VYUŽITÍ POČÍTAČOVÉ SIMULACE V ŘEŠENÍ VYBRANÝCH APOLLONIOVÝCH A PAPPOVÝCH ÚLOH

USING COMPUTER SIMULATION TO SOLVE SELECTED APOLLONIUS' AND PAPPUS' PROBLEMS

Jan Frank

Abstrakt

Programy dynamické geometrie, jakým je například GeoGebra, představují ideální možnost aplikace kognitivních technologií v hodinách matematiky na základních a středních školách. Učiteli dávají možnost využít badatelský přístup k vyučování a řešit klasické matematické problémy inovativním způsobem s využitím moderních počítačových technologií. Příspěvek je věnován simulačním možnostem programu GeoGebra aktuální verze 6.0 v kontextu školské geometrie a využití počítačové simulace při řešení vybraných Apolloniových a Pappových úloh.

Klíčová slova: *počítačová simulace, kognitivní technologie, GeoGebra, badatelský přístup, Apolloniovy úlohy, Pappovy úlohy*

Abstract

The software of dynamic geometry GeoGebra is an ideal means of using cognitive technology in mathematics lessons at elementary and secondary schools. Teachers can use the research approach to teaching and can solve classical mathematical problems in an innovative way using modern computer technologies. The paper is devoted to simulation possibilities of software GeoGebra current version 6.0 in the context of geometry at school level and the use of computer simulation to solve selected Apollonius' and Pappus' problems.

Key words: *computer simulation, cognitive technology, GeoGebra, research approach, Apollonius' problems, Pappus' problems*

1 Úvod a možnosti programů dynamické geometrie

Jedním z aktuálních požadavků českého školství je nasazení ICT, respektive kognitivních technologií, napříč vyučovanými předměty na základních a středních školách. V hodinách matematiky hovoříme v této souvislosti o využití matematického softwaru – například programů počítačové algebry (CAS) nebo programů dynamické geometrie (DGE). Jedním ze zástupců programů dynamické geometrie s licencí typu *open-source* je program GeoGebra. V současné době se jedná o jeden ze světově nejrozšířenějších programů pro podporu výuky a studia matematiky. Získat jej lze bezplatně v současně nejaktuálnější verzi GeoGebra 6.0 na internetových stránkách *www.geogebra.org* a to v celé řadě jazyků, včetně češtiny. Z dalších zástupců programů DGE bychom mohli uvést například Cabri, Cinderella nebo Sketchometry coby zástupce programů dynamické geometrie pro dotyková zařízení [5].

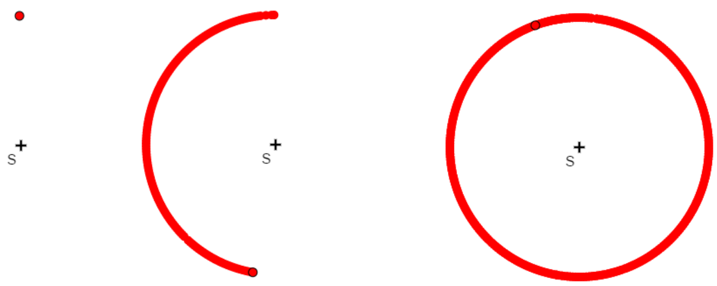
První prostředí interaktivní geometrie (programy DGE) byla vyvinuta a následně nasazena do výuky v druhé polovině 80. let a jednalo se například o již zmíněný program Cabri, dále lze uvést program Sketchpad. V českých školách se tento, již zdokonalený, software objevuje ve výuce matematiky po roce 2000. V současné době vykazují v prostředí českých škol programy dynamické geometrie nejvyšší míru didaktické použitelnosti a učiteli základních a středních škol je tento software používán nejvíce [7].

Programy dynamické geometrie obecně představují možnost velmi rychlé a naprosto přesné konstrukce geometrické figury. Jejich přidanou hodnotou jsou pak nástroje dynamiky, kdy je možné oproti konstruování na papíře s výslednou figurou dále pracovat (manipulovat), například měnit vstupní hodnoty, polohy bodů a jiných útvarů, případně sestrojené figury zvýrazňovat (obarvovat). Též je možné nechat automaticky určit obsahy a obvody rovinných geometrických útvarů nebo určovat velikosti úhlů. Základní nástroje dynamiky v prostředí programů dynamické geometrie, které lze využívat při simulaci geometrických konstrukcí a určování významných vlastností nebo rozhodování o počtu řešení, jsou uvedeny dále.

1.1 Základní nástroje dynamiky

Zřejmě nejzákladnějším nástrojem programů DGE je *manipulace* a jedná se právě o prvek, který odlišuje konstruování v počítači oproti konstrukcím pomocí tužky a papíru. Tento nástroj nám umožňuje uchopit některé objekty (konkrétně tzv. *volné objekty* a *objekty na objektu*) a tahem změnit jejich polohu. V závislosti na změně polohy můžeme pozorovat vliv vstupních podmínek na výslednou konstrukci a počet řešení. Žáci tak mohou experimentovat a samostatně vyvozovat závěry a objevovat vlastnosti, které nejsou na první pohled zřejmé, případně učiteli dává manipulace možnost zařadit do výuky matematiky některé geometrické důkazy (např. důkaz Thaletovy věty). Manipulace úzce souvisí s nástrojem *animace*. Ten nám umožňuje jistou automatizaci pohybu vybraných bodů, které se po spuštění plynule pohybují po objektu, kterému náleží (například bod obíhající na kružnici). Aktuální verze programu GeoGebra již automaticky nabízí možnost animace po sestrojení bodu/ů na některém jiném geometrickém objektu a uživatel ji nemusí složitě vytvářet. Animace představují základní nástroj při tvorbě pohyblivých webových appletů [5], [7].

Dalším nástrojem, který lze využít v kombinaci s manipulací nebo animací, je *stopa*. Pokud tento nástroj zapneme u vybraných geometrických objektů, zanechávají po sobě tyto objekty při pohybu otisk (stopu) na pozicích, na kterých se nacházely. V hodinách matematiky můžeme tento nástroj využít například při hledání množiny bodů dané vlastnosti a má velký didaktický potenciál. Konkrétním příkladem využití může být například simulace, při níž prezentujeme definici kružnice jako množiny všech bodů v rovině, které mají od daného středu *S* stejnou vzdálenost. Na obrázku 1 jsou uvedeny tři pozice – před spuštěním animace, v jejím průběhu a po sestrojení celé kružnice. Namísto animace by bylo též možné manipulovat s daným bodem pouze myší, kdy by zanechával stopu obdobným způsobem.

