Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Podmínky kompaktnosti ve variačních metodách

Mgr. Pavel Jirásek

disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Aplikovaná matematika

školitel: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Plzeň, 2016

University of West Bohemia

Faculty of Applied Sciences

Compactness conditions in variational methods

Mgr. Pavel Jirásek

doctoral thesis
branche of study: Applied Mathematics

supervisor: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Pilsen, 2016

Poděkování. Děkuji školiteli RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. a kolegům, rodině i přátelům za podporu, bez které by tato práce nemohla vzniknout.

Prohlášení. Prohlašuji, že disertační práci jsem napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V .... dne ....
Pavel Jirásek

Obsah

Značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$x \in X$	x je prvkem množiny X
$X \subset Y$	množina X je podmnožinou množiny Y
$C^n(X, Y)$	prostor n-krát spojitě diferencovatelných zobrazení definovaných na množině X s oborem hodnot v množině Y
$L^q(\Omega)$	Lebesguevův prostor funkcí
$W^{p,q}(\Omega)$	Sobolevův prostor funkcí
X^*	duální prostor prostoru X
$\|x\|$	norma prvku x
$\|x\|_X$	norma prvku x v prostoru X
$\forall$	pro všechna
$\exists$	existuje
$\wedge$	a zároveň
$\Rightarrow$	implikuje
$\mapsto$	zobrazuje do
$\rightarrow$	konverguje k
$\searrow$	konverguje shora k
$\rightharpoonup$	konverguje slabě k
$\dim\{H\}$	dimenze prostoru H
$\mathrm{Lin}\{M\}$	lineární obal množiny M
$\mathrm{Meas}\{M\}$	míra množiny M
$\mathrm{dist}\{x, M\}$	vzdálenost bodu x od množiny M
(x, y)	skalární součin prvků x a y, otevřený interval, vektor
$[a, b]$	uzavřený interval od a do b, bod v rovině
$\oplus$	direktní součet
$M^\perp$	ortogonální doplněk množiny M
∂M	hranice množiny M
$F\|_M$	restrikce funkcionálu F na množinu M
f', F'	derivace funkce f, Fréchetova derivace funkcionálu F
$D(F)$	definiční obor funkcionálu F
$F_{-1}(M)$	$\{x \in D(F) : F(x) \in M\}$
$\delta F(x, y)$	Gâteauxova derivace funkcionálu F v bodě x ve směru y
Δ	Laplaceův operátor
∇	gradient
$:=$	definujeme

$\otimes$	maticové násobení
$\mathbf{I}$	jednotková matice

1 Úvod

Formulování a řešení optimalizačních problémů, které bychom mohli pokládat za předchůdce současných variačních problemů, sahá minimálně až do starověkého Řecka. Zmiňme například *Didoninu úlohu* spojenou s legendou o založení Kartága, ve které hledáme uzavřenou křivku v rovině dané délky vymezující maximální plochu. Za zakladatele moderního přístupu k variačním metodám je považován Pierre de Fermat (1601-1665). Není náhodou, že rozvoj této disciplíny probíhal v době rozvoje diferenciálního počtu. Z této doby pochází další známý problém *brachystochrony.* Úkolem bylo najít křivku ve svislé rovině spojující dva dané body, která by byla optimální v tom smyslu, že hmotný bod vypuštěný z vyššího bodu by se po této křivce dostal vlivem gravitace do druhého bodu v **minimálním** čase. Podrobnější náhled do problému může čtenář najít například v [7, Example 7.1.10]. Při řešení problému *tautochrony* - nalezení křivky ve svislé rovině spojující dva dané body takové, že hmotný bod vypuštěný z vyššího bodu by se po této křivce dostal vlivem gravitace do druhého bodu v **daném čase** - formuloval okolo roku 1750 Leonhard Euler (1707-1783) obecně problém nalezení minima či maxima funkcionálu

$$F(x) = \int\limits_{\Omega} f\big(t, x(t), x'(t)\big)\ \mathrm{d}t$$

přes danou množinu funkcí, které nabývají daných hodnot v bodech hranice oblasti Ω. Jako konkrétní příklad může posloužit diferenciální problém

$$\begin{cases} \Delta x(t) = 0 & t \in \Omega, \\ x(t) = h(t) & t \in \partial\Omega \end{cases}$$

a s ním spojený variační problém najít minimum funkcionálu

$$F(x) = \int\limits_{\Omega} |\nabla x(t)|^2\ \mathrm{d}t.$$

Zmiňme ještě z dnešního pohledu obzvlášť důležitou myšlenku, kterou formuloval Vito Volterra v roce 1932. Doporučil, abychom místo řešení variačních problémů pomocí jejich redukce do diferenciální (lokální) podoby použili přesně opačný postup - abychom diferenciální problémy převedli na problémy variační a využili k jejich vyřešení variační metody. Tento z části matematicko-filozofický problém lze v moderní době dobře ilustrovat na rozvoji různých konceptů řešení diferenciálních úloh (klasické, slabé).

Poznamenejme, že minima a maxima funkcionálu nemusí být jeho jediné kritické body. Jako příklad si stačí vzít funkci dvou proměnných $f(x, y) = x^2 - y^2$. Bod $[0, 0]$ je kritickým bodem, který není ani lokálním minimem ani lokálním maximem funkce. Metody zaměřující se na nalezení těchto *sedlových bodů* se ukázaly býti velice užitečné. Lze říci, že rozvoj těchto metod zaznamenal bouřlivý rozvoj v posledních čtyřiceti letech a stále není ukončen. Například chybí sjednocující teorie, pomocí které bychom mohli nalézt libovolný kritický bod. *Princip minimaxu* a vhodná geometrie funkcionálu F umožňují dokázat existenci posloupnosti $\{x_n\}$ skoro kritických bodů ve smyslu

$$\|F'(x_n)\| \to 0.$$

Jednoduché příklady ukazují, že z existence takové posloupnosti nemusí plynout existence samotného kritického bodu. S tímto problémem se lze vypořádat za předpokladu, že funkcionál splňuje jisté podmínky kompaktnosti např. *Palaisovu-Smaleovu* podmínku.

Souhrně lze říci, že variační metody se ukázaly velice užitečné při řešení různých problémů a i v současné době je jejich vývoji a zdokonalování věnováno velké úsilí.

Tato práce má za cíl seznámit čtenáře se základy variačních metod. Na příkladech budou ukázány základní vlastnosti, předpoklady, možnosti i omezení různých vět. Speciální důraz je kladen na souvislost a porovnání výsledků s tím, co nám umožňují dokázat jiné metody (např. topologické). V neposlední řadě se také zaměřujeme na možná zobecnění - například u klasicky používané *Palaisovy-Smaleovy* podmínky kompaktnosti. Práce také obsahuje aktuální výsledky, týkající se problému s p-Laplaciánem, kde aplikujeme teoretické výsledky z předchozích kapitol.

2 Základy Variačních metod

Při hledání a studiu kritických bodů a jejich vlastností hraje klíčovou roli geometrie zkoumaného funkcionálu. Nejjednoduššími příklady kritických bodů, které každý student matematiky potká během prvního semestru studia analýzy, jsou lokální extrémy funkcí. Z Euler-Lagrangeových podmínek plyne, že každý extrém je zároveň kritickým bodem. U hladkých funkcí jedné proměnné je situace přehledná a v zásadě mohou nastat dvě možnosti. Buď je kritický bod lokálním extrémem (tj. derivace napravo od kritického bodu má jiné znaménko než derivace nalevo) nebo má derivace stejné znaménko na nějakém prstencovém okolí kritického bodu. Tuto situaci si můžeme ilustrovat na příkladu funkce $f(x) = x^3$ a bodu 0. Takovéto kritické body je obecně mnohem těžší nalézat. Jakmile začneme uvažovat funkce více proměnných, struktura kritických bodů se stává mnohem bohatší. Typickým příkladem je funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ a její kritický bod $[0, 0]$. Tento *sedlový bod* odpovídá situaci, kdy bod je minimem funkce vzhledem k jednomu směru a maximem vzhledem k druhému. Lze si také představit kritický bod, který není lokálním extrémem funkce ani sedlovým bodem - například bod $[0, 0]$ u funkce $f(x, y) = x^3 - y^2$. Vidíme, že struktura a vlastnosti kritických bodů jsou různorodé a jejich zkoumání bylo v minulosti věnováno značné úsilí. Nyní máme k dispozici různé věty, díky kterým jsme schopni nalézt kritické body různých funkcionálů, z nichž nejznámější jsou *věta o sedlovém bodě*[1] a *věta o horském sedle*[2]. Obvykle jsou tyto věty ušity na míru různým geometriím funkcionálu a potažmo různým diferenciálním úlohám. Přes snahy o formulaci jednotné teorie a univerzální věty (např. *Linking Theorem* nebo monografii [17]) nejsou stále některé otázky zcela zodpovězeny.

