^L, (E^L + p^L) V_n^L]^T$ a normálový nevazký tok $f_n^R(\mathbf{w}^R)$ určíme analogicky ze složek vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}^R = [w_1^R, w_2^R, w_3^R, w_4^R]^T = [\rho^R, \rho^R u^R, \rho^R v^R, E^R]^T$ v sousední buňce. Rychlost zvuku se poté určí jako průměrná hodnota $a = (a^L + a^R)/2$ a normálová rychlost jako $V_n = (V_n^L + V_n^R)/2$.

Van Leerovo schéma štěpení toku definuje normálový nevazký tok hranic kontrolního objemu jako součet toků

$$f_n(\mathbf{w}^L, \mathbf{w}^R) = f_n^{VL}(\mathbf{w}^L) + f_n^{VR}(\mathbf{w}^R), \quad (3.16)$$

kde $\mathbf{w}^L = [w_1^L, w_2^L, w_3^L, w_4^L]^T = [\rho^L, \rho^L u^L, \rho^L v^L, E^L]^T$ a Van Leerův tok $f_n^{VL}(\mathbf{w}^L)$, který přísluší buňce, v níž se nacházíme, je určen podle vztahu, [8]

$$f_n^{VL} = \frac{\rho^L a^L \left(\frac{V_n^L}{a^L} + 1 \right)^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ u^L + \frac{n_1}{\kappa} (-V_n^L + 2a^L) \\ v^L + \frac{n_2}{\kappa} (-V_n^L + 2a^L) \\ \frac{(u^L)^2 + (v^L)^2 - (V_n^L)^2}{2} + \frac{[(\kappa - 1)V_n^L + 2a^L]^2}{2(\kappa^2 - 1)} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Van Leerův tok příslušející sousední buňce $f_n^{VR}(\mathbf{w}^R)$, kde vektor $\mathbf{w}^R = [w_1^R, w_2^R, w_3^R, w_4^R]^T = [\rho^R, \rho^R u^R, \rho^R v^R, E^R]^T$ je vektor konzervativních proměnných v sousední buňce, je definován jako

$$f_n^{VR} = - \frac{\rho^R a^R \left(\frac{V_n^R}{a^R} + 1 \right)^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ u^R + \frac{n_1}{\kappa} (-V_n^R - 2a^R) \\ v^R + \frac{n_2}{\kappa} (-V_n^R - 2a^R) \\ \frac{(u^R)^2 + (v^R)^2 - (V_n^R)^2}{2} + \frac{[(\kappa - 1)V_n^R - 2a^R]^2}{2(\kappa^2 - 1)} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

3.2 Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí

Pro řešení proudění stlačitelné nevazké tekutiny ve výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$, jejíž tvar se mění v čase, byl použit ALE (Arbitrary Lagrangian – Eulerian) popis kontinua, který kombinuje Eulerův a Lagrangeův přístup. Systém Navierových – Stokesových rovnic v ALE formulaci, který popisuje proudění stlačitelné vazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí byl odvozen v odstavci 2.2.2. V případě nevazkého a tepelně nevodivého proudění ve 2D výpočtové oblasti položíme součinitel dynamické viskozity a tepelné vodivosti roven nule. Potom se tenzor napjatosti tekutiny redukuje na tvar $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu 2. Pokud dále zanedbáme vnější objemové síly ve vztazích (2.19) - (2.21), je možné vyjádřit ALE formulaci nelineárního konzervativního systému Eulerových rovnic v integrálním tvaru popisující proudění stlačitelné nevazké tekutiny v časově proměnné oblasti $\Omega(t) \subset R^2$ jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\chi} \int_{\Omega(t)} \mathbf{w}(\mathbf{y}, t) dS + \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{f}_n(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{v}}_n \mathbf{w}) dl = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

kde $\hat{\mathbf{v}}_n = \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}$ je normálová rychlost jednotlivých částí hranice $\partial\Omega(t)$ oblasti $\Omega(t)$, Obr. 3.1.

Při řešení proudění tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí je důležité dodržet tzv. geometrický zákon zachování (zkráceně GCL - Geometric Conservation Law). Ten byl poprvé představen v práci [49]. Pokud je GCL splněn pro daný algoritmus, znamená to, že konstantní řešení je na výpočtové oblasti zachováno bez ohledu na pohyb a deformaci sítě. Předpokládejme tedy konstantní řešení systému Eulerových rovnic v ALE formulaci (3.19) v celé výpočtové oblasti. Jedná se o případ uzavřené oblasti, ve které neproudí tekutina a řešením jsou tedy počáteční hodnoty vektoru konzervativních proměnných. Dosazením takového konstantního řešení $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ do systému Eulerových rovnic v ALE formulaci (3.19) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\chi} \int_{\Omega(t)} \mathbf{w}_0 dS + \oint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_0) - \hat{\mathbf{v}}_n \mathbf{w}_0) dl = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Integrál přes hranici kontrolního objemu z normálových složek nevazkého toku $\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_0)$ je nulový, protože tekutina ve výpočtové oblasti neproudí. Konstantu \mathbf{w}_0 lze poté vytknout před integrály a zkrátit. Po převedení členu obsahujícího rychlost hranice na pravou stranu rovnice dostáváme integrální tvar geometrického zákona zachování

$$\frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{\chi} \int_{\Omega(t)} dS = \oint_{\partial\Omega(t)} \hat{\mathbf{v}}_n dl, \quad (3.21)$$

který říká, že změna plochy oblasti $\Omega(t)$ za čas t by měla být rovna ploše, kterou za tento čas urazí hranice této oblasti rychlostí $\hat{\mathbf{v}}_n$.

Prostorová diskretizace systému Eulerových rovnic v ALE formulaci (3.19) byla opět provedena metodou konečných objemů. V tomto případě bylo potřeba brát v úvahu změnu velikosti trojúhelníkového kontrolního objemu Ω_i v každém časovém kroku. Integrujme nyní systém rovnic (3.19) přes časový interval $t \in (t^m, t^{m+1})$. Střední hodnota přesného řešení v časech t^m a t^{m+1} je určena obdobně jako ve vztahu (3.10)

$$\mathbf{w}_i^m \approx \frac{1}{|\Omega_i^m|} \int_{\Omega_i^m} \mathbf{w}(\mathbf{y}, t^m) dS, \quad \mathbf{w}_i^{m+1} \approx \frac{1}{|\Omega_i^{m+1}|} \int_{\Omega_i^{m+1}} \mathbf{w}(\mathbf{y}, t^{m+1}) dS, \quad (3.22)$$

kde Ω_i^m je obsah i -tého kontrolního objemu v čase t^m a Ω_i^{m+1} obsah i -tého kontrolního objemu v čase t^{m+1} . Pro přehlednější zápis označíme výraz v závorce v systému rovnic (3.19), který představuje vektor normálových numerických toků se zahrnutím rychlosti hranice kontrolního objemu jako vektor $\mathbf{g}_n(\mathbf{w}) = \mathbf{f}_n(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{v}}_n \cdot \mathbf{w}$. Analogickým postupem popsaným vztahy (3.8), (3.9) a (3.11) v odstavci 3.1 dostáváme

$$|\Omega_i^{m+1}| \mathbf{w}_i^{m+1} - |\Omega_i^m| \mathbf{w}_i^m + \Delta t \sum_{j=1}^3 \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^{m,j} = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

kde $l_i^{m,j}$ je délka j -té hrany kontrolního objemu Ω_i^m v čase t^m a $\mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) - \hat{\mathbf{v}}_{n_i}^j \cdot \mathbf{w}_i^m$ je vektor tzv. modifikovaných numerických toků, viz např. [19]. Jednoduchou úpravou vyjádříme vektor konzervativních proměnných v buňce Ω_i v časovém okamžiku t^{m+1} schématem metody konečných objemů pro časově proměnné oblasti s nestrukturovanou výpočetní sítí

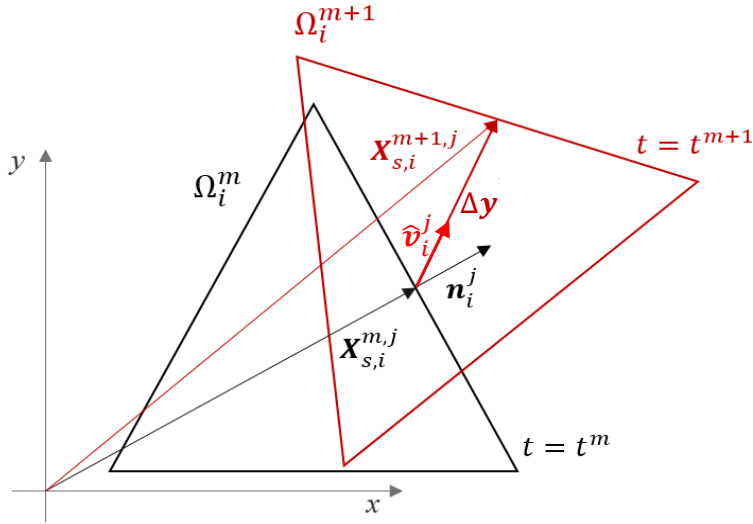
$$\mathbf{w}_i^{m+1} = \frac{|\Omega_i^m|}{|\Omega_i^{m+1}|} \mathbf{w}_i^m - \frac{\Delta t}{|\Omega_i^{m+1}|} \sum_{j=1}^3 \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^{m,j}. \quad (3.24)$$

Rychlost j -té hrany i -tého kontrolního objemu se vypočítá jako vzdálenost, kterou urazí střed této hrany za časový krok Δt , tedy $\hat{\mathbf{v}}_i^j = \Delta \mathbf{y} / \Delta t = (\mathbf{X}_{s,i}^{m+1,j} - \mathbf{X}_{s,i}^{m,j}) / (t^{m+1} - t^m)$, kde $\mathbf{X}_{s,i}^{m,j}$ je polohový vektor středu j -té hrany i -tého kontrolního objemu Ω_i v časovém okamžiku t^m a $\mathbf{X}_{s,i}^{m+1,j}$ je polohový vektor středu této hrany v časovém okamžiku t^{m+1} , jak je naznačeno na Obr. 3.1. Pro normálovou rychlost j -té hrany i -tého kontrolního objemu tedy platí $\hat{\mathbf{v}}_{n_i}^j = \hat{\mathbf{v}}_i^j \cdot \mathbf{n}_i^j$.

Při zavedeném značení lze dále přepsat geometrický zákon zachování (3.21) v diskrétním tvaru pro i -tý kontrolní objem Ω_i výpočtové oblasti následovně

$$|\Omega_i^{m+1}| - |\Omega_i^m| = \Delta t \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{v}}_{n_i}^j l_i^j. \quad (3.25)$$

GCL poté slouží pro ověření metody při její implementaci ve výpočtovém softwaru.



Obr. 3.1 Rychlost j -té hrany i -tého kontrolního objemu

3.3 Lineární rekonstrukce řešení s Barthovým limiterem

Schéma metody konečných objemů (3.12) a (3.24) je prvního řádu přesnosti v čase i v prostoru. Vyššího řádu přesnosti dosáhneme lineární rekonstrukcí hledaného řešení. Vyšší řád přesnosti způsobí vznik nefyzikálních oscilací v místech, kde lze při modelování proudění tekutiny předpokládat výskyt velkých gradientů a nespojitostí v řešení (např. rázových vln). Je proto potřeba tyto nefyzikální oscilace tlumit přidáním umělé vazkosti pomocí limiteru. V této práci bude použita lineární rekonstrukce hledaného řešení s Barthovým limiterem, která je zobecněním MUSCL schémat (Monotone Upstream Scheme for Conservation Law), [53], pro oblasti s nestrukturovanou výpočetní sítí. Metodika je popsána v práci [2]. Lineární rekonstrukce k -té složky vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}_i = [w_{k,i}]$, $i = 1, 2, \dots, N_{cv}$, $k = 1, 2, 3, 4$, na j -té hraně trojúhelníkového kontrolního objemu Ω_i je definována jako

$$w_{k,i}^j = w_{k,i} + \beta_{k,i}^j \nabla_y w_{k,i} \mathbf{r}_i^j, \quad (3.26)$$

kde $w_{k,i}$ je k -tá složka vektoru konzervativních proměnných v buňce Ω_i a $w_{k,i}^j$ je k -tá složka vektoru konzervativních proměnných v j -té sousední buňce, \mathbf{r}_i^j je polohový vektor s počátkem ve středu buňky Ω_i a koncovým bodem ve středu j -té hrany této buňky, Obr. 3.2.

Parciální derivace k -té složky vektoru konzervativních proměnných podle prostorových souřadnic $\nabla_y w_{k,i}$ určíme následovně, [7]

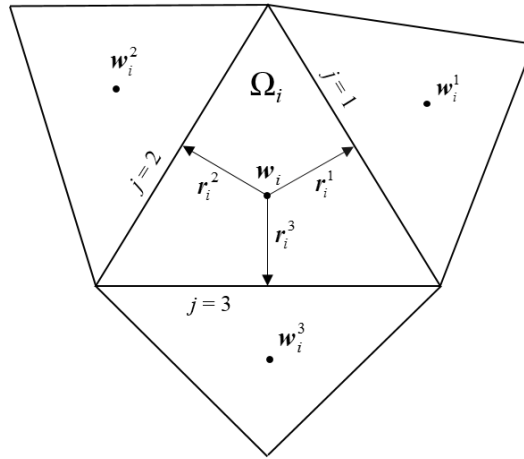
$$\frac{\partial w_{k,i}}{\partial x} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j=1}^3 \frac{w_{k,i} + w_{k,i}^j}{2} n_{1,i}^j l_i^j, \quad \frac{\partial w_{k,i}}{\partial y} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j=1}^3 \frac{w_{k,i} + w_{k,i}^j}{2} n_{2,i}^j l_i^j, \quad (3.27)$$

kde $n_{1,i}^j$ a $n_{2,i}^j$ jsou složky jednotkového vektoru vnější normály k j -té hraně kontrolního objemu Ω_i

a l_i^j je délka této hrany. Barthův limiter $\beta_{k,i}^j$ pro j -tou hranu trojúhelníkového kontrolního objemu Ω_i a k -tou složku $w_{k,i}$ vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}_i = [w_{k,i}]$, $i = 1, 2, \dots, N_{cv}$, $k = 1, 2, 3, 4$, se vypočte podle vzorce

$$\beta_{k,i}^j = \min_j \begin{cases} \min \left\{ \frac{w_{\max} - w_{k,i}}{\nabla w_{k,i} \mathbf{r}_i^j}, 1 \right\}, & \nabla w_{k,i} \mathbf{r}_i^j > 0, \\ 1, & \nabla w_{k,i} \mathbf{r}_i^j = 0, \\ \min \left\{ \frac{w_{\min} - w_{k,i}}{\nabla w_{k,i} \mathbf{r}_i^j}, 1 \right\}, & \nabla w_{k,i} \mathbf{r}_i^j < 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

kde $w_{\max} = \max(w_{k,i}, w_{k,i}^j)$, $j = 1, 2, 3$, a analogicky $w_{\min} = \min(w_{k,i}, w_{k,i}^j)$, $j = 1, 2, 3$.



Obr. 3.2 Zavedené označení pro implementaci Barthova limiteru

Zrekonstruované složky vektoru konzervativních proměnných získaných podle vztahu (3.26) jsou implementovány do schématu metody konečných objemů (3.12) a (3.24) dosazením do vektoru normálových nevazkých toků $\mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^{m,j})$ resp. $\mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^{m,j})$ v m -tém časovém kroku.

3.4 Implementace okrajových podmínek

Pro případy proudění stlačitelné nevazké tekutiny řešené v rámci této práce byly předepsány okrajové podmínky odpovídající subsonické rychlosti proudu tekutiny na vstupu i na výstupu výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$ resp. $\Omega(t) \subset R^2$. Dále byly podle typu problému předepsány okrajové podmínky na pevné nepropustné stěně a na pohyblivé nepropustné hranici. Protože zde prezentovaný software, zahrnující možnost modelovat proudění tekutiny v pohyblivých oblastech, byl navržen speciálně pro případy obtékání pohyblivého se tělesa, jsou zde uvedeny okrajové podmínky, které neuvažují pohyblivou vstupní, případně výstupní hranici výpočtové oblasti.

- *Vstupní hranice*

Na vstupní hranici výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$ resp. $\Omega(t) \subset R^2$ předepíšeme stagnační tlak p_0 , stagnační hustotu ρ_0 a úhel náběhu proudu α . Pro stagnační hustotu ρ_0 a stagnační tlak p_0 je v práci [55] odvozen vztah

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\kappa = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (3.29)$$

kde M je bezrozměrové Machovo číslo, které je definováno jako podíl velikosti vektoru rychlosti tekutiny $|\mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ a rychlosti zvuku a v této tekutině

$$M = \frac{|\mathbf{v}|}{a}. \quad (3.30)$$

Z rovnice (3.29) můžeme Machovo číslo vyjádřit pomocí stagnačního tlaku jako

$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}. \quad (3.31)$$

Nyní určíme složky vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_{INL} na vstupní hranici. Statický tlak extrapolujeme z proudového pole, použitím konstitutivního vztahu (3.4), do kterého dosadíme složky vektoru konzervativních proměnných v buňce přiléhající vstupní hranici $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T$

$$p_{INL} = (\kappa-1) \left(w_4 - \frac{(w_2)^2 - (w_3)^2}{2 w_1} \right). \quad (3.32)$$

Vztah pro hustotu na vstupní hranici ρ_{INL} odvodíme z rovnice (3.29) jako

$$\rho_{INL} = \rho_0 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{INL}^2 \right)^{\frac{1}{1-\kappa}}, \quad (3.33)$$

kde Machovo číslo na vstupu M_{INL} určíme ze vztahu (3.31) dosazením statického tlaku $p = p_{INL}$. Složky vektoru rychlosti na vstupní hranici $\mathbf{v}_{INL} = [u_{INL}, v_{INL}]^T = [|\mathbf{v}_{INL}| \cos \alpha, |\mathbf{v}_{INL}| \sin \alpha]^T$ určíme pomocí definice Machova čísla (3.30) a vztahu (3.14) pro rychlost zvuku v ideálním plynu

$$u_{INL} = M_{INL} \sqrt{\frac{\kappa p_{INL}}{\rho_{INL}}} \cos \alpha, \quad v_{INL} = M_{INL} \sqrt{\frac{\kappa p_{INL}}{\rho_{INL}}} \sin \alpha, \quad (3.34)$$

kde α je předepsaný úhel náběhu proudu. Celkovou energii na vstupu vztaženou na jednotku objemu E_{INL} odvodíme z konstitutivního vztahu pro tlak (3.4)

$$E_{INL} = \frac{P_{INL}}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_{INL} (u_{INL}^2 + v_{INL}^2). \quad (3.35)$$

Použitím hodnot vypočtených pomocí vztahů (3.32) – (3.35) určíme:

- vektor konzervativních proměnných na vstupní hranici výpočtové oblasti

$$\mathbf{w}_{INL} = [\rho_{INL}, \rho_{INL} u_{INL}, \rho_{INL} v_{INL}, E_{INL}]^T$$

- vektor normálových nevazkých toků na vstupní hranici výpočtové oblasti

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{INL}) = [\rho_{INL} V_{n_{INL}}, \rho_{INL} u_{INL} V_{n_{INL}} + p_{INL} n_1, \rho_{INL} v_{INL} V_{n_{INL}} + p_{INL} n_2, (E_{INL} + p_{INL}) V_{n_{INL}}]^T,$$

kde $V_{n_{INL}} = u_{INL} n_1 + v_{INL} n_2$ a n_1, n_2 jsou složky normálového vektoru.

- *Výstupní hranice*

Na výstupní hranici výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$ resp. $\Omega(t) \subset R^2$ je předepsán statický tlak p_2 .

Z proudového pole pak extrapolujeme hustotu ρ_{OUT} , složky vektoru rychlosti u_{OUT} a v_{OUT} použitím složek vektoru konzervativních proměnných v buňce přiléhající výstupní hranici a určíme celkovou energii vztáženou na jednotku objemu E_{OUT} z konstitutivního vztahu pro tlak (3.4)

$$\rho_{OUT} = w_1, u_{OUT} = \frac{w_2}{w_1}, v_{OUT} = \frac{w_3}{w_1}, E_{OUT} = \frac{p_2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_{OUT} (u_{OUT}^2 + v_{OUT}^2). \quad (3.36)$$

Použitím hodnot vypočtených pomocí vztahů (3.36) určíme:

- vektor konzervativních proměnných na výstupní hranici výpočtové oblasti

$$\mathbf{w}_{OUT} = [\rho_{OUT}, \rho_{OUT} u_{OUT}, \rho_{OUT} v_{OUT}, E_{OUT}]^T$$

- vektor normálových nevazkých toků na výstupní hranici výpočtové oblasti

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{OUT}) = [\rho_{OUT} V_{n_{OUT}}, \rho_{OUT} u_{OUT} V_{n_{OUT}} + p_{OUT} n_1, \rho_{OUT} v_{OUT} V_{n_{OUT}} + p_{OUT} n_2, (E_{OUT} + p_{OUT}) V_{n_{OUT}}]^T,$$

kde $V_{n_{OUT}} = u_{OUT} n_1 + v_{OUT} n_2$ a n_1, n_2 jsou složky normálového vektoru.

- *Pevná nepropustná stěna*

Na pevné nepropustné stěně výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$ je předepsána nulová normálová složka rychlosti, tedy $V_{n_{WALL}} = 0$ a tlak p_{WALL} extrapolujeme z proudového pole pomocí konstitutivního vztahu (3.4) dosazením složek vektoru konzervativních proměnných v buňce přiléhající této hranici

$$p_{WALL} = (\kappa - 1) \left(w_4 - \frac{(w_2)^2 - (w_3)^2}{2 w_1} \right). \quad (3.37)$$

- vektor normálových nevazkých toků na stěně výpočtové oblasti pak dostáváme ve tvaru

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{WALL}) = [\rho_{WALL} V_{n_{WALL}}, \rho_{WALL} u_{WALL} V_{n_{WALL}} + p_{WALL} n_1, \rho_{WALL} v_{WALL} V_{n_{WALL}} + p_{WALL} n_2, E_{WALL} V_{n_{WALL}} + p_{WALL} V_{n_{WALL}}]^T \Rightarrow \mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{WALL}) = [0, p_{WALL} n_1, p_{WALL} n_2, 0]^T.$$

- *Pohyblivá nepropustná stěna*

Na pohyblivé nepropustné stěně výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$ předepíšeme nenulovou normálovou složku rychlosti, která je rovna normálové složce rychlosti stěny, tedy $V_n = \hat{v}_n$ a extrapolujeme tlak p_{WALL} z proudového pole dosažením složek vektoru konzervativních proměnných v buňce přiléhající této hranici, stejně jako v případě nepohyblivé stěny podle vztahu (3.37).

- vektor normálových nevazkých toků na pohyblivé stěně výpočtové oblasti pak bude mít tvar

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{WALL}) = [\rho_{WALL} \hat{v}_n, \rho_{WALL} u_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} n_1, \rho_{WALL} v_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} n_2, E_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} \hat{v}_n]^T.$$

- vektor modifikovaných normálových nevazkých toků na pohyblivé stěně, který byl zaveden v odstavci 3.2, pak odvodíme jako $\mathbf{g}_n(\mathbf{w}_{WALL}) = \mathbf{f}_n(\mathbf{w}_{WALL}) - \hat{v}_n \mathbf{w}_{WALL}$, [18], tedy

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{w}_{WALL}) = \begin{bmatrix} \rho_{WALL} \hat{v}_n \\ \rho_{WALL} u_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} n_1 \\ \rho_{WALL} v_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} n_2 \\ E_{WALL} \hat{v}_n + p_{WALL} \hat{v}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_{WALL} \hat{v}_n \\ \rho_{WALL} u_{WALL} \hat{v}_n \\ \rho_{WALL} v_{WALL} \hat{v}_n \\ E_{WALL} \hat{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_{WALL} n_1 \\ p_{WALL} n_2 \\ p_{WALL} \hat{v}_n \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

3.5 Algoritmus deformace sítě

Úlohy aeroelasticity se týkají problémů vnitřní i vnější aerodynamiky. Do první oblasti spadá například interakce kmitajících hlasivek s proudící stlačitelnou tekutinou (vzduchem), kterou se zabývá např. skupina autorů Horáček, Vampola a kol., [19], [52]. V technických aplikacích se s aeroelastickými jevy setkáváme převážně u případů vnější aerodynamiky. Algoritmus pro řešení pohybu výpočetní sítě, který je popsán v tomto odstavci, je vhodný pro úlohy modelování obtékání kmitajícího tuhého tělesa. Metoda použitá pro výpočet souřadnic uzlů deformující se trojúhelníkové sítě ve výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$ je uvedena například v pracích [7] a [42]. Tento přístup je založen na interpolaci souřadnic uzlů pomocí polynomiální funkce (tzv. blending function).

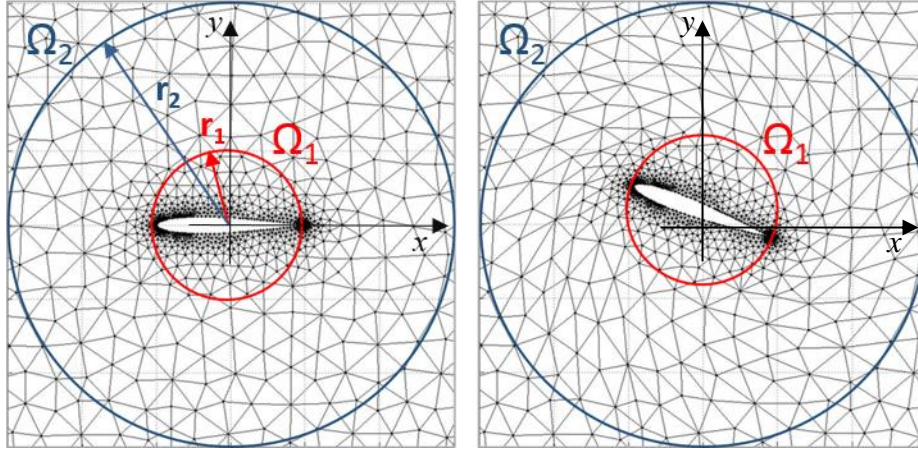
Následující postup popisuje výpočet vektoru kartézských souřadnic každého uzlu deformující se nestrukturované výpočetní sítě v časovém okamžiku t^m . Vektor kartézských souřadnic i -tého uzlu výpočetní sítě v časovém okamžiku t^0 označíme jako $\mathbf{x}_{0i} = [x_{0i}, y_{0i}]^T$, $i = 1, 2, \dots, N_p$, kde N_p je celkový počet uzlů sítě. Dále zavedeme vztah pro výpočet souřadnic i -tého uzlu, který je pevně spojen s kmitajícím tělesem, kdy pohyb tělesa je obecně funkcí času a je dán vektorem posuvů $\mathbf{x}_p(t) = [x_p(t), y_p(t)]^T$ ve směrech souřadnicových os x a y a úhlem natočení $\varphi(t)$ s osou rotace procházející počátkem souřadnicového systému

$$\mathbf{x}_{1i}(t) = [x_{1i}(t), y_{1i}(t)]^T = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{T}(\varphi(t)) \mathbf{x}_{0i}, \quad (3.39)$$

kde $\mathbf{T}(\varphi)$ je transformační matice pro rotaci ve tvaru

$$\mathbf{T}(\varphi(t)) = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Rozdělme nyní výpočtovou oblast na tři části pomocí dvou kružnic Ω_1 o poloměru r_1 a Ω_2 o poloměru r_2 , jak je zřejmé z Obr. 3.3, vlevo.



Obr. 3.3 Původní nezdeformovaná síť (vlevo), zdeformovaná síť (vpravo)

Souřadnice uzlů, které leží vně větší kružnice zůstávají po celou dobu pohybu neměnné. Uzly sítě, které leží uvnitř menší kružnice a na její hranici jsou po celou dobu pohybu pevně spojeny s tělesem a pohybují se spolu s ním podle vztahu (3.39). Souřadnice uzlů ležících v mezikruží jsou interpolovány pomocí polynomiální funkce (blending function). Vektor souřadnic i -tého uzlu \mathbf{x}_i^m v časovém okamžiku t^m pak vypočteme v závislosti na vzdálenosti r od středu obou kružnic v čase t^0 následovně

$$\mathbf{x}_i^m = \begin{cases} \mathbf{x}_{i_1}(t^m), & r \leq r_1 \\ \mathbf{x}_{0i}, & r \geq r_2 \\ b(r)\mathbf{x}_{0i} + (1-b(r))\mathbf{x}_{i_1}(t^m), & r_1 < r < r_2 \end{cases}, \quad (3.41)$$

kde $b(r)$ je funkce ve tvaru polynomu třetího stupně, [42]

$$b(r) = 3 \left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right)^3, \quad (3.42)$$

nebo je dále možné použít funkci ve tvaru polynomu pátého stupně

$$b(r) = 10 \left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right)^3 - 15 \left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right)^5. \quad (3.43)$$

Zdeformovaná výpočetní síť, kdy byla pro výpočet souřadnic uzlů v mezikruží použita interpolační funkce ve tvaru polynomu třetího stupně, je zobrazena na Obr. 3.3, vpravo.

Uvedená metoda výpočtu souřadnic uzlů deformující se výpočetní sítě je použitelná spíše pro jednodušší případy vnější aerodynamiky tuhého tělesa, jehož maximální výchylka je omezena požadavkem na kvalitu výpočetní sítě. V případě větších výchylek dochází ke vzniku nekvalitních buněk. Měřítkem kvality výpočetní sítě je například zkosení buňky (*skewness*). Vypočítá se podle vztahu

$$s = \max \left[\frac{\Theta_{\max} - \Theta_e}{180 - \Theta_e}, \frac{\Theta_e - \Theta_{\min}}{\Theta_e} \right], \quad (3.44)$$

Kde úhel Θ_e je 60° pro případ trojúhelníkových buněk (pro čtyřúhelníkové elementy by bylo $\Theta_e = 90^\circ$), Θ_{\max} je maximální vnitřní úhel a Θ_{\min} je nejmenší vnitřní úhel elementu. Hodnoty parametru s se pohybují v intervalu $(0, 1)$ a platí, že čím je jeho hodnota vyšší, tím je buňka více zkosená. Lze říci, že přijatelné hodnoty zkosení jsou do 0,95, v krajním případě lze tolerovat zkosení do hodnoty 0,98. Případ, kdy hodnota zkosení přesáhne 0,98, by nastal například pro trojúhelníkový element s vnitřními úhly $(1^\circ, 89^\circ, 90^\circ)$. V prezentované úloze se díky malým výchylkám obtékaného tělesa nevyskytují takové nekvalitní elementy.

