Šíření elastických nestacionárních vln v 1D heterogenním prostředí

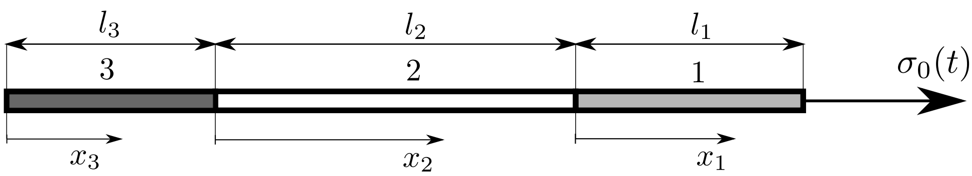
Ondřej Kába[1]

1 Úvod

V tomto příspěvku bude prezentováno analytické řešení odezvy tenké heterogenní elastické tyče na libovolné osové zatížení rázového charakteru. Odvozené vztahy a správnost jejich vyčíslení budou následně validovány pomocí experimentálních dat, což umožní využití analytických výsledků pro efektivní řešení inverzních úloh.

2 Odvození analytického řešení

Při odvození budeme uvažovat volnou tenkou tyč složenou ze tří částí o různých délkách l_i ($i = 1, 2, 3$), viz obr. 1. Materiálové vlastnosti každé ze tří částí budou popsány Youngovým modulem E_i, hustotou ρ_i a Poissonovým číslem ν_i. Pro každou z uvedených částí zavedeme lokální souřadnici x_i a dále budeme předpokládat, že pravý konec první tyče je zatížen osovým napětím $\sigma_0(t)$, viz obr. 1.



Obrázek 1: Schéma úlohy heterogenní tyče

Při odvození vyjdeme z úvahy, že šíření vln v každé ze tří částí je možné popsat vlnovou rovnicí v 1D. Jedná se o parciální diferenciální rovnici v tomto tvaru

$$c_{0,i}{}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} u_i(x_i, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x_i, t), \tag{1}$$

kde $u_i(x_i, t)$ je posuv v i-té tyči v místě x_i a v čase t a $c_{0,i} = \sqrt{E_i/\rho_i}$ je rychlost šíření podélné vlny v i-té části tyče. Laplaceovou transformací rovnice (1), při uvažování nulových počátečních podmínek, získáme obyčejnou diferenciální rovnici pro Laplaceův obraz hledané funkce $u_i(x_i, t)$. Obecné řešení této rovnice lze zapsat ve tvaru

$$U_i(x_i, p) = A_i(p) \sinh\left(\frac{p x_i}{c_{0_i}}\right) + B_i(p) \cosh\left(\frac{p x_i}{c_{0_i}}\right), \tag{2}$$

kde $A_i(p)$ a $B_i(p)$ jsou neznámé komplexní funkce. Tyto funkce odvodíme na základě podmínek spojitosti posuvů a napětí formulovaných na rozhraních jednotlivých částí tyče. Zmíněné podmínky lze zapsat ve tvaru