Variační metody zpravidla fungují ve dvou krocích. V prvním ukážeme, že geometrie funkcionálu F generuje posloupnosti $\{x_n\}$ *skoro kritických bodů* ve smyslu

$$\|F'(x_n)\| \to 0.$$

Pro představu si stačí vzít libovolný hladký zdola omezený funkcionál. Lze dokázat, že jeho minimizující posloupnost $\{x_n\}$ bude splňovat předchozí vztah. To ale automaticky neznamená, že takový funkcionál musí mít i kritický bod - například $f(x) = e^x$ je zdola omezená funkce, která žádný kritický bod nemá (minimizující posloupnost diverguje k $-\infty$). Proto poté musí

[1] Saddle Point Theorem
[2] Mountain Pass Theorem

přijít druhý krok - vhodná podmínka kompaktnosti, která nám zaručí, že z existence posloupnosti *skoro kritických bodů* plyne i existence kritického bodu. V případě spojitých zdola omezených funkcionálů tuto podmínku tvoří například slabá koercivita (viz. věta 2.3), kterou funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ nesplňuje. V obecnějších případech budeme pracovat s $Palaisovou{-}Smaleovou$ podmínkou a jejími zobecněními, které nám zaručí, že z posloupnosti skoro kritických bodů bude možné vybrat konvergentní podposloupnost.

2.1 Extrémy

Začneme s formulací klasických vět pro hledání kritických bodů, jež jsou lokálními extrémy, a poté se budeme věnovat složitějším situacím.

Definice 2.1 (lokální extrém)**.** Nechť $F : X \mapsto \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor. Řekneme, že funkcionál F má v bodě $x_0 \in X$ *lokální minimum* resp. *lokální maximum*, pokud existuje nějaké okolí U bodu x_0, pro které platí

$$F(x_0) \leq F(x) \text{ resp. } F(x_0) \geq F(x) \quad \forall x \in U.$$

Definice 2.2 (kritický bod, kritická hodnota)**.** Nechť $F : X \mapsto \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je *kritickým bodem* funkcionálu F, pokud pro libovolné $y \in X$ platí, že Gâteauxova derivace funkcionálu F v bodě x_0 ve směru y je nulová, tedy $\delta F(x_0, y) = 0$. Řekneme, že číslo $c \in \mathbb{R}$ je *kritickou hodnotou* funkcionálu F, pokud existuje jeho kritický bod x_0 takový, že platí $F(x_0) = c$.

Důležité spojení mezi variačními metodami a optimalizační teorií představuje následující nutná podmínka existence extrému.

Věta 2.1 (Eulerova nutná podmínka)**.** *Nechť $F : X \mapsto \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor, má lokální extrém v bodě $x_0 \in X$. Pokud pro nějaké $y \in X$ existuje Gâteauxova derivace funkcionálu F v bodě x_0 ve směru y, potom je tato derivace nulová.*

Důkaz. Lze nalézt například v [7, Proposition 7.1.2]. □

Dále pokračujeme s větami, které nám umožní nalézt lokální extrémy. Vzhledem k tomu, že úloha na hledání maxim funkcionálu F je ekvivalentní úloze na hledání minim funkcionálu $-F$, budeme uvažovat pouze situaci, kdy hledáme minimum.

Definice 2.3 (slabá sekvenciální polospojitost zdola)**.** Nechť $F : X \mapsto \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor. Řekneme, že funkcionál F je *slabě sekvenciálně zdola polospojitý v bodě* $x_0 \in X$, pokud pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ takovou, že $x_n \rightharpoonup x_0$, platí

$$F(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n).$$

Řekneme, že funkcionál F je *slabě sekvenciálně zdola polospojitý* na X, pokud je slabě zdola polospojitý v každém bodě $x \in X$.

Definice 2.4 (slabá sekvenciální kompaktnost)**.** Nechť M je podmnožina Banachova prostoru X. Řekneme, že množina M je *slabě sekvenciálně kompaktní*, pokud každá posloupnost prvků z M obsahuje podposloupnost, která slabě konverguje k nějakému prvku množiny M.

Poznámka 2.1. Z Eberleinovy-Schmulyanovy věty [7, Theorem 2.1.25] plyne, že každá konvexní, omezená a uzavřená podmnožina reflexivního Banachova prostoru je slabě sekvenciálně kompaktní.

Následující věta formuluje dostatečné podmínky pro existenci minima funcionálu viz. také [7, Proposition 7.2.4].

Věta 2.2 (O lokálním minimu)**.** *Nechť M je slabě sekvenciálně kompaktní a neprázdná podmnožina Banachova prostoru X a nechť $F : M \mapsto \mathbb{R}$ je slabě sekvenciálně zdola polospojitý funkcionál. Potom F je zdola omezený a existuje $x_0 \in X$ takové, že platí*

$$F(x_0) = \min_{x\in M} F(x).$$

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost minimizující funkcionál F na množině M. Tedy

$$F(x_n) \searrow \inf_{x\in M} F(x).$$

Vzhledem k tomu, že množina M je slabě sekvenciálně kompaktní, můžeme předpokládat, že existuje $x_0 \in M$ a posloupnost $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ takové, že platí $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. Dále musí platit

$$\inf_{x\in M} F(x) \leq F(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{x\in M} F(x).$$

Tedy

$$\inf_{x\in M} F(x) = F(x_0)$$

a funkcionál F je zřejmě zdola omezený.

□

Definice 2.5 (slabá koercivita)**.** Řekneme, že funkcionál $F : X \mapsto \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor, je *slabě koercivní* na X, pokud platí

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \infty.$$

Řekneme, že funkcionál F je *slabě antikoercivní* na X, pokud platí

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = -\infty.$$

Následuje věta, která formuluje dostatečné podmínky pro existenci globálního minima funcionálu viz. také [7, Propositions 7.2.10/11/12].

Věta 2.3 (O globálním minimu)**.** *Nechť $F : X \mapsto \mathbb{R}$ je slabě sekvenciálně zdola polospojitý a slabě koercivní funkcionál definovaný na reflexivním Banachově prostoru X. Potom F je zdola omezený a existuje $x_0 \in X$ takové, že platí*

$$F(x_0) = \min_{x\in X} F(x).$$

Pokud navíc pro nějaké $y \in X$ existuje $\delta F(x_0, y)$, potom platí

$$\delta F(x_0, y) = 0.$$

Důkaz. Nechť $c > \inf_{x\in X} F(x)$. Z předpokladu slabé koercivity funkcionálu F plyne, že existuje číslo R takové, že pro libovolné $x \in X$: $\|x\| \geq R$ platí $F(x) \geq c$ a tedy

$$\inf_{x\in X} F(x) = \inf_{x\in X:\|x\|\leq R} F(x).$$

Poté stačí použít větu (2.2) s $M = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$. Druhá část tvrzení plyne z toho, že x_0 je globálním minimem a musí tedy splňovat Eulerovu nutnou podmínku. □

2.2 Metody minimaxu

Klíčovým tvrzením, které použijeme k důkazu obou základních vět této kapitoly, je deformační lemma. Základní myšlenkou je důkaz toho, že pokud je velikost derivace funkcionálu F v bodech blízko hladiny c odražena od nuly, pak je možné se po grafu tohoto funkcionálu spojitě „sklouznout“ blízko hladiny c tak, aby se množina bodů původně se zobrazujících nejvýše na $c+\epsilon$ nově zobrazovala nejvýše na $c-\epsilon$ pro nějaké malé kladné ϵ.

Označme

$$
\begin{aligned}
F_{-1}(M) &:= \{x \in D(F) : F(x) \in M\}, \\
F^c &:= F_{-1}\big((-\infty, c]\big), \\
S_\delta &:= \{x \in X : \mathrm{dist}(x, S) \leq \delta\}.
\end{aligned}
$$

Věta 2.4 (deformační lemma)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $S \neq \emptyset$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon, \delta > 0$. Nechť dále platí*

$$
\|F'(x)\|_{X^*} \geq \frac{8\epsilon}{\delta} \quad \forall x \in F_{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}.
$$

Potom existuje zobrazení $\mu \in C([0,1] \times X, X)$, pro které platí

1. *$\mu(t,x) = x$ pro $t = 0$ nebo $x \notin F_{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,*
2. *$\mu(1, F^{c+\epsilon} \cap S) \subset F^{c-\epsilon}$,*
3. *pro libovolné $t \in [0,1]$ je $\mu(t,.)$ homeomorfismus na X,*
4. *pro libovolné $x \in X$ a $t \in [0,1]$, $\|\mu(t,x) - x\| \leq \delta$,*
5. *pro libovolné $x \in X$ je $F(\mu(.,x))$ klesající funkce,*
6. *pro libovolné $x \in F^c \cap S_\delta$ a $t \in (0,1]$ platí $F(\mu(t,x)) < c$.*

Důkaz. Viz. [7, Lemma 7.4.18]. Důkaz probíhá analogicky k důkazu obecnějšího lemmatu 5.1, kterým se zabýváme dále. □

Pomocí deformačního lemmatu dokážeme *obecný princip minimaxu*, ze kterého plynou klasické věty variační analýzy. Následující věta [7, Lemma 7.4.18] zobecňuje tvrzení původně dokázané Palaisem v [15].