4. Vlastní výpočetní software vyvinutý v systému Matlab

Metodika popsaná v odstavcích 3.1 – 3.5 byla použita k vytvoření vlastního výpočetního softwaru v systému Matlab určeného pro numerické řešení proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivých i pohyblivých oblastech. Algoritmus řešení je pro oba případy popsán v následujícím odstavci. V odstavci 4.2 jsou pak uvedeny numerické výsledky získané pomocí prezentovaného výpočetního softwaru. Výsledky byly ověřeny porovnáním s převzatými výsledky experimentálních měření, a porovnáním s výsledky jiných autorů, které jsou dostupné v literatuře.

4.1 Algoritmus výpočetního softwaru

4.1.1 Proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivé oblasti

Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v nepohyblivé oblasti je popsán v odstavcích 3.1, 3.3 a 3.4. V tomto odstavci jsou popsány jednotlivé kroky algoritmu, podle kterého je vypočten vektor konzervativních proměnných v každém trojúhelníkovém kontrolním objemu Ω_i výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$, kde $i = 1, 2, \dots, N_{cv}$. N_{cv} je počet kontrolních objemů (buněk) výpočtové oblasti.

- *Inicializace před výpočtem*

Časová hladina: $t = t^0$

Vstupní parametry:

- Okrajové podmínky na vstupu do výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$: stagnační tlak p_0 , stagnační hustota ρ_0 , úhel náběhu proudu α
- Okrajové podmínky na výstupu z výpočtové oblasti $\Omega \subset R^2$: statický tlak p_2

Každý kontrolní objem Ω_i naplníme nejdříve inicializačními hodnotami (tzv. počátečními podmínkami) vektoru konzervativních proměnných $w_i^0 = [\rho_i, \rho_i u_i, \rho_i v_i, E_i]^T$, které určíme pomocí vztahů (3.29), (3.30), (3.4) a (3.14) a dosazením vstupních parametrů následovně

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{1_i}^2 \right)^{\frac{1}{1 - \kappa}}, \quad E_i = \frac{p_2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_i (u_i^2 + v_i^2), \\ u_i &= M_{1_i} \sqrt{\frac{\kappa p_2}{\rho_i}} \cos \alpha, \quad v_i = M_{1_i} \sqrt{\frac{\kappa p_2}{\rho_i}} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde Machovo číslo M_{1_i} určíme pomocí vztahu (3.31) dosazením statického tlaku p_2 jako

$$M_{1_i} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]}. \quad (4.2)$$

- *Iterační výpočet: pro časovou iteraci (m-tou časovou hladinu) volíme $m = 0, 1, 2, \dots, N_{end}$*

Pro výpočet parametrů proudového pole v časové hladině t^{m+1} realizujeme následující kroky:

Procházíme všechny hrany $\partial\Omega_i^j, j = 1, 2, 3$ kontrolního objemu $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N_{cv}$ a vstupní parametry jsou tvořeny vektorem konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^m v předchozí časové hladině t^m

I. Výpočet vektoru normálových nevazkých toků $\mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_i^m)$

Pro každou hranu $\partial\Omega_i^j$ vypočteme normálový vektor $\mathbf{n}_i^j = [n_{1,i}^j, n_{2,i}^j]^T = \left[\frac{\Delta y_i^j}{l_i^j}, -\frac{\Delta x_i^j}{l_i^j} \right]^T$, kde l_i^j je délka této hrany.

Při výpočtu vektoru normálových nevazkých toků postupujeme podle toho, které části výpočtové oblasti hrana náleží:

Vstupní hranice

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j$

Použitím vztahů (3.32) - (3.35) určíme $\mathbf{w}_{INL,i}^m$

$$\Rightarrow \mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_{INL,i}^m)$$

Výstupní hranice

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j$

Použitím vztahů (3.36) určíme $\mathbf{w}_{OUT,i}^m$

$$\Rightarrow \mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_{OUT,i}^m)$$

Pevná nepropustná stěna

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j$

Použitím vztahu (3.37) určíme $p_{WALL,i}$

$$V_n = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_{n_i^j}(\mathbf{w}_i^m) = [0, p_{WALL,i} n_{1,i}^j, p_{WALL,i} n_{2,i}^j, 0]^T$$

Vnitřní oblast

Vstupní parametry dělíme podle toho, zda používáme lineární rekonstrukci řešení s Barthovým limiterem (odstavec 3.3):

- a) $\mathbf{w}_i^{m,L}, \mathbf{w}_i^{m,R}$, kde L je index kontrolního objemu, ve kterém se nacházíme, R je index sousední buňky, \mathbf{n}_i^j
- b) zrekonstruované složky vektoru konzervativních proměnných dané vztahem (3.26), \mathbf{n}_i^j .

Vektor $\mathbf{f}_{\mathbf{n}_i^j}^j(\mathbf{w}_i^m)$ určíme podle: Rusanovova schématu - rovnice (3.15) nebo Van Leerova schématu - rovnice (3.16) – (3.18).

II. Výpočet vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1} v časové hladině t^{m+1}

Schéma metody konečných objemů pro i -tý kontrolní objem Ω_i (vztah (3.12))

$$\mathbf{w}_i^{m+1} = \mathbf{w}_i^m - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \sum_{j=1}^3 \mathbf{f}_{\mathbf{n}_i^j}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^j,$$

časový krok Δt určíme vztahem (3.13).

Výstupní parametry: Vektor konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1} v časové hladině t^{m+1}

III. Přejdeme do následující časové hladiny. Přiřadíme tedy $m:=m+1$ a opakujeme celý postup **I.** a **II.**

- *Ukončení výpočtu pro $m = N_{end}$, uložení vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1}*

4.1.2 Proudění stlačitelné nevazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí

Matematický model proudění stlačitelné nevazké tekutiny v oblasti s pohyblivou hranicí je popsán v odstavcích 3.2 - 3.5. V tomto odstavci uvedeme algoritmus, podle kterého je vypočten vektor konzervativních proměnných v každém trojúhelníkovém kontrolním objemu Ω_i výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$, kde $i = 1, 2, \dots, N_{cv}$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

- *Inicializace před výpočtem*

Časová hladina: $t = t^0$

Vstupní parametry:

- Okrajové podmínky na vstupu do výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$: stagnační tlak p_0 , stagnační hustota ρ_0 , úhel náběhu proudu α

Okrajové podmínky na výstupu z výpočtové oblasti $\Omega(t) \subset R^2$: statický tlak p_2

Každý kontrolní objem Ω_i naplníme nejdříve inicializačními hodnotami (tzv. počátečními podmínkami) vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}_i^0 = [\rho_{li}, \rho_{li}u_{li}, \rho_{li}v_{li}, E_{li}]^T$, které určíme podle vztahů (4.1).

- *Iterační výpočet: pro časovou iteraci (m-tou časovou hladinu) volíme $m = 0, 1, 2, \dots, N_{end}$*

Pro výpočet parametrů proudového pole v časové hladině t^{m+1} realizujeme následující kroky:

Nejdříve určíme souřadnice všech uzlů \mathbf{x}^{m+1} v časovém okamžiku t^{m+1} podle postupu popsaném v odstavci 3.5:

Vstupní parametry: $\mathbf{x}_p(t), \varphi(t)$

Výstupní parametry: $\mathbf{x}^{m+1} \Rightarrow$ dopočteme obsah každého kontrolního objemu $|\Omega_i^{m+1}|$

Dále procházíme všechny hrany $\partial\Omega_i^j, j = 1, 2, 3$ kontrolního objemu $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N_{cv}$ a vstupní parametry jsou tvořeny vektorem konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^m v předchozí časové hladině t^m

I. Výpočet normálové rychlosti $\hat{v}_{n_i}^j$ hranice $\partial\Omega_i^j$, viz odstavec 3.2, a ověření výpočtu pomocí GCL podle vztahu (3.25)

II. Výpočet vektoru modifikovaných normálových nevazkých toků $\mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) - \hat{v}_{n_i}^j \mathbf{w}_i^m$

Pro každou hranu $\partial\Omega_i^j$ určíme normálový vektor $\mathbf{n}_i^j = [n_{1,i}^j, n_{2,i}^j]^T = \left[\frac{\Delta y_i^j}{l_i^j}, -\frac{\Delta x_i^j}{l_i^j} \right]^T$, kde l_i^j je délka této hrany.

Při výpočtu vektoru normálových nevazkých toků postupujeme podle toho, které části výpočtové oblasti hrana náleží:

Vstupní hranice

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j, \hat{v}_{n_i}^j = 0$

Použitím vztahů (3.32) - (3.35) určíme $\mathbf{w}_{INL,i}^m$

$$\Rightarrow \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{INL,i}^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{INL,i}^m)$$

Výstupní hranice

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j, \hat{v}_{n_i}^j = 0$

Použitím vztahů (3.36) určíme $\mathbf{w}_{OUT,i}^m$

$$\Rightarrow \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{OUT,i}^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{OUT,i}^m)$$

Pohyblivá nepropustná stěna

Vstupní parametry: $\mathbf{w}_i^m, \mathbf{n}_i^j, \hat{v}_{n_i}^j$

Použitím vztahu (3.37) určíme $p_{WALL,i}$

$$V_n = \hat{v}_n \Rightarrow \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{WALL,i}^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_{WALL,i}^m) - \hat{v}_{n_i}^j \mathbf{w}_{WALL,i}^m = \left[0, p_{WALL,i} n_{1,i}^j, p_{WALL,i} n_{2,i}^j, p_{WALL,i} \hat{v}_{n_i}^j \right]^T$$

Vnitřní oblast

Vektor $\mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m)$, který dosazujeme do vektoru $\mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) = \mathbf{f}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) - \hat{v}_{n_i}^j \mathbf{w}_i^m$ určíme podle Rusanovova schématu – rovnice (3.15) nebo Van Leerova schématu – rovnice (3.16) – (3.18)

Vstupní parametry dělíme podle toho, zda používáme lineární rekonstrukci řešení s Barthovým limiterem (odstavec 3.3):

- $\mathbf{w}_i^{m,L}, \mathbf{w}_i^{m,R}$, kde L je index kontrolního objemu, ve kterém se nacházíme, R je index sousední buňky, \mathbf{n}_i^j
- zrekonstruované složky vektoru konzervativních proměnných dané vztahem (3.26), \mathbf{n}_i^j

III. Výpočet vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1} v časové hladině t^{m+1} :

Schéma metody konečných objemů pro kontrolní objem Ω_i (vztah (3.24))

$$\mathbf{w}_i^{m+1} = \frac{|\Omega_i^m|}{|\Omega_i^{m+1}|} \mathbf{w}_i^m - \frac{\Delta t}{|\Omega_i^{m+1}|} \sum_{j=1}^3 \mathbf{g}_{n_i}^j(\mathbf{w}_i^m) l_i^{m,j}$$

Časový krok Δt určíme vztahem (3.13).

Výstupní parametry: Vektor konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1} v časové hladině t^{m+1}

IV. Přejdeme do následující časové hladiny. Přiřadíme tedy $m:=m+1$ a opakujeme celý postup **I.** - **III.** včetně přepočítání souřadnic všech uzlů výpočetní sítě.

- Ukončení výpočtu pro $m = N_{end}$, uložení vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}_i^{m+1}

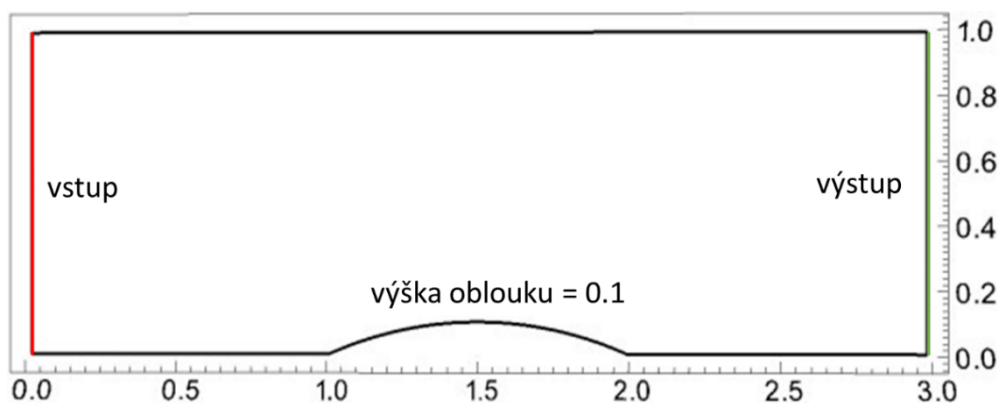
4.2 Numerické výsledky a ověření softwaru vyvinutého v systému Matlab

Výpočetní software pro modelování proudění stlačitelné neviské tekutiny v nepohyblivých výpočtových oblastech a v oblastech s pohyblivou hranicí, jehož algoritmus byl detailně popsán v odstavci 4.1, byl ověřen na několika testovacích problémech vnitřní i vnější aerodynamiky, které jsou podloženy daty z experimentálních měření a numerickými výsledky dalších autorů. Z problémů proudění stlačitelné neviské tekutiny v oblasti s nepohyblivou hranicí byl vybrán známý a mnohokrát experimentálně proměřovaný případ proudění v tzv. GAMM kanálu a dále obtékání leteckého profilu NACA 0012 s nenulovým úhlem náběhu, [7], [54]. Výpočetní software pro řešení proudění na oblastech s pohyblivou hranicí byl validován pomocí experimentálně získaných dat naměřených v aerodynamickém tunelu při obtékání kmitajícího profilu NACA 0012, [22]. Ve všech případech se jednalo o transonické proudění stlačitelné neviské tekutiny.

4.2.1 Numerické řešení proudění v nepohyblivé oblasti

Na testovacím případě GAMM kanálu ve 2D byl nejdříve ověřen vyvinutý software pro modelování transonického proudění stlačitelné neviské tekutiny, které je popsáno nelineárním systémem Eulerových rovnic ve tvaru (3.1). Pro prostorovou diskretizaci systému Eulerových rovnic byla použita metoda konečných objemů. Neviské toky byly aproximovány pomocí dvou explicitních numerických schémat - Rusanovova schématu (3.15) a Van Leerova schématu (3.16) – (3.18), které byly popsány ve třetí kapitole této práce.

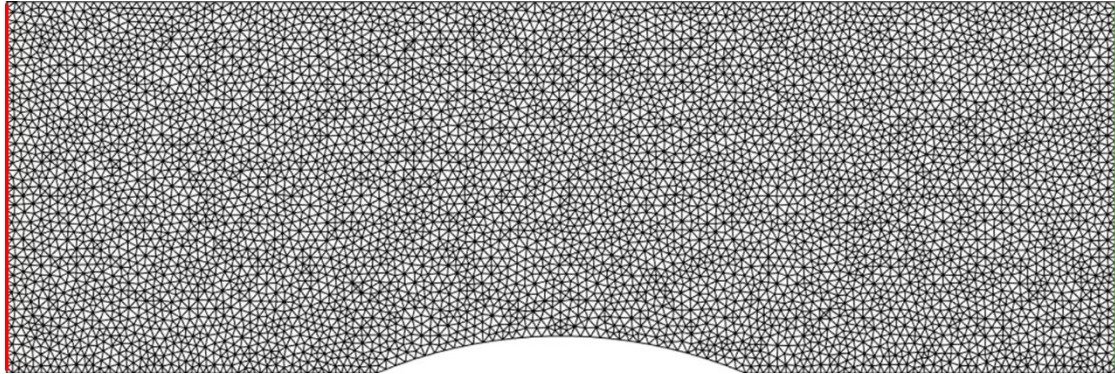
Pro výpočet byla použita geometrie GAMM kanálu o poměru stran 3:1, viz Obr. 4.1, s nestrukturovanou výpočetní sítí tvořenou asi 12 200 trojúhelníkovými buňkami, jak je ukázáno na Obr. 4.2.



Obr. 4.1 Geometrický model GAMM kanálu

Na vstupu do výpočtové oblasti, který je na Obr. 4.1 a Obr. 4.2 vyznačen červeně, byly předepsány veličiny v bezrozměrovém tvaru: stagnační tlak $p_0 = 1$, stagnační hustota $\rho_0 = 1$ a úhel náběhu proudu

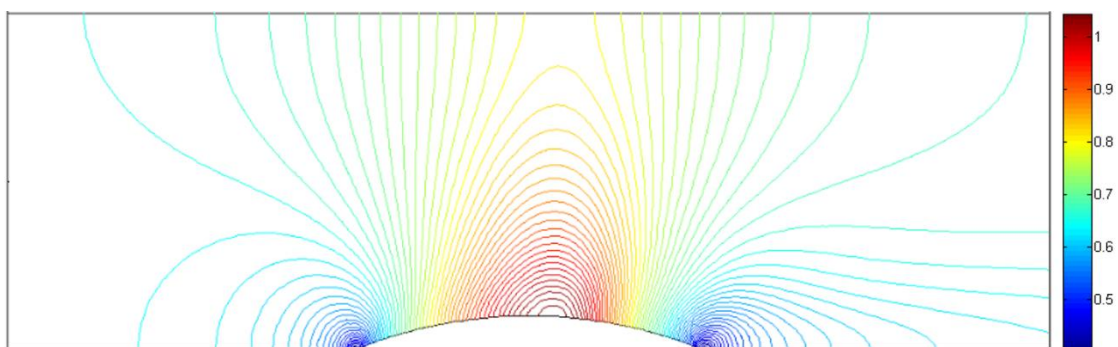
$\alpha = 0$. Na výstupu (označený zeleně) byla předepsána bezrozměrová hodnota statického tlaku $p_2 = 0,737$. Pro takto zvolené okrajové podmínky nabývá Machovo číslo na vstupu hodnoty 0,675. Ostatní veličiny a nevazké toky na vstupní a výstupní hranici výpočtové oblasti byly vypočteny pomocí vztahů uvedených v odstavci 3.4.



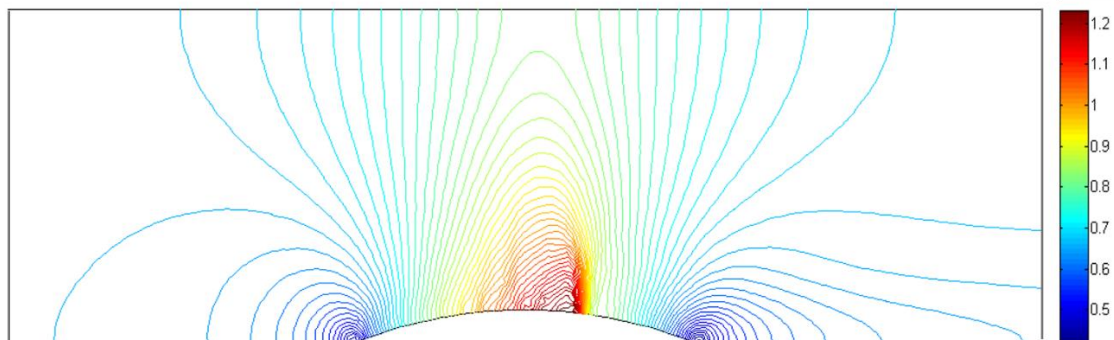
Obr. 4.2 Výpočtová oblast s nestrukturovanou výpočetní sítí

Na Obr. 4.3 a Obr. 4.4 jsou vykresleny izočáry Machova čísla pro oba případy aproximace nevazkých toků. Z porovnání těchto dvou obrázků je zřejmé, že Rusanovovo schéma vykazuje vysokou míru disipace a není vhodné pro řešení úloh, u kterých lze předpokládat výskyt rázových vln. V případě, kdy bylo použito Van Leerovo schéma pro aproximaci nevazkých toků, dochází ke zvýšení přesnosti řešení a zachycení rázové vlny nad obloukovou částí dolní stěny GAMM kanálu.

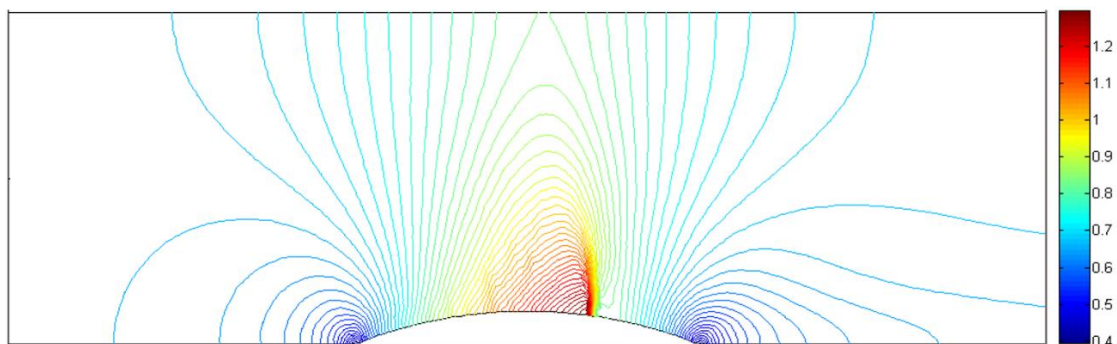
Pro zvýšení přesnosti řešení byla dále v případě Van Leerova schématu použita lineární rekonstrukce řešení a pro zamezení vzniku nefyzikálních oscilací byl implementován Barthův limiter, který je popsán vztahem (3.26) v odstavci 3.3. Na Obr. 4.5 jsou vykresleny izočáry Machova čísla pro tento případ. Je zřejmé, že díky lineární rekonstrukci řešení byla lépe zachycena rázová vlna na dolní stěně GAMM kanálu, oproti případu bez limiteru na Obr. 4.4, kde je rázová vlna rozmazána přes více buněk výpočetní sítě, jak je vidět v detailu na Obr. 4.6.



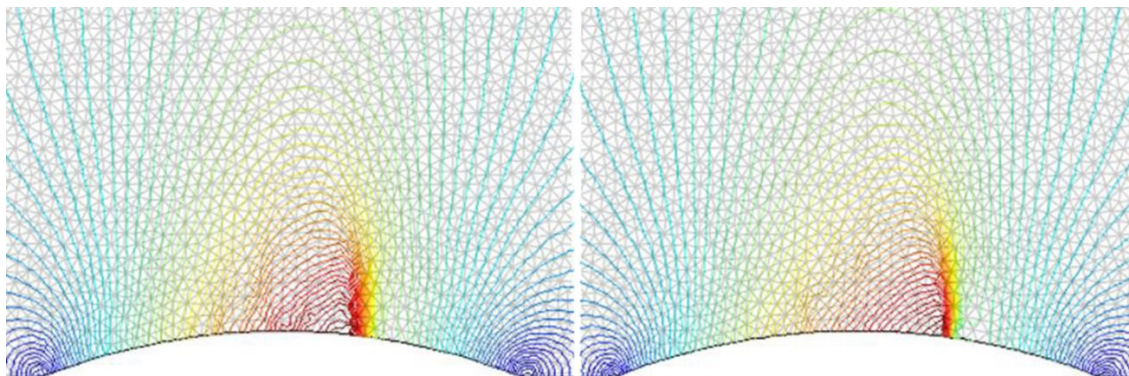
Obr. 4.3 Izočáry Machova čísla, MKO + Rusanovovo schéma



Obr. 4.4 Izočáry Machova čísla, MKO + Van Leerovo schéma



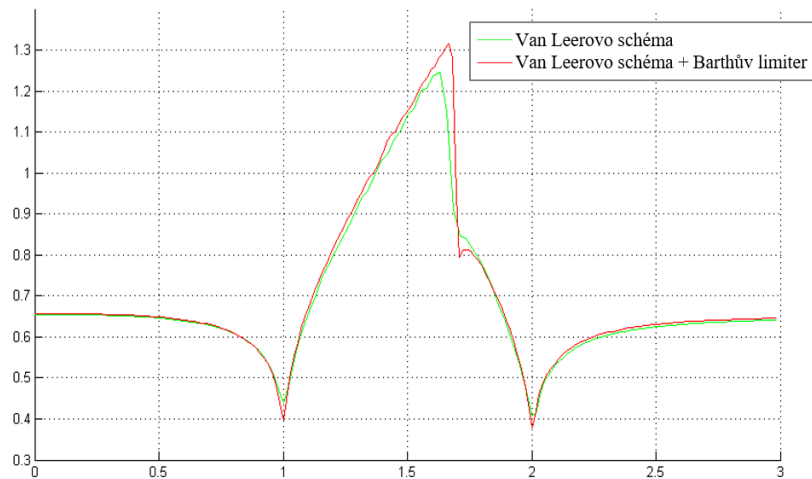
Obr. 4.5 Izočáry Machova čísla, MKO + Van Leerovo schéma s lineární rekonstrukcí a Barthovým limiterem



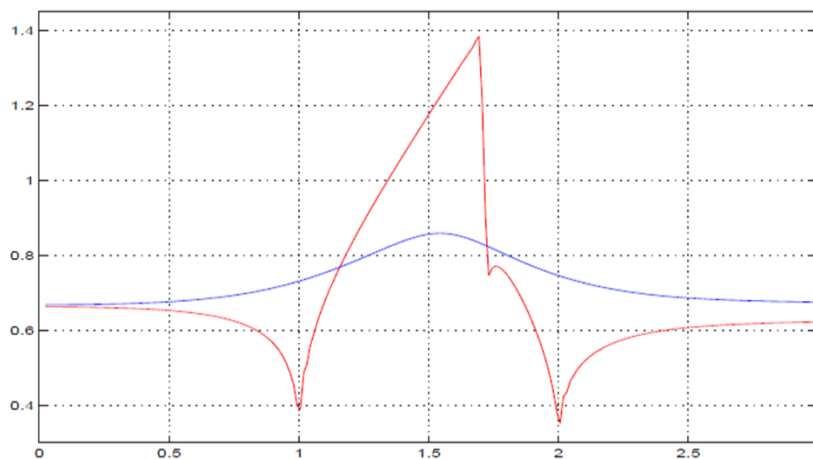
Obr. 4.6 Detail rázové vlny pro případy, kdy bylo pro aproximaci nevazkých toků použito Van Leerovo schéma (vlevo) a Van Leerovo schéma s lineární rekonstrukcí a Barthovým limiterem (vpravo)

Na Obr. 4.7 je zobrazen graf vykreslující průběh Machova čísla podél dolní stěny GAMM kanálu pro případ samotného Van Leerova schématu (zelená křivka) a případ, kdy byla pro vylepšení Van Leerova schématu použita lineární rekonstrukce s Barthovým limiterem (červená křivka). Na červené křivce je zřetelně zachycena tzv. Zierepova singularita (tzv. lokální maximum Machova čísla), [55], jejíž kvalitní zachycení je ukazatelem přesnosti použitého numerického schématu. Výsledky lze ověřit porovnáním s výsledky dalších autorů, např. na Obr. 4.8, uvedeném v disertační práci [55], je

vykreslen průběh Machova čísla podél horní (modře) a dolní (červeně) stěny GAMM kanálu. Zde bylo pro aproximaci nevazkých toků použito MacCormackovo schéma s umělou vazkostí Jamesonova typu. Z porovnání obou červených křivek na Obr. 4.7 a Obr. 4.8 znázorňujících průběh Machova čísla podél dolní stěny kanálu je zřejmé, že ve druhém případě bylo dosaženo ještě vyšší přesnosti, což kromě použití jiného numerického schématu je ovlivněno také zahuštěním výpočetní sítě v oblasti rázové vlny. Nicméně lze říci, že tímto srovnáním byla ověřena správnost vyvinutého algoritmu a lze jej použít pro modelování nevazkého stlačitelného proudění.



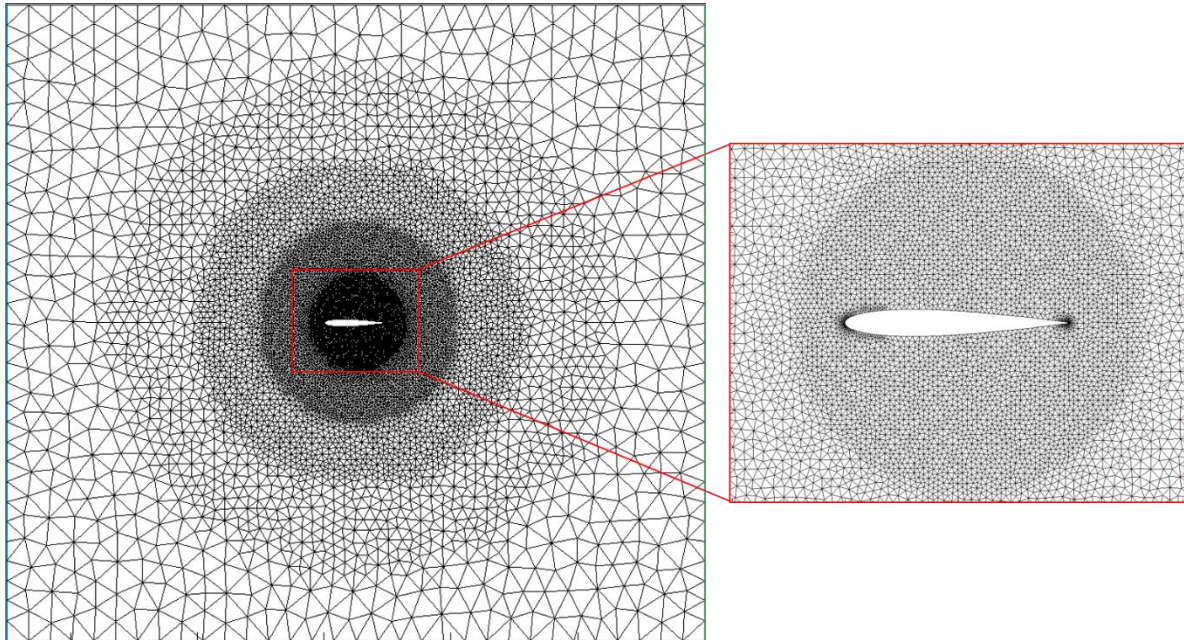
Obr. 4.7 Průběh Machova čísla podél dolní stěny kanálu pro případ bez limiteru (zeleně) a s limiterem (červeně)



Obr. 4.8 Průběh Machova čísla podél dolní (červeně) a horní (modře) stěny kanálu, převzato z disertační práce [55]

Další úlohou, která byla modelována pro ověření výpočetního softwaru je transonické proudění stlačitelné nevazké tekutiny okolo symetrického leteckého profilu NACA 0012 s úhlem náběhu proudu $1,25^\circ$. Na obdélníkové výpočtové oblasti o výšce $10c$ a délce $11c$ (kde c je délka tělvy profilu), která je zobrazena v levé části Obr. 4.9, byla vytvořena nestrukturovaná síť obsahující přibližně 22 000 trojúhelníkových buněk. Síť byla zahuštěna v blízkosti obtékaného profilu, jak je zřejmé z obrázku,

z důvodu ostřejšího zachycení rázové vlny nad a pod profilem. Na vstupu do výpočtové oblasti, vyznačeném modře, byl předepsán úhel náběhu proudu $1,25^\circ$, stagnační tlak $p_0 = 1$ a stagnační hustota $\rho_0 = 1$. Na výstupu, vyznačeném zeleně, byla předepsána bezrozměrová hodnota statického tlaku $p_2 = 0,656$ odpovídající hodnotě 0,8 Machova čísla nerozrušeného proudu.