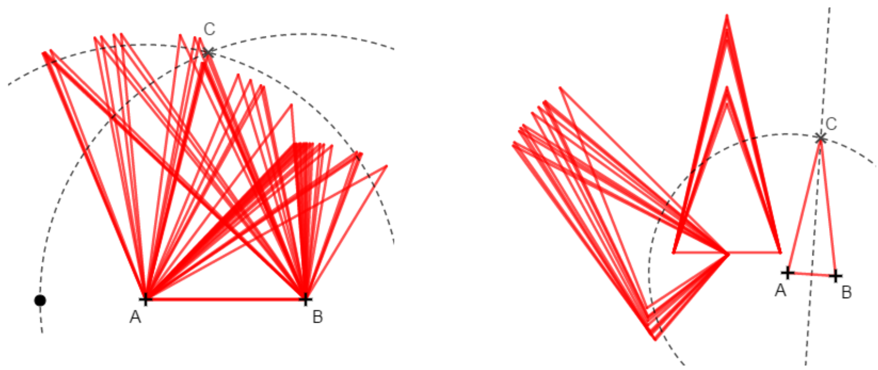


Obrázek 1 – Kružnice jako množina bodů dané vlastnosti

Jistou nevýhodu můžeme spatřovat v tom, že výsledný otisk získaný pomocí nástroje *stopa* není objektem a nemůžeme s ní dále manipulovat.

Posledním nástrojem, který si uvedeme, je *množina*. Jedná se o objekt, který získáme výpočtem, vzniká naráz a na rozdíl od stopy (vykresleného otisku prostřednictvím tohoto nástroje) se v programech DGE jedná o geometrický objekt a lze s ním dále manipulovat [7].

K uvedeným nástrojům dynamiky je nutné zmínit, že jejich používání vyvíjí tlak na správnost a obecnost konstrukce. Vlivem manipulace se totiž mění některé vlastnosti sestrojených geometrických objektů, jednotlivé objekty jsou spolu provázány, a navíc některé z těchto objektů nemusí v určité poloze existovat. Při konstruování je tedy nutné mít na paměti důležité vlastnosti příslušných objektů, které bychom neměli opomenout. V případě, že výsledná figura nebude obsahovat všechny nezbytné náležitosti, přejde nám sestrojený útvar manipulací v útvar jiný. Konkrétní příklad je uveden na obrázku 2. Zde je požadována obecná konstrukce libovolného rovnoramenného trojúhelníka. Následnou manipulací by pak vždy měl tento trojúhelník zůstat rovnoramenným. Vlevo je trojúhelník sestrojen pomocí dvou kružnic se středy v krajních bodech úsečky *AB* (základna trojúhelníka), které mají stejný, ale ne pevný poloměr. Při tomto postupu pomocí kružítka na papíře by zřejmě nebyl problém. Pokud ovšem zapneme stopu v programu GeoGebra a začneme pohybovat základnou tohoto trojúhelníka, případně budeme měnit její velikost, můžeme sledovat, že trojúhelník se bude vlivem těchto změn měnit a nebude vždy rovnoramenný. Tato konstrukce totiž neobsahuje důležitou vlastnost rovnoramenného trojúhelníka, že výška a těžnice na jeho základu jsou totožné. Na obrázku 2 vpravo je provedena konstrukce pomocí jedné kružnice libovolného poloměru se středem ve vrcholu *A* hledaného trojúhelníka a osy úsečky *AB*. Vrchol *C* hledaného trojúhelníka *ABC* vzniká jako průsečík výše uvedené kružnice a osy. Po zapnutí stopy a manipulaci s trojúhelníkem vidíme, že tento postup konstrukce rovnoramenného trojúhelníka je obecný.



Obrázek 2 – Obecná konstrukce rovnoramenného trojúhelníka

Manipulace prováděná ve výše uvedeném příkladu poukazuje na možnost využít tento nástroj učitelem pro kontrolu postupu konstrukce, například v odevzdaném domácím úkolu. Pomineme-li skutečnost, že program GeoGebra (i každý jiný program dynamické geometrie) uchovává jistý zápis konstrukce, v němž máme možnost krokovat, při konstrukci v libovolném programu DGE závisí na pořadí a způsobu konstrukce jednotlivých objektů. Tyto objekty jsou pak provázány určitým typem vazby. Učitel uchopením výchozích bodů, na kterých by měla být konstrukce založena, a jejich manipulací může okamžitě vyhodnotit, zda se výsledná figura chová standardně či nikoliv. Žáci ve školách při rýsování na papír totiž často se záměrem sestrojit bezchybnou a přesnou konstrukci zapíší správný postup, ale následně postupují od konce – od požadovaného výsledku – a pomocné útvary sestrojí až na závěr. Při rýsování na papír a stálosti figury nemá vyučující šanci podvod odhalit. Nasazením programů dynamické geometrie do výuky matematiky se možnost tohoto postupu eliminuje [7].

1.2 Typy závislostí mezi objekty

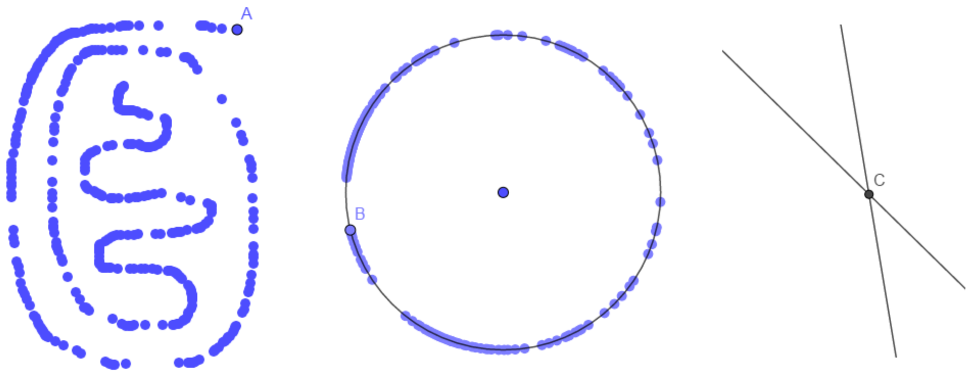
V programech dynamické geometrie, jakým je například GeoGebra, existují tři typy objektů, respektive tři typy závislostí mezi geometrickými objekty. Podle typu vazby mezi danými dvěma geometrickými objekty je/není možné s těmito objekty určitým způsobem pohybovat, případně vznikají a zanikají (např. body) v závislosti na manipulaci a aktuální poloze objektů, na základě kterých jsou sestrojeny.

První typem jsou *volné objekty*, které vznikly přímým vytvořením v nákresně programu. U těchto objektů není definována žádná vazba k dalším objektům a lze s nimi libovolně manipulovat a umisťovat je na libovolnou pozici nákresny. Z hlediska simulace nás tyto body zajímají nejvíce, protože následná konstrukce a počet řešení, např. Apolloniovy úlohy, se odvíjí od jejich vzájemné polohy.