Věta 2.5 (obecný princip minimaxu)**.** *Nechť X je Banachův prostor, M_0 podmnožina metrického prostoru M a $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Definujme*

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Pokud $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ splňuje

$$a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{t \in M_0} F\big(\gamma_0(t)\big) < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in M} F\big(\gamma(t)\big) < \infty,$$

potom pro libovolné $\epsilon \in \big(0, \frac{c-a}{2}\big)$, $\delta > 0$ a $\gamma \in \Gamma$ taková, že

$$\sup_{t \in M} F\big(\gamma(t)\big) \leq c + \epsilon, \tag{2.1}$$

existuje $x_0 \in X$, pro které platí

1. $c - 2\epsilon \leq F(x_0) \leq c + 2\epsilon$,
2. $\operatorname{dist}\big(x_0, \gamma(M)\big) \leq 2\delta$,
3. $\|F'(x_0)\| < \frac{8\epsilon}{\delta}$.

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, potom existují $0 < \epsilon < \frac{c-a}{2}, \delta > 0$ a $\gamma \in \Gamma$ takové, že (2.1) platí a pro libovolné $x \in X$ splňující body 1. a 2. neplatí nerovnost z bodu 3. Lze tedy použít deformační lemma, kde $S = \gamma(M)$. Definujme $\beta(t) = \mu(1, \gamma(t))$. Vzhledem k tomu, že $c - 2\epsilon > a$ dostáváme

$$\beta(t) = \mu\big(1, \gamma(t)\big) = \gamma(t) \quad \forall t \in M_0,$$

a tedy $\beta \in \Gamma$. Zároveň ale musí platit

$$\sup_{t \in M} F\big(\beta(t)\big) = \sup_{t \in M} F\Big(\mu\big(1, \gamma(t)\big)\Big) \leq c - \epsilon,$$

což je spor s definicí hodnoty c. □

Poznámka 2.2. Pokud nějaký funkcionál F splňuje předpoklady předchozí věty, tak je zřejmé, že existuje posloupnost $\{x_n\} \subset X$, pro kterou platí

$$F(x_n) \to c,$$
$$\|F'(x_n)\| \to 0.$$

Znamená to tedy, že $\{x_n\}$ je posloupností skoro kritických bodů.

Následuje věta o horském sedle - první z klasických vět, pomocí kterých lze hledat kritické body funkcionálů, jež nejsou lokálními extrémy. Poprvé byla formulována v roce 1973 ve článku [2] A. Ambrosettiho a P. H. Rabinowitze. V jejím důkazu je dobře vidět, jak nejdříve pomocí deformačního lemmatu a díky vhodné geometrii funkcionálu dokážeme existenci posloupnosti skoro kritických bodů a poté pomocí podmínky kompaktnosti existenci samotného kritického bodu. Geometrii si v tomto případě lze představit tak, že pro překonání horského pásu oddělujícího dvě údolí je třeba projít horským průsmykem a právě toto místo je zřejmě vhodným kandidátem pro kritický bod. Jako vhodná podmínka kompaktnosti se na první pohled jeví dobře známá *Palaisova-Smaleova* podmínka.

Definice 2.6 (PS podmínka)**.** Řekneme, že funkcionál $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, kde X je Banachův prostor, splňuje *Palaisovu-Smaleovu* podmínku na hladině c (PS_c), pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = c, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|F'(x_n)\| = 0 \tag{2.3}$$

obsahuje konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že F splňuje *Palaisovu-Smaleovu* podmínku (PS), pokud splňuje PS_c podmínku pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Věta 2.6 (O horském sedle; Ambrosetti, Rabinowitz)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ a $r > 0 : \|e\| > r$ a*

$$\inf_{x\in X:\|x\|=r} F(x) > F(o) \geq F(e).$$

Pokud funkcionál F splňuje PS podmínku na úrovni c, kde

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F\big(\gamma(t)\big)$$

a

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = o \wedge \gamma(1) = e\},$$

Potom má funkcionál F kritický bod $x_0 \in X$ takový, že $F(x_0) = c$.

Důkaz. Lze využít obecný princip minimaxu (2.5), kde volíme $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}, \Gamma_0 = \{\gamma_0\}$, kde $\gamma_0(0) = o$ a $\gamma_0(1) = e$.

Vzhledem k tomu, že ϵ a δ můžeme volit libovolně malé, musí existovat posloupnost $\{x_n\} \subset X$ taková, že platí

$$F(x_n) \to c,$$
$$F'(x_n) \to o.$$

Díky předpokladu splnění PS_c podmínky musí být z této posloupnosti možné vybrat konvergentní podposloupnost konvergující k nějakému prvku $x_0 \in X$. A ze spojité diferencovatelnosti funkcionálu F plyne, že musí platit $F(x_0) = c$ a $F'(x_0) = o$. □

Další věta, popisující podobnou situaci, je věta o sedlovém bodě (Saddle Point Theorem), která má rozsáhlé možnosti využití u eliptických diferenciálních problémů. Její princip byl formulován v [16] P. H. Rabinowitzem. Pro jednoduchou představu geometrie funkcionálu splňující předpoklady následující věty stačí uvažovat funkci $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Věta 2.7 (Věta o sedlovém bodě, Rabinowitz)**.** *Nechť $X = Y \oplus Z$ je Banachův prostor, kde Z je uzavřený podprostor a $0 < \dim Y < \infty$. Pro $\delta > 0$ definujme*

$$\begin{aligned} M &:= \{x \in Y : \|x\| \leq \delta\}, \\ M_0 &:= \{x \in Y : \|x\| = \delta\}. \end{aligned}$$

Nechť $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ a

$$b := \inf_{x \in Z} F(x) > a := \max_{x \in M_0} F(x).$$

Pokud navíc F splňuje PS_c podmínku, kde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{x \in M} F(\gamma(x)),$$

a

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} = I\}.$$

Potom c je kritická hodnota funkcionálu F.

Důkaz. Opět využijeme obecný princip minimaxu (2.5), kde volíme $\Gamma_0 = \{I\}$, k nalezení posloupnosti skoro kritických bodů. Nejdříve je třeba ověřit, že $c \geq b$. Stačí dokázat, že $\gamma(M) \cap Z \neq \emptyset$ pro libovolné $\gamma \in \Gamma$. Označme P takovou projekci na prostor Y, která splňuje $PZ = \{o\}$. Pokud $\gamma(M) \cap Z = \emptyset$, potom zobrazení

$$x \mapsto \delta \frac{P\gamma(x)}{\|P\gamma(x)\|}$$

je retrakce koule M na její hranici M_0 v prostoru Y. To je ale spor, protože $\dim(Y) < \infty$.

Zbytek důkazu probíhá zcela stejně jako u důkazu věty (2.6). $\square$

Jednoduchým důsledkem předchozí věty je její následující zjednodušení, které budeme využívat.

Věta 2.8. *Nechť* $X = Y \oplus Z$ *je Banachův prostor, kde* Z *je uzavřený podprostor a* $0 < \dim Y < \infty$. *Nechť* $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *a*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in Y}} F(x) &= -\infty, \\ \inf_{x \in Z} F(x) &> -\infty. \end{aligned}$$

Pokud navíc funkcionál F *splňuje PS podmínku, potom existuje kritický bod funkcionálu* F.

3 Klasifikace kritických bodů a metod jejich nalezení

V této kapitole se pokusíme rozdělit kritické body funkcionálů do několika kategorií podle toho, jak se chová funkcionál v jejich blízkosti. Zároveň ke každému typu přiřadíme vhodnou metodu, pomocí které by mělo být možné takový kritický bod najít.

Uvažujme spojitě diferencovatelný funkcionál F definovaný na Banachově prostoru X, který má spočetnou bázi $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že počátek je kritickým bodem funkcionálu F a $F(o) = 0$. Platí tedy, že derivace funkcionálu F v počátku ve směru bázových vektorů je nulová. Definujme řezy $F_i(t) = F(te_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Pro libovolné přirozené i je F_i funkce jedné proměnné a její derivace v nule je nulová. Typově mohou pro dané $i \in \mathbb{N}$ a řez F_i nastat následující možnosti

a) Existuje okolí U bodu 0 takové, že

$$F_i(t) \geq 0 \ \forall t \in U.$$

Tomuto případu odpovídá například funkce $f(t) = t^2$.

b) Existuje okolí U bodu 0 takové, že

$$F_i(t) \leq 0 \ \forall t \in U.$$

Tomuto případu odpovídá například funkce $f(t) = -t^2$.

c) Existuje okolí U bodu 0 takové, že

$$F_i(t)t \geq 0 \ \forall t \in U.$$

Tomuto případu odpovídá například funkce $f(t) = t^3$.

d) Existuje okolí U bodu 0 takové, že

$$F_i(t)t \leq 0 \ \forall t \in U.$$

Tomuto případu odpovídá například funkce $f(t) = -t^3$.

Kritický bod funkcionálu F v počátku nyní můžeme klasifikovat podle toho, do jakých skupin patří jeho řezy F_i. Nejjednodušší situace nastávají v případě, že všechny řezy patří do skupiny a) - potom je zřejmě počátek lokálním minimem funkcionálu F, nebo pokud všechny patří do skupiny b) - potom je počátek lokálním maximem funkcionálu F (a tedy minimem funkcionálu $-F$). Kdybychom takovýto bod hledali pomocí variačních metod, bylo by vhodné použít větu (2.2).