Obr. 4.9 Výpočtová oblast s nestruturovanou výpočetní sítí

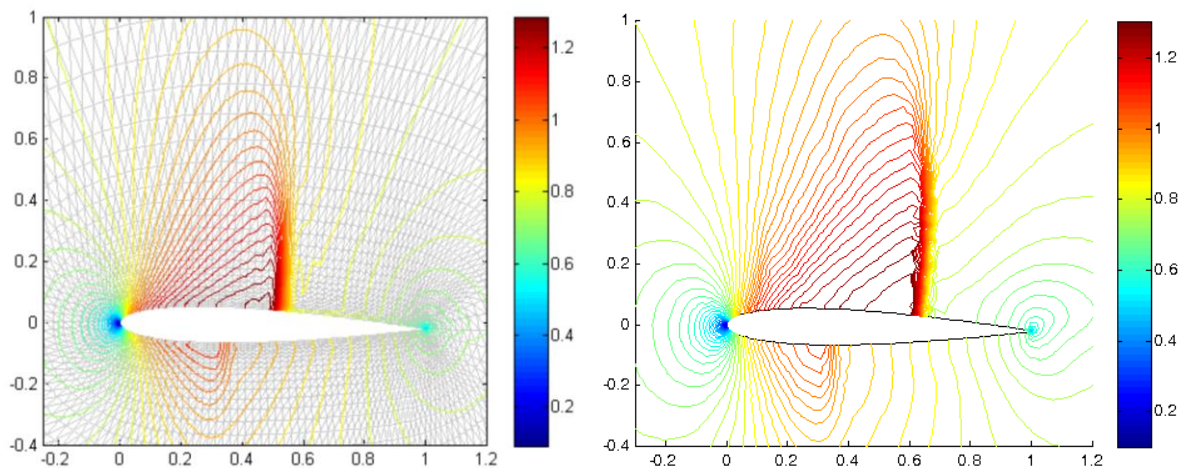
Pro validaci numerických výsledků prezentovaného výpočetního softwaru byla provedena porovnání s numerickými výsledky jiných autorů uvedených v pracích [7] a [54]. Na Obr. 4.10 jsou vykresleny izočáry Machova čísla v blízkosti profilu. Výsledky dosažené použitím prezentovaného kódu založeného na metodě konečných objemů, Obr. 4.10 vpravo, jsou porovnány s výsledky získanými pomocí softwaru, ve kterém byla pro prostorovou diskretizaci systému Eulerových rovnic použita nespojitá Galerkinova metoda (DGFEM), uvedená v práci [7], Obr. 4.10 vlevo. V obou případech byla oblast diskretizována sítí s trojúhelníkovými elementy, vektor nevazkých toků byl aproximován pomocí Van Leerova schématu a pro zvýšení řádu prostorové přesnosti byla použita lineární rekonstrukce s Barthovým limiterem.

V grafu na Obr. 4.11 je vykreslen průběh tlakového koeficientu podél horní a dolní stěny profilu. Výsledky získané prezentovaným softwarem jsou porovnány s výsledky uvedenými v práci [54], kdy byla pro diskretizaci výpočetní oblasti použita vysoce kvalitní strukturovaná čtyřúhelníková síť. Tlakový koeficient se určí z podílu, [54]

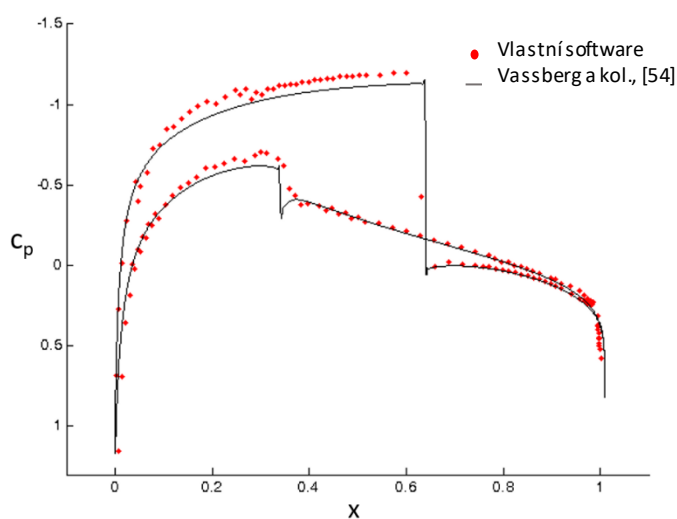
$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} U_\infty^2 \rho_\infty}, \quad (4.3)$$

kde p je lokální hodnota statického tlaku, p_∞ , U_∞ a ρ_∞ jsou statický tlak, rychlost a hustota nerozrušeného proudu. Pro tuto úlohu je typický výskyt výrazné rázové vlny na horní straně profilu a menší rázové

vlny na spodní straně profilu. Z porovnání v grafu na Obr. 4.11 lze říci, že rázové vlny byly zachyceny uspokojivě, avšak vlivem rozdílné kvality sítě a nižšího řádu přesnosti prezentované metody dochází v našem případě k jejich mírnému rozmazání. Celkově lze ale konstatovat, že bylo dosaženo relativně dobré shody prezentovaných výsledků s výsledky publikovanými v [7] a [54].



Obr. 4.10 Izočáry Machova čísla, vlevo DGFEM [7], vpravo MKO (prezentovaný software)



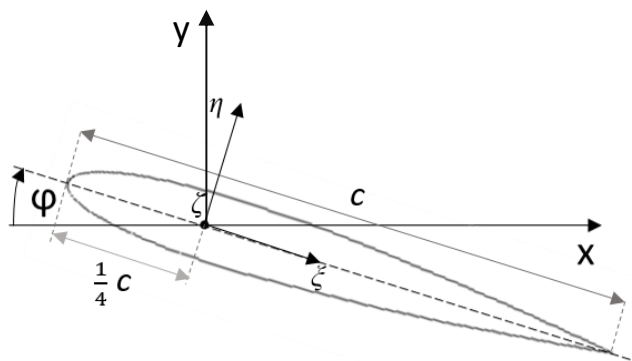
Obr. 4.11 Průběh tlakového koeficientu podél stěny profilu, porovnání numerických výsledků získaných použitím vlastního softwaru s výsledky autorů Vassberg a Jameson, [54]

4.2.2 Numerické řešení proudění na oblasti s pohyblivou hranicí

Dále byl vyvinut výpočetní software pro proudění stlačitelné neviské tekutiny na oblastech s pohyblivou hranicí za účelem numerického řešení obtékání kmitajícího tělesa. V tomto případě byl za matematický model zvolen nelineární systém Eulerových rovnic v ALE formulaci, který je podrobně popsán v odstavci 3.2. Pohyb bodů zvolené výpočetní sítě byl proveden pomocí algoritmu popsaného v odstavci 3.5. Výpočetní software byl ověřen porovnáním numerických výsledků s experimentálními

daty dostupnými ve zprávě [36] společnosti AGARD a dále s numerickými výsledky kolektivu autorů [22], kde autoři použili pro řešení stlačitelného nevazkého proudění software založený na metodě konečných objemů a nevazké toky aproximovali pomocí AUSM schématu. Průběžné výsledky a kroky řešení problému byly prezentovány v konferenčních příspěvcích a člancích [A1]-[A4], [A6], [A7].

Byla modelována rovinná úloha obtékání leteckého profilu NACA 0012 kmitajícího torzními kmity okolo osy rotace ζ umístěné v jedné čtvrtině tělivity profilu (značíme c), Obr. 4.12.



Obr. 4.12 Letecký profil NACA 0012

Úhel natočení profilu byl zadán pomocí časově závislé periodické funkce $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(\omega t)$ s maximální amplitudou $\varphi_1 = 2,51^\circ$ a s frekvencí kmitání $f = \omega / 2\pi = 62,5$ Hz. Proudění stlačitelné nevazké tekutiny okolo kmitajícího profilu popsané systémem Eulerových rovnic v ALE formulaci bylo řešeno metodou konečných objemů. Pro aproximaci nevazkých toků bylo použito Van Leerovo schéma s lineární rekonstrukcí řešení a byl implementován Barthův limiter pro zamezení nefyzikálních oscilací v řešení. Pro výpočet byla opět použita výpočtová oblast s nestrukturovanou výpočetní sítí, která je zobrazena v předchozím odstavci na Obr. 4.9. Na hranici výpočtové oblasti byly předepsány okrajové podmínky v bezrozměrovém tvaru. Konkrétně na vstupní hranici výpočtové oblasti byl předepsán nulový úhel náběhu, stagnační tlak $p_0 = 1$ a stagnační hustota $\rho_0 = 1$. Na výstupu byl předepsán statický tlak $p_2 = 0,685$ odpovídající hodnotě 0,755 Machova čísla nerozrušeného proudu.

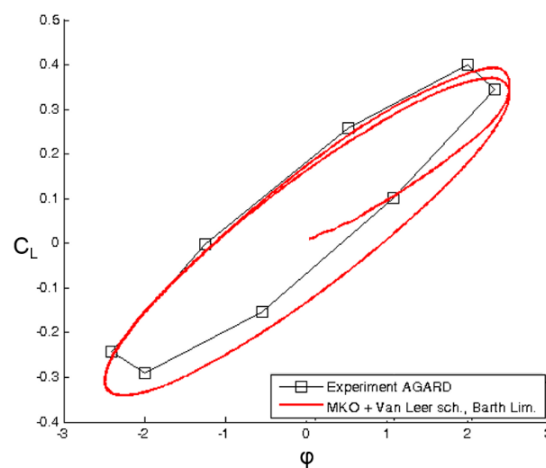
Jako srovnávací parametr byla zvolena závislost součinitele vztlaku c_L na úhlu natočení profilu φ v průběhu kmitavého periodického pohybu leteckého profilu. Součinitel vztlaku c_L byl určen integrací statického tlaku působícího na povrch leteckého profilu, [22], jako

$$c_L = \frac{\oint_{I_{NACA}} p dl}{\frac{1}{2} U_\infty^2 \rho_\infty}, \quad (4.4)$$

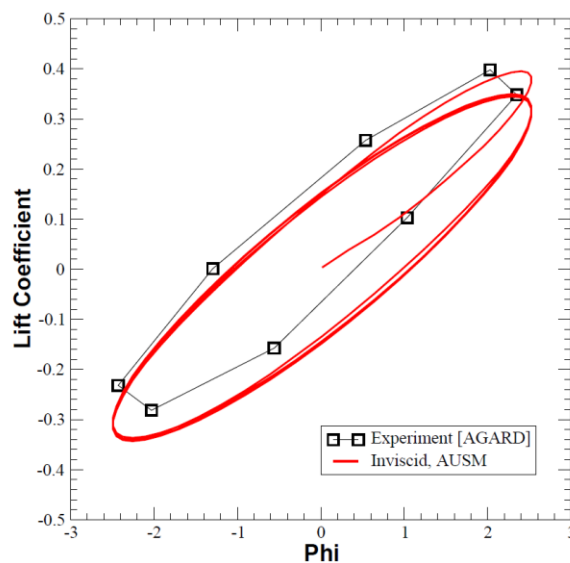
přičemž výraz ve jmenovateli vztahu (4.4) představuje dynamický tlak, kde ρ_∞ a U_∞ jsou hustota a rychlost nerozrušeného proudu na vstupu do výpočtové oblasti. Na Obr. 4.13 je vykreslen graf srovnávající numerické výsledky získané pomocí prezentovaného výpočetního softwaru s experimentálně naměřenými daty dostupnými ve zprávě společnosti AGARD, [36]. Hodnoty tlaku

potřebné pro určení součinitele vztlaku c_L pomocí numerické simulace byly získávány v průběhu prvních dvou period kmitavého pohybu profilu.

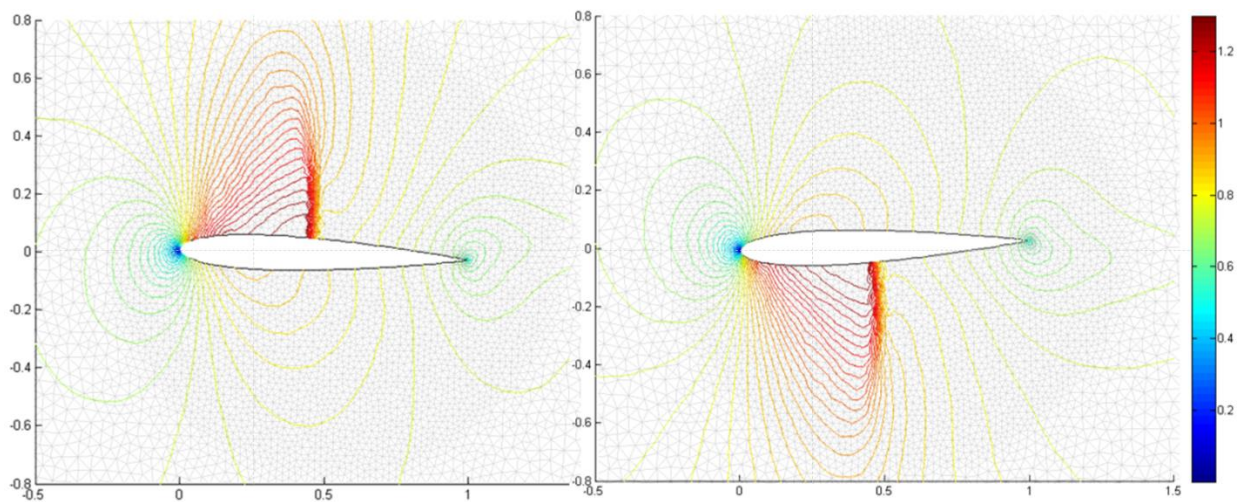
Na Obr. 4.14 je podobný graf, který je dostupný v práci [22], kde autoři použili pro řešení stlačitelného nevazkého proudění kód založený na metodě konečných objemů a nevazké toky aproximovali pomocí AUSM schématu. Výsledky numerické simulace jsou opět porovnány s daty naměřenými společností AGARD. Výsledky prezentovaného kódu vykazují dobrou shodu s experimentálně naměřenými daty i s numerickými výsledky jiných autorů. Je tedy možné konstatovat, že vyvinutý výpočetní software lze použít pro numerickou simulaci proudění stlačitelné nevazké tekutiny okolo kmitajícího tělesa ve 2D. Na Obr. 4.15 jsou dále zobrazeny izočáry Machova čísla pro dva úhly natočení profilu.



Obr. 4.13 Porovnání numerických výsledků prezentovaného softwaru s experimentálně naměřenými daty uvedenými ve zprávě [36]



Obr. 4.14 Porovnání numerických výsledků převzatých z [22] s experimentálně naměřenými daty uvedenými ve zprávě [36]



Obr. 4.15 Izočáry Machova čísla, úhel natočení $\varphi=2,25^\circ$ (vlevo), $\varphi= -2,04^\circ$ (vpravo)

5. Flutter lopatek parních turbín

Následující dvě kapitoly této práce jsou věnovány metodice posuzování stability turbínové lopatky pomocí dvou různých přístupů vycházejících z tzv. energetické metody popsané v odstavci 5.2. V prvním odstavci této kapitoly jsou popsány parametry a názvosloví, které jsou používány v oblasti predikce flutteru lopatek parních turbín. V odstavci 5.3 je popsáno řešení problému vlastních hodnot a zmíněna metoda modální analýzy turbínové lopatky.

5.1 Základní pojmy a parametry

V oblasti predikce flutteru lopatek parních turbín užíváme tyto základní pojmy a parametry:

- *Redukovaná frekvence*

Jak bylo uvedeno v odstavci 2.1, byly již v polovině 20. století zkoumány různé parametry, které by pomohly určit riziko vzniku flutteru turbínové lopatky. Jedním z nich je tzv. redukovaná frekvence. Tento bezrozměrový parametr ukazuje vztah mezi frekvencí kmitání lopatky a rychlostí tekutiny tak, že dává do poměru čas, za který urazí částice tekutiny vzdálenost o délce tětivy lopatky a dobu jednoho kmitu lopatky, přičemž tětíva lopatky je pomyslná čára spojující náběžnou a odtokovou hranu lopatky. Redukovaná frekvence je tedy definována vztahem

$$k = \frac{t}{T} = \frac{cf}{U}, \quad (5.1)$$

kde T je doba periody kmitavého pohybu lopatky, f je frekvence kmitání lopatky a t je čas, za který tekutina urazí vzdálenost c rychlostí U , pokud je c délka tětivy lopatkového profilu a U je rychlost proudu. V případě turbínových lopatek je za U dosazována rychlost proudu na vstupu do výpočtové oblasti.

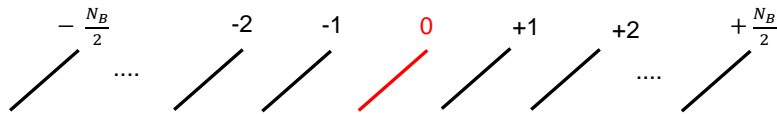
- *Kritická redukovaná frekvence a redukovaná rychlost*

Hodnota redukované frekvence, při které vzniká flutter se nazývá kritická redukovaná frekvence. Pro flutter jsou typické nízké hodnoty redukované frekvence. Liší se pro různé typy lopatek, podmínky proudění a vlastní tvary kmitu. Typické hodnoty kritické redukované frekvence leží v intervalu od 0,1 do 1. Pro odpovídající *redukovanou rychlost* (převrácená hodnota redukované frekvence) je to pak interval 1 až 10, [40].

- *Referenční lopatka*

V olopatkovaných discích turbín a kompresorů je kmitavý pohyb každé lopatky ovlivněn nejen proudící tekutinou, ale i pohybem ostatních lopatek na disku. Předpokládejme jednu řadu N_B tvarově shodných

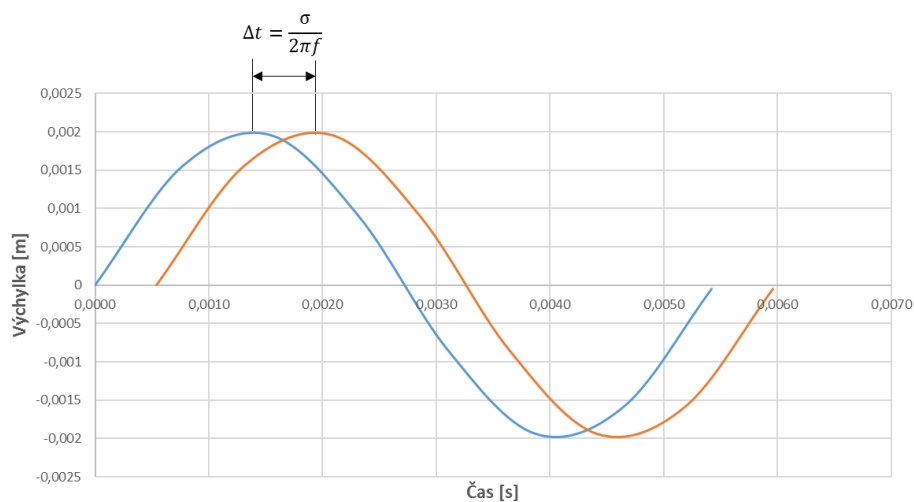
lopatek. Lopatky jsou číslovány od $-N_B/2$ do $N_B/2$, lopatka s číslem 0 je označena jako referenční. Schéma číslování je ukázáno na Obr. 5.1.



Obr. 5.1 Číslování lopatek v kaskádě, referenční lopatka je označena číslicí 0

- *Mezilopátkový fázový úhel*

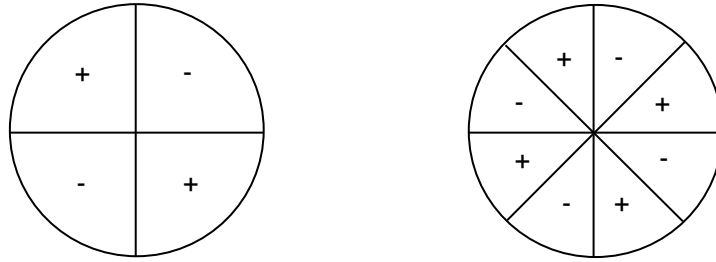
Pro případy, kdy uvažujeme tvarově shodné lopatky, rovnoměrně rozložené na disku, zavádíme tzv. mezilopátkový fázový úhel σ (v literatuře často značeno jako IBPA, z anglického názvu *Interblade phase angle*), který vyjadřuje konstantní fázový posuv mezi výchylkami každých dvou sousedících lopatek v lopátkové řadě. V grafu na Obr. 5.2 je vykreslena časově závislá výchylka dvou lopatek kmitajících s fázovým úhlem $\sigma = \pi/5$, což pro danou vlastní frekvenci lopatky (zde $f = 184,58$ Hz) odpovídá časové periodě jednoho kmitu $T = 0,0054$ s a tedy časovému posunutí $\Delta t = 0,00054$ s.



Obr. 5.2 Výchylka dvou sousedních lopatek kmitajících s fázovým rozdílem $\sigma = \pi/5$

- *Uzlový průměr*

K popisu chování lopátkové řady je potřeba brát v úvahu tvary kmitu celého olopatkovaného disku. Tyto tvary se vyskytují jako tzv. *uzlové průměry* (značíme ND , z anglického názvu *nodal diameter*). Na Obr. 5.3 jsou zobrazeny dva případy kmitání disku. Rovné čáry představují místa s nulovou výchylkou lopatek a znaménka + a - označují regiony, v nichž lopatky kmitají v opačném smyslu, tedy s kladnou či zápornou výchylkou vůči rovině disku. Počet uzlových průměrů je pak definován jako počet těchto pomyslných přímk s nulovou výchylkou, které disk protínají v každém časovém okamžiku.

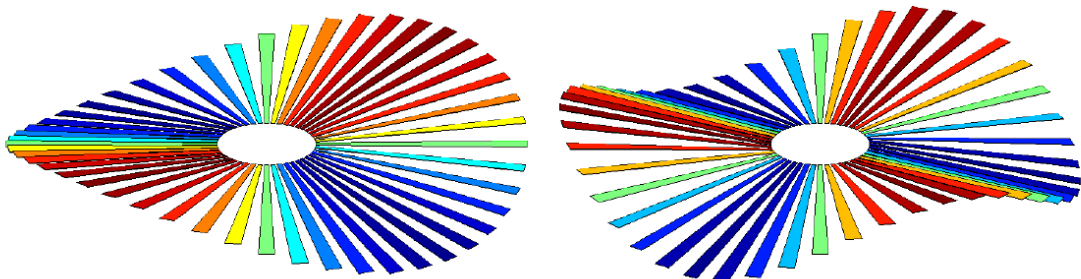


Obr. 5.3 Tvary kmitání disku pro dva (vlevo) a pro čtyři (vpravo) uzlové průměry

Pro olopatkovaný disk s N_B lopatkami platí následující vztah mezi uzlovým průměrem ND a mezilopátkovým fázovým úhlem σ

$$\sigma = \frac{2\pi ND}{N_B} \text{ [rad]}, \text{ resp. } \sigma = \frac{360ND}{N_B} \text{ [}^\circ\text{].} \quad (5.2)$$

Z tohoto vztahu vychází číslování uzlových průměrů, které je při CFD analýze flutteru běžně používáno. Každému mezilopátkovému fázovému úhlu z intervalu $\sigma \in \langle -\pi, +\pi \rangle$, resp. $\sigma \in \langle -180^\circ, +180^\circ \rangle$ tedy podle (5.2) odpovídá hodnota uzlového průměru z intervalu $ND \in \langle -N_B/2, +N_B/2 \rangle$. Krajní hodnoty intervalů odpovídají případu, kdy každé dvě sousedící lopatky kmitají v protifázi. Na Obr. 5.4 jsou schématicky zobrazeny tvary kmitu olopatkovaného disku o celkovém počtu $N_B = 48$ lopatek pro dva uzlové průměry. Vlevo je případ pro $ND = 2$, kdy tedy po dosazení do vztahu (5.2) dostáváme hodnotu mezilopátkového fázového úhlu $\sigma = 15^\circ$. Vpravo je pak uveden tvar kmitání disku pro $ND = 3$, pro který vychází fázový úhel mezi každými dvěma sousedícími lopatkami $\sigma = 22,5^\circ$.



Obr. 5.4 Schématický model tvaru kmitu olopatkovaného disku pro $ND = 2$ (vlevo) a $ND = 3$ (vpravo), obrázek převzatý z [47].

- *Postupující vlna*

Po obvodu disku vzniká postupující vlna ve tvaru sinusovky, viditelná na Obr. 5.4 (vpravo), jejíž prostorová frekvence odpovídá počtu uzlových průměrů. Pro $ND = 3$ tedy vznikají po obvodu disku tři sinusové vlny. Tyto tvary kmitu se označují jako *systémové tvary* nebo také *tvary postupující vlny* (*travelling wave mode* - TWM). Pro případ, kdy sinusová vlna putuje po obvodu disku ve směru rotace disku, mluvíme o dopředné postupující vlně (*forward travelling wave*), která odpovídá kladným hodnotám uzlových průměrů. V opačném případě mluvíme o zpětné postupující vlně (*backward travelling wave*), [44].

5.2 Analýza flutteru – energetická metoda

Předpokladem energetické metody, popsané v tomto odstavci je, že všechny lopatky na disku vibrují se stejnou frekvencí, stejným tvarem kmitu a amplitudou, a že mezi kmitavým pohybem každých dvou sousedících lopatek je konstantní fázový úhel (IBPA, σ). Z aeroelastického hlediska představuje tento jev nejméně stabilní situaci, při které nastává nejvyšší možnost vzniku flutteru. Díky popsaným podmínkám vzniká po obvodu disku postupující vlna, a proto se tento typ testování nazývá také *TWM test*.

Tzv. energetická metoda predikce flutteru turbínové lopatky vychází z výpočtu aerodynamické práce vykonané tekutinou na povrch lopatky v průběhu jedné periody kmitavého pohybu lopatky. Na povrchu lopatky vznikají nestacionární tlaky, ze kterých se vypočítá celková aerodynamická práce tekutiny na lopatku. Pokud je práce kladná, je lopatce dodávána energie a její chování může být v průběhu času nestabilní. Druhým měřítkem pro posouzení stability lopatky je hodnota koeficientu aerodynamického tlumení, která je normovanou hodnotou záporně vzaté aerodynamické práce. Pokud je tedy práce kladná, je koeficient aerodynamického tlumení záporný. To ještě nemusí vždy znamenat, že se vyšetřovaná struktura bude chovat nestabilně a je potřeba ještě posoudit vliv materiálového a mechanického tlumení. Záporná hodnota aerodynamické práce tekutiny pak vede ke kladné hodnotě koeficientu aerodynamického tlumení, pohyb lopatky je tedy utlumen a k nestabilnímu chování nedojde.

Metodika predikce flutteru turbínových lopatek založená na těchto znalostech je používána již od 60. let 20. století, poprvé byla uvedena v práci [12], dále je popsána např. v disertaci J. Panovského, [40], anebo v konferenčních příspěvcích [1] a [44]. Z modální analýzy struktury jsou získány vlastní tvary kmitu a vlastní frekvence referenční lopatky. Tím je definován počáteční pohyb lopatky pro CFD analýzu. Ostatní lopatky na disku kmitají se stejnou frekvencí a stejným tvarem kmitu, ale jejich pohyb je v čase fázově posunutý, přičemž tento fázový posuv je definován úhlem σ , který je mezi každými dvěma sousedícími lopatkami stejný pro celý disk. CFD analýza je poté provedena pro několik mezilopátkových fázových úhlů σ z intervalu $\langle -\pi, +\pi \rangle$, které jsou zvoleny tak, aby rovnoměrně pokryly celý tento interval, aby pak proložením získaných hodnot aerodynamického tlumení spojitou funkcí mohla být posouzena stabilita lopatky pro libovolný úhel σ z tohoto intervalu.