Druhým typem jsou tzv. *objekty na objektu*. Jedná se o takové geometrické objekty, které byly vytvořeny na již existujícím objektu. Může se jednat například o bod na kružnici nebo přímce. S tímto bodem můžeme sice pohybovat, ale pouze v rámci daného objektu. Stopa těchto bodů nám ovšem může posloužit v situacích, kdy chceme simulovat jistou množinu bodů dané vlastnosti, u které jako učitelé známe tvar, ale potřebujeme tyto vědomosti předat žákům. Můžeme tedy sestrojit jistý geometrický objekt (např. kružnici) a na něj bod. Původní objekt skryjeme, bod však zůstává viditelný a stále nese informaci, že náleží tomuto objektu. Zapnutím stopy a pohybem bodu (případně zapnutím animace) společně se žáky znovuobjevujeme původní geometrický útvar, přesněji řečeno – konstruujeme množinu bodů dané vlastnosti (viz obrázek 1).

Třetí typ závislosti nazýváme *vázané objekty*, které vznikly na základě jiných, již dříve sestrojených, geometrických objektů. Konkrétně se může jednat například o průsečík dvou objektů (přímka – přímka, kružnice – kružnice, přímka – kružnice…). S těmito objekty není možné přímo manipulovat, jejich polohu (a existenci) lze měnit pouze pomocí manipulace s objekty, na základě kterých jsou založeny. V rámci geometrické konstrukce se zpravidla jedná o hledané body potřebné pro konstrukci výsledku.

Jednotlivé typy závislostí a možná manipulace s geometrickými objekty daného typu je zachycena s využitím stopy na uvedeném obrázku 3. Bod *A* je volný objekt, bod *B* představuje objekt na objektu (bod na kružnici) a bod *C* vznikl jako průsečík dvou přímek a reprezentuje vázané objekty. Při konstrukci byly zachovány původní barvy a tvar bodů přidělované programem GeoGebra. Je zde patrné, že jednotlivé typy objektů (body) se barevně a velikostně odlišují.

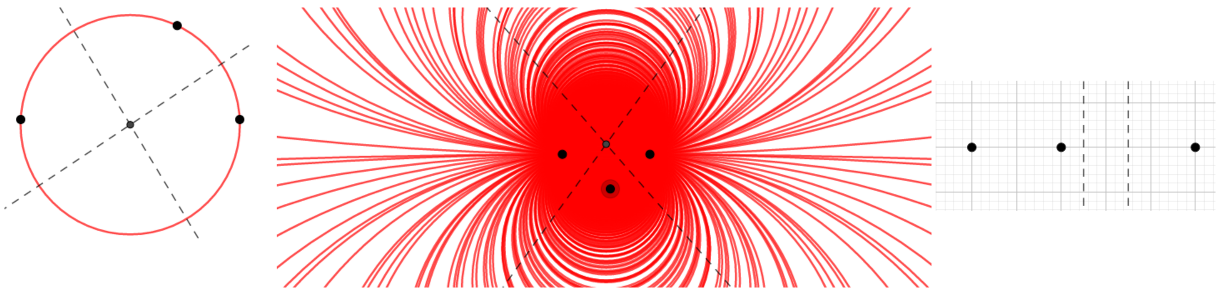


Obrázek 3 – Typy závislostí mezi objekty v programech dynamické geometrie

1.3 Vizualizace a vytváření mentálních modelů

Lékařskými výzkumy bylo již dříve potvrzeno, že pokud člověk vnímá skutečnost více smysly, vede to k lepší stimulaci mozku a tudíž i k lepšímu procesu učení se. Vizualizaci tak často najdeme uváděnou v souvislostech s aktivizujícími výukovými metodami. Tradičně učitelé využívají ve výuce obrázky, grafy a náčrtky, které žákům pomáhají při orientaci ve studovaném problému a při pochopení abstraktního pojmu. Počítačová simulace a možnosti programů dynamické geometrie v hodinách matematiky proto představují ideální nástroj pro řešení problémů, testování hypotéz a vytváření teorií, kdy přidanou hodnotou oproti statickým obrázkům jsou právě prvky dynamiky. Žáci mohou například prostřednictvím animace v okamžiku simulovat všechny polohy vstupních geometrických objektů, od kterých se celá konstrukce odvíjí, a získat tak množinu všech řešení, kterou si mohou navíc nechat vykreslit pomocí nástroje *stopa* [6], [7].

Konkrétním příkladem může být řešení jedné z Apolloniových úloh (viz kapitola 2) s využitím simulačních možností programu GeoGebra, tj. manipulace, animace, stopa. Mějme typ úlohy bod-bod-bod (BBB). Jako u každé z Apolloniových úloh se počet, resp. existence, řešení odvíjí od polohy počátečních geometrických útvarů. U tohoto typu úlohy je řešení zřejmé. V případě tří kolineárních bodů není možné požadovanou kružnici procházející všemi body sestrojit a řešení tedy neexistuje. V opačném případě představuje hledaná kružnice kružnici opsanou trojúhelníku s vrcholy v zadaných bodech. Žákům může být tato úloha zadána jako složitější problém s dílčími úkoly – sestrojit některé z možných řešení, určit jejich počet a následně zvážit vliv změny polohy zadaných bodů na počet a případnou existenci řešení. Možné žákovské řešení s využitím programu GeoGebra je sestrojeno na obrázku 4.



Obrázek 4 – Existence řešení úlohy bbb v závislosti na poloze daných bodů

Figura nalevo představuje jedno z možných řešení. Prostřední obrázek představuje stav po provedení (případně v průběhu) simulace, tedy záznamu stopy výsledné kružnice v závislosti na pohybu jednoho z bodů (ten byl pro možnost animace a automatizace celého procesu sestrojen na kružnici, která byla následně skryta). Z chování výsledné kružnice při simulaci je patrné, že s přibližováním bodů do kolineární polohy roste její průměr a v kolineární poloze bodů tato kružnice zanikne, respektive není možné kružnici sestrojit. Tento stav je zachycen na figuře vpravo. Žák takto může samostatně dojít k závěru, že pokud neleží zadané body na jedné přímce, pak existuje právě jedno řešení. V opačném případě řešení neexistuje.