V případě, že řezy $F_i(t)$ jsou jak typu a) tak typu b), pak se jedná o situaci, kdy funkcionál F má v počátku sedlový bod. Označme X_1 podprostor prostoru X, který je generován těmi bázovými vektory e_i, jimž odpovívají řezy typu a) a X_2 podprostor prostoru X, který je generován ostatními bázovými vektory. Potom restrikce funkcionálu F na podprostor X_1 má v počátku lokální minumum a restrikce funkcionálu F na podprostor X_2 má v počátku lokální maximum. V tomto případě se nabízí použití obecného principu minimaxu či z něj plynoucích vět O sedlovém bodě a O horském sedle. Zde je třeba upozornit, že větu O sedlovém bodě lze využít pouze v případě, kdy alespoň jedna z množin indexů řezů typu a) nebo b) je konečná.

Nejzajímavější situace nastane, když existují řezy typu c). V tomto případě počátek nemůže být minimem ale ani maximem funkcionálu F. Zároveň ale selhávají pokusy takový kritický bod najít pomocí metod minimaxu. Způsob, jak se vypořádat s takovou možností nabízí následující kapitola.

3.1 Kritické body, jež nelze hledat metodami minimaxu

V této kapitole navrhneme princip metody, s jejíž pomocí bude možné hledat kritické body funkcionálů, které nelze nalézt pomocí vět (2.2) nebo (2.5) resp. (2.6) nebo (2.7). Jako příklady si můžeme vzít funkci $f_0(x) = x^3$ a stacionární (kritický) bod $x_0 = 0$ nebo funkci dvou proměnných $f_1(x, y) = x^3 + y^2$ a bod $x_1 = [0, 0]$.

Abychom byli schopni najít a identifikovat tyto kritické body je třeba si uvědomit, že přestože geometrie funkce f_1 neodpovídá větě O horském sedle (2.6), je možné ji lehce deformovat a předpoklady věty budou splněny - to bude principem uvažované metody.

Věta 3.1. *Nechť X je Banachův prostor, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ a $\{D_n\} \subset C^1(X, \mathbb{R})$*

taková, že

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\|D_n'(x)\| = 0,$$

Nechť navíc pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ pro funkcionál $F + D_n$ existuje posloupnost skoro kritických bodů (tj. jeho geometrie odpovídá např. větě (2.2) nebo (2.5)). Potom i pro funkcionál F existuje posloupnost skoro kritických bodů $\{x_k\}$. Tedy

$$\lim_{k\to\infty}\|F'(x_k)\| = 0.$$

Pokud navíc existuje omezená posloupnost skoro kritických hodnot $\{c_n\}$ funkcionálů $F + D_n$ a funkcionál F splňuje PS podmínku, potom existuje kritický bod funkcionálu F.

Důkaz. Začneme s první částí věty. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\{x_k^n\}$ posloupnost skoro kritických bodů funkcionálu $F + D_n$. Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k\to\infty}\|(F + D_n)'(x_k^n)\| = 0.$$

Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ z každé posloupnosti $\{x_k^n\}$ vybereme jeden bod - označíme ho $x_{k_n}^n$ - tak, aby platilo

$$\lim_{n\to\infty}\|(F + D_n)'(x_{k_n}^n)\| = 0.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|F'(x_{k_n}^n)\| \le \|(F + D_n)'(x_{k_n}^n)\| + \|D_n'(x_{k_n}^n)\|.$$

Vzhledem k tomu, že oba sčítance na pravé straně konvergují pro $n \to \infty$ k nule, musí k nule konvergovat i výraz na levé straně. Posloupnost $\{x_{k_n}^n\}$ je tedy posloupností skoro kritických bodů pro funkcionál F a první část věty je dokázána.

Nyní přejdeme k důkazu druhé části. Pokud existuje omezená posloupnost skoro kritických hodnot c_n funkcionálů $F + D_n$, potom můžeme vybrat podposloupnost posloupnosti $\{x_{k_n}^n\}$ (označme ji pro jednoduchost opět $\{x_{k_n}^n\}$) takovou, že pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ bude platit

$$\lim_{k\to\infty} F(x_{k_n}^n) = c,$$
$$\lim_{k\to\infty}\|F'(x_{k_n}^n)\| = 0.$$

A vzhledem k tomu, že funkcionál F podle předpokladu splňuje PS podmínku, musí na hladině c existovat kritický bod. $\square$

Použití předchozí věty si přiblížíme na příkladu ze začátku kapitoly.

Příklad 3.1. Uvažujme funkci $f(x,y) = x^3 + y^2$. Tato funkce téměř má geometrii odpovídající větě (2.6). Zvolíme proto následující posloupnost deformací

$$d_n(x,y) = -\frac{1}{n}x.$$

Platí

$$\|d_n'(x,y)\| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty$$

a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ odpovídá geometrie funkci $f + d_n$ větě (2.6)[3]. Druhá část věty je rovněž splněna a funkce $f(x,y) = x^3 + y^2$ musí mít kritický bod.

V následujícím příkladě ukážeme nutnost druhé části věty (3.1) k důkazu toho, že F má kritický bod.

Příklad 3.2. Uvažujme funkci $f(x) = \ln x$ a posloupnost deformací $d_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-(x-n)^2}$.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N} : n > 3$ má funkce $f + d_n$ lokální minimum x_n na okolí bodu n. Ale tato posloupnost kritických bodů je neomezená. Odpovídá to situaci, kdy funkce $f(x) = \ln x$ nemá žádný kritický bod.

Vraťme se nyní k diskuzi z 3. kapitoly. Na příkladě (3.1) je dobře vidět, jak se vypořádat se situací, kdy se snažíme najít kritický bod, ve kterém má funkcionál F řezy typu c) nebo d). Pomocí vhodné posloupnosti deformací, změníme geometrii funkcionálu F tak, abychom zachovali jeho důležité vlastnosti (existenci kritického bodu a možnost použití vhodné věty k jeho nalezení) a zároveň změnili řezy typu c) nedo d) na řezy typu a) nebo b).

3.2 Závěr

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a ukázalo se, že v zásadě můžeme kritické body rozdělit do tří kategorií. První z nich jsou lokální extrémy. Přirozeným matematickým prostředkem k jejich nalezení je věta o lokálním minimu (2.2). Do druhé kategorie spadají sedlové body a k jejich nalezení je vhodné využít princip minimaxu (2.5). Třetí jsou takové kritické body, že

[3] s příslušným posunutím

některé řezy funkcionálu jimi vedené jsou na jejich okolí rostoucí resp. klesající. To zmemožňuje přímé využití vět o lokálním extrému i principu minimaxu. Přesto je lze tyto tvrzení modifikovat pomocí věty (3.1) tak, abychom i takové body teoreticky byli schopni nalézt.

4 Diferenciální rovnice druhého řádu z variačního pohledu

4.1 Lineární případ - vlastní čísla a funkce

Uvažujme úlohu na vlastní čísla

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Tato úloha má netriviální řešení $\varphi_k(t) = \sin(kt)$ pro $\lambda = \lambda_k = k^2,\ k \in \mathrm{N}$. Čísla λ_k nazýváme vlastními čísly a příslušná řešení φ_k nazýváme vlastními funkcemi úlohy (4.1). Z Courant-Fischerova principu [7, Theorem 7.8.12] navíc plyne, že posloupnost funkcí $\varphi_k(t) = \sin(kt),\ k \in \mathrm{N}$ tvoří ortogonální bázi prostoru $H := W_0^{1,2}(0, \pi)$ se skalárním součinem definovaným předpisem

$$(x, y) = \int_0^\pi x'(t) y'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Normu tohoto prostoru generovanou tímto skalárním součinem budeme značit symbolem $\|\cdot\|$. Symbolem $\|\cdot\|_{L^2}$ budeme rozumět klasickou normu v prostoru $L^2(0, \pi)$, tj.

$$\|x\|_{L^2} = \Big(\int_0^\pi \big(x(t)\big)^2\ \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Definujme následující podprostory prostoru H

$$\begin{aligned} H_- &= \mathrm{Lin}\{\sin x, \dots, \sin kx\}, \\ H_+ &= \mathrm{Lin}\{\sin(k+1)x, \sin(k+2)x, \dots\}. \end{aligned}$$

Potom platí $H = H_- \oplus H_+$ a

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\le \lambda_k \|x\|_{L^2}^2 & \forall x \in H_-, \\ \|x\|^2 &\ge \lambda_{k+1} \|x\|_{L^2}^2 & \forall x \in H_+. \end{aligned}$$

Připomeňme, že prostor H je kompaktně vnořem do prostoru $L^2(0, \pi)$. Konkrétně pro libovolnou funkci $x \in H$ platí

$$\|x\|_{L^2} \le \|x\|.$$

Dále platí, že pokud jsou na sebe dvě funkce z prostoru H kolmé, potom jsou na sebe kolmé i v geometrii prostoru $L^2(0, \pi)$.