Aerodynamická práce tekutiny je počítána integrací tlaků přes celý povrch lopatky v průběhu jedné periody kmitavého pohybu lopatky, [40], [48]

$$W_{ae} = \int_t^{t+T} \int_S p(u n_1 + v n_2) dS dt, \quad (5.3)$$

kde p je tlak působící na malé plošce povrchu referenční lopatky, (u, v) jsou složky vektoru rychlosti, (n_1, n_2) jsou složky jednotkového vektoru vnější normály k této plošce ve směrech souřadnicových os, S je plocha povrchu lopatky a T je časová perioda kmitání. Z aerodynamické práce vykonané tekutinou je dále vypočítán bezrozměrový koeficient aerodynamického tlumení Ξ , který je definován jako záporně

vzatá aerodynamická práce vykonaná tekutinou na povrch lopatky a je normován maximální hodnotou kinetické energie lopatky, [1]

$$\Xi = -\frac{W_{ae}}{E_{k\max}} = -\frac{W_{ae}}{\frac{1}{2} m_B f^2 h_{\max}^2}, \quad (5.4)$$

kde m_B je hmotnost lopatky, f je vlastní frekvence kmitání lopatky příslušející zvolenému vlastnímu tvaru kmitu a h_{\max} je maximální výchylka lopatky. TWM testování spočívá v tom, že aerodynamická práce a koeficient aerodynamického tlumení jsou určeny pro několik IBPA z intervalu $(-\pi, +\pi)$. Ze závislosti koeficientu aerodynamického tlumení na fázovém posuvu mezi dvěma sousedícími lopatkami lze dále určit, zda bude pohyb lopatky stabilní či nestabilní. Pokud graf funkce $\Xi(\sigma)$ klesne do záporných hodnot, jedná se o nestabilní případ a existuje možnost vzniku flutteru.

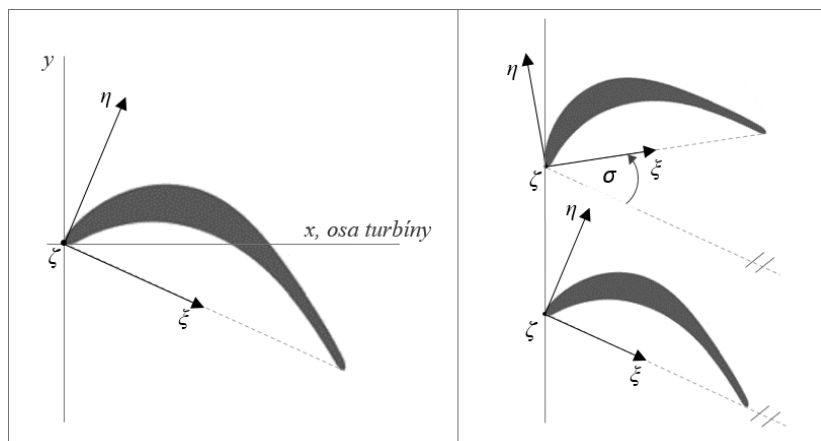
V šesté kapitole této práce je princip energetické metody aplikován konkrétně případ posouzení stability dlouhé zkroucené turbínové lopatky. Analýza flutteru byla provedena dvěma různými způsoby. V prvním případě byl pro modelování proudění tekutiny použit CFD výpočtový systém ANSYS Fluent a řešeno bylo proudění stlačitelné vazké tekutiny ve 2D oblasti obsahující tři lopatkové profily nacházející se v blízkosti špičky lopatky, kde je její deformace největší. Inspirací pro sestavení metodiky této zjednodušené analýzy flutteru byla metoda vyvíjená autory Kielb, Panovsky, a kol. [34], [35], [39], [40], [41], která je popsána v následujícím odstavci. Tato metodika a získané výsledky byly prezentovány v konferenčních příspěvcích [A8] a [A9] a jsou uvedené ve výzkumné zprávě [A11]. Ve druhém případě bylo modelováno proudění stlačitelné vazké tekutiny ve 3D oblasti obsahující dvě turbínové lopatky a pro numerické řešení proudění tekutiny byl použit CFD výpočtový systém ANSYS CFX. V odstavci 5.2.2. jsou uvedeny a popsány metody, které jsou v systému CFX implementovány za účelem řešení proudění v lopatkových řadách. Prezentované výsledky jsou uvedeny ve výzkumné zprávě [A12].

5.2.1 Analýza flutteru ve 2D podle autorů Panovsky a Kielb

Energetickou metodu pro rychlé posouzení stability nově vyrobené turbínové lopatky za použití CFD analýzy ve 2D výpočtové oblasti rozvíjí od 90. let 20. století skupina autorů Kielb, Panovsky, a kol., viz [34], [35], [40], [41]. Metoda vychází z předpokladu rotační symetrie olopatkovaného disku a tvarově shodných lopatek. Pro 2D analýzu proudění tekutiny je zvolen profil lopatky v místě jejího maximálního vychýlení, tedy co nejbližší ke špičce lopatky. Aerodynamická práce tekutiny je určována pouze na povrchu referenční lopatky (označená číslicí 0 na Obr. 5.1) z analýzy proudění tekutiny, která je v některých starších pracích, [27], [41] uvažována i jako nevazká.

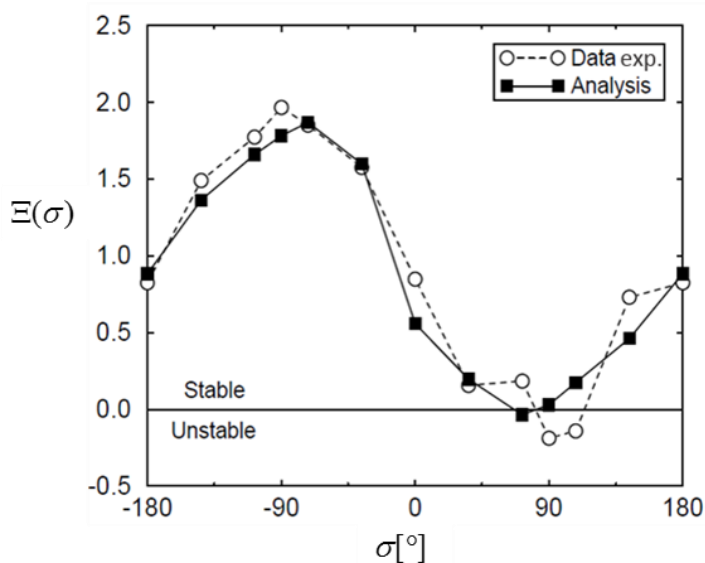
Kmitavý pohyb lopatky je popsán kombinací tří základních tvarů kmitu - podélného a příčného ohybového kmitání a torzních kmitů. Tyto tvary jsou ve 2D vyjádřeny pomocí posuvů ve směrech os ξ (směr těživy lopatky) a η (směr kolmý na tětivu) a dále natočení kolem torzní osy ζ procházející

náběžnou hranou lopatky, viz Obr. 5.5, vlevo. Časově závislé funkce popisující pohyb profilu jsou určeny z výsledků modální analýzy tak, aby výsledný pohyb odpovídal prvnímu vlastnímu tvaru kmitu lopatky s příslušnou frekvencí kmitání. Poté je provedena série numerických simulací obtékání kmitajících profilů pro zvolené hodnoty mezilopatkových fázových úhlů σ z intervalu $(-\pi, +\pi)$. Na Obr. 5.5, vpravo, je označen konstantní fázový úhel σ mezi výchylkami dvou sousedících lopatek v lopatkové řadě pro případ torzních kmitů.



Obr. 5.5 Vlevo: Souřadnicový systém lopatky. Vpravo: mezilopatkový fázový úhel

Z výsledků numerických simulací je pak pro každý fázový úhel určena aerodynamická práce tekutiny na stěnu profilu podle vztahu (5.3) a z ní je vypočten koeficient aerodynamického tlumení. Příklad grafu $\Xi(\sigma)$, který vykresluje závislost koeficientu aerodynamického tlumení na fázovém úhlu je uveden na Obr. 5.6. Jsou zde srovnány výsledky získané experimentálním měřením a numerickou simulací pomocí specializovaného výpočtového systému vyvinutého a popsáno v [41]. Graf uvedený na Obr. 5.6 byl převzat z práce [41].

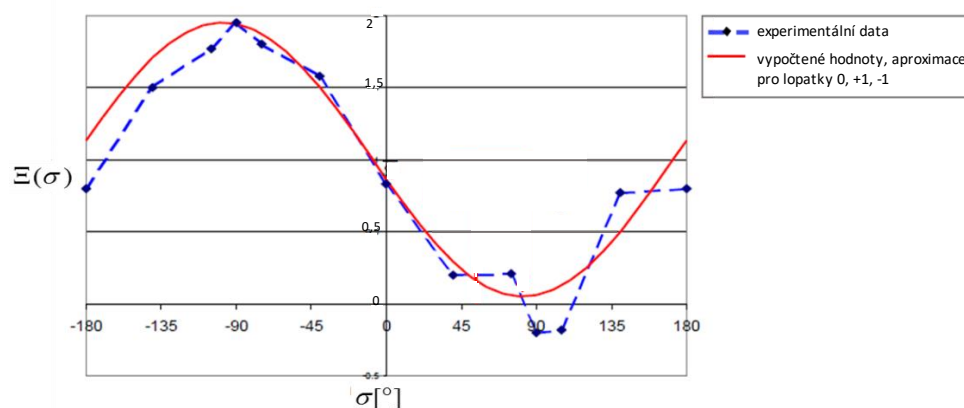


Obr. 5.6 Závislost koeficientu aerodynamického tlumení na mezilopatkovém fázovém posuvu, [41]. Porovnání výpočtu pro celý olopatkovaný disk (černé kostky a plná čára) s experimentálně naměřenými daty (bílé kruhy)

Z obrázku je zřejmé, že nejméně stabilní situace nastane pro mezilopátkový fázový úhel okolo hodnoty 90° . To, že je hodnota aerodynamického tlumení záporná, ještě neukazuje na nestabilní případ. Pohyb může ještě stabilizovat materiálové a mechanické tlumení. Z tohoto důvodu tato analýza indikuje pouze možné riziko vzniku nestability typu flutter, nikoliv to, že nestabilita opravdu vznikne.

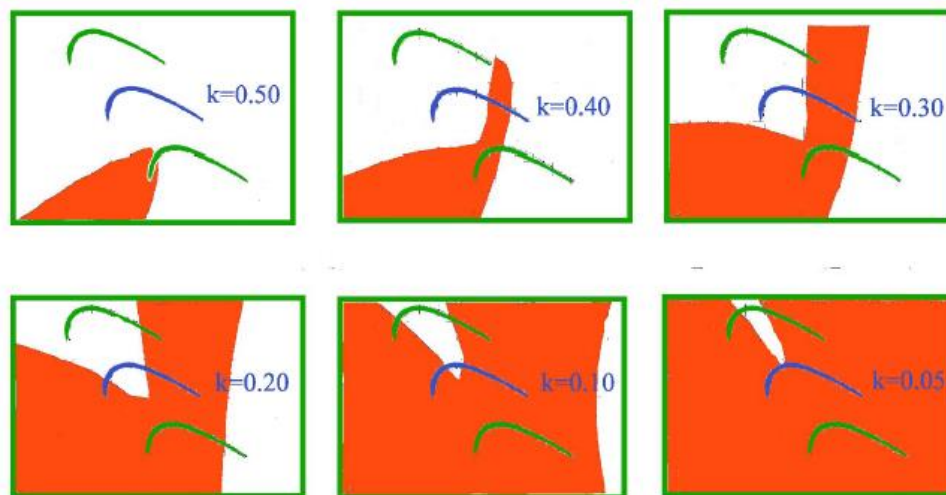
J. Panovsky a R. Kielb ve svých pracích [34], [40], [41], ukázali, že největšími přispěvateli k nestabilitě referenční lopatky je samobuzené kmitání této lopatky a příspěvky od jejích nejbližších sousedních lopatek. Pro další zjednodušení výpočetní náročnosti uvažují autoři při predikci flutteru jen referenční lopatku (0) a její nejbližší sousedy (+1, -1), viz Obr. 5.1. Analýza proudění tekutiny je nyní provedena pouze pro tři lopatky z celého olopatkovaného disku a aerodynamická práce a koeficient aerodynamického tlumení jsou určovány výše popsáním postupem. Výsledky této analýzy jsou zobrazeny na Obr. 5.7. V grafu je znázorněna závislost koeficientu aerodynamického tlumení na mezilopátkovém fázovém posuvu z intervalu $(-180^\circ, +180^\circ)$. Modrá čára představuje data získaná experimentálním měřením pro celý olopatkovaný disk. Tato křivka je tedy stejná jako na Obr. 5.6. Červená křivka vznikla z vypočtených hodnot a je aproximací pro případ zredukovaný na tři lopatky 0, -1 a +1. Pokud by graf sinusovky klesl pod vodorovnou osu, dostali bychom záporný parametr stability, což by ukazovalo na možnost nestabilního chování referenční lopatky, protože koeficient aerodynamického tlumení je záporný a práce je lopatce dodávána.

V případě zobrazeném na Obr. 5.7 dostáváme (pravděpodobně z důvodu omezení se na referenční lopatku a její sousedy) rozdílné závěry výpočtu provedeného pro tři lopatky a experimentálního měření celého olopatkovaného disku. Křivka získaná experimentálním měřením klesá pro mezilopátkové fázové posuvy okolo 90° do záporných hodnot koeficientu aerodynamického tlumení a ukazuje tedy na možnost vzniku flutteru, kdežto aproximovaná křivka leží celá v kladných číslech. V tomto případě by tedy bylo vhodné provést analýzu stability pro rizikové mezilopátkové fázové posuvy pro celý olopatkovaný disk, tak jak tomu bylo v předchozím případě znázorněném na Obr. 5.6.



Obr. 5.7 Závislost koeficientu aerodynamického tlumení na mezilopátkovém fázovém posuvu, srovnání výpočtu pro tři lopatky 0, +1, -1 s experimentálně naměřenými daty, upraveno z [35]

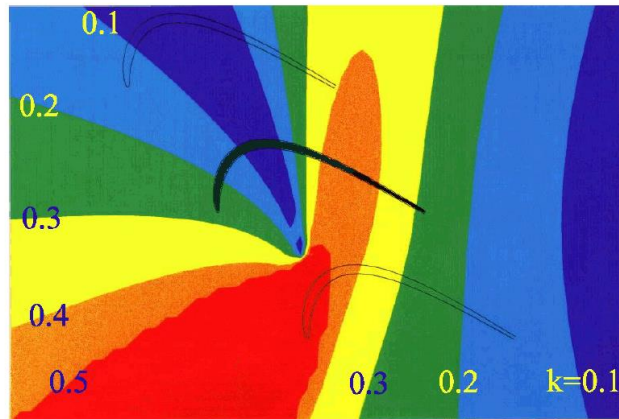
Velký vliv na stabilitu lopatky má dále podle autorů Kielb, Panovsky, a kol. [34], [40], [41] umístění osy torzních kmitů, a tedy vlastní tvar kmitu lopatky. Na Obr. 5.8 jsou zobrazeny tři lopatky ve 2D řezu, kde prostřední lopatka (modrá) je referenční, [35]. Pro tyto lopatky byla provedena 2D analýza proudění tekutiny pro různé případy umístění torzní osy referenční lopatky. To znamená, že ve zvolené oblasti byl vždy vybrán bod, do kterého byla umístěna osa natočení 2D profilu referenční lopatky. Poté byla provedena analýza flutteru výše popsaným postupem pro zvolený počet mezilopátkových fázových úhlů z intervalu $(-180^\circ, +180^\circ)$. Pokud závěrem těchto výpočtů bylo, že se referenční lopatka bude chovat stabilně, byl bod, kterým prochází torzní osa, označen bílou barvou. V případě, kdy hodnota koeficientu aerodynamického tlumení vycházela alespoň pro jeden mezilopátkový fázový úhel σ záporná, byl bod označen červenou barvou. Tímto postupem byla vybarvena celá zvolená oblast a vznikla tzv. mapa stability, která je graficky znázorněna pro šest zvolených hodnot redukované frekvence $k = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$ a 0.05 na Obr. 5.8. Změna redukované frekvence byla vyvolána změnou frekvence kmitání lopatky.



Obr. 5.8 Mapy stability referenční lopatky pro různé hodnoty redukované frekvence, převzato z [35]

Každá mapa stability je barevně rozdělena na dvě oblasti, bílou a červenou, které ukazují na stabilní a nestabilní případ. Pokud se osa torzních kmitů referenční lopatky nachází v bílé oblasti, bude chování referenční lopatky stabilní. Červená oblast naopak vyznačuje případy umístění torzní osy referenční lopatky, pro které byl zjištěn záporný koeficient aerodynamického tlumení a lze tedy předpokládat nestabilní chování této lopatky.

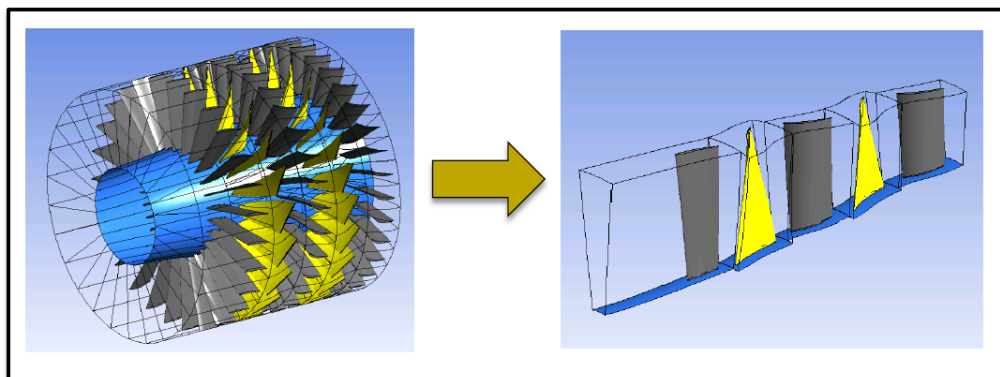
Graf na Obr. 5.9 vznikl pak překrytím pěti map stability z Obr. 5.8 získaných pro hodnoty redukované frekvence $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ a 0.5 . Z obrázku je vidět, že pokud se torzní osa referenční lopatky bude nacházet v tmavě modré oblasti, lze říci, že případ bude zaručeně stabilní. Naopak umístění torzní osy referenční lopatky v červené oblasti povede k flutteru této lopatky. Tato grafická reprezentace na Obr. 5.9 se také nazývá Tie – Dye graf.



Obr. 5.9 Tie - Dye graf, závislost stability referenční (černé) lopatky na umístění torzní osy, převzato z [35]

5.2.2 Analýza flutteru ve 3D – TBR metody

Metody TBR (Transient Blade Row) obsažené ve výpočtovém systému ANSYS CFX poskytují možnost rychlé analýzy proudění v lopatkových stupních. Tyto metody usnadňují a urychlují prvotní výpočty lopatkových stupňů a například v případech, kdy je počet oběžných a rozváděcích lopatek nesoudělný, není nutné modelovat celé kolo. Metody TBR umožňují i pro tyto případy modelovat pouze jednu či dvě pasáže v každé lopatkové řadě, jak je naznačeno na Obr. 5.10, ovšem za předpokladu, že proudové pole z předchozí řady je periodické, a dále za předpokladu prostorové periodicity v lopatkové řadě, tedy že všechny lopatky jsou tvarově shodné.



Obr. 5.10 Zjednodušení modelu pomocí metod Transient Blade Row (TBR)

Pro případy, kdy jsou rozteče sousedních lopatkových řad různé, nabízí systém ANSYS CFX tři transformační metody v časové oblasti (time marching methods) – profilovou, časovou a Fourierovu transformaci a dále harmonickou analýzu (harmonic balance method) v oblasti frekvenční.

Profilová transformace je v současné době nejméně používaná metoda a je omezená pro případy malých poměrů roztečí sousedních řad. Je založená na přeškálování (stlačení či roztažení) proudového profilu na rozhraní mezi sousedními řadami. Její výhodou je možnost modelovat libovolný počet lopatkových řad. Metoda je vhodná pro nestlačitelné tekutiny.

Pro stlačitelné tekutiny je vhodná časová transformace, kterou lze použít maximálně pro tři lopatkové řady a poměr roztečí sousedních olopatkovaných disků z intervalu 0,75 – 1,4. Metoda spočívá v transformaci časových souřadnic rotoru a statoru v obvodovém směru.

Pro analýzu flutteru turbínových lopatek jsou z metod dostupných ve výpočtovém systému ANSYS CFX nejvhodnější Fourierova transformace a harmonická analýza, protože umožňují přímo určit koeficient aerodynamického tlumení. Pro posouzení stability lopatky z hlediska flutteru dokonce není nutné modelovat více lopatkových řad. Na periodických hranicích výpočtové oblasti zahrnující jednu či dvě pasáže posuzované lopatkové řady je definována tzv. **podmínka periodicity s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem** (*phase-shift periodicity condition*), která pro cyklicky symetrické úlohy definuje tvar postupující vlny definované v odstavci 5.1.

Fourierova transformace pracuje podobně jako časová transformace, ale je možné ji použít pro problémy s velkými rozdíly mezi roztečemi sousedních kol. Metoda může být navíc aplikována na proudění stlačitelných i nestlačitelných tekutin. Tato metoda byla použita pro řešení problému prezentovaného v kapitole 6.2 této disertační práce především proto, že z transformačních metod v časové oblasti je nejvhodnější pro analýzu flutteru. Umožňuje zadávání fázového posuvu mezi lopatkami, je vhodná pro posuzování stability lopatkových řad o vysokém počtu lopatek (v našem případě 90) a umožňuje přímé vyhodnocení koeficientu aerodynamického tlumení a sledování konvergence jeho hodnoty v průběhu výpočtu.

Harmonická analýza je metodou pracující ve frekvenční oblasti, která umožňuje modelovat nelineární časově periodické jevy. Pokud se navíc jedná o prostorově periodický případ, kdy jsou všechny lopatky v řadě identické, je možné modelovat pouze jednu pasáž z každé řady a tím výrazně zkrátit výpočetní čas. Tato metoda byla také použita pro řešení problému prezentovaného v odstavci 6.2 této disertační práce a dosažené výsledky byly porovnány s výsledky získanými pomocí Fourierovy transformace.

Při analýze flutteru turbínové lopatky je často modelována pouze jedna řada lopatek, u kterých je posuzována stabilita. A také do analýzy flutteru prezentované v odstavcích 6.1 a 6.2 této disertační práce nebyly zahrnuty vedlejší lopatkové řady, pouze řada oběžných lopatek. Poznamenejme na tomto místě, že například v příspěvku [33] byl zkoumán vliv interakce sousedních lopatkových řad, kdy do simulace byla zahrnuta posuzovaná rotorová lopatka a sousedící statorová lopatka. Pro numerické řešení autoři práce [33] použili vlastní software TRACE, který řeší nelineární systém časově středovaných Navierových - Stokesových rovnic popisující nestacionární proudění vazké stlačitelné tekutiny a je založen na metodě harmonické analýzy. Pro prostorovou diskretizaci byla použita metoda konečných objemů. Výpočet koeficientu aerodynamického tlumení byl proveden pro samostatnou rotorovou lopatku a poté byl zkoumán vliv zahrnutí statorové lopatky. Z porovnání výsledků těchto dvou úloh vyplývá, že přidání statorové lopatky nemá na hodnotu koeficientu aerodynamického tlumení zásadní vliv.

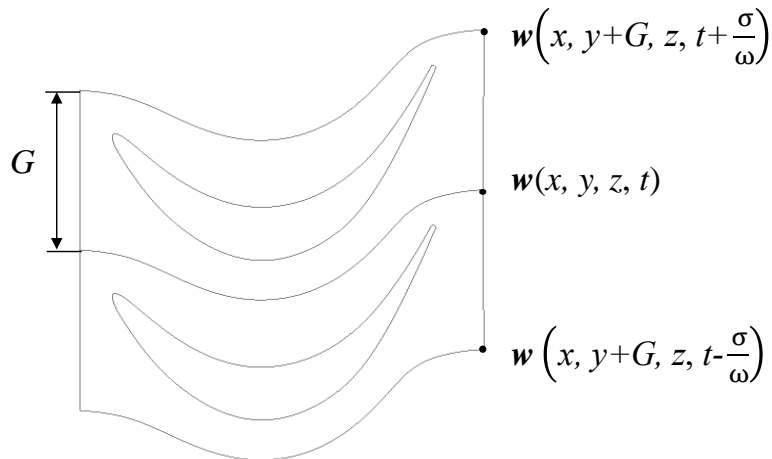
Popišme nyní stručně princip **metody Fourierovy transformace** a **metody harmonické analýzy**. Předpokládejme časově i prostorově periodickou úlohu, kdy každé dvě sousedící lopatky v téže lopatkové řadě kmitají s konstantním mezilopátkovým fázovým úhlem σ , který byl definován v odstavci 5.1 vztahem (5.2). Zavedeme časovou periodu $T = 1/f$, která je definována pomocí frekvence periodického chování proudového pole dané kmitavým pohybem lopatek. Pro vektor konzervativních proměnných (2.6) v libovolném bodě proudového pole definovaném vektorem prostorových souřadnic $\mathbf{y} = [x, y, z]^T$ platí

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \mathbf{w}(x, y, z, t + T). \quad (5.5)$$

Dále definujeme podmínku periodicity s mezilopátkovým fázovým úhlem pomocí rozteče G mezi sousedními lopatkami. Podle Obr. 5.11, platí

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \mathbf{w}\left(x, y + G, z, t + \frac{\sigma}{\omega}\right), \quad (5.6)$$

kde σ je mezilopátkový fázový úhel.



Obr. 5.11 Podmínky prostorové periodicity s mezilopátkovým fázovým úhlem

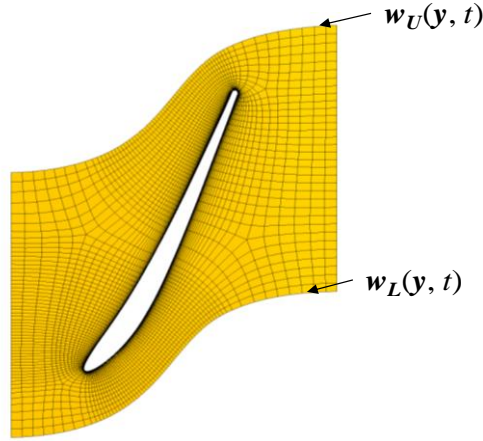
Metoda Fourierovy transformace v časové oblasti

Metoda Fourierovy transformace v časové oblasti vychází z metod *Sinusoidal Shape Correction* a *High Order Shape Correction* popsanych v [27], [28]. Cílem použití těchto metod je ušetření úložného místa v počítači a snížení výpočetní náročnosti. Tyto metody byly vyvinuty pro úlohy, kde se vyskytuje podmínka periodicity s konstantním mezilopátkovým fázovým úhlem. Numerické řešení proudění tekutiny v pasáži okolo posuzované lopatky je řešeno klasickým způsobem v časové oblasti a na „periodických“ hranicích výpočtové oblasti je použita aproximace složek vektoru konzervativních proměnných pomocí harmonické funkce, příp. Fourierovy řady.

Předpokladem metody *Sinusoidal Shape Correction* je, že složky vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w}(\mathbf{y}, t)$ na periodických hranicích výpočtové oblasti mají harmonický průběh a lze je vyjádřit pomocí sinové funkce se střední hodnotou $\mathbf{w}_0(\mathbf{y})$ jako

$$\begin{aligned} w_L(\mathbf{y}, t) &= w_0(\mathbf{y}) + A(\mathbf{y}) \sin(\omega t + \phi(\mathbf{y})), \\ w_U(\mathbf{y}, t) &= w_0(\mathbf{y}) + A(\mathbf{y}) \sin(\omega t + \phi(\mathbf{y}) + \sigma), \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde indexy U a L označují periodické hranice, Obr. 5.12, $A(\mathbf{y})$ je amplituda, ω je úhlová frekvence kmitání lopatky, $\phi(\mathbf{y})$ je fázový posuv a σ je konstantní mezilopátkový fázový úhel.



Obr. 5.12 Pasáž olopatkovaného disku představující výpočtovou oblast s periodickými hranicemi, na nichž je předepsána podmínky periodicity s konstantním mezilopátkovým fázovým úhlem

Vypočítáme časové derivace vektorů konzervativních proměnných (5.7) na periodických hranicích, kde amplituda $A(\mathbf{y})$ i úhel $\phi(\mathbf{y})$ jsou konstanty v čase, protože prostorové souřadnice na těchto hranicích se nemění, [27]

$$\begin{aligned} d_L &= \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_L = \omega A(\mathbf{y}) \cos(\omega t + \phi(\mathbf{y})), \\ d_U &= \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_U = \omega A(\mathbf{y}) \cos(\omega t + \phi(\mathbf{y}) + \sigma). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Řešíme tyto dvě rovnice tak, že na druhý vztah v (5.8) použijeme sčítací vzorec a rovnice vydělíme

$$\frac{d_U}{d_L} = \cos \sigma - \frac{\sin(\omega t + \phi(\mathbf{y}))}{\cos(\omega t + \phi(\mathbf{y}))} \sin \sigma, \quad (5.9)$$

dále upravíme

$$\cos \sigma - \frac{d_U}{d_L} = \frac{\sin(\omega t + \phi(\mathbf{y}))}{\cos(\omega t + \phi(\mathbf{y}))} \sin \sigma \quad (5.10)$$

a umocníme celou rovnici (5.10) na druhou

$$\cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \frac{d_U}{d_L} + \left(\frac{d_U}{d_L} \right)^2 = \frac{\sin^2(\omega t + \phi(\mathbf{y}))}{\cos^2(\omega t + \phi(\mathbf{y}))} \sin^2 \sigma, \quad (5.11)$$

úpravou vztahu na pravé straně dostáváme

$$\cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \frac{d_U}{d_L} + \left(\frac{d_U}{d_L} \right)^2 = \frac{\sin^2 \sigma}{\cos^2(\omega t + \phi(\mathbf{y}))} - \sin^2 \sigma, \quad (5.12)$$

odkud konečně vyjádříme

$$\cos^2(\omega t + \phi(\mathbf{y})) = \frac{\sin^2 \sigma}{1 - 2 \cos \sigma \left(\frac{d_U}{d_L} \right) + \left(\frac{d_U}{d_L} \right)^2}. \quad (5.13)$$

Při určování vektoru konzervativních proměnných na hranicích výpočtové oblasti, kde je předepsána podmínka periodicity s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem (5.6), postupujeme dále u metody *Sinusoidal Shape Correction* následovně:

I. odhadneme počáteční hodnoty, obvykle $\mathbf{w}_0(\mathbf{y})$ ze stacionárního řešení a položíme amplitudu $A(\mathbf{y}) = 0$.

Tyto hodnoty dosadíme do (5.7) a získáme $\mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^0)$ a $\mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^0)$. Začneme provádět nestacionární řešení, kdy jednu periodu kmitavého pohybu T rozdělíme na m časových kroků, jejichž počet zvolíme.