$$u_1(0, t) = u_2(l_2, t), \quad \sigma_1(0, t) = \sigma_2(l_2, t), \tag{3}$$

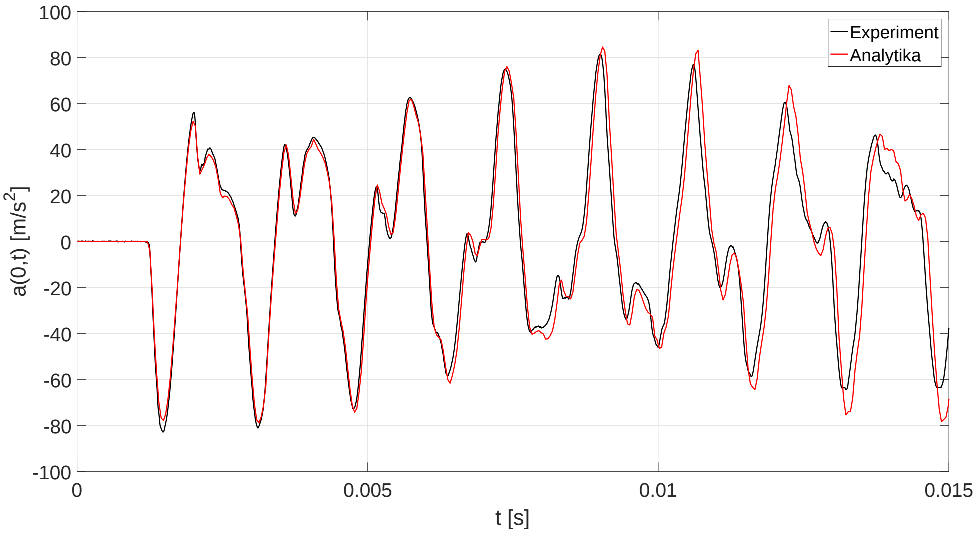
$$u_2(0, t) = u_3(l_3, t), \quad \sigma_2(0, t) = \sigma_3(l_3, t). \tag{4}$$

[1] student bakalářského studijního programu Počítačové modelování v technice, obor Počítačové modelování, e-mail: andre.kaba@gmail.com

Dále je nutné připojit okrajovou podmínku pro buzený konec, tj. $\sigma_1(l_1, t) = \sigma_0(t)$, a podmínku volného konce $\sigma_3(0, t) = 0$. Následným dosazením vztahu (2) a Laplaceova obrazu napětí $\sigma_i(x_i, t)$, pro který podle Hookeova zákona platí $\Sigma_i(x_i, p) = E_i \frac{\partial U_i(x_i,p)}{\partial x_i}$, do transformovaných okrajových podmínek získáme soustavu algebraických rovnic pro celkem šest hledaných funkcí $A_i(p)$ a $B_i(p)$. Dosazením takto získaných funkcí do (2) dostaneme pak konkrétní tvar odezvy tenké heterogenní tyče na buzení $\sigma_0(t)$ v Laplaceově oblasti. Zpětnou transformaci těchto obrazů do časové oblasti lze v tomto případě provést přesně pomocí reziduové věty. S ohledem na efektivitu procesu vyčíslení byla však odezva tyče v čase získána pomocí numerické zpětné Laplaceovy transformace.

3 Porovnání analytických výsledků s experimentem

Experiment byl realizován na dvou ocelových tyčích o délkách $l_o = 2\,\mathrm{m}$ s kruhovými průřezy o průměrech $d = 6\,\mathrm{mm}$, mezi než byla vlepena hliníková tyč stejného průřezu o délce $l_h = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Na jedné straně byla soustava tyčí buzena rázovým kladívkem. Na straně druhé bylo snímáno zrychlení akcelerometrem. Hustoty použitých tyčí byly stanoveny na základě znalosti rozměrů a hmotností tyčí jako $\rho_o = 7872\,\mathrm{kg/m^3}$ a $\rho_h = 2688\,\mathrm{kg/m^3}$. Z měření provedených na oddělených tyčích byly dále stanoveny potřebné moduly pružnosti $E_o = 207\,\mathrm{GPa}$ a $E_h = 65\,\mathrm{GPa}$. Tyto hodnoty byly vypočteny ze známých hustot a hodnot změřených rychlostí c_0. Porovnání výsledků získaných z experimentu a vyčíslených pomocí odvozených vztahů je zobrazeno na obr. 2.



Obrázek 2: Porovnání analytických a experimentálních výsledků

4 Závěr

V této práci se podařilo odvodit vztahy popisující šíření elastických vln v tenké heterogenní tyči složené ze tří různých materiálů. Díky rychlosti vyčíslení těchto vztahů lze získané výsledky využít pro efektivní řešení inverzních úloh, jako např. identifikace materiálových parametrů a tvaru budicího pulsu.

Literatura

Brepta R., Prokopec M. (1972) *Šíření napěťových vln a rázy v tělesech*, Praha, Academia

Graff K. F. (1991) *Wave motion in elastic solids*, New York, Dover Publication Inc.

Pírko Z., Veit J. (1972) *Laplaceova transformace*, Bratislava, SNTL/ALFA