Vizualizace, počítačová simulace a uvádění názorných příkladů v hodinách matematiky úzce souvisí s tvorbou mentálních modelů daných matematických pojmů. Ta postupně prochází několika stádii (od počáteční motivace až po utvoření universálního modelu) a žáci si tak formují vlastní představu o vlastnostech, chování a fungování probíraného pojmu. Správnost vytvoření modelu pak přímo ovlivňuje správnost chápání tohoto pojmu i vztahů mezi ním a dalšími matematickými pojmy. Častým problémem v českých školách ovšem je mechanické přebírání probíraných pojmů (jejich definic) žáky bez hlubšího porozumění. Klíčovou roli zde hraje čas a utváření tzv. separovaných modelů, které vznikají na základě pozorování a praktické manipulace s (geometrickými) objekty. Obvyklým problémem však bývá, že manipulaci s geometrickými objekty (obdobně v jiných pasážích učiva s výrazy a čísly) není věnován ve výuce dostatečný prostor, aby si žáci mohli utvořit potřebný počet separovaných modelů pro vznik modelu universálního. Kognitivní technologie ve výuce matematiky, využití programů dynamické geometrie a počítačové simulace nám ovšem dávají možnost ve velmi krátkém časovém úseku prezentovat značné množství situací, při nichž si žáci separované modely vytváří. V případě manipulace s geometrickými objekty v programu GeoGebra (či v jiném programu DGE) a experimentování s nimi mají žáci možnost tento experiment několikrát zopakovat a díky jejím dynamickým prvkům a počítačové simulaci je možné poukázat na vlastnosti, které nejsou zřejmé při tradičním postupu konstruování na papíře. V této souvislosti je nutné podotknout, že s využitím počítačových kognitivních technologií je obecně možné realizovat takové manipulace s geometrickými figurami, které nám tradiční přístup neumožňuje. Toto tvrzení by se pochopitelně dalo rozšířit na jakékoliv využití počítačové simulace v ostatních přírodovědných předmětech na základní a střední škole [1], [3], [7].

2 Apolloniovy a Pappovy úlohy

Apolloniovy úlohy představují z hlediska historie jeden z klasických geometrických problémů. Pojmenovány jsou po významném řeckém matematikovi, geometrovi, fyzikovi a astronomovi Apolloniovi z Pergy (262–200 před n. l.). Ten se zabýval celou řadou geometrických otázek, konkrétně můžeme zmínit například studium kuželoseček jako rovinných řezů kuželové plochy a zavedení označení *elipsa*, *parabola* a *hyperbola*. Známý je hlavně díky své knize *O dotycích*, ve které se věnoval konstrukci kružnic, které se dotýkají tří zadaných útvarů (body, kružnice, přímky). Právě tyto úlohy dodnes nazýváme *Apolloniovy úlohy*. Kniha se bohužel nedochovala, ale díky citacím známe její obsah a víme, že konstrukce byly prováděny pouze eukleidovskými prostředky (tj. přímé pravítko bez značek pro měření a kružítko) a Apolloniovi byla známa stejnolehlost a kruhová inverze [2], [4], [9], [8].

Obecné zadání Apolloniovy úlohy by znělo následovně:

Jsou dány tři různé prvky (body, přímky, kružnice). Sestrojte kružnici, která se dotýká zadaných kružnic nebo přímek a prochází zadanými body.

Z výše uvedeného zadání je zřejmé, že existuje 10 základních typů Apolloniových úloh, konkrétně *BBB (bod-bod-bod)*, *BBp (bod-bod-přímka)*, *BBk (bod-bod-kružnice)*, *Bpp*, *Bpk*, *Bkk*, *ppp*, *ppk*, *pkk*, *kkk*. Pro počet řešení platí, že obecná Apolloniova úloha má nejvýše 8 řešení. Počet řešení se odvíjí od výchozí polohy zadaných prvků, například zda jsou body kolineární, přímky jsou různoběžné/rovnoběžné, případně zda bod leží na některé přímce/kružnici. Existuje tedy značné množství variant, které mohou nastat a díky programům dynamické geometrie a počítačové simulaci je možné rychle odhalit počet a existenci řešení v závislosti na poloze zadaných prvků. Specifické výchozí polohy zadaných útvarů a možnost, že bod náleží některé z kruhových křivek, nás pak přivádí ke skupině Apolloniových úlohy, které označujeme *Pappovy úlohy* [2], [8].

Pappova úloha může být zadána následovně:

Jsou dány tři různé prvky (body, přímky, kružnice), z nichž alespoň jeden je kruhová křivka a alespoň jeden je bod, přičemž tento bod leží na dané kruhové křivce. Sestrojte kružnici, která se dotýká zadané kruhové křivky v daném bodě a dále se dotýká další kruhové křivky nebo prochází zadaným bodem.

Pappovy úlohy tedy představují jistou podmnožinu Apolloniových úloh, kdy na základě skladby výchozích prvků rozlišujeme celkem 6 typů těchto úloh, konkrétně p_TB *(přímka s bodem dotyku T a další bod)*, p_Tp' *(přímka s bodem dotyku T a další přímka)*, p_Tk *(přímka s bodem dotyku T a kružnice)*, k_TB, k_Tp a k_Tk' [2].

Jednotlivé typy obecné Apolloniovy úlohy se řeší různými způsoby a od použitých prostředků se odvíjí celková náročnost zadaného problému a možnost jeho aplikace na základní, střední nebo vysoké škole. Řešení některých úloh je triviální – například již zmíněná úloha typu BBB, kde se jedná o konstrukci kružnice opsané trojúhelníku, případně úloha typu ppp, kdy v případě různoběžných přímek pouze sestrojíme kružnici vepsanou a kružnice připsané vzniklému trojúhelníku. Jedná se tedy o úlohy, které jsou schopni vyřešit žáci na 2. stupni ZŠ, včetně diskuse o počtu řešení v závislosti na specifických polohách bodů/přímek. Jiné typy úloh však vyžadují složitější úvahy. Při jejich řešení zpravidla využíváme konstrukce množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úhlu, osa pásu, osa úsečky, chordála…) nebo geometrická zobrazení (stejnolehlost, kruhová inverze). Tím se úrovní obtížnosti a potřebných znalostí pro vyřešení některých úloh dostáváme na úroveň střední školy, v případě aplikace kruhové inverze (např. při řešení úloh typu kkk) se pak jedná o vysokoškolské úlohy, protože s tímto geometrickým zobrazením se žák/student dříve nesetká [2], [8].

Všechny uvedené typy Apolloniových a Pappových úloh je možné konstruovat standardními postupy s využitím programů dynamické geometrie jako je například GeoGebra. Díky manipulaci, animaci a otisku stopy je následně možné simulovat všechny vzájemné polohy výchozích prvků a jejich vliv na počet a existenci řešení. Toho lze využít například v hodinách matematiky vedené badatelským přístupem. Vybranými konstrukcemi různé obtížnosti a jejich počítačovou simulací se zabývá následující kapitola, která tak poukazuje na možnost využití programů DGE a počítačové simulace ve výuce geometrie obecně.