4.2 Aplikace věty o sedlovém bodě

V tomto příkladě využijeme větu o sedlovém bodě k získání výsledků týkajících se řešitelnosti okrajové úlohy

$$\begin{cases} -x''(t) = g\big(t, x(t)\big), & t \in (0,\pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

kde $g : (0,\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je Carathéodoryova funkce, tj. $g(\cdot, s)$ je měřitelná pro libovolné $s \in \mathrm{R}$ a $g(t, \cdot)$ je spojitá pro skoro všechna $t \in (0,\pi)$.

Klasickým řešením úlohy (4.2) budeme chápat funkci z prostoru $C^2(0,\pi) \cap C[0,\pi]$, která v každém bodě intervalu $(0,\pi)$ splňuje diferenciální rovnici a vyhovuje okrajovým podmínkám.

Slabým řešením úlohy (4.2) budeme chápat funkci $x \in H$ takovou, že pro libovolné $y \in H$ platí rovnost

$$\int_0^\pi x'(t)y'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi g\big(t, x(t)\big)y(t)\ \mathrm{d}t.$$

Dále budeme dokazovat existenci slabého řešení úlohy (4.2). Definujme potenciál nelinearity g

$$G(t,s) = \int_0^s g(t,u)\ \mathrm{d}u.$$

Pro důkaz existence řešení úlohy (4.2) budeme přepokládat, že existují dvě po sobě jdoucí vlastní čísla úlohy (4.1) λ_k a λ_{k+1}, nezáporná funkce $h \in L^2(0,\pi)$ a kladná konstanta ϵ taková, že pro libovolné $s \in \mathbb{R}$ a skoro všechna $t \in (0,\pi)$ platí

$$g(t,s) \geq \min\{\lambda_k s,\ (\lambda_{k+1} - \epsilon)s\} - h(t), \tag{4.3}$$

$$g(t,s) \leq \max\{\lambda_k s,\ (\lambda_{k+1} - \epsilon)s\} + h(t). \tag{4.4}$$

Předpokládejme, že platí

$$\lim_{|s|\to\infty} \int_0^\pi \big(\frac{\lambda_k}{2}s^2 - G(t,s)\big)\ \mathrm{d}t = -\infty. \tag{4.5}$$

Definujme funkcionál $F : H \mapsto \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big(x'(t)\big)^2 \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi G\big(t, x(t)\big) \ \mathrm{d}t. \tag{4.6}$$

Funkcionál F je spojitě diferencovatelný na prostoru H a pro libovolné funkce $x, y \in H$ platí

$$F'(x)y = \int\limits_0^\pi x'(t)y'(t) \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi g\big(t, x(t)\big)y(t) \ \mathrm{d}t. \tag{4.7}$$

Kritické body funkcionálu F jsou zároveň slabými řešeními úlohy (4.2) a naopak.

Definujme následující podprostory prostoru H.

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= \mathrm{Lin}\{\sin x, \dots, \sin(k-1)x\}, \\ \widehat{H} &= \mathrm{Lin}\{\sin kx\}, \\ H_- &= \widetilde{H} \oplus \widehat{H}, \\ H_+ &= H_-^\perp. \end{aligned}$$

V případě, že $k = 1$, není třeba uvažovat prostor $\widetilde{H}$. Následující úvahy by se tak zjednodušily, ale v principu by zůstaly stejné. Budeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $k > 1$. Platí $H_- \oplus H_+ = H$. Nyní ukážeme, že F má geometrii odpovídající větě o sedlovém bodě. Začneme tím, že ukážeme, že F je slabě antikoercivní na H_-. Nechť $x \in H_-$, potom $x = \bar{x} + \widehat{x}$, kde $\bar{x} \in \widetilde{H}$, $\widehat{x} \in \widehat{H}$ a díky (4.3) a (4.4) platí [4]

$$\begin{aligned} F(x) \qquad &= F(\bar{x} + \widehat{x}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big((\bar{x} + \widehat{x})'\big)^2 \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{(\bar{x}+\widehat{x})(t)} g(t,s) \ \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big((\bar{x}')^2 + (\widehat{x}')^2\big) \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{(\bar{x}+\widehat{x})(t)} g(t,s) \ \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t \le \end{aligned}$$

[4] Pro přehlednost zde a i v dalšich kapitolách nebudeme psát argument funkcí tam, kde nemůže dojít k nejasnostem.

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi \left((\bar{x}')^2\right)\,\mathrm{d}t - \frac{\lambda_k}{2}\int_0^\pi (\bar{x}^2)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi h|\bar{x}+\widehat{x}|\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq^{5} \frac{1}{2}\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\|\bar{x}\|^2 + \|h\|_{L^2}\|\bar{x}\|_{L^2} + \|h\|_{L^2}\|\widehat{x}\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\|\bar{x}\|^2 + \|h\|_{L^2}\|\bar{x}\| + \|h\|_{L^2}\|\widehat{x}\|. \tag{4.8}$$

Nyní uvažujme libovolnou posloupnost $\{x_n\} = \{\bar{x}_n + \widehat{x}_n\}$, kde $\{\bar{x}_n\}$ je posloupnost funkcí z $\widetilde{H}$ a $\{\widehat{x}_n\}$ je posloupnost funkcí z $\widehat{H}$, pro kterou platí $\|x_n\| \to \infty$. Způsob, jakým dokážeme že $F(x_n) \to -\infty$ pro $n \to \infty$, závisí na vlastnostech posloupnosti $\{x_n\}$. Nejdříve uvažujme případ, kdy platí $\frac{\|\bar{x}_n\|^2}{\|\widehat{x}_n\|} \to \infty$. Potom $F(x_n) \to -\infty$ plyne z (4.8). V opačném případě můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\frac{\|\bar{x}_n\|^2}{\|\widehat{x}_n\|} < M$ pro nějaké kladné M. Ukážeme, že v tomto případě platí, že $|x_n(t)| \to \infty$ pro s.v. $t \in (0,\pi)$. Pro libovoné $t \in (0,\pi)$ platí

$$\begin{aligned}
|\widehat{x}_n(t) + \bar{x}_n(t)| &\geq |\widehat{x}_n(t)| - |\bar{x}_n(t)| \geq \|\widehat{x}_n\|\frac{|\sin(kt)|}{\|\sin(kt)\|} - \sup_{t\in(0,\pi)}|\bar{x}_n(t)| \geq \\
&\geq \|\widehat{x}_n\|\frac{|\sin(kt)|}{\|\sin(kt)\|} - |\bar{x}_n|_{L^\infty} \geq \|\widehat{x}_n\|\frac{|\sin(kt)|}{\|\sin(kt)\|} - C\|\bar{x}_n\| \geq \\
&\geq \|\widehat{x}_n\|\frac{|\sin(kt)|}{\|\sin(kt)\|} - C\sqrt{M}\sqrt{\|\widehat{x}_n\|},
\end{aligned}$$

kde C je konstanta vnoření $H \hookrightarrow L^\infty(0,\pi)$. Vidíme, že pro libovoné t : $\sin(kt) \neq 0$ platí $|x_n(t)| \to \infty$. Vzhledem k tomu, že funkce $\sin(kt)$ se nuluje pouze v konečně mnoha bodech intervalu $(0,\pi)$ platí $|x_n(t)| \to \infty$ pro s.v. $t \in (0,\pi)$.

Z (4.5) dále plyne

$$\begin{aligned}
F(x_n) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (x_n'(t))^2\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \int_0^{x_n(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \frac{\lambda_k}{2}\int_0^\pi (x_n(t))^2\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi G\big(t, x_n(t)\big)\mathrm{d}t \to -\infty.
\end{aligned}$$

---

[5] Protože platí $\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\lambda_{k-1}}\int_0^\pi (x')^2\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in \widetilde{H}$ a Hölderova nerovnost.

Tedy

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_-}} F(x) = -\infty. \tag{4.9}$$

Pro $x_+ \in H_+$ ze (4.3), (4.4) a Hölderovy nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}
F(x_+) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(x_+'\right)^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \int_0^{x_+(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(x_+'\right)^2 \,\mathrm{d}t - \frac{\lambda_{k+1}-\epsilon}{2}\int_0^\pi (x_+^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi h|x_+|\,\mathrm{d}t \geq \\
&\geq \frac{\epsilon}{2\lambda_{k+1}}\|x_+\|^2 - \|h\|_{L^2}\|x_+\|.
\end{aligned}$$

A tedy musí platit

$$\inf_{x\in H_+} F(x) > -\infty.$$

Funkcionál F má geometrii odpovídající větě (2.8). Zbývá dokázat, že je splněna PS podmínka. Předpokládejme, že máme danou posloupnoust $\{x_n\} \subset H$, pro kterou platí

$$\|F'(x_n)\| \to 0, \tag{4.10}$$

$$\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |F(x_n)| < K. \tag{4.11}$$

Potřebujeme dokázat, že z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Nejdříve sporem dokážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je omezená. Předpokládejme tedy, že $\{x_n\}$ je neomezená posloupnost funkcí z H, která splňuje (4.10) a (4.11).