Potom tedy platí $T = m\Delta t$. Položíme $m = 1$.

II. v čase t^m vypočítáme $\mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^m)$ a $\mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^m)$ na periodických hranicích numerickým řešením proudového pole.

III. určíme d_L a d_U , jako $d_L = (\mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^m) - \mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^{m-1}))/\Delta t$, resp. $d_U = (\mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^m) - \mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^{m-1}))/\Delta t$ a uložíme $\mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^m)$, resp. $\mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^m)$.

IV. určíme ze vztahů (5.8) a (5.13) fázový posuv $\phi(\mathbf{y})$ a amplitudu $A(\mathbf{y})$ a provedeme korekci řešení dosazením do rovnic (5.7).

Nyní zvýšíme vnitřní iterační index $m := m + 1$ a opakujeme postup II. – IV. dokud nedosáhneme periody T .

Po každé periodě kmitavého pohybu T provedeme korekci střední hodnoty $\mathbf{w}_0(\mathbf{y})$ použitím aktuální zprůměrované hodnoty a opakujeme celý proces od kroku I. Tento proces opakujeme tak dlouho, dokud nejsou splněny podmínky periodicity s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem (5.6).

Tímto způsobem provádíme korekci složek vektoru konzervativních proměnných na periodických hranicích při téměř každém časovém kroku, pokud existuje řešení rovnice (5.13). Pomocí tohoto postupu dochází ke snížení výpočetní náročnosti, protože je vždy uchováváno pouze řešení z předchozího časového kroku.

Metoda *Sinusoidal Shape Correction* není vhodná pro úlohy, ve kterých se mohou vyskytovat neharmonické jevy, tedy například rázové vlny v případě transonického proudění. Pro tyto případy je

vhodná metoda *High Order Shape Correction*, kdy složky vektoru konzervativních proměnných na periodických hranicích vyjádříme časovými Fourierovými řadami N_f - tého řádu jako

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{w}_{0L}(\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{N_f} \left[A_L^n(\mathbf{y}) \sin(n\omega t) + B_L^n(\mathbf{y}) \cos(n\omega t) \right], \\ \mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{w}_{0U}(\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{N_f} \left[A_U^n(\mathbf{y}) \sin(n\omega t + \varphi) + B_U^n(\mathbf{y}) \cos(n\omega t + \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Podmínky periodicity s konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem σ mají tvar

$$\begin{aligned} \varphi &= \sigma, \\ \mathbf{w}_{0L}(\mathbf{y}) &= \mathbf{w}_{0U}(\mathbf{y}), \\ A_L^n(\mathbf{y}) &= A_U^n(\mathbf{y}), \\ B_L^n(\mathbf{y}) &= B_U^n(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dále pak postupujeme stejně jako výše v krocích I. a II., tedy odhadneme počáteční hodnoty a určíme vektor konzervativních proměnných $\mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t^m)$ a $\mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t^m)$ na periodických hranicích v čase t^m . Poté se již postup liší od metody *Sinusoidal Shape Correction* tak, že pomocí hodnot vektoru konzervativních proměnných na periodických hranicích určíme Fourierovy koeficienty. Tedy

$$\begin{aligned} A_L^n(\mathbf{y}) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_1^{N_f} \mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t) \sin(n\omega t) \Delta t, \\ B_L^n(\mathbf{y}) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_1^{N_f} \mathbf{w}_L(\mathbf{y}, t) \cos(n\omega t) \Delta t, \\ A_U^n(\mathbf{y}) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_1^{N_f} \mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t) \sin(n\omega t) \Delta t, \\ B_U^n(\mathbf{y}) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_1^{N_f} \mathbf{w}_U(\mathbf{y}, t) \cos(n\omega t) \Delta t, \end{aligned} \quad (5.16)$$

kde N_f je počet časových kroků v rámci jedné periody. Pomocí těchto hodnot pak provedeme korekci řešení dosazením do vztahů (5.14). Pro řešení většiny problémů postačí obecně několik prvních členů Fourierových řad, například v práci [27] bylo řešení provedeno pro $N_f = 4$.

Metoda harmonické analýzy ve frekvenční oblasti

Metoda harmonické analýzy ve výpočtovém systému ANSYS CFX je kombinací metod *Time spectral method* a *Harmonic balance method*. Cílem vyvíjení metod ve frekvenční oblasti je urychlení výpočtu a vyhnutí se nutnosti časového integrování jako v případě metody Fourierovy transformace. Toho je dosaženo převedením úlohy řešení systému nestacionárních rovnic na problém řešení souboru časově nezávislých kvazistacionárních stavů v rámci jedné periody pohybu. Ukažme si tento postup na jednoduché skalární nelineární rovnici v 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0. \quad (5.17)$$

Rozložíme proměnnou u na střední hodnotu v čase a nestacionární fluktuaci

$$u = \overline{u(x)} + u'(x, t). \quad (5.18)$$

Dosadíme vztah (5.18) do skalární rovnice (5.17) a dostáváme

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2} + 2\overline{u}u' + u'u') \right] = 0. \quad (5.19)$$

Rovnici (5.19) středujeme v čase a využíváme pravidel $\overline{u'} = 0$, $\overline{u'u'} = 0$ a $\overline{\overline{u}} = \overline{u}$. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2} + \overline{u'u'}) = 0. \quad (5.20)$$

Nyní vyjádříme nestacionární fluktuaci pomocí Fourierovy řady N_f -tého řádu

$$u' = \sum_{n=1}^{N_f} [A^n \cos(n\omega t) + B^n \sin(n\omega t)]. \quad (5.21)$$

Dosadíme vztah (5.21) do rovnice (5.19), tedy

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_f} [-A^n n\omega \sin(n\omega t) + B^n n\omega \cos(n\omega t)] + \sum_{n=1}^{N_f} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \\ & + \sum_{n=1}^{N_f} \frac{\partial}{\partial x} [\overline{u}A^n \cos(n\omega t) + \overline{u}B^n \sin(n\omega t)] + \sum_{n=1}^{N_f} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [A^n \cos(n\omega t) + B^n \sin(n\omega t)]^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nyní porovnáme koeficienty u sinových a cosinových členů prvního řádu

$$\begin{aligned} \sin : -A^n n\omega + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u} B^n) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_f \\ \cos : B^n n\omega + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u} A^n) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_f. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dále vyjádříme nelineární člen $\overline{u'u'}$ vyjádříme jako, [28]

$$\overline{u'u'} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_f} (A^n A^n + B^n B^n). \quad (5.24)$$

Tedy po dosazení do časově středované rovnice (5.20) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{u^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_f} (A^n A^n + B^n B^n) \right] = 0. \quad (5.25)$$

Vztahy (5.23) a (5.25) nám dávají soubor $2N_f + 1$ časově nezávislých rovnic o neznámých \overline{u} , A^n a B^n .

Tento princip pak lze uplatnit i při řešení složitějších problémů, jako je modelování proudění stlačitelné vazké tekutiny. Zapišeme semi - diskrétní tvar nestacionárního časově středovaného systému

Navierových - Stokesových rovnic tak, že pomocí metody konečných objemů diskretizujeme pouze prostorově závislou část

$$D_t \mathbf{U} + R(\mathbf{U}) = 0, \quad (5.26)$$

kde $\mathbf{U} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{w} d\Omega$ se mění v čase díky pohybu uzlů výpočetní sítě, D_t označuje časovou derivaci. $R(\mathbf{U})$

zahrnuje diskretizaci vazkých i nevazkých numerických toků.

Jednou z možností, jak numericky řešit rovnici (5.26), je zavedení tzv. duálního času t^* a řešení celého problému pomocí metody ustalování v duálním čase t^* , [24]. Pomocí přidaného členu $\frac{\partial \mathbf{U}^m}{\partial t^*}$ ustalujeme řešení v rámci jednoho fyzikálního časového kroku Δt ke stacionárnímu stavu v duálním čase. Konkrétně tedy řešíme problém

$$\frac{\partial \mathbf{U}^m}{\partial t^*} + D_t \mathbf{U}^m + R(\mathbf{U}^m) = 0, \quad (5.27)$$

kde m je hladina fyzikálního časového kroku.

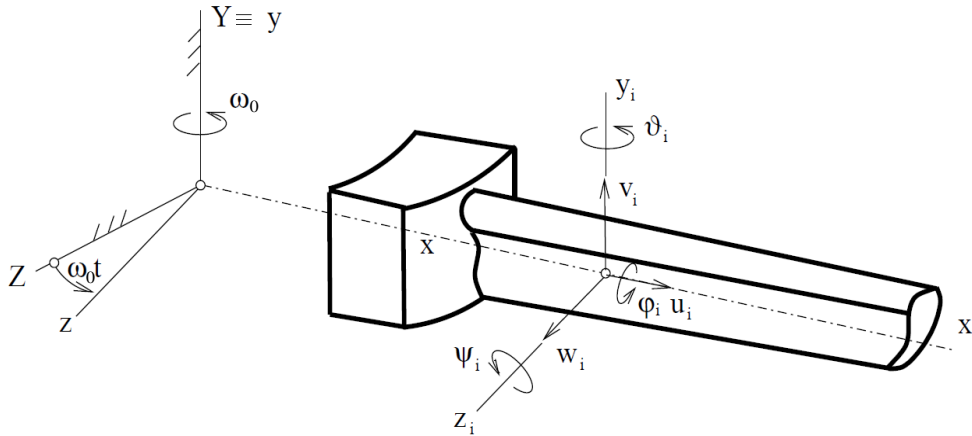
Postup řešení se v našem případě liší od klasické metody ustalování v duálním čase tím, že časová perioda je rozdělena na $2N_f + 1$ kroků, ve kterých ukládáme řešení. Řešení v každém časovém okamžiku je pak dosaženo ustalováním v duálním čase.

Systém Navierových – Stokesových rovnic v duálním čase (5.27) pak řešíme s ohledem na pohyb výpočetní sítě. Ve všech $2N_f + 1$ bodech časové periody je vygenerována výpočetní síť. Poté je systém (5.27) řešen klasickými CFD metodami, např. metodou konečných objemů. Složky vektoru konzervativních proměnných na periodických hranicích lze opět vyjádřit pomocí střední hodnoty a Fourierovy řady řádu N_f . Na těchto hranicích musí být splněna podmínka periodicity s mezilopatkovým fázovým úhlem (5.6) a dosažené Fourierovy koeficienty jsou poté transformovány pomocí zpětné Fourierovy transformace a implementovány na periodických hranicích výpočtové oblasti v $2N_f + 1$ bodech časové periody.

5.3 Problém vlastních hodnot a modální analýza turbínové lopatky

Modální analýza turbínové lopatky byla v rámci této práce provedena v profesionálním výpočtovém systému ANSYS Mechanical. V tomto odstavci nastíníme základní teoretické principy matematického modelování, které jsou uvedeny např. v pracích [9] a [32]. Matematický model lopatky je zde sestaven metodou konečných prvků. Lopatka, která je uvažována jako jednorozměrné kontinuum, je rozdělena N uzly na $N-1$ prvků. Pohyb každého uzlu je vyjádřen pomocí šesti souřadnic, které představují podélnou

výchylku, dvě příčné výchylky a natočení kolem všech tří souřadnicových os, jak je znázorněno na Obr. 5.13, který byl převzat z disertační práce [32].



Obr. 5.13 Schématický model lopatky rotující konstantní úhlovou rychlostí ω_0 a zobecněné souřadnice i -tého uzlu konečněprvkového modelu, převzato z [32]

Zavedeme vektor zobecněných souřadnic lopatky \mathbf{q} , který obsahuje výchylky a natočení všech uzlů

$$\mathbf{q}^e = [\dots, u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i, \dots]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.28)$$

kde u_i, v_i, w_i vyjadřují posunutí i -tého uzlu lopatky ve směrech souřadnicových os a $\varphi_i, \vartheta_i, \psi_i$ vyjadřují úhel natočení průřezu lopatky v místě i -tého uzlu. Při sestavení matematického modelu lopatky vycházíme z Lagrangeových rovnic v maticovém tvaru, [9]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (5.29)$$

kde E_k je kinetická energie lopatky, E_p potenciální energie, R vyjadřuje disipační (Rayleighovu) funkci a $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ je vektor zobecněných sil, kam řadíme všechny ostatní, např. nelineární elastické nebo tlumicí síly, nekonzervativní vazební síly, včetně budících sil. Uvažujeme-li rovnoměrnou rotaci úhlovou rychlostí ω_0 , lze nekonzervativní model tlumené rotující lopatky zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_S + \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega - \omega_0^2 \mathbf{K}_D)\mathbf{q} = \omega_0^2 \mathbf{f}, \quad (5.30)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} je matice tlumení, \mathbf{G} je nesymetrická matice gyroskopických účinků, \mathbf{K}_S je matice statické tuhosti, \mathbf{K}_D je matice dynamické tuhosti, \mathbf{K}_ω je matice vyztužení vlivem odstředivých sil odvozená v disertační práci [32] a $\omega_0^2 \mathbf{f}$ vektor odstředivých sil.

Cílem modální analýzy lopatky je určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů lopatky. Pro zjednodušení zápisu označíme

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_S + \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega - \omega_0^2 \mathbf{K}_D. \quad (5.31)$$

Vycházíme z homogenního tvaru rovnice (5.30)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Jedná se o silně nekonzervativní systém a pro jeho řešení je potřeba připojit identitu

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (5.33)$$

Společně lze soustavu rovnic (5.32) a (5.33) zapsat v maticovém tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Soustavu (5.34) prepíšeme zkráceně pomocí matic a vektorů definovaných ve stavovém prostoru, jehož dimenze je $2N$

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.35)$$

kde $\mathbf{u}(t)$ je stavový vektor dimenze $2N$ obsahující vektor zobecněných souřadnic $\mathbf{q}(t)$ a jeho časovou derivaci (vektor zobecněných rychlostí)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Adjungované modely systémů (5.32) a (5.35) obsahují transponované matice, vektory zobecněných souřadnic $\mathbf{r}(t)$ v prostoru dimenze N a $\mathbf{w}(t)$ ve stavovém prostoru dimenze $2N$

$$\mathbf{M}^T \ddot{\mathbf{r}}(t) + (\mathbf{B}^T + \omega_0 \mathbf{G}^T) \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}^T \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{w}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.38)$$

kde analogicky jako v (5.36) platí vztah mezi vektory zobecněných souřadnic

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Modelům (5.32), (5.35), (5.37) a (5.38) vyhovuje řešení

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}e^{\lambda t}, \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t}, \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}, \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}e^{\lambda t}, \quad (5.40)$$

jeho dosazením do každé ze čtyř pohybových rovnic dostáváme

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) + \mathbf{K})\mathbf{q}e^{\lambda t} = \mathbf{0}, (\lambda^2 \mathbf{M}^T + \lambda(\mathbf{B}^T + \omega_0 \mathbf{G}^T) + \mathbf{K}^T)\mathbf{r}e^{\lambda t} = \mathbf{0}, \quad (5.41)$$

$$(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{0}, (\lambda \mathbf{N}^T + \mathbf{P}^T)\mathbf{w}e^{\lambda t} = \mathbf{0}. \quad (5.42)$$

Protože tyto rovnice (5.41) a (5.42) musí být splněny v každém časovém okamžiku, tedy i v čase $t = 0$, proto můžeme dále psát

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) + \mathbf{K})\mathbf{q} = \mathbf{0}, (\lambda^2 \mathbf{M}^T + \lambda(\mathbf{B}^T + \omega_0 \mathbf{G}^T) + \mathbf{K}^T)\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (5.43)$$

$$(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u} = \mathbf{0}, (\lambda \mathbf{N}^T + \mathbf{P}^T)\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (5.44)$$

Tyto vztahy představují problém vlastních hodnot. Netriviální řešení existuje, pokud

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) + \mathbf{K}) = 0, \text{ resp. } \det(\lambda \mathbf{N} + \mathbf{P}) = 0. \quad (5.45)$$

Kořeny obou charakteristických rovnic (5.45) jsou shodné a mohou to být komplexně sdružené dvojice vlastních čísel nebo reálná vlastní čísla

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda_{n+\nu} = \alpha_\nu - i\beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (5.46)$$

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu, \quad \nu = 2n+1, 2n+2, \dots, 2N,$$

kde komplexní vlastní čísla s kladnou imaginární částí jsou řazena vzestupně podle velikosti imaginární části tak, aby $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$, za nimi jsou řazena ve stejném pořadí komplexně sdružená vlastní čísla, a nakonec reálná vlastní čísla.

Vlastním číslům jsou přiřazeny pravostranné vlastní vektory \mathbf{q}_ν , resp. \mathbf{u}_ν a levostranné vlastní vektory \mathbf{r}_ν , resp. \mathbf{w}_ν , které musí splňovat rovnice (5.43) a (5.44)

$$(\lambda_\nu^2 \mathbf{M} + \lambda_\nu(\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) + \mathbf{K})\mathbf{q}_\nu = \mathbf{0}, (\lambda_\nu^2 \mathbf{M} + \lambda_\nu(\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}^T) + \mathbf{K}^T)\mathbf{r}_\nu = \mathbf{0}, \quad (5.47)$$

$$(\lambda_\nu \mathbf{N} + \mathbf{P})\mathbf{u}_\nu = \mathbf{0}, (\lambda_\nu \mathbf{N}^T + \mathbf{P}^T)\mathbf{w}_\nu = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

Vlastní vektory je potřeba normovat, aby byly jednoznačné. K tomu lze ve stavovém prostoru použít podmínku N-normy

$$\mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_\nu = 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.49)$$

Uvažujme dále dvě různá řešení problému vlastních hodnot, která dosadíme do (5.48)

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_j = -\lambda_j\mathbf{N}\mathbf{u}_j, \quad \mathbf{P}^T\mathbf{w}_i = -\lambda_i\mathbf{N}^T\mathbf{w}_i, \quad (5.50)$$

obě rovnice přenásobíme zleva vektory \mathbf{w}_i^T a \mathbf{u}_j^T

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{P}\mathbf{u}_j = -\lambda_j\mathbf{w}_i^T\mathbf{N}\mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_j^T\mathbf{P}^T\mathbf{w}_i = -\lambda_i\mathbf{u}_j^T\mathbf{N}^T\mathbf{w}_i \quad . \quad (5.51)$$

Druhou rovnici transponujeme a odečteme jí od první. Dostáváme

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{w}_i^T\mathbf{N}\mathbf{u}_j, \quad (5.52)$$

Tedy pro různá vlastní čísla $\lambda_i \neq \lambda_j$, musí platit, že

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{N}\mathbf{u}_j = 0, \quad \text{a tedy podle (5.51) platí } \mathbf{w}_i^T\mathbf{P}\mathbf{u}_j = 0 \quad (5.53)$$

Tyto vztahy představují podmínky biortogonalit, [57]. A pokud navíc využijeme podmínku N-normy (5.49), získáme tvar podmínek biortonormality

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{N}\mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \text{a tedy } \mathbf{w}_i^T\mathbf{P}\mathbf{u}_j = -\lambda_j\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.54)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, tedy $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$. Zavedeme nyní modální matice pravostranných a levostranných vlastních vektorů ve stavovém prostoru

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_\nu] \in C^{2N, 2N}, \quad \mathbf{W} = [\mathbf{w}_\nu] \in C^{2N, 2N}, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.55)$$

a podmínky biortonormality lze pak zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{W}^T\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^T\mathbf{P}\mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}, \quad (5.56)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice řádu $2N$ a $\mathbf{\Lambda}$ je spektrální matice obsahující vlastní čísla λ_ν na diagonále řazená podle výše popsaného pravidla. Pravostranné vlastní vektory \mathbf{u}_ν tvoří bázi ve $2N$ rozměrném stavovém prostoru a pomocí jejich lineární kombinace lze popsat libovolný pohyb tělesa.

Dále se pokusíme velice stručně popsat, jak najdeme odezvu soustavy na volné kmitání. Provedeme modální transformaci souřadnic ve stavovém prostoru, abychom našli dynamickou odezvu soustavy (5.32) popisující volné kmitání. Provádíme modální analýzu

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{2N} \mathbf{u}_\nu x_\nu(t), \quad (5.57)$$

kde $x_\nu(t)$ jsou tzv. modální souřadnice. Aplikujeme transformaci (5.57) na rovnici (5.35)

$$\mathbf{N}\mathbf{U}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.58)$$

Celou rovnici násobíme zleva transponovanou modální maticí \mathbf{W}^T

$$\mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{U} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{P} \mathbf{U} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (5.59)$$

a s použitím podmínek biortonormality (5.54) dostáváme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.60)$$

Počáteční podmínky vyjádříme vektorem $\mathbf{x}(0)$ pomocí modální transformace (5.57) a podmínek biortonormality (5.54)

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{u}(0) = \mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 = [x_\nu(0)]. \quad (5.61)$$

Protože spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$ je diagonální, lze rovnici (5.60) rozepsat na $2N$ na sobě nezávislých rovnic

$$\dot{x}_\nu(t) - \lambda_\nu x_\nu(t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N, \quad (5.62)$$

s počátečními podmínkami

$$x_\nu(0) = \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0. \quad (5.63)$$

Řešením rovnic (5.62) je

$$x_\nu(t) = e^{\lambda_\nu t} x_\nu(0) = e^{\lambda_\nu t} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.64)$$

Pomocí modální transformace (5.57) se dostáváme zpět do stavového prostoru

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\nu=1}^{2N} \mathbf{u}_\nu \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_\nu t}. \quad (5.65)$$

Zřejmě podle (5.36) a (5.40) je volné kmitání v prostoru zobecněných souřadnic popsáno ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{\nu=1}^{2N} \mathbf{q}_\nu \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_\nu t}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{\nu=1}^{2N} \lambda_\nu \mathbf{q}_\nu \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_\nu t}. \quad (5.66)$$

Pohyb i -té zobecněné souřadnice pak popíšeme v závislosti na čase vztahem

$$q_i(t) = \sum_{\nu=1}^{2N} q_{i,\nu} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\lambda_\nu t}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.67)$$

kde $\mathbf{q}_{i,\nu}$ je i -tá souřadnice vlastního vektoru \mathbf{q}_ν . Komplexně sdružená vlastní čísla v (5.67) lze zapsat ve tvaru

$$q_{i,\nu} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 = |q_{i,\nu} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0| e^{i\varphi_{i,\nu}}. \quad (5.68)$$

Volné kmitání lopatky lze pak pro i -tou zobecněnou souřadnici zapsat ve tvaru

$$q_i(t) = 2 \sum_{\nu=1}^n |q_{i,\nu} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0| e^{\alpha_\nu t} \cos(\beta_\nu t + \phi_{i,\nu}) + \sum_{\nu=2n+1}^{2N} q_{i,\nu} \mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N} \mathbf{u}_0 e^{\alpha_\nu t}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.69)$$

Ze vztahu (5.69) lze posoudit stabilitu soustavy. Imaginární části vlastních čísel β_ν vyjadřují vlastní frekvence a reálné části α_ν představují tlumení a rozhodují o stabilitě pohybu, [9]. Soustava je asymptoticky stabilní, pokud pro všechna komplexně sdružená vlastní čísla je $\alpha_\nu < 0$ a $\beta_\nu > 0$ a pro všechna reálná vlastní čísla platí $\alpha_\nu < 0$ a $\beta_\nu = 0$.

Pokud je reálná část alespoň jednoho vlastního čísla kladná, bude pohyb nestabilní. Nestabilita typu flutter nastane, pokud existuje alespoň jeden pár komplexně sdružených vlastních čísel s kladnou reálnou částí, tedy $\alpha_\nu > 0$ a $\beta_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Pak kmitá soustava s úhlovou frekvencí β_ν s exponenciálně vzrůstající amplitudou. Nestabilita typu divergence nastane v případě, že je alespoň jedno reálné vlastní číslo kladné, tedy $\alpha_\nu > 0$ a $\beta_\nu = 0$, $\nu = 2n+1, \dots, 2N$. Soustava pak pohybuje nekmitavým pohybem s exponenciálně vzrůstající výchylkou.

6. Predikce flutteru lopatek parních turbín pomocí výpočtového systému ANSYS

V odstavci 5.2 této práce byla popsána energetická metoda predikce flutteru turbínových lopatek založená na analýze obtékání vibrujících lopatek parních turbín a vyhodnocení aerodynamické práce tekutiny na jejich povrchu. Na základě tohoto principu byl navržen postup pro posouzení možného rizika vzniku flutteru použitím nástrojů dostupných ve výpočtovém systému ANSYS. Tato možnost byla zvolena z důvodu velké výpočetní náročnosti úlohy a možnosti propojení strukturálního a CFD řešiče. Pro výpočet vlastních tvarů kmitu a vlastních frekvencí turbínové lopatky byl použit výpočtový systém ANSYS Mechanical. CFD analýza byla provedena pomocí výpočtových systémů ANSYS Fluent (2D analýza) a ANSYS CFX (3D analýza).

V odstavcích 6.1 a 6.2 jsou popsány metodiky obou zmíněných přístupů predikce flutteru (2D a 3D analýza) a dosažené výsledky. V případě, kdy byl pro modelování proudění tekutiny ve 2D oblasti použit výpočtový systém ANSYS Fluent, bylo potřeba vyvinout vlastní postup pro posouzení stability lopatky, založený na modelování obtékání tří lopatkových profilů, jejichž pohyb byl předepsán pomocí uživatelsky definované funkce. Výpočtový systém ANSYS CFX, který byl použit pro analýzu flutteru celé 3D turbínové lopatky, je speciálně vyvinut pro modelování proudění tekutiny v turbínových řadách a obsahuje přímo metody vhodné pro modelování aeroelastických jevů a pro určení hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení na povrchu posuzované lopatky.

6.1 Predikce flutteru pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent

Na Obr. 6.1 je znázorněna posloupnost použití jednotlivých nástrojů výpočtového systému ANSYS při posuzování stability turbínové lopatky. Postup sestává z několika kroků: modální analýzy celé lopatky pomocí výpočtového systému ANSYS Mechanical, přípravy 2D geometrického modelu profilu turbínové lopatky v modeláři DesignModeler, tvorby kvalitní výpočetní sítě 2D výpočetní oblasti pro CFD analýzu pomocí nástroje GridPro, zapsání skriptů definujících pohyb lopatkových profilů a modelování proudění tekutiny ve výpočtovém systému ANSYS Fluent.



Obr. 6.1 Jednotlivé nástroje použité pro posouzení stability lopatky pomocí 2D CFD analýzy

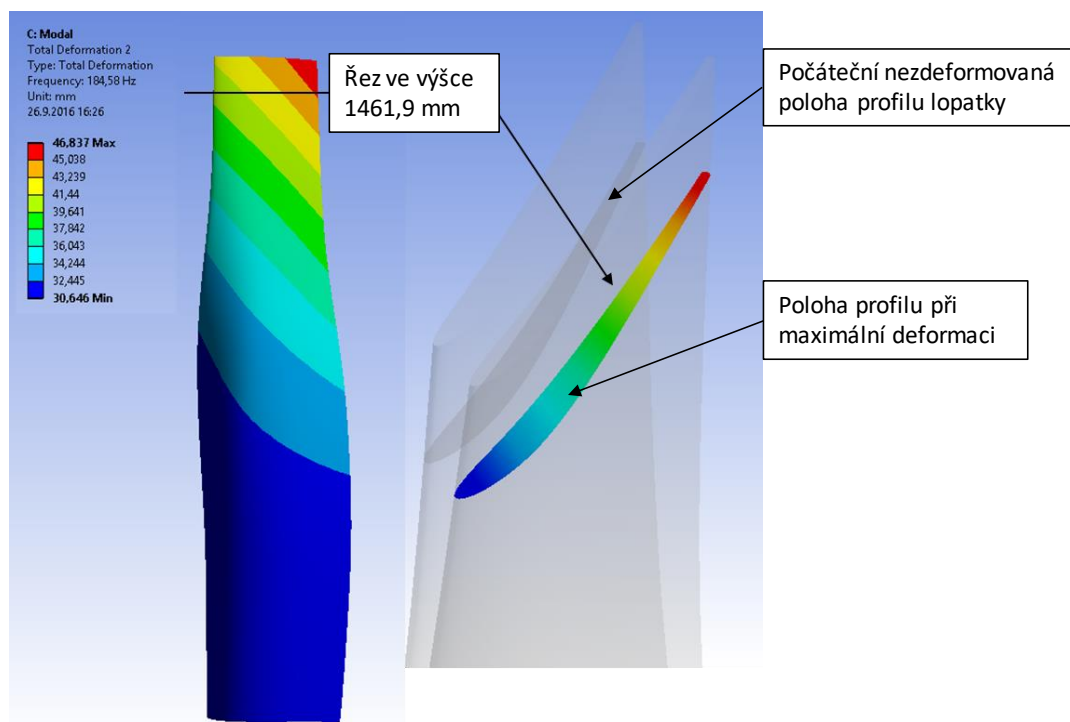
Z výsledků CFD analýzy je dále pomocí postprocesoru CFD Post vypočtena aerodynamická práce tekutiny na povrchu referenční lopatky v průběhu jedné periody kmitavého pohybu. Kladná hodnota

aerodynamické práce znamená, že lopatka přijímá energii z tekutiny, což může vést k nestabilnímu chování lopatky.

6.1.1 Příprava výpočtového modelu a nastavení úlohy

Metodika predikce flutteru byla testována na oběžných lopatkách předposledního stupně nízkotlakého dílu parní turbíny. Pro analýzu byla vybrána nevázaná (volná) oběžná lopatka, to znamená, že lopatky na disku mezi sebou nejsou provázány bandáží či jinou vazbou a mezi špičkou lopatky a skříňní turbíny je mezera.