3 Počítačová simulace v řešení Apolloniových a Pappových úloh

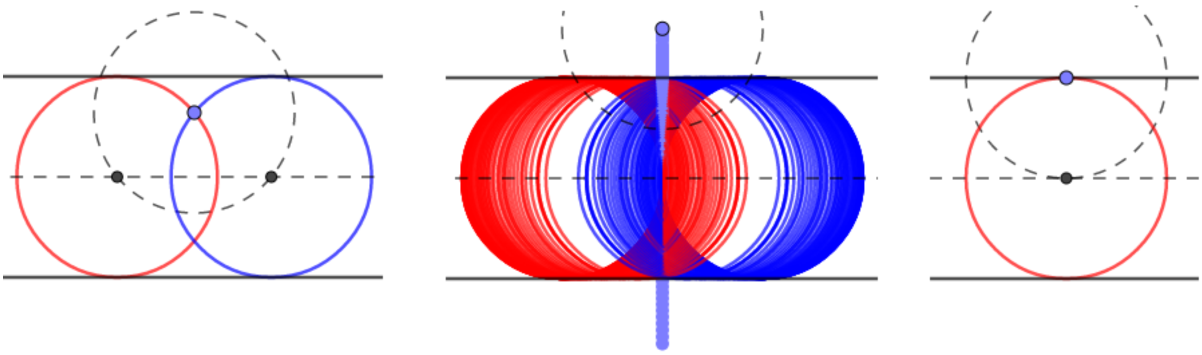
Geometrické konstrukce a simulace v této kapitole jsou prováděny v programu GeoGebra verze 6.0 a s oporou literatury [2], [4], [9], [8]. Tyto konstrukce představují možnost využití počítačové simulace geometrických konstrukcí pomocí programů dynamické geometrie ve výuce matematiky.

3.1 Řešení úlohy typu Bpp se dvěma rovnoběžnými přímkami

Obecné zadání úlohy Bpp můžeme uvést ve tvaru:

Sestrojte kružnici k procházející zadaným bodem B a dotýkající se přímek p a q.

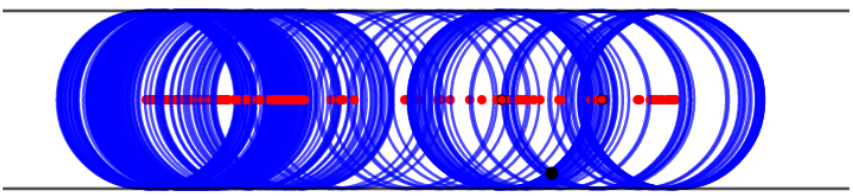
V tomto konkrétním případě máme navíc stanovenou podmínku, že zadané přímky *p*, *q* jsou rovnoběžné. Při řešení se využívá konstrukce množin bodů dané vlastnosti a jedná se o úlohu řešitelnou i na základních či středních školách. Po žácích bychom požadovali nalezení postupu řešení, konstrukci výsledné figury v jedné pevné poloze zadaných prvků a následně na základě počítačové simulace v programu GeoGebra rozhodnout o existenci řešení v různých vzájemných polohách.



Obrázek 5 – Existence a počet řešení úlohy Bpp v závislosti na poloze daných bodů

Na obrázku 5 je zachyceno možné žákovské řešení. Figura vlevo zachycuje existenci dvou řešení, která jsou barevně odlišená. Průběh simulace je zachycen uprostřed, kde je patrné, že s přibližováním bodu *B* k ose pásu se sobě kružnice vzdalují, naopak přibližováním se k jedné z úseček dochází k postupnému splývání obou kružnic v jednu, jak je uvedeno na figuře vpravo. Zde je nutné podotknout, že úloha přechází v typ pTp'. V případě, že leží bod *B* vně pásu určeného zadanými přímkami *p*, *q*, řešení neexistuje.

Úloha by též mohla být zadána žákům obráceným způsobem – od konce. Učitel by vytvořil výslednou figuru, která by byla dána žákům k dispozici a mohli by s ní manipulovat. Záměrem by pak bylo, aby žáci na základě manipulace vyvodili jednotlivé kroky konstrukce a určili polohu prvků nezbytných pro sestrojení výsledné figury, tj. množina všech středů hledaných kružnic. Případně by se mohlo jednat o formu nápovědy v situaci, kdy by žáci sami bez pomoci nebyli schopni posloupnost kroků konstrukce nalézt. S využitím stopy by pak rychle mohli objevit, že je nutné sestrojit osu pásu a tím získají požadovanou množinu středů i poloměr hledaných kružnic a požadavek na existenci řešení (obrázek 6). Před dalším samostatným konstruováním by pak mohla eventuálně proběhnout diskuse nad správným postupem, případně jeho upřesnění.



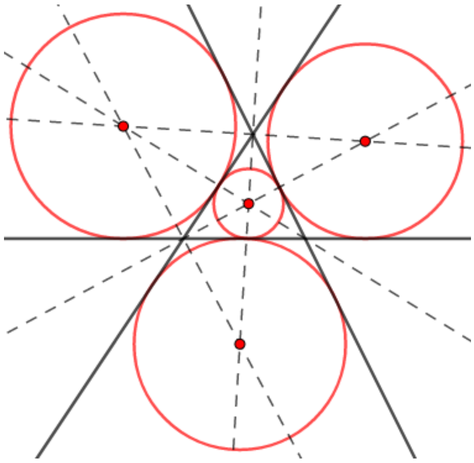
Obrázek 6 – Konstrukce množiny středů všech hledaných kružnic

3.2 Všechna řešení úlohy typu ppp

Obecné zadání úlohy ppp lze uvést ve tvaru:

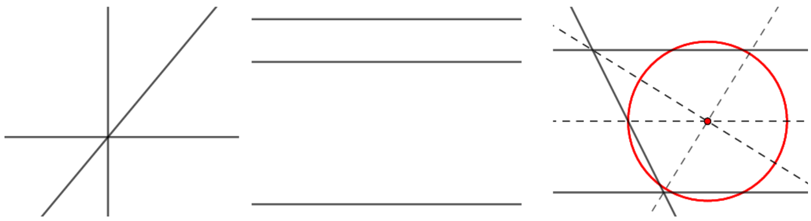
Sestrojte kružnici k, která se dotýká všech tří zadaných přímek p, q, r.

Oproti předcházejícímu příkladu je tato úloha zadána v obecném tvaru a je tedy nutné zvážit všechny polohy výchozích prvků (trojice přímek) a jejich vliv na výsledek. Z pohledu žáků základních a středních škol by se nabízelo začít od situace tří různoběžných přímek, kdy hledané kružnice představují vepsanou a připsané kružnice trojúhelníku. Tato konstrukce je provedena na obrázku 7, kdy hledané kružnice a jejich středy jsou zvýrazněny červenou barvou. Následnou manipulací a simulací všech možných poloh přímek lze určovat existenci řešení a případně i universálnost použitého postupu konstrukce.