Označme $x_n = \bar{x}_n + \widehat{x}_n + \widetilde{x}_n$, kde $\bar{x}_n \in \widetilde{H}$, $\widehat{x}_n \in \widehat{H}$ a $\widetilde{x}_n \in H_+$. Lze ukázat (viz. například [10]), že vzhledem k (4.3) a (4.4) existují Carathédoryovy funkce Γ a r takové, že pro všechna $s \in \mathbb{R}$ a skoro všechna $t \in (0,\pi)$ platí

$$\begin{aligned}
g(t,s) &= \Gamma(t,s)s + r(t,s), \\
\lambda_k \leq \Gamma(t,s) &\leq \lambda_{k+1} - \epsilon, \\
|r(t,s)| &\leq h(t).
\end{aligned}$$

Pro $y_n := \bar{x}_n + \widehat{x}_n - \widetilde{x}_n$ platí

$$
\begin{aligned}
F'(x_n)y_n &= \|\bar{x}_n\|^2 + \|\widehat{x}_n\|^2 - \|\widetilde{x}_n\|^2 - \\
&\quad - \int_0^\pi g\big(t, x_n(t)\big)(\bar{x}_n + \widehat{x}_n - \widetilde{x}_n)\ \mathrm{d}t = \\
&= \|\bar{x}_n\|^2 + \|\widehat{x}_n\|^2 - \|\widetilde{x}_n\|^2 - \\
&\quad - \int_0^\pi \Big(\Gamma\big(t, x_n\big)x_n + r\big(t, x_n\big)\Big)(\bar{x}_n + \widehat{x}_n - \widetilde{x}_n)\ \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \|\bar{x}_n\|^2 + \|\widehat{x}_n\|^2 - \|\widetilde{x}_n\|^2 + \int_0^\pi \Gamma\big(t, x_n\big)(\widetilde{x}_n)^2\ \mathrm{d}t - \\
&\quad - \int_0^\pi \Gamma\big(t, x_n\big)(\bar{x}_n + \widehat{x}_n)^2\ \mathrm{d}t + \|h\|_{L^2}\|x_n\| \leq \\
&\leq (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\|\bar{x}_n\|^2 - \epsilon\|\widetilde{x}_n\|^2 + \\
&\quad + \int_0^\pi \underbrace{\big(\lambda_k - \Gamma(t, x_n)\big)}_{\leq 0}(\bar{x}_n + \widehat{x}_n)^2\ \mathrm{d}t + \|h\|_{L^2}\|x_n\|.
\end{aligned}
$$

Označme $x_n^\perp = \bar{x}_n + \widetilde{x}_n$. Z předchozí nerovnosti a (4.10) plyne, že existují kladné konstanty c_1 a c_2, pro které platí

$$0 = \lim_{n\to\infty} F'(x_n)\frac{y_n}{\|x_n\|} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|}\Big(-c_1\|x_n^\perp\|^2 + c_2\big(\|\widehat{x}_n\| + \|x_n^\perp\|\big)\Big).$$

Z předchozí nerovnosti plyne, že musí pro nějakou kladnou konstantu M a n dostatečně velké platit

$$\frac{\|x_n^\perp\|^2}{\|\widehat{x}_n\|} < M. \tag{4.12}$$

Dále dokážeme, že posloupnost $\{\widetilde{x}_n\}$ je omezená.

Z (4.10) plyne

$$0 \ = \ \lim_{n\to\infty} -F'(x_n)\sin(kt) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \big(g(t, x_n) - \lambda_k x_n\big)\sin(kt)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Big(\big(\Gamma(t,x_n) - \lambda_k\big) x_n + r(t,x_n) \Big) \sin(kt)\ \mathrm{d}t$$

a z toho plyne, že pro nějakou kladnou konstantu c_3 platí

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Gamma\big((t,x_n) - \lambda_k\big) x_n \sin(kt)\ \mathrm{d}t \le c_3 \|h\|_{L^2}. \tag{4.13}$$

Označme $k_0 := \frac{k\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. Potom pro n dostatečně velké díky (4.12) platí

$$\begin{aligned} x_n \sin(kt) &= k\sqrt{\frac{\pi}{2}} x_n \frac{\widehat{x}_n}{\|\widehat{x}_n\|} = \frac{k_0}{\|\widehat{x}_n\|}\big((x_n)^2 + (\widehat{x}_n)^2 - (x_n - \widehat{x}_n)^2\big) = \\ &= \frac{k_0}{\|\widehat{x}_n\|}\big((x_n)^2 + (\widehat{x}_n)^2 - (x_n^{\perp})^2\big) \ge -k_0 M. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Označme $\sin^{\pm}(kt) := \max\{\pm\sin(kt), 0\}$. Potom $\sin(kt) = \sin^{+}(kt) - \sin^{-}(kt)$ a z (4.13) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Gamma\big((t,x_n) - \lambda_k\big) x_n \sin^{+}(kt)\ \mathrm{d}t \le$$

$$\le c_3 \|h\|_{L^2} + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Gamma\big((t,x_n) - \lambda_k\big) x_n \sin^{-}(kt)\ \mathrm{d}t$$

a díky (4.14) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Gamma\big((t,x_n) - \lambda_k\big) x_n \sin^{+}(kt)\ \mathrm{d}t \le$$
$$\le c_3 \|h\|_{L^2} + k_0 M (2k+1)\pi.$$

Vzhledem k tomu, že pro $x_n(t) > 0$ platí

$$\begin{aligned} |g(t,x_n) - \lambda_k x_n| \sin^{+}(kt) &= \big|\big(\Gamma(t,x_n) - \lambda_k\big) x_n + r(t,x_n)\big| \sin^{+}(kt) \le \\ &\le \big(\Gamma(t,x_n) - \lambda_k\big) x_n \sin^{+}(kt) + c_3 \|h\|_{L^2} \end{aligned}$$

a pro $x_n(t) < 0$ platí

$$|g(t,x_n) - \lambda_k x_n| \sin^{+}(kt) \le k_0 M (2k+1)\pi + c_3 \|h\|_{L^2}$$

dostáváme, že existuje konstanta L_1, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |g(t,x_n)-\lambda_k x_n|\sin^+(kt)\,\mathrm{d}t \le L_1.$$

Podobně lze dokázat, že existuje konstanta L_2, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |g(t,x_n)-\lambda_k x_n|\sin^-(kt)\,\mathrm{d}t \le L_2.$$

A tedy pro nějakou konstantu L_3 platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |g(t,x_n)-\lambda_k x_n||\sin(kt)|\,\mathrm{d}t \le L_3.$$

Označíme $\Omega_\delta := \{t\in(0,\pi) : |\sin(kt)|\le\delta\}$. Potom existují $n_0\in\mathbb{N}$ a konstanta L a pro všechna $n>n_0$ platí

$$\delta\int_{(0,\pi)\setminus\Omega_\delta} |g(t,x_n)-\lambda_k x_n|\,\mathrm{d}t \le L. \tag{4.15}$$

Dále buď $\|\widetilde{x}_n\|\to 0$ a tedy tato posloupnost musí být omezená, nebo z (4.10) plyne

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F'(x_n)\frac{\widetilde{x}_n}{\|\widetilde{x}_n\|^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|\widetilde{x}_n\|^2}\Big(\|\widetilde{x}_n\|^2-\int_0^\pi g(t,x_n)\widetilde{x}_n\,\mathrm{d}t\Big) = \\ &= 0. \end{aligned}\tag{4.16}$$

Označíme-li $\tilde{y}_n = \frac{\widetilde{x}_n}{\|\widetilde{x}_n\|}$, potom lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje funkce $y_0\in H$, pro kterou platí $y_n \rightharpoonup y_0$ v H a $y_n\to y_0$ v $L^2(0,\pi)$ a díky (4.16) platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|\widetilde{x}_n\|^2}\Big(\int_0^\pi\big(g(t,x_n)-\lambda_k x_n\big)\widetilde{x}_n\,\mathrm{d}t\Big) = 1-\lambda_k\|y_0\|^2_{L^2}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lim_{\delta\to 0} \operatorname{Meas}\Omega_\delta = 0$, musí pro dostatečně velké n platit

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\|\widetilde{x}_n\|^2}\Big(\int\limits_{\Omega_\delta} \big(g(t,x_n) - \lambda_k x_n\big)\widetilde{x}_n \,\mathrm{d}t\Big) = 0.$$

Musí tedy existovat $\delta_0 > 0$, pro které platí

$$\frac{1}{\|\widetilde{x}_n\|^2}\Big(\int\limits_{\Omega_{\delta_0}} \big(g(t,x_n) - \lambda_k x_n\big)\widetilde{x}_n \,\mathrm{d}t\Big) < \frac{2k+1}{2(k+1)^2}. \tag{4.17}$$

Nyní využijeme (4.15), (4.17) a rovnosti (4.16).