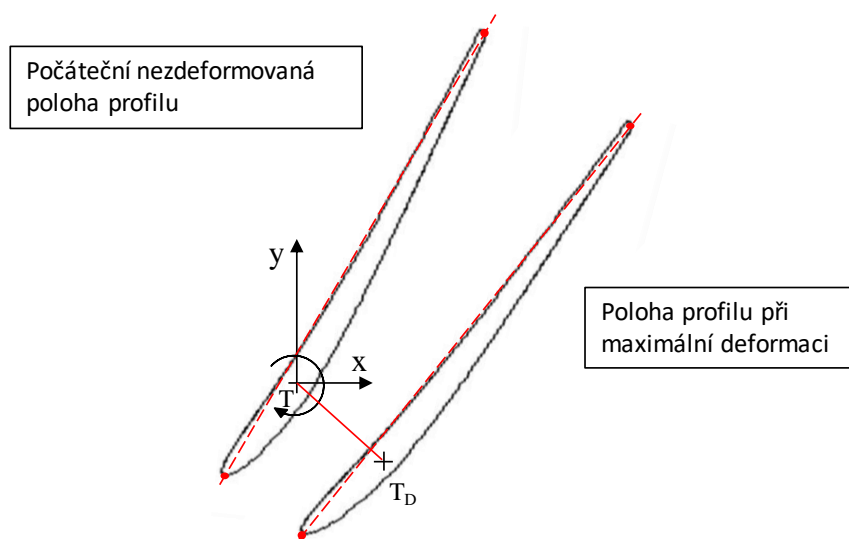
Nejdříve byla provedena modální analýza celé lopatky ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical, kde byla určena první vlastní frekvence 184,58 Hz a první vlastní tvar kmitu. Z Obr. 6.2 je zřejmé, že místem největšího vychýlení lopatky je odtoková hrana u špičky lopatky, proto byl pro CFD analýzu vybrán 2D profil poblíž špičky lopatky ve výšce 1461,9 mm (měřeno od osy rotoru).



Obr. 6.2 První vlastní tvar. Model celé turbínové lopatky (vlevo). 2D řez ve výšce 1461,9 mm (vpravo)

Kmitavý pohyb profilu byl popsán pomocí posuvů ve směrech souřadnicových os x, y (ohybové kmitu ve 3D) a natočení okolo osy procházející středem hmotnosti profilu (torzní kmitu ve 3D). Směr posuvu a maximální úhel natočení byl stanoven z prvního vlastního tvaru kmitu lopatky tak, že byly exportovány souřadnice profilu v počáteční nezdeformované poloze a poté souřadnice maximálně vychýleného profilu. Byla vytvořena pomyslná úsečka spojující bod, který reprezentuje náběhovou hranu profilu a bod, který reprezentuje odtokovou hranu profilu, viz Obr. 6.3. Porovnáním polohy dvou

vzniklých úseček byl odečten úhel natočení profilu. Dále byla zjištěna vzdálenost $|T T_D|$, o kterou se posune bod reprezentující střed hmotnosti profilu. Je potřeba brát v úvahu, že tyto výsledky představují nenormovaný vlastní tvar kmitu.



Obr. 6.3 Návod pro odvození funkcí popisujících pohyb profilu lopatky

Skutečná výchylka ohybových kmitů (ve 2D posuv těžiště profilu ve směrech os x , y) byla určena na základě výsledků měření nekontaktní metodou Blade tip timing, kdy snímače namontované na statoru a nad rotorem měří čas průchodu lopatek kolem senzorů. Z tohoto měření byla tedy stanovena maximální hodnota posunutí středu hmotnosti profilu na 1 mm. Výsledný pohyb 2D profilu byl tedy popsán pomocí funkcí

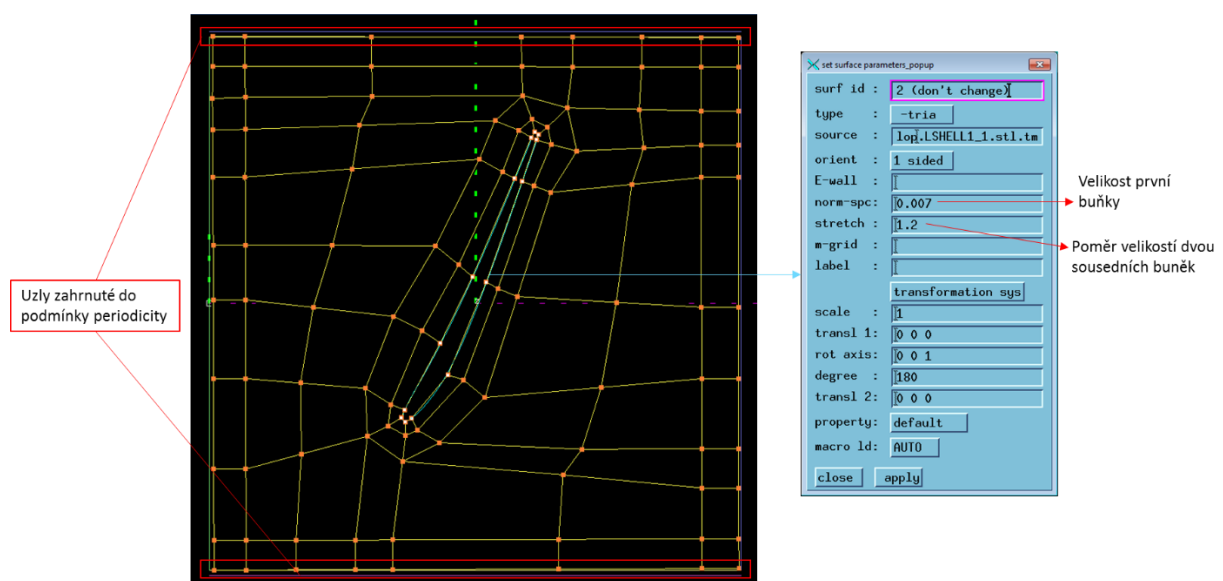
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(\omega t) \\ y(t) &= y_0 \sin(\omega t) , \\ \alpha(t) &= \alpha_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde t je čas, úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$, kde $f = 184,58$ Hz. Celková amplituda posuvného pohybu středu hmotnosti profilu, tedy $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, byla normována na velikost 1 mm, která byla určena na základě výsledků měření metodou Blade tip timing a stejným poměrem byla normována amplituda natočení profilu okolo osy procházející středem hmotnosti profilu na $\alpha_0 = 0,25^\circ$.

Geometrický model 2D profilu lopatky byl vytvořen v modeláři DesignModeler příčným řezem celou lopatkou ve vzdálenosti 1461,9 mm od osy rotoru, viz Obr. 6.2. Model profilu lopatky byl dále načten do nástroje GridPro, ve kterém byla vytvořena nestrukturovaná výpočetní síť. Výhodou tohoto nástroje je možnost tvorby výpočetních sítí pro periodické úlohy. Topologie vytvořená v GridPro musí splňovat následující podmínky: topologie se skládá výhradně ze čtyřúhelníkových bloků, z každého vnitřního uzlu daného bloku by měly vycházet čtyři hrany, pokud je to možné. Výjimku mohou tvořit uzly se třemi nebo pěti hranami. Krajní uzly, ležící na hranici výpočetní oblasti, smí být společné pouze

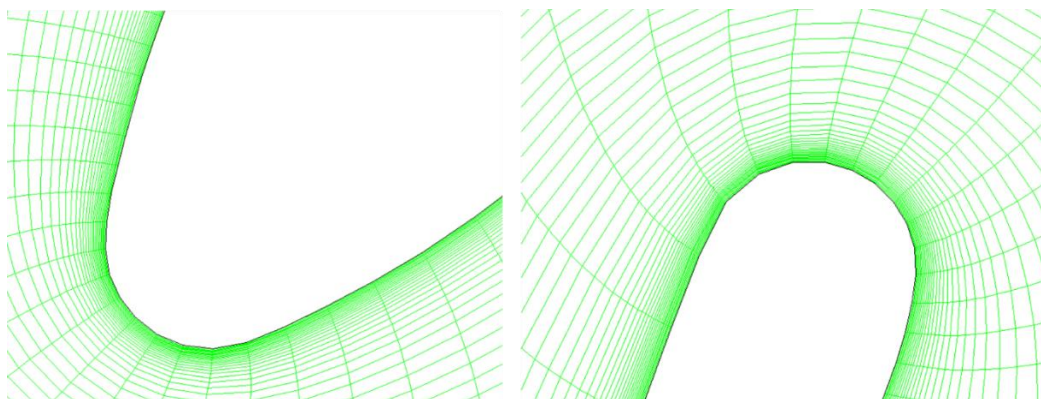
pro tři hrany, z rohových uzlů mohou vycházet pouze dvě hrany. Na hranicích, které definují podmínku periodicity, musí ležet shodný počet uzlů, které je potřeba mezi sebou spárovat. V našem 2D případě byla hranicím přiřazena translační periodicitata se vzdáleností mezi profily 102 mm, která vychází z jednoduchého výpočtu – obvod disku ve výšce profilu 1461,9 mm dělený počtem lopatek na rotoru (90). Z těchto informací (vzdálenost sousedních lopatek a počet lopatek na disku) vytvoří nástroj GridPro tvar periodických hranic výpočtové oblasti, která je poté použita pro CFD analýzu v systému ANSYS Fluent.

Příklad topologie pro námi řešenou turbínovou lopatku je zobrazen na Obr. 6.4 (vlevo) a na Obr. 6.4 (vpravo) je uveden příklad definování mezní vrstvy na stěně lopatkového profilu prostřednictvím zadané velikosti první buňky mezní vrstvy a poměru každých dvou sousedních buněk v mezní vrstvě.



Obr. 6.4 Topologie pro výpočetní síť okolo profilu lopatky ve výšce 1461,9 mm (vlevo). Nastavení mezní vrstvy na stěně profilu (vpravo)

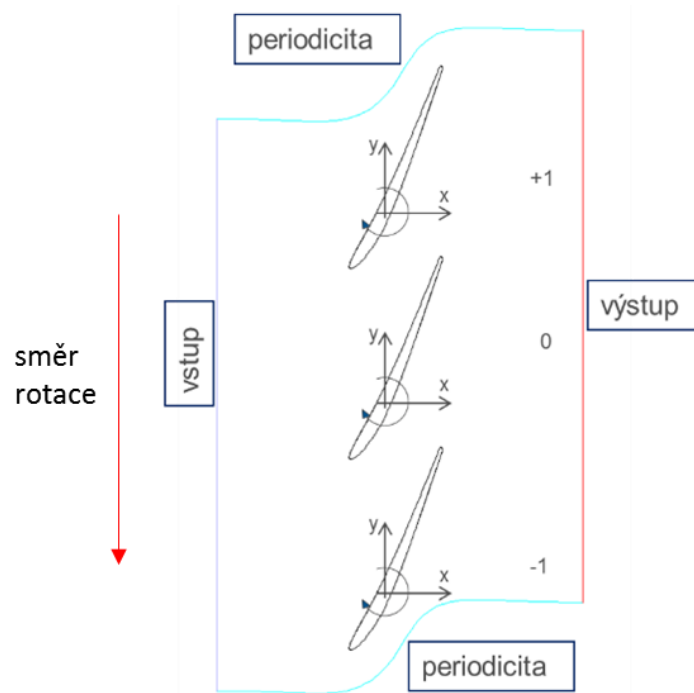
Kvalita sítě byla posouzena hodnotou parametru y^+ v první buňce mezní vrstvy. Tato hodnota se pohybuje v intervalu ($y^+_{\min} = 0,1$; $y^+_{\max} = 4$) s průměrnou hodnotou y^+ okolo 1. Na Obr. 6.5 jsou znázorněny detaily sítě v oblasti náběžné a odtokové hrany.



Obr. 6.5 Detaily výpočetní sítě v oblasti náběžné a odtokové hrany

Výpočetní síť byla dále uložena ve formátu *.msh a dále načtena do systému ANSYS Fluent. Zde byla nakopírováním této výpočetní sítě vytvořena 2D výpočtová oblast obsahující tři lopatkové profily. Tato oblast je znázorněná na Obr. 6.6. Na vstupu do výpočtové oblasti byl předepsán stagnační tlak 117 805,2 Pa, složky směrového vektoru rychlosti tekutiny $\mathbf{v} = [0,1934; -0,9735]^T$ a stagnační teplota 379,1 K. Na výstupu z výpočtové oblasti byl předepsán statický tlak 36 199 Pa.

Numerické simulace proudění páry byly provedeny pro tři po sobě jdoucí lopatkové profily. Prostřední profil je označen číslicí „0“. Jedná se o referenční profil, jehož stabilita byla posuzována. Sousední profily „+1“ a „-1“ byly do výpočtové oblasti zahrnuty proto, že právě tyto mají z celého olopatkovaného disku největší vliv na vznik nestacionárních tlaků na povrchu referenční lopatky, [41].



Obr. 6.6 Výpočtová oblast

Jednotlivým profilům byl předepsán pohyb tak, že každé dvě sousedící lopatky kmitají s konstantním fázovým posuvem σ (*Interblade Phase Angle*). Lopatka označená číslicí „+1“ kmitá s mezilopatkovým fázovým úhlem $+\sigma$ a lopatka označená číslicí „-1“ kmitá s mezilopatkovým fázovým úhlem $-\sigma$ oproti referenční lopatce. Jejich pohyb lze tedy popsat pomocí funkcí závislých na čase

$$\begin{array}{lll}
 x(t) = x_0 \sin(\omega t) & x(t) = x_0 \sin(\omega t + \sigma) & x(t) = x_0 \sin(\omega t - \sigma) \\
 y(t) = y_0 \sin(\omega t) & y(t) = y_0 \sin(\omega t + \sigma) & y(t) = y_0 \sin(\omega t - \sigma) \\
 \alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t) & \alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \sigma) & \alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t - \sigma)
 \end{array} \quad (6.2)$$

Funkce v prvním sloupci popisují pohyb referenční lopatky označené „0“, vztahy ve druhém sloupci jsou přiřazeny lopatce „+1“ a v posledním sloupci jsou funkce popisující pohyb lopatky „-1“. Numerické simulace byly provedeny pro různé varianty fázových úhlů z intervalu $(-\pi, +\pi)$. Pro pohyb lopatek definovaný pomocí konstantního fázového úhlu mezi každými dvěma sousedícími lopatkami vznikne

po obvodu disku postupující vlna (travelling wave). Počet těchto vln je definován uzlovým průměrem (nodal diameter), který se určí jako

$$ND = \frac{\sigma \cdot N_B}{2\pi}, \quad (6.3)$$

kde N_B je počet lopatek na disku, který v našem případě obsahuje 90 lopatek. Intervalu fázových úhlů $\sigma \in \langle -\pi, +\pi \rangle$ tedy odpovídá interval $ND \in \langle -45, +45 \rangle$ uzlových průměrů. Pro záporné hodnoty uzlových průměrů postupuje vlna ve směru rotace disku a jedná se o dopřednou vlnu (forward travelling wave), v opačném případě jde o zpětnou postupující vlnu (backward travelling wave).

Numerické simulace proudění páry ve 2D oblasti byly provedeny pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent pro 9 uzlových průměrů z intervalu $\langle -45, +45 \rangle$ tak, aby byla pokryta celá škála tvarů kmitu disku. Nestacionární výpočet byl inicializován z výsledků ustáleného proudění pro případ obtékání nepohyblivých lopatek. Pro řešení stlačitelného vazkého proudění byl ve výpočtovém systému ANSYS Fluent řešič na principu korekce hustoty (tzv. *density-based solver*), který určuje rychlostní pole ze zákona zachování hybnosti (Navierovy – Stokesovy rovnice), hustotu z rovnice kontinuity a tlakové pole ze stavové rovnice pro ideální plyn. Numerické řešení bylo prováděno implicitně pomocí Upwind schématu s lineární rekonstrukcí řešení pro zvýšení řádu přesnosti schématu a Barthovým limiterem pro zamezení nefyzikálních oscilací řešení. Pro řešení turbulentního proudění byla zvolena v současné době nejčastěji používaná metoda založená na RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) přístupu, který spočívá pro případ stlačitelného proudění v časovém středování nelineárního systému Navierových – Stokesových rovnic podle Favra. Pro výpočet turbulentní viskozity byl použitý dvou-rovnicový SST k-omega model turbulence. Jako proudící médium byla uvažována náhrada páry ideálním plynem s materiálovými vlastnostmi popsány v Tab. 6.1, které nejlépe vystihují vlastnosti páry.

Měrná tepelná kapacita	6012,4 [J kg ⁻¹ K ⁻¹]
Dynamická viskozita	1,189 · 10 ⁻⁵ [kg m ⁻¹ s ⁻¹]
Tepelná vodivost	0,02373 [W m ⁻¹ K ⁻¹]
Molární hmotnost	19,18 [kg kmol ⁻¹]

Tab. 6.1 Vlastnosti ideálního plynu

Pro správný popis úlohy bylo nutné zahrnout rotaci celého olopatkovaného disku, což bylo provedeno pomocí přístupu pohyblivé referenční domény (*Moving Reference Frame*), kdy byla celé výpočetní oblasti přiřazena konstantní rychlost 3000 ot/min přepočtená na obvodovou rychlost ve směru naznačeném na Obr. 6.6. Kmitavý pohyb lopatek byl zadán uživatelsky definovanými funkcemi (UDF), které byly vytvořeny zvlášť pro každý uzlový průměr a které každé lopatce přiřazují složky rychlosti

ve tvaru časových derivací funkcí (6.2). Uvedme například UDF pro $\sigma = -\pi/3$, tedy $ND = -15$ pro lopatku „+1“:

```
#include "udf.h"

#include "math.h"

#include "stdio.h"

DEFINE_CG_MOTION(BLADE1, dt, vel, omega, time, dtime)
{
    vel[0] = 0.6448*cos(1159.75*time-1.047197551);
    vel[1] = -0.96375*cos(1159.75*time-1.047197551);
    omega[2] = 5.06*cos(1159.75*time-1.047197551);
}
```

Pro definování pohybu uzlů výpočetní sítě byla použita metoda vyhlazování (smoothing) obsažená ve výpočtovém systému ANSYS Fluent. Níže popsaný algoritmus této metody je vhodný pro úlohy obtékání těles s velmi malými amplitudami pohybu, kdy struktura sítě zůstává stále stejná, jednotlivé uzly pouze mění pozici, podle toho, jak se pohybuje obtékané těleso. Tato metoda, která je popsána například v příspěvku [45], vypočítá novou polohu každého uzlu sítě jako odezvu na pohyb hranice. Rychlost uzlů sítě se vypočte pomocí vztahu

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \mathbf{u}) = 0, \quad (6.4)$$

kde \mathbf{u} je vektor rychlosti sítě a γ je difúzní koeficient, který udává, jakým způsobem se pohyb v síti šíří. Jako okrajová podmínka je použita rychlost sítě na pohyblivé hranici, která je dána funkcí (6.4). Difúzní koeficient γ je vypočítán ze vzdálenosti od pohyblivé hranice d vztahem

$$\gamma = \frac{1}{d^\varepsilon}. \quad (6.5)$$

Parametr ε náleží do intervalu $(0, 2)$ a udává jak daleko od pohyblivé hranice je ovlivněna výpočetní síť. V námi řešené úloze byla hodnota parametru $\varepsilon = 2$. Vyšší hodnoty parametru zachovávají tvar buněk sítě v blízkosti pohybující se hranice a šíří pohyb dál od tělesa, což je vhodné zejména pro síť s mezní vrstvou na povrchu tělesa. V opačném případě, pro $\varepsilon = 0$ je koeficient $\gamma = 1$, což znamená, že se pohyb od kmitajícího tělesa šíří stejnoměrně. Souřadnice uzlu zdeformované sítě se pak určí následovně

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}\Delta t, \quad (6.6)$$

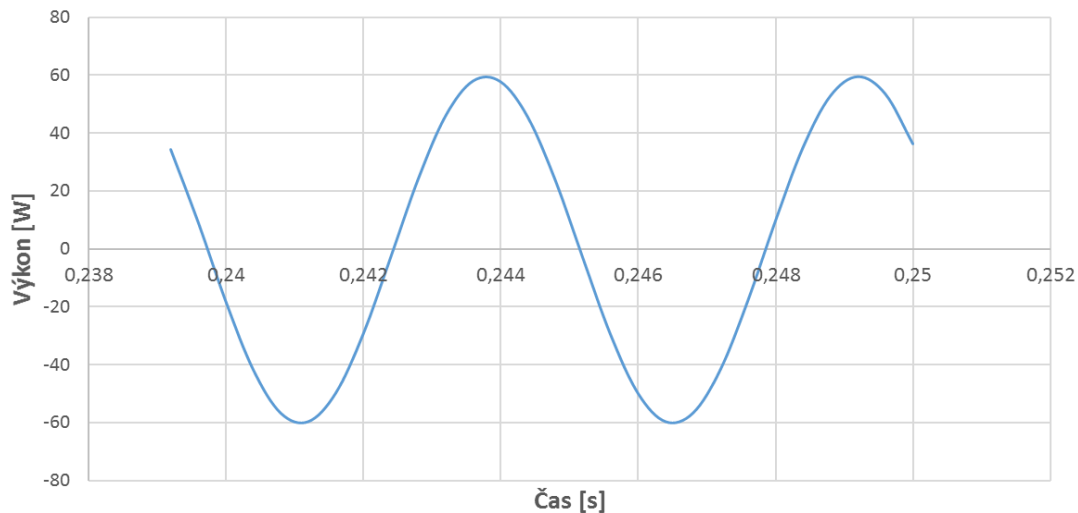
kde \mathbf{x}_0 je vektor souřadnic uzlu v předchozím časovém kroku, Δt je délka časového kroku.

6.1.2 Dosažené numerické výsledky

Protože byl pohyb lopatek pevně zadán pomocí uživatelsky definovaných funkcí (UDF), viz odstavec 6.1.1., jedná se o jednosměrnou interakci struktura – tekutina. Dosažené numerické výsledky CFD analýzy byly dále použity k posouzení možného rizika vzniku nestabilního chování referenční lopatky. Silové účinky na povrchu referenční lopatky byly vyhodnoceny pomocí nástroje CFD Post, kde byl určen výkon tekutiny P [W] pomocí vztahu

$$P = \int_l p(u n_1 + v n_2) dl, \quad (6.7)$$

kde p je tlak tekutiny působící na povrch lopatky, u resp. v jsou x -ová resp. y -ová složka vektoru rychlosti stěny profilu lopatky a n_1, n_2 jsou složky jednotkového vektoru vnější normály k hranici profilu lopatky a dl je element povrchu profilu. Graf znázorňující hodnoty výkonu tekutiny v průběhu dvou period kmitavého pohybu lopatky je na Obr. 6.7.

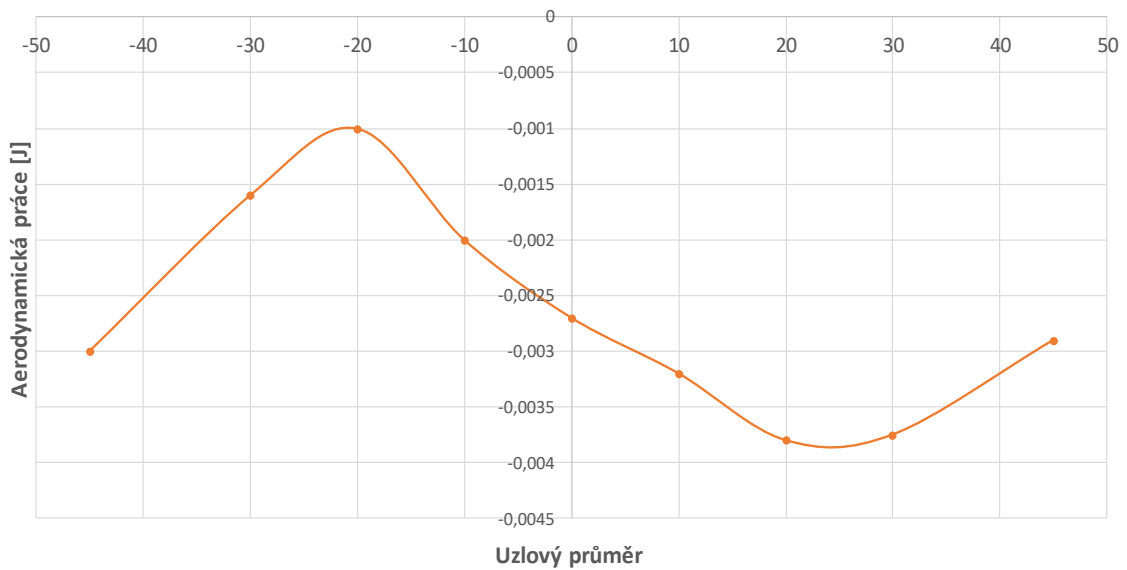


Obr. 6.7 Výkon tekutiny v průběhu dvou period kmitavého pohybu pro uzlový průměr $ND = -15$

Integrací výkonu (6.7) přes jednu časovou periodu kmitu lopatky dostáváme hodnotu aerodynamické práce tekutiny na povrchu lopatky

$$W = \int_t^{t+T} P(t) dt, \quad (6.8)$$

kde $T = 1 / 184,58 = 0,0054$ s. Hodnota aerodynamické práce byla určena pro 9 uzlových průměrů z intervalu $\langle -45, +45 \rangle$. Na Obr. 6.8 je vykreslena závislost aerodynamické práce pro celou škálu uzlových průměrů, které se mohou na disku o počtu 90ti lopatek vyskytovat. Záporná hodnota aerodynamické práce poukazuje na případ, kdy tekutina vstřebává energii lopatky, jejíž pohyb je tak utlumen. V případě, kdy je tato práce kladná, dochází k vybuzení pohybu lopatky, který se tak může stát nestabilní.

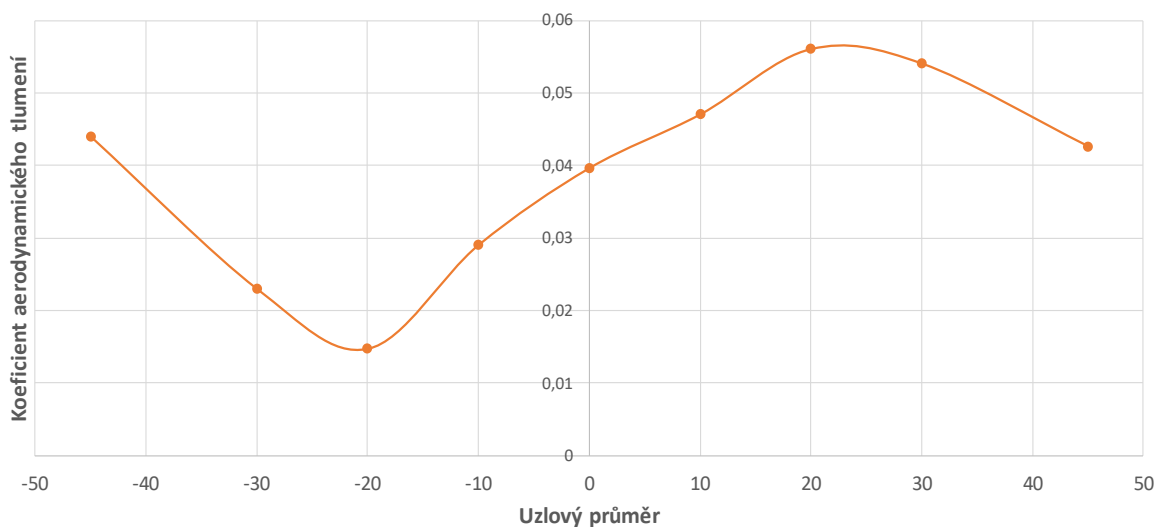


Obr. 6.8 Aerodynamická práce pro uzlové průměry z intervalu $(-45, +45)$

Z aerodynamické práce je určen koeficient aerodynamického tlumení na povrchu posuzované lopatky normováním hodnotou maximální kinetické energie.

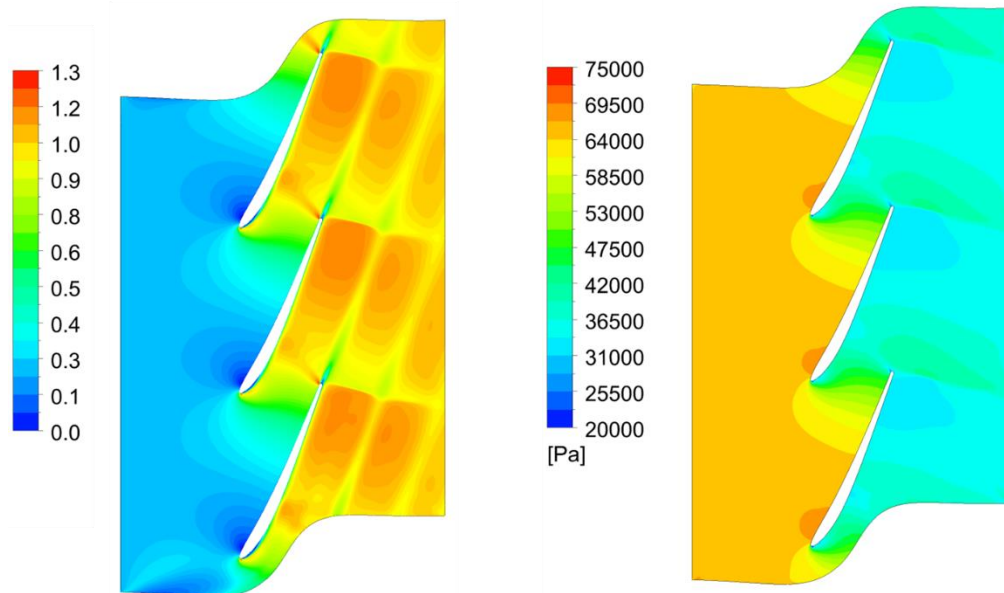
$$\Xi = -\frac{W_{ae}}{E_k} = -\frac{W_{ae}}{\frac{1}{2} m_B f^2 h_{\max}^2}, \quad (6.9)$$

kde m_B představuje hmotnost lopatky, f je frekvence kmitání a h_{\max} je maximální výchylka profilu lopatky. Na Obr. 6.9 je tento koeficient vykreslen pro celou škálu uzlových průměrů. Všechny hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení jsou kladné, pohyb lopatky by tedy měl být stabilní. Nejnižší hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení byly vypočteny pro uzlový průměr okolo hodnoty -20 a pro mezilopatkový fázový úhel $\sigma = -80^\circ$. Jedná se tedy o případ dopředné postupující vlny (*forward travelling wave*) ve směru rotace disku.