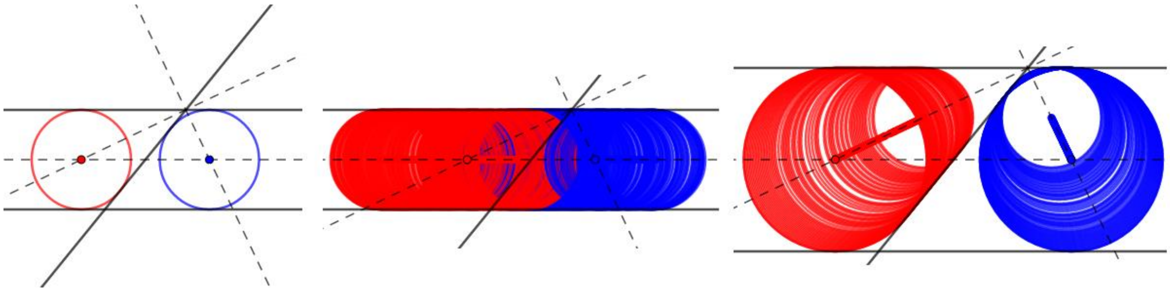
Obrázek 7 – Řešení úlohy ppp pro tři různoběžné přímky

Pokud se nyní zamyslíme nad možnými počátečními polohami zadaný přímek; může se jednat o již uvedenou trojici různoběžek, které ovšem také mohou procházet jedním společným bodem, dále může nastat opačný případ, tj. trojice rovnoběžných přímek, třetí možností je dvojice rovnoběžných přímek a třetí k nim je různoběžná. Při následné simulaci proto nebudeme sledovat stopu sestrojených kružnic, nýbrž budeme pouze provádět manipulaci a pozorovat existenci řešení v jednotlivých izolovaných případech, případně vliv polohy zadaných prvků na universálnost použitého postupu (obrázek 8).



Obrázek 8 – Existence řešení úlohy ppp v závislosti na poloze počátečních přímek

Z uvedeného obrázku (tj. simulace jednotlivých poloh přímek) je patrné, že v případě společného průsečíku a při rovnoběžnosti všech tří přímek neexistuje řešení. Situace vpravo pak poukazuje na skutečnost, že postup s vepsanou a připsanými kružnicemi není universální metodou pro všechna řešení a je nutné nalézt správnou posloupnost kroků pro tento specifický případ. Zároveň je nutné rozhodnout o počtu řešení a případně se další manipulací ujistit, že nemůže nastat další okolnost, která by jej ovlivnila.



Obrázek 9 – Konstrukce řešení úlohy ppp v případě dvou rovnoběžných přímek

Na obrázku 9 vlevo je znázorněné možné žákovské řešení s využitím množin bodů daných vlastností, prostřední a pravá konstrukce představují manipulaci, při níž žák testuje, vliv změny vstupních parametrů na výsledné řešení. Je evidentní, že hledané kružnice musí vždy ležet uvnitř pásu vytyčeného dvojicí rovnoběžných přímek a v závislosti na jejich vzdálenosti roste poloměr hledaných kružnic.

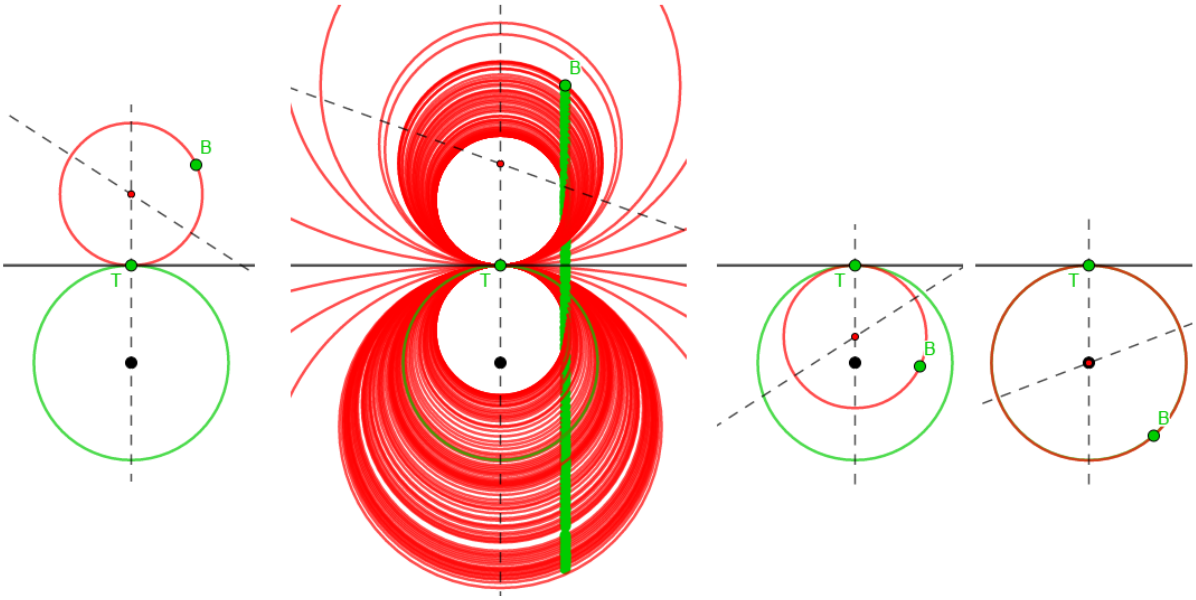
V závěrečně diskusi je nutné uvést všechny poznatky získané na základě simulace, tudíž, že v případě trojice rovnoběžek nebo různoběžek procházejících jedním bodem neexistuje řešení této úlohy. V případě jedné dvojice rovnoběžek existují právě dvě řešení a pro tři různoběžné přímky protínající se ve třech různých bodech existují čtyři řešení.

3.3 Řešení Pappových úloh typu k_TB a p_TB

V tomto příkladu se budeme zabývat dvojicí Pappových úloh k_TB a p_TB, které k sobě mají z hlediska povahy konstrukčního postupu velice blízko, ba dokonce pro vyřešení úlohy typu k_TB je nezbytná znalost konstrukčního postupu p_TB. Pappova úloha k_TB je v obecném znění zadána následovně:

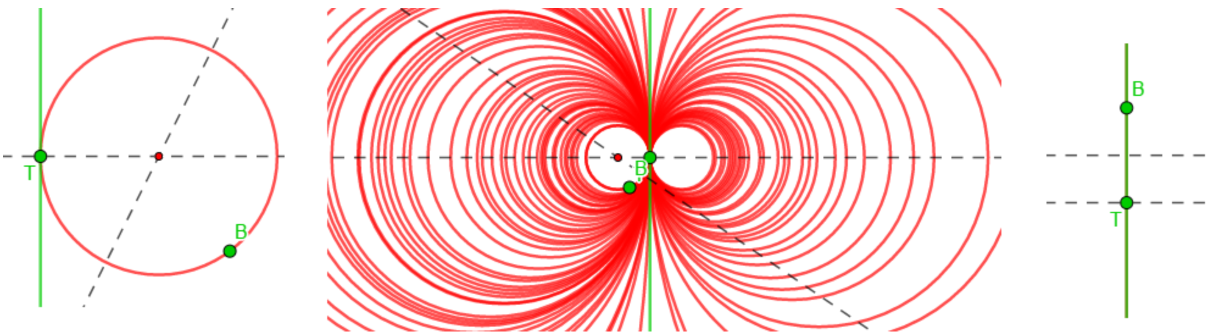
Sestrojte kružnici k, která se dotýká dané kružnice l v bodě T a prochází zadaným bodem B.