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|\widetilde{x}_n\|^2}\Big(\|\widetilde{x}_n\|^2 - \lambda_k\|\widetilde{x}_n\|^2_{L^2} - \int\limits_{\Omega_{\delta_0}\cup\{(0,\pi)\setminus\Omega_{\delta_0}\}} \big(g(t,x_n) - \lambda_k x_n\big)\widetilde{x}_n \,\mathrm{d}t\Big) \geq \\ &\geq \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2k+1}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{2(k+1)^2} - \frac{LV}{\delta_0\|\widetilde{x}_n\|}\Big), \end{aligned}$$

kde V je konstanta vnoření $H \hookrightarrow L^1(0,\pi)$.

Z poslední nerovnosti, že posloupnost $\{\widetilde{x}_n\}$ je omezená.

Vzhledem ke (4.12), můžeme uplatnit stejný argument jako při dokazování slabé antikoercivity F na H_- k tomu, abychom ukázali, že platí $|x_n(t)| \to \infty$ pro s.v. $t \in (0,\pi)$. Z omezenosti posloupnosti $\{\widetilde{x}_n\}$ a (4.5) poté plyne

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \frac{1}{2}(\|\bar{x}_n\|^2 + \|\widehat{x}_n\|^2 + \|\widetilde{x}_n\|^2) - \int\limits_0^\pi G\big(t, x_n(t)\big)\,\mathrm{d}t = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\|\bar{x}_n\|^2 + \|\widehat{x}_n\|^2 + \|\widetilde{x}_n\|^2) - \frac{\lambda_k}{2}\|x_n\|^2_{L^2}}_{\leq C} + \\ &\qquad + \frac{\lambda_k}{2}\|x_n\|^2_{L^2} - \int\limits_0^\pi G\big(t, x_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq C + \int\limits_0^\pi \Big(\frac{\lambda_k}{2}(x_n)^2 - G\big(t, x_n(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \to -\infty. \end{aligned}$$

To je ale spor s (4.11). Posloupnost $\{x_n\}$ tedy musí být omezená a můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že slabě konverguje k funkci x_0.

Dále díky kompaktnímu vnoření H do $L^2(0,\pi)$ posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x_0 v normě prostoru $L^2(0,\pi)$. Vzhledem k tomu, že $F'(x_n) \to o$, platí

$$\big(F'(x_n) - F'(x_0)\big)(x_n - x_0) \to 0$$

a

$$\big(F'(x_n) - F'(x_0)\big)(x_n - x_0) = \int_0^\pi \big((x_n - x_0)'\big)^2 \,\mathrm{d}t - \\ - \underbrace{\int_0^\pi (g(t,x_n) - g(t,x_0))(x_n - x_0)\,\mathrm{d}t}_{\to 0},$$

což znamená, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x_0 v normě prostoru H. PS podmínka je splněna.

V předchozích odstavcích jsme tedy dokázali následující větu.

Věta 4.1. *Nechť nelinearita $g : (0,\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkce splňující podmínky (4.3), (4.4) a (4.5). Potom má úloha (4.2) slabé řešení.*

Poznámka 4.1. Věta (4.1) je původním výsledkem této práce a zobecňuje některé předchozí výsledky týkající se řešitelnosti úlohy (4.2). Například oproti základnímu článku [1] je možné uvažovat i neomezenou nelinearitu g.

Poznámka 4.2. Lze ukázat, že slabé řešení úlohy (4.2) je zároveň i řešením klasickým (viz např. [12, Theorem 4.19.]).

4.3 Fredholmova alternativa

V této kapitole se zaměříme na Fredholmovu alternativu a s ní spjatou nutnou a postačující podmínku řešitelnosti úlohy

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = f(t), & t \in (0,\pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

kde f je daná funkce z prostoru $L^2(0,\pi)$. Naším cílem bude interpretovat tyto podmínky z variačního pohledu.

Konkrétně z Fredholmovy alternativy (viz např. [14, Věta 8.9]) plyne, že

1. Buď λ není vlastním číslem úlohy (4.1), potom má úloha (4.18) řešení pro libovolnou pravou stranu $f \in L^2(0,\pi)$.
2. Nebo $\lambda = \lambda_k$ je vlastním číslem, pak řešení úlohy (4.18) existuje právě tehdy, když $\int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t = 0$, tj. když funkce f je kolmá na vlastní funkci příslušnou k vlastnímu číslu λ_k v geometrii prostoru $L^2(0,\pi)$.

Podívejme se nejdříve podrobněji na první možnost.Nyní budeme uvažovat funkcionál $F : H \mapsto \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big(x'(t)\big)^2\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi G\big(t, x(t)\big)\ \mathrm{d}t,$$

kde

$$G(t,s) = \int\limits_0^s \big(\lambda u - f(t)\big) du = \frac{\lambda}{2}s^2 - f(t)s.$$

Pokud $\lambda < \lambda_1$, použijeme k důkazu existence řešení větu o globálním miminu 2.3. Nejdříve ověříme, že F je slabě koercivní na H. Nechť x je libovolný prvek prostoru H. Potom

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big(x'(t)\big)^2\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi \frac{\lambda}{2}\Big[\big(x(t)\big)^2 - f(t)x(t)\Big]\ \mathrm{d}t \geq \\ &\geq \frac{\lambda_1 - \lambda}{2\lambda_1}\|x\|^2 - \|f\|_{L^2}\|x\|. \end{aligned}$$

Z předchozí nerovnosti plyne, že F je slabě koercivní na H. Zbývá ověřit, že funkcionál F je slabě sekvenciálně polospojitý zdola. Nechť x_0 je libovolný prvek prostoru H a $\{x_n\}$ posloupnost prvků z H, která k němu slabě konverguje. Vzhledem ke kompaktnímu vnoření H do $C[0,\pi]$ platí, že $\{x_n\}$ konverguje k x_0 v normě prostoru $C[0,\pi]$. Z toho plyne, že

$$\int\limits_0^\pi \frac{\lambda}{2}\Big[\big(x_n(t)\big)^2 - f(t)x_n(t)\Big]\ \mathrm{d}t \to \int\limits_0^\pi \frac{\lambda}{2}\Big[\big(x_0(t)\big)^2 - f(t)x_0(t)\Big]\ \mathrm{d}t.$$

Platnost nerovnosti

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_0^\pi \big(x_n'(t)\big)^2 \;\mathrm{d}t \geq \int\limits_0^\pi \big(x_0'(t)\big)^2 \;\mathrm{d}t$$

plyne z toho, že norma definovaná na Hilbertově prostoru je slabě sekvenciálně polospojitá zdola (viz např. [7, Proposition 2.1.22(iii)]). Funkcionál F je tedy slabě sekvenciálně polospojitý zdola a předpoklady věty 2.3 jsou splněny. V souladu s tvrzením Fredholmovy alternativy existuje řešení úlohy (4.18).

V případě, že $\lambda > \lambda_1$, potom existují dvě po sobě jdoucí vlastní čísla λ_k a λ_{k+1} úlohy (4.1) taková, že platí $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$. K důkazu existence řešení využijeme větu 4.1.

Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{|s|\to\infty} \big(\frac{\lambda_{k+1}}{2}s^2 - \frac{\lambda}{2}s^2 + f(t)s\big) &= \lim_{|s|\to\infty} \Big(\frac{\lambda_{k+1}-\lambda}{2}s^2 + f(t)s\Big) = \infty,\\
\lim_{|s|\to\infty} \big(\frac{\lambda_{k}}{2}s^2 - \frac{\lambda}{2}s^2 + f(t)s\big) &= \lim_{|s|\to\infty} \Big(\frac{\lambda_{k}-\lambda}{2}s^2 + f(t)s\Big) = -\infty.
\end{aligned}$$

.

Ověření platnosti ostatních požadovaných podmínek je triviální. Předpoklady věty jsou splněny a dle jejího tvrzení existuje řešení dané úlohy.

Nyní se vraťme k druhé části Fredholmovy alternativy, k situaci, kdy $\lambda = \lambda_k$ je vlastním číslem. Slabé řešení úlohy (4.18) můžeme opět hledat jako kritické body funkcionálu $F : H \mapsto \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \big(x'(t)\big)^2 \;\mathrm{d}t - \int\limits_0^\pi G\big(t, x(t)\big) \;\mathrm{d}t.$$

Nechť x je libovolná funkce z H. Potom platí

$$\begin{aligned}
F'(x)\varphi_k &= \int\limits_0^\pi x'(t)\varphi_k'(t) \;\mathrm{d}t - \lambda_k \int\limits_0^\pi x(t)\varphi_k(t) \;\mathrm{d}t + \int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t) \;\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t) \;\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Vidíme, že v libovolném bodě x je derivace funkcionálu F ve směru funkce φ_k konstantní. Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti plyne

$$\|F'(x)\| \geq \frac{\left|F'(x)\varphi_k\right|}{\|\varphi_k\|} = \frac{\left|\int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t\right|}{\|\varphi_k\|}.$$

Zřejmě je tedy podmínka $\int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0$ nutná k tomu, aby bod x byl kritickým bodem funkcionálu F a aby existovalo slabé řešení úlohy (4.18).