Obr. 6.9 Koeficient aerodynamického tlumení pro uzlové průměry z intervalu $(-45, +45)$

Na Obr. 6.10 jsou pro představu vykresleny isoplochy relativního Machova čísla a statického tlaku ve výpočtové oblasti pro uzlový průměr $ND = 5$, tedy pro hodnotu mezilopátkového fázového úhlu $\sigma = 20^\circ$. Relativní rychlost je často používána pro vyhodnocení proudění tekutiny v lopátkových strojích. Je to rychlost, kterou vnímá pozorovatel, který se pohybuje spolu s rotující oblastí. Relativní Machovo číslo poté vypočítáme vydělením velikosti relativní rychlosti a lokální rychlosti zvuku.



Obr. 6.10 Isoplochy relativního Machova čísla a statického tlaku ve výpočtové oblasti pro $ND = 5$, $\sigma = 20^\circ$

6.2 Predikce flutteru pomocí výpočtového systému ANSYS CFX

Ve výpočtovém systému ANSYS CFX byla provedena analýza proudění v lopátkové řadě se zaměřením na posouzení stability turbínové lopatky pomocí metod Fourierovy transformace a harmonické analýzy. Stejně jako v odstavci 6.1, byla posuzována stabilita nevázané oběžné lopatky předposledního stupně nízkotlakého dílu parní turbíny. Tedy jednalo se o totožnou lopatku. Schéma na obrázku Obr. 6.11 znázorňuje posloupnost použitých nástrojů systému ANSYS pro posouzení stability turbínové lopatky.



Obr. 6.11 Nástroje systému ANSYS použité pro posouzení stability turbínové lopatky

Modální analýza byla opět provedena ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical, výpočetní síť ve 3D oblasti byla vytvořena použitím nástroje TurboGrid, který je specializován na tvorbu sítí v oblasti turbínových strojů. Výpočtový systém ANSYS CFX obsahuje preprocesor CFX Pre, kde byly nastaveny vstupní parametry pro numerické řešení proudění tekutiny, samotné řešení bylo provedeno pomocí

nástroje CFX Solver Manager a numerické výsledky byly vyhodnoceny použitím postprocesoru CFD Post.

6.2.1 Příprava výpočtového modelu a nastavení úlohy

Ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical byla provedena modální analýza oběžné lopatky, při níž byly zjištěny její vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu popsané pomocí nenormované hodnoty výchylky. Tyto informace byly exportovány příkazem EXPROFILE do souboru s příponou *.csv. Na Obr. 6.12 je zobrazena část vygenerovaného souboru obsahující výsledky modální analýzy. Byla zjištěna vlastní frekvence o hodnotě 184,58 Hz, která je společná pro všechny uzlové průměry, protože se jedná o nevázanou lopatku. V případě vázané lopatky je potřeba provést modální analýzu pro každý řešený uzlový průměr.

```
# EXPROFILE
[Name]
pole

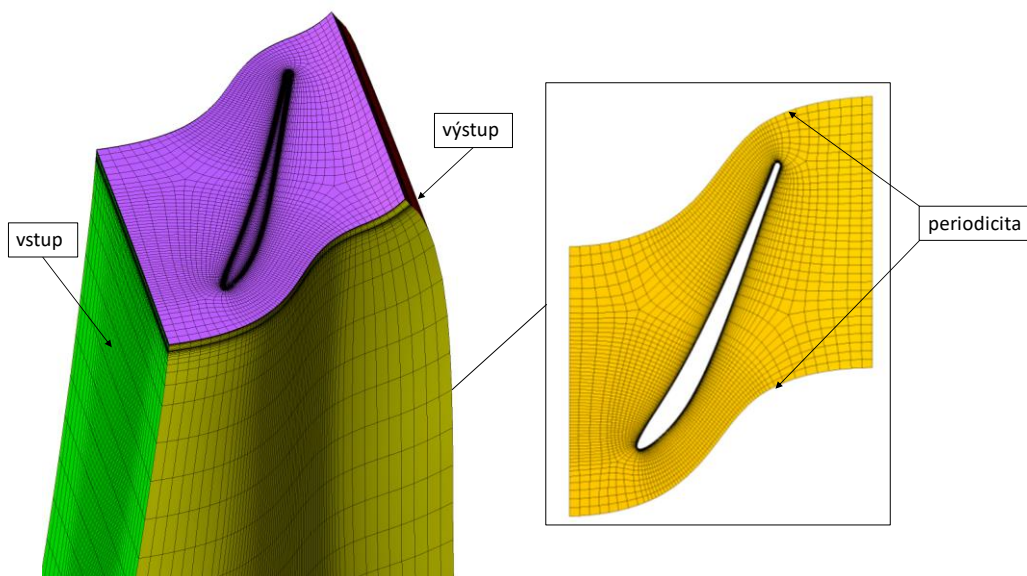
[Parameters]
Ncompt = 3
Nnodes = 3419
Mass = 7.04378518E-003 [kg]
Frequency = 184.58052 [Hz]
Maximum Displacement = 7.3481953 [mm]

[Spatial Fields]
Initial X [mm]   Initial Y [mm]   Initial Z [mm]

[Data]
Initial X [mm]   Initial Y [mm]   Initial Z [mm]   meshdisptot x [mm]   meshdisptot y [mm]   meshdisptot z [mm]
85.312834       -26.332954      1491.4175        1.3019058          -2.4090105          0.43880446
93.480488       -7.5049281     1491.6311        2.2480951          -2.8215242          0.59314833
87.570801       -22.521274     1491.48          1.4933446          -2.5228986          0.46540213
90.87381        -14.20972      1491.5823        1.9109362          -2.6898893          0.5358347
95.986718       -1.5212608     1491.6492        2.5493241          -2.9479522          0.64291921
98.56707        4.6219404     1491.6428        2.8590056          -3.07809            0.69397281
101.08583       10.77883      1491.6111        3.1698848          -3.205117           0.74569177
107.33374       23.406738     1491.4663        3.8093752          -3.5207403          0.84295588
106.52338       24.584102     1491.4474        3.8690996          -3.4793214          0.86341409
.                .                .                .                .                .
.                .                .                .                .                .
.                .                .                .                .                .
```

Obr. 6.12 Soubor s výsledky modální analýzy

Pro tvorbu výpočetní sítě byl použit nástroj TurboGrid, který je vhodný pro přípravu výpočetních sítí pro úlohy proudění v turbínových řadách, a to i pro dlouhé zkroucené lopatky, jako tomu bylo v našem případě. Zde byla vytvořena výpočetní síť s mezní vrstvou v blízkosti povrchu lopatky o 680 tis. šestistěnných elementech znázorněná na Obr. 6.13 a jednotlivým hranicím byly přiřazeny příslušné okrajové podmínky – vstup, výstup a periodicitata.



Obr. 6.13 Výpočetní síť vygenerovaná pomocí nástroje TurboGrid

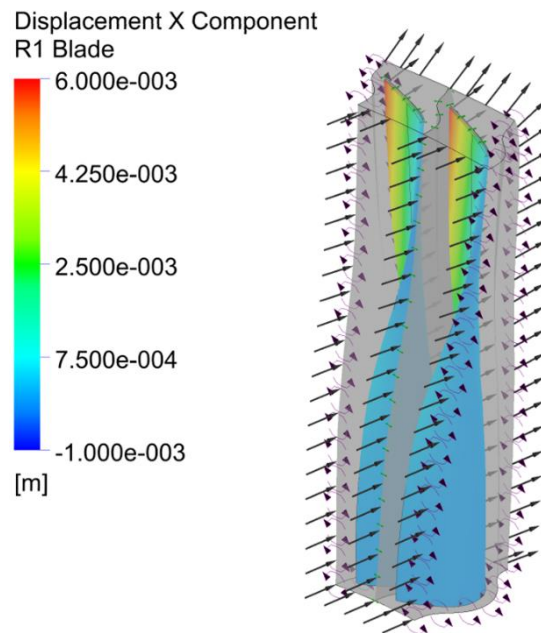
Dále byla výpočtová oblast s vytvořenou výpočetní sítí ve formátu *.msh načtena do preprocessoru CFX - Pre, kde byl lopatce pomocí profilového souboru vytvořeného ve výpočtovém systému ANSYS Mechanical, viz Obr. 6.12, předepsán pohyb a zadány okrajové podmínky. Na vstupu do výpočtové oblasti byl předepsán stagnační tlak měnící se v radiálním směru lopatky, směrový vektor rychlosti a stagnační teplota. Tyto veličiny byly do CFX načteny pomocí souboru *.csv, jehož struktura je naznačena na Obr. 6.14. Na výstupu z výpočtové oblasti byl předepsán konstantní statický tlak 36 199 Pa.

[Name]	Složky směrového vektoru rychlosti					
Inlet						
[Spatial Fields]						
r						
[Data]	r [m]	Total Pressure [Pa]	Total Temperature [K]	Axial	Radial	Theta
Vzdálenost od osy rotoru	0.929445	115620.8	379.00144	0.3635152	0.0139852	0.9314833
	0.988335	118101.28	379.00059	0.3409827	0.0889303	0.9358537
	1.047225	118559.79	379.11325	0.3074116	0.1163459	0.9444373

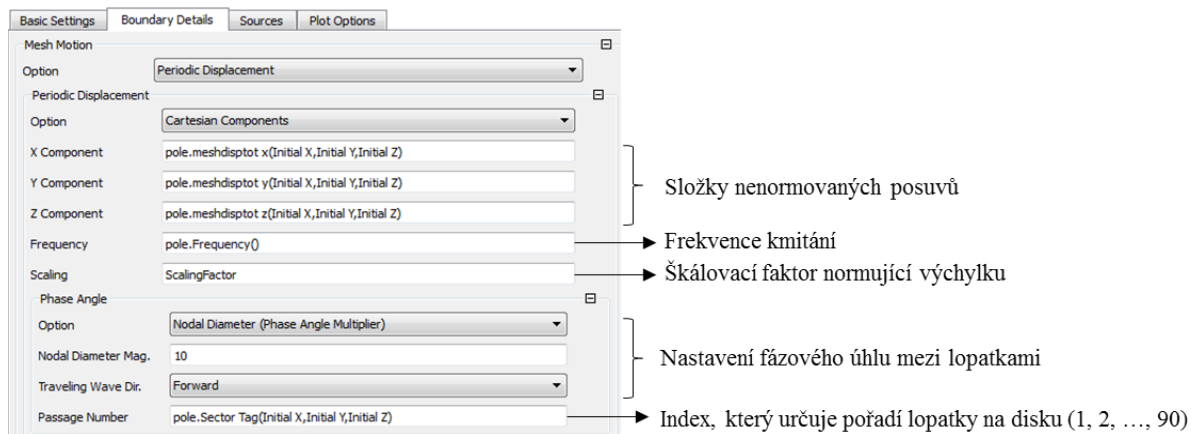
Obr. 6.14 Struktura souboru se vstupními okrajovými podmínkami pro 3D výpočtovou oblast

Do výpočtové oblasti, znázorněné na Obr. 6.15, byly nakopírovány dvě rotorové lopatky, a to jak pro případ, kdy pro řešení byla použita metoda Fourierovy transformace v časové oblasti, tak i pro úlohu řešenou pomocí metody harmonické analýzy ve frekvenční oblasti. Obecně však lze pomocí metody harmonické analýzy provést řešení pouze s jedinou lopatkou. V této disertační práci jsou ale srovnávány výsledky a výpočetní čas dosažené pomocí obou těchto metod, a proto byly do výpočtové oblasti zahrnuty v obou případech obě dvě pasáže, znázorněné na Obr. 6.15. Mezi těmito dvěma pasážemi bylo

definováno rozhraní (*sampling interface*) sloužící pro předávání dat. Vnější rozhraní definují podmínku periodicity. Každé lopatce byl pak přiřazen kmitavý pohyb definovaný frekvencí a výchylkou, jak je zobrazeno na Obr. 6.16. Tyto hodnoty jsou načteny ze souboru vygenerovaného v průběhu modální analýzy, viz Obr. 6.12. Nenormované výchylky lopatky byly upraveny pomocí škálovacího faktoru tak, aby maximální hodnota amplitudy kmitavého pohybu byla 2 mm. Tento faktor určíme vydělením požadované maximální výchylky nenormovanou maximální výchylkou vypočtenou z modální analýzy.

$$SF = \text{normovaná výchylka} / \text{nenormovaná výchylka} = 2 / 7,35 = 0,2721.$$


Obr. 6.15 Výpočtová oblast v ANSYS CFX, x – ová složka nenormované výchylky



Obr. 6.16 Definování pohybu lopatky a fázově posunutých okrajových podmínek pro $ND = 10$

Nestacionární výpočty byly provedeny pro několik hodnot uzlových průměrů, které definují počet sinusových vln, které vzniknou po obvodu disku pro dané nastavení. Pro každý uzlový průměr ND (*nodal diameter*) existuje konstantní fázový úhel σ mezi každými dvěma vedle sebe stojícími lopatkami,

kteřý závisí na počtu lopatek N_B na celém disku. V našem případě ($N_B = 90$) je vztah mezi fázovým úhlem a uzlovým průměrem následující

$$\sigma = \frac{360 \cdot ND}{N_B} = \frac{360 \cdot ND}{90} = 4 \cdot ND \text{ [}^\circ\text{]}. \quad (6.10)$$

Pro příklad zadání uvedený na Obr. 6.16 byl zvolen uzlový průměr o hodnotě 10, který tedy odpovídá fázovému úhlu 40° .

Numerické řešení proudění stlačitelné vazké tekutiny bylo prováděno implicitně pomocí Upwind schématu se zavedeným parametrem (tzv. *blending factor*), který náleží do intervalu $(0,1)$ a je určován softwarem lokálně za účelem zvýšit řád přesnosti použité numerické metody. Snahou je parametr držet co nejbližší k hodnotě 1 a v případě, že by se v řešení objevily nefyzikální oscilace, je tento parametr lokálně snížen na nulu a provedeno řešení pouze prvním řádem přesnosti. Pro řešení turbulentního proudění byla zvolena metoda FANS (*Favre Averaged Navier-Stokes*) spočívající v časovém středování nelineárního systému Navierových – Stokesových rovnic podle Favra a pro výpočet turbulentní viskozity byl zvolen dvou-rovnicový SST k-omega model turbulence.

Jako proudící médium byla zvolena náhrada páry ideálním plynem, jehož vlastnosti jsou uvedeny v Tab. 6.1 v odstavci 6.1.1.

Výpočetní systém ANSYS CFX nabízí několik možností, jak definovat ukončovací podmínku výpočtu. Mezi podmínky, které nesouvisí s konvergencí výpočtu, patří

- počet časových kroků nebo fyzikální čas, po kterém se má výpočet ukončit
- volba přerušovací podmínky, která zastaví výpočet, pokud je podmínka splněna – jedná se například o dosažení určité hodnoty zvolené veličiny v konkrétním místě.

Mezi kritéria konvergence patří ukončení výpočtu po dosažení určité hodnoty reziduí, tedy iterační chyby, která určuje odchylku aktuálního řešení od řešení v předchozí časové iteraci. V CFX je používána RMS (Root Mean Square) metoda k určování reziduí s defaultní cílovou hodnotou 10^{-4} .

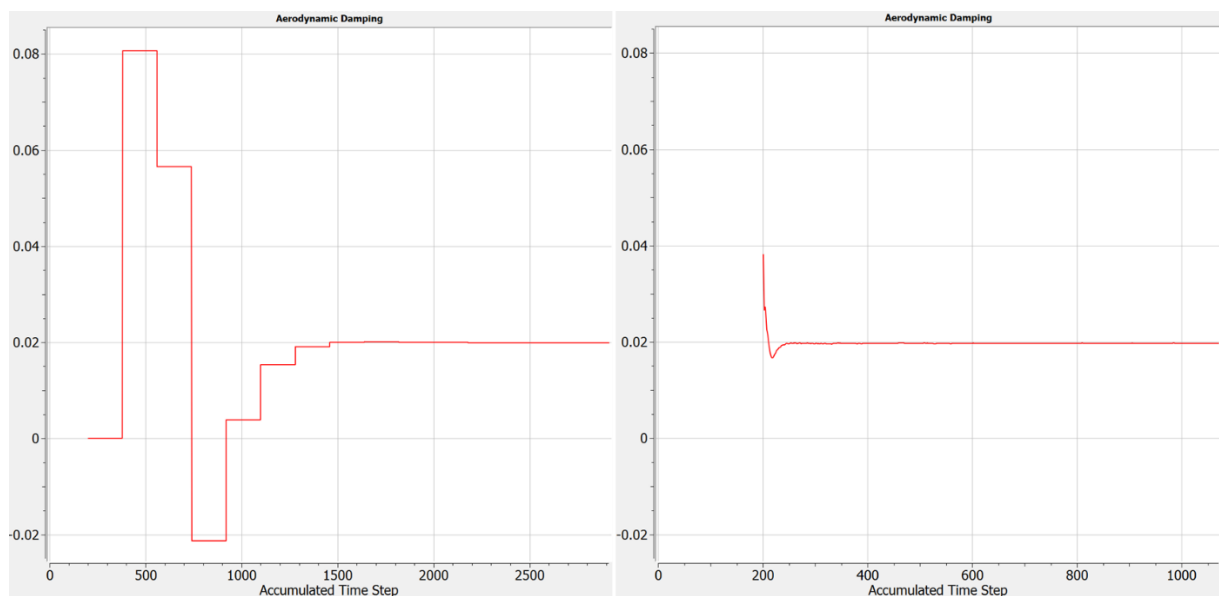
V našem případě byla pro kontrolu konvergence zvolena pevná hodnota časové škály (*Physical Timescale*) jako zlomek nejkratší časové periody vyskytující se v simulaci. V naší úloze se vyskytují dvě časové periody dané frekvencí rotace celého disku a frekvencí vibrací lopatek. Druhá zmíněná frekvence je vyšší, časová škála byla zvolena jako $(1/20) \cdot T$, kde $T = 1/f$ [s] a $f = 184,58$ [Hz]. Další možností je automaticky dopočítávaná hodnota (*Auto Timescale*), která je dopočítávána z okrajových a počátečních podmínek a mění se v průběhu výpočtu. Tato metoda je vhodná spíše pro jednodušší stacionární úlohy, nebo například pro inicializační výpočet.

Na okrajových podmínkách definujících periodicitu byla nastavena podmínka GGI (*general grid interface*), která je použitelná pro libovolné rozhraní dvou stýkajících se ploch, tedy i pro případy, kdy na sebe uzly na periodických hranicích nenavazují a jsou dovoleny i odchylky v celkovém tvaru těchto ploch.

6.2.2 Dosažené numerické výsledky

Pro inicializaci nestacionárních výpočtů bylo použito řešení získané stacionárním výpočtem na oblasti, kde žádná z lopatek nekmitá a celé oblasti je přiřazena rychlost rotoru 3000 ot/min. Ze skupiny metod TBR byly pro numerické řešení použity metoda Fourierovy transformace v časové oblasti a metoda harmonické analýzy ve frekvenční oblasti, při jejichž aplikaci pro řešení úlohy je možné přímo určit hodnotu koeficientu aerodynamického tlumení na povrchu lopatky. Tyto metody umožňují snížit počet modelovaných pasáží na jednu či dvě lopatky a řešit proudění v celé lopatkové řadě definováním mezilopatkového fázového úhlu mezi dvěma sousedícími lopatkami. V našem případě obsahovala výpočtová oblast dvě turbínové lopatky.

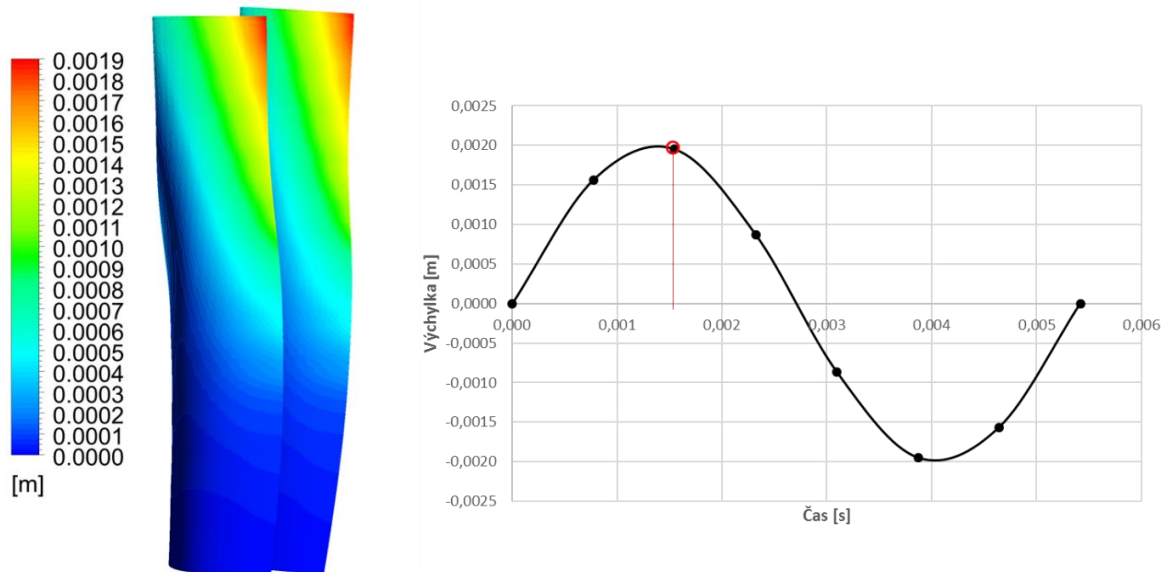
Na Obr. 6.17 (vlevo) je porovnána rychlost konvergence výpočtu při použití metody Fourierovy transformace a na Obr. 6.17 (vpravo) metody harmonické analýzy. V grafech je vykreslena hodnota koeficientu aerodynamického tlumení v závislosti na časovém kroku, která byla zaznamenávána v průběhu výpočtu při každém časovém kroku. Výpočet byl inicializován řešením stacionární úlohy a v časovém kroku $t = 200$ byl spuštěn nestacionární řešič. V případě metody Fourierovy transformace (Obr. 6.17, vlevo) zkonvergoval výpočet k ustálenému řešení po přibližně 1500 krocích. V případě metody harmonické analýzy (Obr. 6.17, vpravo) bylo řešení asi 15x rychlejší a k ustálené hodnotě koeficientu aerodynamického tlumení dospěl řešič již po necelé stovce časových kroků. Rychlost konvergence výpočtu je u analýzy flutteru důležitým faktorem při rozhodování, kterou metodu použít, protože je potřeba provést sérii výpočtů pro celou škálu uzlových průměrů.



Obr. 6.17 Porovnání rychlosti konvergence pro uzlový průměr $ND = 10$. Metoda Fourierovy transformace (vlevo), metoda harmonické analýzy (vpravo)

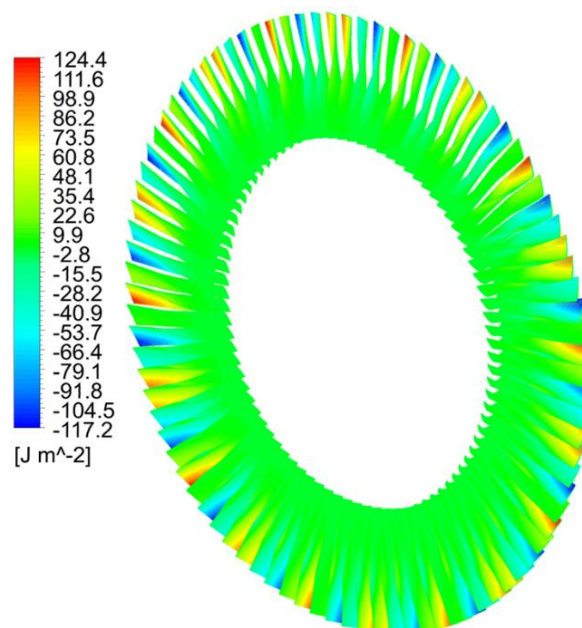
Soubor s výsledky byl dále načten do postprocesoru CFD-Post. Na Obr. 6.18 (vlevo) jsou znázorněny kontury celkové výchylky lopatky pro uzlový průměr $ND = 0$, tedy pro případ, kdy všechny lopatky

kmitají se stejným mezilopátkovým fázovým úhlem $\sigma = 0^\circ$. V grafu na Obr. 6.18 (vpravo) je zaznamenána celková výchylka lopatky v průběhu jedné periody kmitu $T = 0,0054$ s. Je zřejmé, že maximálního vychýlení z klidové polohy lopatky dosahuje bod na odtokové hraně u špičky lopatky.



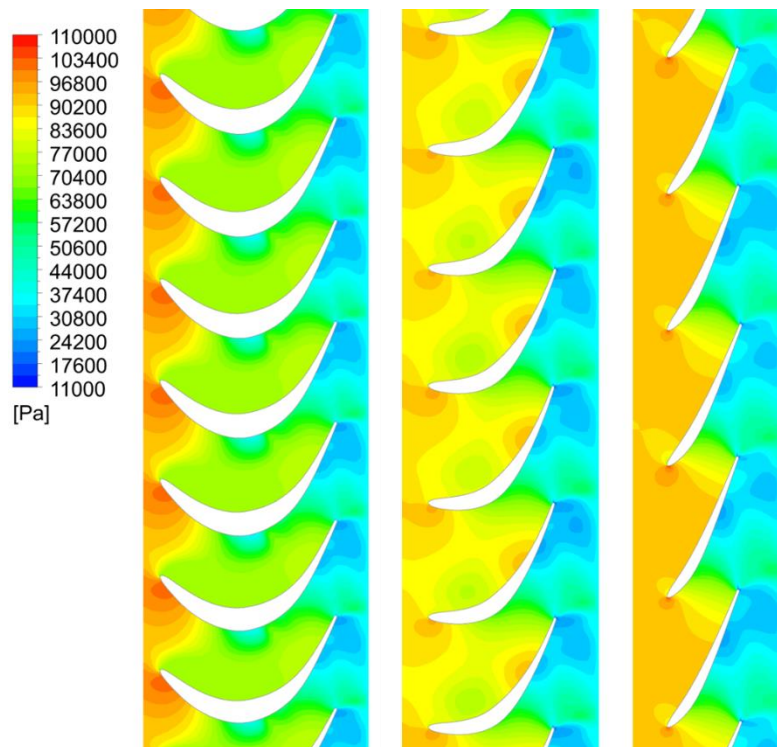
Obr. 6.18 Celková výchylka lopatky pro uzlový průměr $ND = 0$ v čase 0,00155 s (vlevo), velikost výchylky v průběhu jedné periody v místě největší deformace lopatky (vpravo)

Na Obr. 6.19 jsou pro představu znázorněny isoplochy hustoty práce na stěně lopatky (*Wall Work Density*) v libovolně zvoleném časovém okamžiku pro uzlový průměr $ND = 20$, tedy pro případ, kdy každé dvě sousední lopatky kmitají s mezilopátkovým fázovým úhlem $\sigma = 80^\circ$ a po obvodu disku vzniká dvacet sinusových vln.

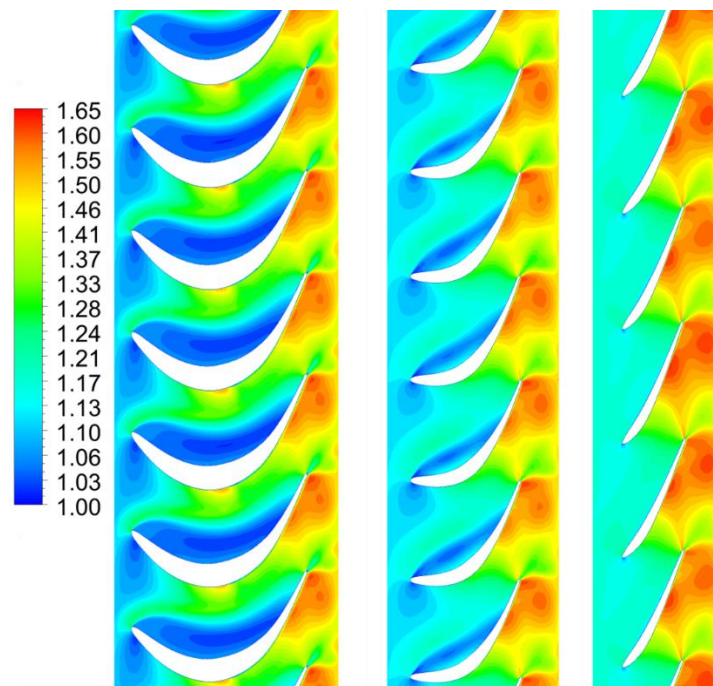


Obr. 6.19 Isoplochy hustoty práce na povrchu lopatky pro $ND = 20$

Na Obr. 6.20 je zobrazeno pole statického tlaku ve výpočtové oblasti ve třech příčných řezech lopatky (30%, 60%, 90% výšky lopatky). Na Obr. 6.21 jsou zobrazeny isoplochy relativního Machova čísla ve stejných řezech.