Při řešení této úlohy se opíráme o znalost, že v bodě dotyku *T* lze sestrojit ke kružnici *l* tečnu, čímže převedeme celou úlohu na typ p_TB. Konstrukcí množin bodů dané vlastnosti pak sestrojíme jedno pevné řešení a následně využijeme simulace pro zkoumání dalších možností z hlediska vzájemné polohy výchozích prvků a jejího vlivu na počet a existenci řešení.



Obrázek 10 – Existence a počet řešení úlohy k_TB v závislosti na počáteční poloze prvků

Obrázek 10 zachycuje možné žákovské řešení a následnou manipulaci při ověřování jeho existence v závislosti na počáteční poloze zadaných prvků. Výchozí prvky jsou v tomto případě zelenou barvou, pomocné prvky černou a výsledná kružnice *k* s jejím středem červenou. V rámci simulace byl zaznamenán otisk výsledné kružnice v závislosti na poloze bodu *B* (samozřejmě by bylo možné pohybovat i jinými prvky). Je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností bodu *B* od zadané kružnice *l* roste i velikost poloměru kružnice výsledné. Naopak přibližováním se kružnice *k* zmenšuje a v případě, že se bod *B* stane vnitřním bodem, má výsledná kružnice *k* se zadanou kružnicí *l* v bodě *T* vnitřní dotyk. Problematický je ovšem přechod bodu *B* přes kružnici *l* – pokud bod *B* náleží stejně jako bod *T* v úloze k_TB zadané kružnici *l*, pak kružnice *k* s kružnicí *l* při tomto přechodu splyne a Pappova úloha k_TB nemá řešení, jak je patrné na obrázku 10 vpravo. Toto v případě úlohy p_TB nehraje roli, nicméně problematický je přechod bodu *B* přes zadanou přímku, jak je patrné z konstrukce této úlohy a následné manipulace na obrázku 11.



Obrázek 11 – Existence a počet řešení úlohy p_TB v závislosti na počáteční poloze prvků

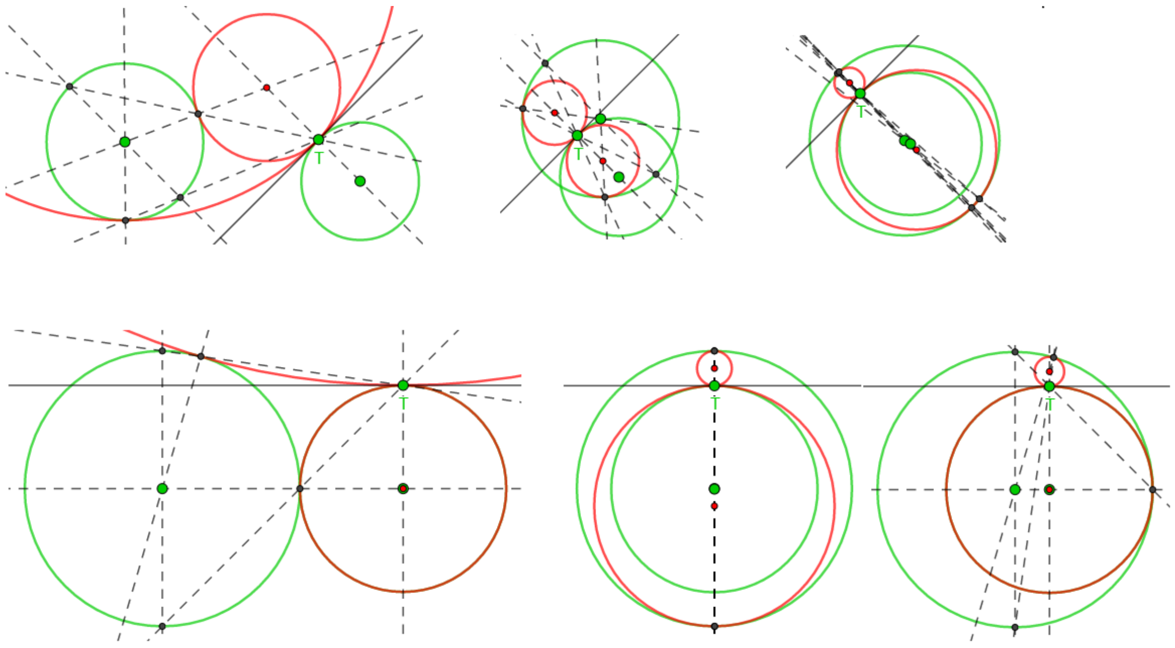
Z obrázku 11 je evidentní, že pokud oba body *B* a *T* náleží zadané přímce, neexistuje řešení této Pappovy úlohy. V opačném případě má úloha pouze jedno řešení a jedná se o analogii řešení úlohy k_TB a přechodu bodu *B* přes zadanou kružnici *l*.

3.4 Řešení Pappových úloh typu k_Tk' a p_Tk

Při řešení Pappovy úlohy typu k_Tk' postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu 3.3, tedy převedeme tento typ pomocí konstrukce tečny na úlohu typu p_Tk a následně hledáme kružnice splňující všechny požadavky. Obecné znění úlohy k_Tk' můžeme uvést ve tvaru:

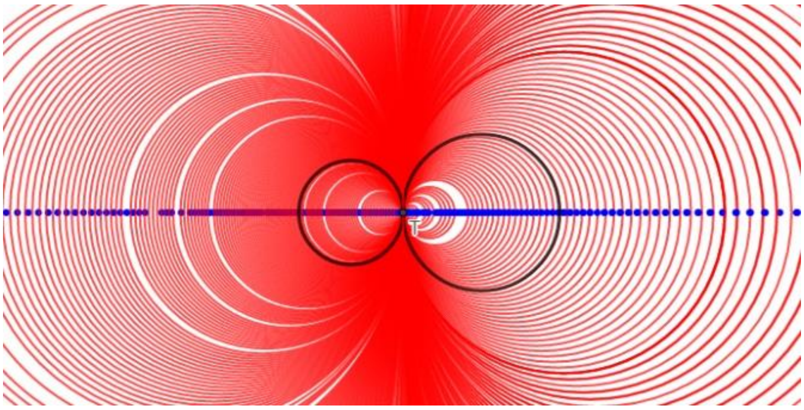
Sestrojte kružnici k, která se dotýká daných dvou kružnic m, n a prochází bodem T, který leží na jedné ze zadaných kružnic.

Jako již dříve bude požadována konstrukce jednoho pevného řešení a následnou manipulací rozhodneme o počtu a existenci řešení ve specifických případech polohy zadaných prvků. Jedná se o náročnější úlohu, která by se spíše hodila na střední školu, možná i do úvodního kurzu geometrie na VŠ, řeší se však opět pouze s využitím množiny bodů daných vlastností.



Obrázek 12 – Existence a počet řešení úlohy k_Tk' v závislosti na poloze výchozích prvků

Na obrázku 12 je sada žákovských řešení Pappovy úlohy k_Tk' získaná pomocí manipulace a simulace jednotlivých poloh výchozích prvků, ty jsou pro přehlednost obarveny zeleně. Pokud bychom chtěli učinit závěr, tak ve většině uvedených případů má tato úloha dvě řešení. Pouze v případě, že spolu mají kružnice vnější nebo vnitřní dotyk, kterým není zadaný bod *T*, jedno z řešení zanikne důvodem splynutí s jednou ze zadaných kružnic. Zajímavou situací, kterou lze snadno v programu simulovat, je výchozí poloha bodů, kdy zadané kružnice *m*, *n* spolu mají vnitřní nebo vnější dotyk v daném bodě *T*. V tomto případě má pak úloha nekonečně mnoho řešení. Jedna ze situací (vnější dotyk) je uvedena na obrázku 13, kdy modře je vyznačena množina všech středů hledaných kružnic *k* a červeně jsou obarveny hledané kružnice.



Obrázek 13 – Nekonečně mnoho řešení pappovy úlohy $k_T k'$

Je zřejmé, že konstrukci uvedenou výše bychom nebyli schopni klasickými prostředky sestrojit a obrázek 13 poukazuje na výhodu počítačového softwaru a využití simulace, kdy jsme schopni v počítači realizovat takové experimenty, které by nebyly v reálném životě možné. Dalo by se namítnout, že obrázek stále obsahuje *mezery*, tedy prázdná místa bez řešení. To je však dáno technikou a délkou běhu simulace. V případě, že by měl počítač dostatek času pro konstrukci všech řešení, postupně by kružnice vyplnily červeně celou nákresnu programu GeoGebra.

4 Závěr

Počítačové simulace představují v dnešní době sofistikovaný prostředek, jak zkoumat složitosti okolního světa a ověřovat stanovené hypotézy bez nutnosti dlouhého čekání než proběhne proces v reálném čase. Dávají nám možnost předvídat některé jevy a předcházet tak kupříkladu přírodním katastrofám. V běžném životě se s počítačovou simulací těchto jevů často setkáváme, aniž bychom si uvědomili, jak složitý aparát stojí na pozadí – konkrétně lze zmínit večerní relace o počasí využívající modely z oblasti meteorologie pro předpověď na následující dny nebo simulaci a optimalizaci dopravy. V neposlední řadě je též možné uvést z hlediska zábavy řadu počítačových simulátorů a her.

Ve výuce matematiky nám počítačová simulace v programech dynamické geometrie dává možnost pochopení hlubších souvislostí. Jedná se o prostředek, pomocí kterého můžeme aktivizovat a motivovat žáka k výkonu, kdy i samotné nasazení počítače do výuky může být atraktivní. Badatelsky orientovaná výuka, při níž žák v počítači samostatně simuluje například i nekonečně velkou množinu řešení, nutí žáka myslet v souvislostech, používat již osvojené vědomosti, dovednosti a návyky a též je veden k preciznosti matematického vyjadřování, protože na rozdíl od učitele, počítač nepřesné vyjádření automaticky vyhodnotí jako chybu a bude se na základě nepřesného zadání chovat. V kontextu programů dynamické geometrie se jedná o tlak na obecnost konstrukce.

Příspěvek obsahuje několik úloh, na kterých je demonstrována možnost nasazení programu GeoGebra do výuky, a to už na základní škole. Způsob využití tohoto softwaru se pak odvíjí od přístupu učitele a možností školy. V programu je však možné simulovat konstrukci základních geometrických útvarů pomocí množiny bodů dané vlastnosti a díky vizualizaci a možnosti několikrát proces zopakovat, může správné využití technologií vést k lepšímu a rychlejšímu pochopení abstraktních pojmů žáky. Modelování více (všech, nekonečně mnoha) řešení vybraných geometrických úloh pak může vést hlubšímu pochopení a vnímání souvislostí mezi jednotlivými pojmy/prvky konstrukce. Počítačový program tak nahrazuje použití rýsovacích pomůcek, což ocení zvláště učitel, kdy rýsování na klasickou tabuli je zvláště při rozsáhlých konstrukcích někdy oříšek, a umožňuje nám realizovat i konstrukce, které by tradičními metodami nebyly možné nebo velmi časově náročné (viz konstrukce nekonečně mnoha řešení Pappovy úlohy na obrázku 13). I přes uvedené výhody by však z hodin matematiky neměla úplně vymizet výuka konstrukcí tradičními prostředky a manipulace s reálnými předměty, aby žáci nezaměňovali modely v počítačovém softwaru za reálné předměty, kterým by připisovali i negeometrické vlastnosti, které počítačové modely obsahují.

Použitá literatura

1. HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila a VONDROVÁ, Naďa, ed. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
2. LÁVIČKA, Miroslav. *Syntetická geometrie: Pomocný učební text k předmětu KMA/SG*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2007. 190 s.
3. MICHALÍK, Petr. *Počítačová simulace elektronických obvodů a její využití ve výuce*. Vyd. 1. Plzeň: Západočeská univerzita, 2014. 143 s. ISBN 978-80-261-0331-8.
4. PATÁKOVÁ, Eva. *Webovská interaktivní sbírka geometrických úloh*. Plzeň, 2005. Diplomová práce. Západočeská univerzita. Vedoucí práce: RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
5. PECH, Pavel, ČINČUROVÁ, Lenka, GÜNZEL, Martin et al. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2.
6. VALIŠOVÁ, Alena, KASÍKOVÁ, Hana a kol. *Pedagogika pro učitele.* 1. vyd. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1734-0.
7. VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.
8. VYŠÍN, Jan. *Geometria pre pedagogické fakulty. 2.diel*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateĺstvo, 1970. 316 s.
9. VYŠÍN, Jan. *Geometrie pro pedagogické fakulty. 1. díl*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965. 383 s.

Kontaktní údaje

Mgr. Jan Frank
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická
Klatovská tř. 51, 306 19 Plzeň
E-mail: frankjan@kvd.zcu.cz