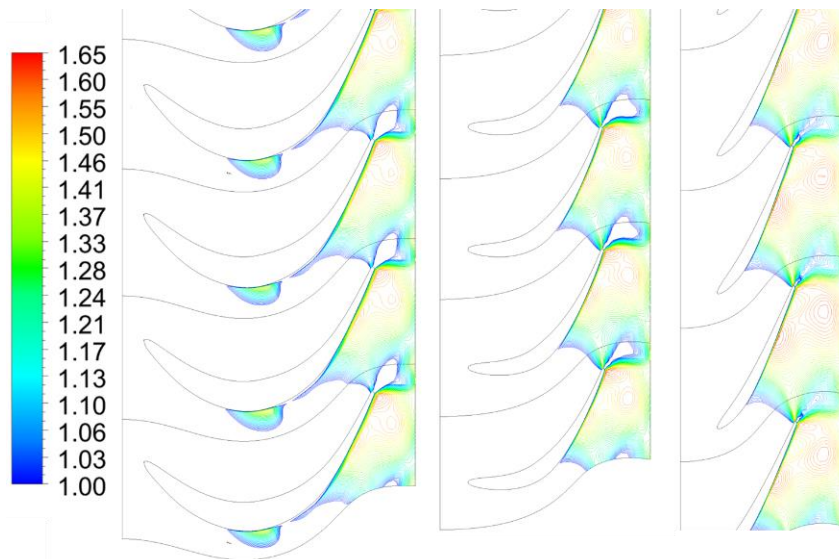


Obr. 6.20 Rozložení statického tlaku ve třech řezech lopatky. Zleva doprava: 30%, 60%, 90% výšky lopatky pro $ND = 30$



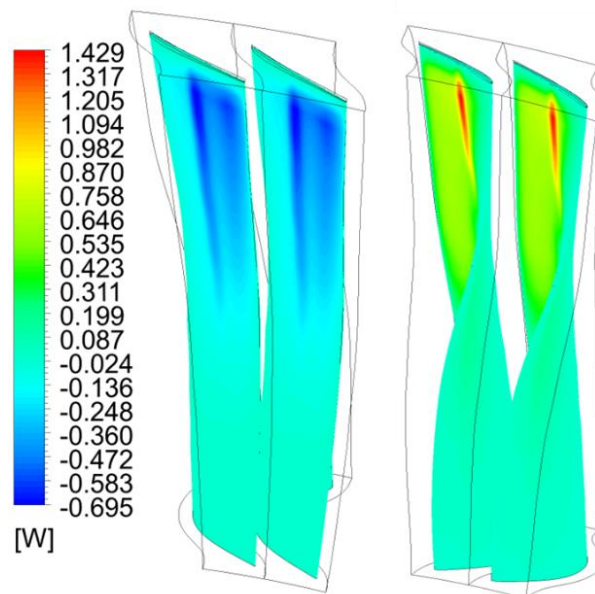
Obr. 6.21 Isoplochy relativního Machova čísla ve třech řezech lopatky. Zleva doprava: 30%, 60%, 90% výšky lopatky pro $ND = 30$

Na Obr. 6.22 jsou vykresleny opět isoplochy relativního Machova čísla ve stejných třech příčných řezech výpočtovou oblastí. Tentokrát byla barevná škála omezena na minimální hodnotu $M = 1$, aby byla viditelná místa výskytu rázových vln.



Obr. 6.22 Isoplochy relativního Machova čísla na škále omezené od $M = 1$ ve třech výškách lopatky. Zleva doprava: 30%, 60%, 90% výšky lopatky pro $ND = 30$

Z hodnoty výkonu tekutiny na povrchu lopatky na Obr. 6.23 jsou patrná nejvíce namáhaná místa.

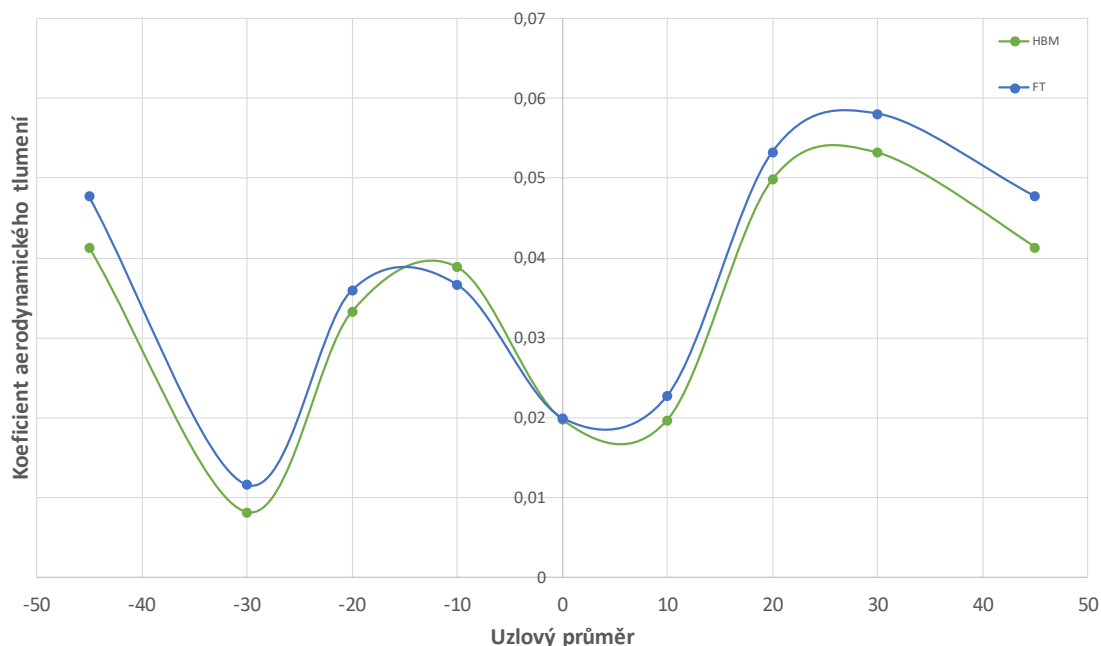


Obr. 6.23 Výkon tekutiny na povrchu lopatky pro $ND = 0$

Pro všechny uzlové průměry z intervalu $\langle -45, +45 \rangle$ byl vyhodnocen koeficient aerodynamického tlumení. V grafu na Obr. 6.24 je vykreslena závislost koeficientu aerodynamického tlumení na jednotlivých uzlových průměrech, kdy jsou porovnány výsledky získané metodou Fourierovy transformace a metodou harmonické analýzy. V případě, že je tato hodnota kladná, bude

lopatka stabilní. V případě, kdy by hodnota koeficientu aerodynamického tlumení pro některý uzlový průměr vyšla záporná, není ještě jisté, zda nastane flutter. Na pohyb lopatky má totiž také vliv mechanické tlumení (třecí síly) a materiálové tlumení.

Výsledky obou metod se téměř shodují, ale významným rozdílem mezi těmito dvěma metodami je časová náročnost výpočtu, kdy řešení pomocí metody harmonické analýzy ve frekvenční oblasti zkonvergovalo k ustálené hodnotě za 15x kratší čas, než při řešení v oblasti časové, viz Obr. 6.17.



Obr. 6.24 Koeficient aerodynamického tlumení – porovnání výsledků při použití metody Fourierovy transformace (FT) a metody harmonické analýzy (HBM)

6.3 Zhodnocení dosažených výsledků a diskuse

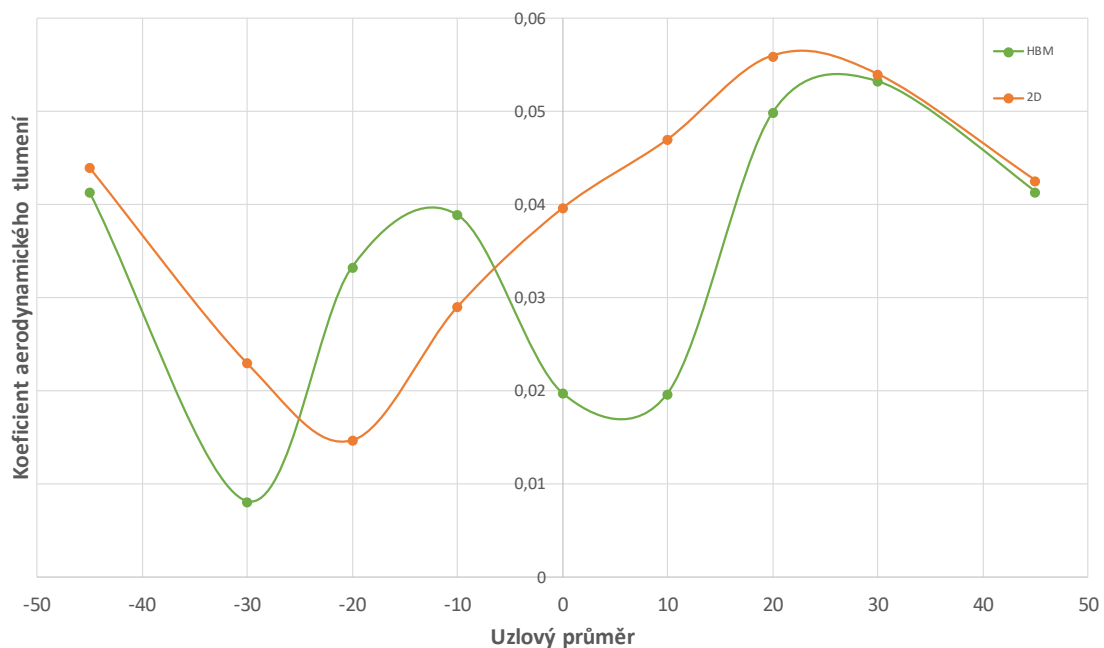
Hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení uvedené v grafu na Obr. 6.24, které byly získány pomocí 3D numerických simulací použitím metody harmonické analýzy obsažené ve výpočtovém systému ANSYS CFX, byly dále porovnány s výsledky uvedenými v grafu na Obr. 6.9, kterých bylo dosaženo prostřednictvím 2D numerických simulací provedených pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent a popsaných v kapitole 6.1. V obou případech vychází hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení kladné pro všechny uzlové průměry a všechny hodnoty spadají do intervalu (0,01; 0,06). Pro některé vyšší hodnoty mezilopatkového fázového úhlu se hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení získané pomocí obou metod relativně shodují, ale obecně se tyto hodnoty pro jednotlivé uzlové průměry spíše liší, jak je zřejmé z Obr. 6.25.

Závěrem lze tedy říci, že 2D analýza flutteru není zřejmě pro dlouhé tenké a zkroucené lopatky zcela vhodná a spolehlivá, protože bylo provedeno příliš velké zjednodušení 3D modelu na jediný 2D profil. Tvar 2D řezů v radiálním směru se mezi patou a špičkou lopatky ale zásadně mění. Avšak

pro posuzování stability rovných lopatek (o prizmatickém průřezu) by mohla být tato metoda vhodná, tedy pro takové případy, které jsou uvedeny například v literatuře [34] a [48].

2D analýza by pro tyto případy mohla představovat nástroj, který snižuje výpočetní náročnost problému, protože pro posouzení stability jediné turbínové lopatky je potřeba provést celou sérii časově náročných nestacionárních výpočtů a ukládat velké množství dat. Výpočtový čas a nároky na úložný prostor v počítači navyšují navíc série numerických simulací, které je nutné provést před samotnou analýzou stability lopatky, aby tak byly zajištěny numerické výsledky nezávislé na kvalitě výpočetní sítě. Tyto výpočty byly provedeny i pro všechny zde uvedené případy.

Je ovšem nutné poznamenat, že i 3D analýza pomocí výpočtového systému ANSYS CFX je založená na mnohých zjednodušeních, především vychází z předpokladu identických lopatek na celém disku a na periodickém charakteru proudového pole vystupujícího z rozváděcího kola. Nicméně je postačujícím a efektivním pomocníkem při návrhu turbínových lopatek v inženýrské praxi, a to obzvláště díky možnosti numerického řešení pomocí metody harmonické analýzy. Výhodou 3D analýzy pomocí výpočtového systému ANSYS CFX je také bezesporu možnost přímého vyhodnocení koeficientu aerodynamického tlumení, což v případě 2D analýzy ve výpočtovém systému ANSYS Fluent představovalo poměrně složitý proces, který by bylo potřeba zautomatizovat například pomocí vlastní uživatelsky definované funkce.



Obr. 6.25 Koeficient aerodynamického tlumení – porovnání výsledků 2D CFD analýzy provedené pomocí výpočtového systému ANSYS Fluent a výsledků metody harmonické analýzy (HBM) pro 3D případ řešený pomocí výpočtového systému ANSYS CFX

7. Závěr

Předkládaná disertační práce je věnována problematice modelování aeroelastických jevů, se zaměřením na metody predikce nestabilního chování lopatek parních turbín.

V prostředí Matlab byl vytvořen výpočetní software určený pro numerické řešení proudění stlačitelné neviské tekutiny na nepohyblivých oblastech a na oblastech s pohyblivou hranicí. Vyvinutý výpočetní software byl validován na testovacích úlohách vnitřní i vnější aerodynamiky. Pro případ proudění v nepohyblivých oblastech byla vybrána úloha transonického proudění v GMM kanálu a obtékání leteckého profilu NACA 0012. Dále bylo modelováno proudění stlačitelné neviské tekutiny okolo kmitajícího profilu NACA 0012, jehož pohyb byl zadán časově závislou funkcí. Numerické výsledky získané pomocí vlastního softwaru byly porovnány s experimentálně naměřenými daty a s numerickými výsledky dostupnými v literatuře. Z těchto porovnání lze říci, že byla zvládnuta metodika modelování proudění stlačitelné neviské tekutiny na rovinných oblastech s pohyblivou hranicí. Výpočetní software je dále možné použít pro modelování proudění okolo složitějších těles - např. turbínových lopatek a poté pro posouzení jejich stability výpočtem aerodynamické práce tekutiny na povrchu lopatek.

Dlouhodobou motivací mé vědecko – výzkumné činnosti v rámci doktorského studia a projektu Centra kompetence TE01020068 CESEN „Centrum výzkumu a experimentálního vývoje spolehlivé energetiky“ Technologické agentury ČR byl vývoj metodiky pro rychlou predikci flutteru turbínových lopatek podle metody navržené autory Kielb a Panovsky, a to obzvláště se zaměřením na posuzování stability dlouhých zkroucených lopatek. Tato metoda je založena na 2D analýze proudění páry v lopatkové řadě. Dalším krokem mé práce bylo tedy modelování obtékání tří 2D profilů turbínových lopatek, jejichž pohyb byl zadán časově závislou funkcí s daným konstantním mezilopatkovým fázovým úhlem mezi každými dvěma sousedícími lopatkami. Cílem numerického řešení bylo pak určení stability referenční lopatky podle přístupu popsaného v páté kapitole této práce. S ohledem na komplexnost řešené úlohy, kdy bylo nutné do výpočtu zahrnout i např. modelování turbulentního proudění a vzhledem k časové náročnosti řešeného problému, byly pro řešení zvoleny nástroje obsažené v systému ANSYS. Konkrétně pro analýzu proudění byl použit výpočtový systém ANSYS Fluent. Navržená metodika a dosažené numerické výsledky jsou popsány v kapitole 6.1. Numerické simulace byly provedeny pro nevázanou oběžnou lopatku předposledního stupně nízkotlakého dílu parní turbíny.

Metodika predikce flutteru turbínových lopatek založená na 2D analýze proudění tekutiny nemusí být zcela vhodná pro případy dlouhých zkroucených turbínových lopatek. Další část práce byla tedy zaměřena na obtékání celé 3D turbínové lopatky, kdy se opět jednalo o stejnou oběžnou lopatku předposledního stupně parní turbíny jako v kapitole 6.1. Efektivním nástrojem pro modelování proudění v lopatkových řadách je výpočtový systém ANSYS CFX. Jeho výhodou jsou metody TBR (*Transient*

Blade Row), které umožňují zjednodušit výpočetní model na jednu či dvě lopatkové pasáže z každého olopatkovaného disku za předpokladu periodického chování proudového pole a tvarově shodných lopatek na disku. Pro řešení byly použity metoda Fourierovy transformace v časové oblasti a metoda harmonické analýzy ve frekvenční oblasti, jejichž princip byl stručně popsán v odstavci 5.2.2. Bylo zjištěno, že metoda harmonické analýzy je výrazně časově méně náročná než metoda Fourierovy transformace, přičemž obě metody dávají téměř stejné výsledky. Hodnoty koeficientu aerodynamického tlumení získané pomocí 2D a 3D analýzy jsou porovnány v odstavci 6.3, kde je také posouzena vhodnost použití 2D analýzy pro náš případ dlouhých zkroucených lopatek.

Uvedená řešení problému analýzy flutteru turbínové lopatky, popsaná v šesté kapitole této disertační práce, mohou být přínosem a inspirací pro výrobce parních turbín. V Západočeském regionu je to zejména Doosan Škoda Power s.r.o., pro které je při navrhování turbínových lopatek kromě spolehlivosti výsledků provedených analýz lopatky důležitá i rychlost dosažení optimálního návrhu tvaru lopatky. Z důvodů, které již byly uvedeny výše, bych v inženýrské praxi volila právě použití postupu popsaného v kapitole 6.2 a pro CFD analýzu ve výpočtovém systému ANSYS CFX bych zvolila metodu harmonické analýzy.

Další výzkum by mohl vést například k posuzování stability vázaných lopatek pomocí metod obsažených ve výpočtovém systému ANSYS CFX, případně prostřednictvím 2D analýzy ve výpočtovém systému ANSYS Fluent. Zde by bylo potřeba celý proces více zautomatizovat a vytvořit skripty, pomocí kterých by byly například zjišťovány funkce popisující kmitavý pohyb profilu na základě výsledků modální analýzy nebo pak vytvořit funkci, která by z hodnot proudového pole vypočetla aerodynamickou práci na povrchu profilu a poté určila koeficient aerodynamického tlumení pro daný uzlový průměr. 2D analýzu bych ovšem z výše uvedených důvodů volila spíše pro rovné nezkroutené lopatky.

Literatura a podklady

- [1] Antecký, T.: Flutter a jeho řešení v prostředí ANSYS. Příspěvek na konferenci Turbostroje 2013, Praha, 2013.
- [2] Barth, T., Jespersen, D.: The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA Paper, 89(0366), 1989.
- [3] Bathe, K., J., Zhang, H.: Finite element developments for general fluid flows with structural interactions. Journal for Numerical Methods in Engineering, 60: pp. 213-232, 2004.
- [4] Belytschko, T., Kennedy, J. M.: Computer models for subassembly simulation. Nuclear Engineering and Design, 49, pp. 17-38, 1978.
- [5] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B.: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [6] Bölcş, A., Fransson, T. H.: Aeroelasticity in Turbomachines. Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results. Switzerland, 1986.
- [7] Bublík, O.: Aplikace nespojité Galerkinovy metody konečných prvků na řešení úloh mechaniky tekutin. Disertační práce, ZČU v Plzni, Plzeň, 2015.
- [8] Bublík, O., Vimmr, J., Jonášová, A.: Numerical solution of compressible flow problems using the finite volume flux-vector splitting schemes on unstructured meshes. In Engineering Mechanics 2009. Prague: Institute of Theoretical and Applied Mechanics AS CR, pp. 147-158, 2009.
- [9] Byrtus, M., Hajžman, M., Zeman, V.: Dynamika rotujících soustav. Západočeská univerzita v Plzni, 2010.
- [10] Campbell, R., L.: Fluid-Structure Interaction And Inverse Design Simulations For Flexible Turbomachinery. Ph.D. thesis, The Pennsylvania State University, Pennsylvania, 2010.
- [11] Campbell, R., L., Paterson, E., G.: Fluid-structure interaction analysis of flexible turbomachinery. Journal of Fluids and Structures, 27(8):13761391, 2011.
- [12] Carta, F., O.: Coupled Blade-Disk-Shroud Flutter Instabilities in Turbojet Engine Rotors. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 89, 419-426, 1967.
- [13] Collar A. R.: The expanding domain of aeroelasticity. Journal of the Royal Aeronautical Society 51, pp. 1-34, 1947.
- [14] Donea, J., Fasoli-Stella, P., Giuliani, S.: Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. Trans. 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paper B1/2, San Francisco, 1977.
- [15] Donea, J., Huerta, A.: Finite Element Methods for Flow Problems. John Wiley & Sons, Chichester, 2003.
- [16] Ekici, K., Kielb, R., E., Hall, K., C.: The effect of aerodynamics asymmetries on turbomachinery flutter. Journal of Fluids and Structures, 2012.

- [17] Farhat, C., Lesoinne, M.: Two Efficient Staggered Algorithms for the Serial and Parallel Solution of Three-dimensional Nonlinear Transient Aeroelastic Problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pp. 499–516, 2000.
- [18] Feistauer, M., Felcman, J., Straškaba, I.: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, 2003.
- [19] Feistauer, M., Hasnedlová, J., Horáček, J., Kosík, A., Kučera, V.: DGFEM for dynamical systems describing interaction of compressible fluid and structures. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 254, pp. 17-30, 2013.
- [20] Frank, R. M., Lazarus, R. B.: Mixed Eulerian-Lagrangian method. *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, Academic Press New York, pp. 47-67, 1964.
- [21] Fransson, T., H., Verdon, J., M.: Updated report on "Standard Configurations for Unsteady Flow Through Vibrating Axial-Flow Turbomachine-Cascades", 1991.
- [22] Furmánek, P., Fürst, J., Kozel, K.: ALE method for unsteady flow computations. *ECCOMAS CFD 2010, CD-ROM, ECCOMAS, Lisabon, 2010*.
- [23] Galpin, P. F., Broberg, R. B., and Hutchinson, B. R.: Three-dimensional Navier Stokes predictions of steady state rotor/stator interaction with pitch change. *Third Annual Conference of the CFD Society of Canada, June 25–27, Banff, Alberta, Canada, 1995*.
- [24] Gopinath, A. K., Weide, E., Alonso, J.J., Jameson, A.: Three-Dimensional Unsteady Multi-stage Turbomachinery Simulations using the Harmonic Balance Technique. *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings, Reno, Nevada, 2007*.
- [25] Hall, K. C., Lorence, C. B.: Calculation of Three-Dimensional Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Harmonic Euler Equations. *Transactions of the ASME: Journal of Turbomachinery*, 115(4), pp. 800-809, 1993.
- [26] Hall, K. C., Thomas, J. P., Clark, W. S.: Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique. *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, May 2002.
- [27] He, L.: An Euler solution for unsteady flows around oscillating blades. *Journal of Turbomachinery*, Vol. 112(4), 1990.
- [28] He, L.: Fourier methods for turbomachinery applications. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 46, Issue 8, pp. 329-341, 2010.
- [29] Hirt, C. W., Amsden, A. A., Cook, J. L.: An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, Number 3, pages 227–253, March 1974.
- [30] Hughes, T. J. R., Liu, W. K., Zimmermann, T. K.: Lagrangian-Eulerian finite elements formulations for incompressible viscous flows. *US-Japan Interdisciplinary Finite Element Analysis*, 1978.
- [31] Kehoe, M., W.: A Historical Overview Of Flight Flutter Testing. *NASA-TM-4720. Conference AGARD Structures and Material Panel Meeting, Rotterdam, 1995*.

- [32] Kellner, J.: Kmitání turbínových lopatek olopatkovaných disků. Disertační práce, ZČU v Plzni, Plzeň, 2009.
- [33] Kersken, H. P., Frey, C., Ashcroft, G.: Flutter analysis of an embedded blade row with a harmonic balance solver. Proceedings of 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics and Thermodynamics ETC12, Stockholm, 2017.
- [34] Kielb, R. E., Barter, J., Chernysheva, O., Fransson, T.: Flutter of Low Pressure Turbine Blades with Cyclic Symmetric Modes: A Preliminary Design Method. Journal Of Turbomachinery-transactions Of The ASME, Vol. 126, No. 2, pp. 306 – 309, 2004.
- [35] Kielb, R. E.: Turbomachinery Aeromechanics. Přednáškový kurz, Plzeň, 2013.
- [36] Landon, R., H.: NACA 0012. Oscillatory and transient pitching. Compendium of unsteady aerodynamics measurements, AGARD Report 702, pp. 3-1 – 3-25, 1982.
- [37] Marshall, J., G., Imregun, M.: A Review of Aeroelasticity Methods with Emphasis on Turbomachinery Applications. Journal of Fluids and Structures, Vol.10, No. 3, pp. 237–267, 1996.
- [38] Noh, W. F.: CEL: A Time-Dependent, Two-Space-Dimensional, Coupled Eulerian-Lagrangian Code. Methods in Computational Physics, Vol. 3, Academic Press New York, pp. 117-179, 1964.
- [39] Nowinski, M., Panovsky, J., Bölcs, A.: Flutter Mechanisms in Low Pressure Turbine Blades. ASME Gas Turbine Conference and Exhibition, Stockholm, Sweden, June, 1998.
- [40] Panovsky, J.: Flutter of Aircraft Engine Turbine Blades. Ph.D. thesis, University of Cincinnati, Cincinnati, OH, 1997.
- [41] Panovsky, J., Kielb, R. E.: A Design Method to Prevent Low Pressure Turbine Blade Flutter. ASME Paper No. 98-GT-575, 2000.
- [42] Persson, P., O., Bonet, J., Peraire, J.: Discontinuous Galerkin solution of the Navier – Stokes equations on deformable domains. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, Issue 17-20, Elsevier, pp. 1585-1595, 2009.
- [43] Platzer, M., Carta, F.: AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-flow Turbomachines. Vol. 1, Unsteady Turbomachinery Aerodynamics. 1987.
- [44] Qi, D., Petrie-Repar, P., Gezork, T., Sun, T.: Establishment of an Open 3D Steam Turbine Flutter Test Case. Proceedings of 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics ETC12, ID: ETC2017-315, Stockholm, Sweden, 2017.
- [45] Řídký, V., Šidlov, P.: Numerical simulation of deformation of dynamic mesh in the human vocal tract model. EPJ Web of conferences, Vol. 92, (2015).
- [46] Sisto, F.: Introduction and Overview. AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-flow Turbomachines, Vol. 1, Unsteady Turbomachinery Aerodynamics, pp. 1-1 – 1-12, 1987.
- [47] Strnad, J., Liška, J.: Diagnostic methods of a bladed disc mode shape evaluation used for shrouded blades in steam turbines. Journal of Physics: Conference Series, Volume 659, n. 1, pp. 1-8, 2015.
- [48] Teixeira, M., Kielb, R. E.: Tip Clearance Influence on Aerodynamic Damping Maps. Proceedings of 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics ETC12, ID: ETC2017-300, Stockholm, Sweden, 2017.

- [49] Thomas, P. D., Lombard, C. K.: Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids. *AIAA Journal*, 17(10):1030–1037, 1979.
- [50] Trepanier, J. Y., Reggio, M., Zhang, H., Camarero, R.: A finite-volume method for the Euler equations on Arbitrary Lagrangian-Eulerian grids. *Computers and fluids*, Vol. 20, Issue 4, pp. 399-409, 1991.
- [51] Trulio, J. G.: Theory and Structure of the AFTON Codes. Report AFWL-TR-66-19, Air Force Weapons Laboratory: Kirtland Air Force Base, 1966.
- [52] Vampola, T., Horáček, J.: Simulation of vibration of the human vocal folds. In: 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN 2014, Porto, Portugal, 2014.
- [53] Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. *Journal of Computational Physics*, Vol. 135, Issue 2, pp. 229-248, 1977.
- [54] Vassberg, J. C., Jameson, A.: In Pursuit of Grid Convergence, Part I: Two-Dimensional Euler Solutions. AIAA Paper 2009-4114, Texas, 2009.
- [55] Vimmr, J.: Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice, Disertační práce, ZČU v Plzni, Plzeň, 2002.
- [56] Whitehead, D., S.: Bending Flutter of Unstalled Cascade Blades at Finite Deflection, A. R. C. R & M. No. 3386, 1962.
- [57] Zeman, V., Hlaváč, Z.: Kmitání mechanických soustav. Skripta FAV ZČU v Plzni, Plzeň, 2004.

Publikace autorky související s tématem disertační práce

- [A1] Klečková, J., Hamza, J.: Inviscid compressible fluid flow around moving bodies. In: CD-ROM Book of Extended Abstracts of the 17th International Scientific Conference Applied Mechanics 2015, pp. 37-38, Kutná Hora, 2015. ISBN 978-80-01-05708-7
- [A2] Klečková, J.: Modelování proudění neviské tekutiny v oblastech s pohyblivou hranicí. In: Sborník rozšířených abstraktů ze Studentské vědecké konference FAV, pp. 21-22, ZČU v Plzni, 2015. ISBN 978-80-261-0505-3
- [A3] Klečková, J.: Numerical simulation of inviscid fluid flow in time-dependent domains. In: Sborník abstraktů 2. mezinárodní vědecké konference Experimentální a výpočtové metody v inženýrství, Litoměřice, 2015. ISBN: 978-80-7414-922-1
- [A4] Klečková, J.: Numerical simulation of inviscid compressible fluid flow around moving bodies, In: Manufacturing Technology, Vol. 15, No. 5, Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2015. ISSN: 1213-2489
- [A5] Klečková, J.: Modelování aeroelastických jevů v parních turbínách. Teze ke státní doktorské zkoušce, ZČU v Plzni, 2016.
- [A6] Klečková, J.: ALE přístup pro modelování proudění neviské stlačitelné tekutiny. In: Zborník abstraktov z medzinárodnej vedeckej konferencie 35. Stretnutie katedier mechaniky tekutín a termomechaniky, pp. 49-50, Čilistov, STU v Bratislavě, 2016. ISBN: 978-80-227-4567-3
- [A7] Klečková, J.: ALE approach for modeling of inviscid compressible fluid flow. In: Proceedings of the 35th Meeting of Departments of Fluid Mechanics and Thermomechanics, Vol. 1768, n. 020005, AIP, 2016. ISBN: 978-0-7354-1426-6
- [A8] Klečková, J., Hamza, J.: CFD method of prediction of turbine blade flutter. In: Book of extended abstracts of the 32nd Conference with International Participation Computational Mechanics 2016, pp. 51-52, ZČU v Plzni, Špičák, 2016. ISBN: 978-80-261-0647-0
- [A9] Klečková, J., Hamza, J.: Numerical simulations of steam flow around vibrating turbine blade. In: Book of Full Texts of the 24th International Conference Engineering Mechanics 2017, pp. 462-465, Svratka, 2017. ISBN 978-80-214-5497-2

Výzkumné zprávy

- [A10] Klečková, J.: Metody predikce nestability lopatek nízkotlakých dílů parních turbín. Výzkumná zpráva VYZ-1533/2013, Výzkumný a zkušební ústav Plzeň s.r.o., 2013.
- [A11] Klečková, J., Bublík, O., Hamza, J., Vimmr, J.: CFD analýza kmitajícího 2D profilu oběžné lopatky nízkotlakého dílu parní turbíny. Výzkumná zpráva VZ-36/16/024, Výzkumný a zkušební ústav Plzeň s.r.o., 2016.
- [A12] Klečková J., Hamza J.: Proudění páry v turbínách pomocí softwaru ANSYS CFX. Výzkumná zpráva VZ-36/17/072, Výzkumný a zkušební ústav Plzeň s.r.o., 2017.