V případě, že je podmínka $\int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0$ splněna, je možno charakterizovat chování funkcionálu F následujícím způsobem. Definujme rozklad prostoru H

$$\begin{aligned} H_- &= \mathrm{Lin}\{\varphi : \varphi \text{ je vlastní funkce příslušná vl. číslům } \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}\}, \\ H_0 &= \mathrm{Lin}\{\varphi_k\}, \\ H_+ &= \mathrm{Lin}\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots\}. \end{aligned}$$

Funkcionál F je slabě koercivní na podprostoru H_+, tj.

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_+}} F(x) = \infty.$$

Funkcionál F je konstantní, konkrétně nulový, na podprostoru H_0, tj.

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in H_0.$$

Funkcionál F je slabě antikoercivní na podprostoru H_-, tj.

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_-}} F(x) = -\infty.$$

Navíc Gâteauxova derivace funkcionálu F v libovolném bodě x prostoru H ve směru vlastní funkce φ_k je nulová, tj.

$$F'(x)\varphi_k = \int\limits_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

4.4 Landesmanovy-Lazerovy podmínky

V této kapitole nastíníme variační význam Landesmanových-Lazerových podmínek řešitelnosti úlohy

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda_k x(t) + g\big(x(t)\big) = f(t), & t \in (0, \pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

kde λ_k je vlastní číslo úlohy (4.1), $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je daná spojitá funkce a f je funkce z prostoru $L^2(0, \pi)$.

Pro jednoduchost předpokládejme, že existují konečné limity

$$\lim_{s \to \infty} g(s) = g_+,$$
$$\lim_{s \to -\infty} g(s) = g_-.$$

Z toho plyne, že funkce g je omezená a konstantu, která ji omezuje, označme C.

Pomocí *Ljapunovovy-Schmidtovy redukce* a *Schauderovy věty o pevném bodě* bylo v [12, Theorem 6.4] dokázáno, že existuje alespoň jedno řešení úlohy (4.19) pokud platí

$$\int_0^\pi \big(g_-\varphi_k^+(t) - g_+\varphi_k^-(t)\big)\ \mathrm{d}t < \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t <$$
$$< \int_0^\pi \big(g_+\varphi_k^+(t) - g_-\varphi_k^-(t)\big)\ \mathrm{d}t, \tag{4.20}$$

kde $\varphi_k^+ : t \mapsto \max\{\varphi_k(t), 0\}$ je kladná část a $\varphi_k^- : t \mapsto \max\{-\varphi_k(t), 0\}$ je záporná část funkce φ_k.

Podobný výsledek lze nalézt v [7, Theorem 5.9.3], kde bylo využito *Lerayova-Schauderova stupně zobrazení*. Nás bude zajímat, jak již bylo řečeno v úvodu kapitoly, variační interpretace těchto podmínek.

Definujme funkcionál $F : H \mapsto \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(x'(t)\big)^2\ \mathrm{d}t - \frac{\lambda_k}{2}\int_0^\pi \big(x(t)\big)^2\ \mathrm{d}t - \int_0^\pi \int_0^{x(t)} g(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t +$$

$$+ \quad \int_0^\pi f(t)x(t)\ \mathrm{d}t.$$

Kritické body funkcionálu F jsou zároveň slabými řešeními úlohy (4.19) a naopak.

Definujme rozklad prostoru H stejně jako v předchozím příkladě, tj.

$$\begin{aligned} H_- &= \mathrm{Lin}\{\varphi : \varphi \text{ je vlastní funkce příslušná vl. číslům } \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}\}, \\ H_0 &= \mathrm{Lin}\{\varphi_k\}, \\ H_+ &= \mathrm{Lin}\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots\}. \end{aligned}$$

Nejdříve ukážeme, že F je slabě koercivní na podprostoru H_+ a slabě antikoercivní na H_-.

Uvažujme, že $x \in H_+$. Potom pro nějaké kladné konstanty C_1 a C_2 platí

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\|x\|_{L^2}^2 - \int_0^\pi \int_0^{x(t)} g(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)x(t)\ \mathrm{d}t \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2\lambda_k}\|x\|^2 - \tilde{C}\|x\|_{L^1} - \|f\|_{L^2}\|x\|_{L^2} \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2\lambda_k}\|x\|^2 - \tilde{C}\|x\| - \|f\|_{L^2}\|x\|. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že platí

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_+}} F(x) = \infty.$$

Vztah

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_-}} F(x) = -\infty.$$

bychom dokázali analogicky.

Zbývá vyřešit poslední, ovšem zásadní otázku. Jaký vliv má podmínka (4.20) na chování funkcionálu F na podprostoru, který je lineárním obalem vlastní funkce φ_k? Dobrou představu získáme, když vyšetříme chování derivace funkcionálu F v bodech tohoto podprostoru ve směru vlastní funkce

φ_k. Především nás bude zajímat asymptotické chování této derivace v bodech, které v normě divergují k nekonečnu. Definujme tedy $x_n = \rho_n \varphi_k$, kde a) $\rho_n \to \infty$ nebo b) $\rho_n \to -\infty$. Platí

$$\begin{aligned}
F'(x_n)\varphi_k &= \int_0^\pi x_n'(t)\varphi_k'(t)\ \mathrm{d}t - \lambda_k \int_0^\pi x_n(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t - \\
&\qquad - \int_0^\pi g(x_n(t))\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^\pi g(x_n(t))\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^\pi g(\rho_n\varphi_k(t))\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^\pi \left[g(\rho_n\varphi_k(t))\varphi_k^+(t) - g(\rho_n\varphi_k(t))\varphi_k^-(t)\right]\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

V případě a) z předchozího vztahu a (4.20) plyne

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F'(x_n)\varphi_k &= -\int_0^\pi \left[g_+\varphi_k^+(t) - g_-\varphi_k^-(t)\right]\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t \\
&:= c_1 < 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

V případě b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F'(x_n)\varphi_k &= -\int_0^\pi \left[g_-\varphi_k^+(t) - g_+\varphi_k^-(t)\right]\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\varphi_k(t)\ \mathrm{d}t \\
&:= c_2 > 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Vidíme, že podmínky (4.20) jsou z variačního pohledu podmínkami na asymptotické chování Gâteauxovy derivace funkcionálu F v bodech podprostoru H_0 ve směru vlastní funkce φ_k, která tento prostor definuje.

Dále z věty o střední hodnotě [7, Theorem 3.2.6] a (4.22) plyne, že pro $\rho_2 > \rho_1 > \rho$, kde ρ je dostatečně velké, existuje $\epsilon > 0 : (c_1+\epsilon < 0)\wedge(c_2-\epsilon > 0)$

takové, že platí

$$\begin{aligned}
F(\rho_2\varphi_k) - F(\rho_1\varphi_k) &= \int_0^1 F'(\rho_1\varphi_k + u(\rho_2-\rho_1)\varphi_k)(\rho_2-\rho_1)\varphi_k \,\mathrm{d}u \le \\
&\le \int_0^1 (\rho_2-\rho_1)(c_1+\epsilon)\,\mathrm{d}u = (\rho_2-\rho_1)(c_1+\epsilon).
\end{aligned}$$

Analogicky z (4.22) plyne

$$F(-\rho_2\varphi_k) - F(-\rho_1\varphi_k) \le (-\rho_2+\rho_1)(c_2-\epsilon).$$

Z těchto dvou nerovností plyne

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_0}} F(x) = -\infty. \tag{4.23}$$

Nyní uvažujme $x \in H_- \oplus H_0$. Potom pro $x_- \in H_-$ a $x_0 \in H_0$, splňující platí $x = x_- + x_0$ a nějakou kladnou konstantu C_4 platí

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(x_-'(t) + x_0'(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t - \frac{\lambda_k}{2}\int_0^\pi \big(x_-(t)+x_0(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \int_0^\pi \int_0^{x(t)} g(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\big(x(t)\big)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}(\|x_-\|^2 - \lambda_k\|x_-\|^2_{L^2}) - \int_0^\pi \Big(\int_0^{x_0(t)} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_0(t)}^{x(t)} g(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_0^\pi f(t)\big(x_-(t)\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(t)\big(x_0(t)\big)\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{2}\|x_-\|^2_{L^2} + C\|x_-\|_{L^1} + \|f\|_{L^2}\|x_-\|_{L^2} + F(x_0) \le \\
&\le \frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{2\lambda_{k-1}}\|x_-\|^2 + C_4\|x_-\| + \|f\|_{L^2}\|x_-\| + F(x_0).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Z (4.23) a (4.24) plyne

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in H_-\oplus H_0}} F(x) = -\infty.$$

Existence slabého řešení úlohy (4.19) plyne z věty (2.8). To že funkcionál F splňuje předpoklady na svou geometrii jsme ukázali v předchozích odstavcích. K důkazu splnění PS-podmínky lze použít stejný argument jako v kapitole (4.2).

4.5 Úloha s tlumením

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} -x''(t) - cx'(t) = g\big(t, x(t)\big), & t \in (0,\pi), \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

kde $g : (0,\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je Carathéodoryho funkce a $c \in \mathbb{R}$.

Snaha řešit tuto úlohu pomocí variačních metod záhy narazí na problém - není jasné, jakým způsobem definovat potenciál první derivace. Je tedy třeba nejdříve upravit úlohu (4.25) do tvaru, ve kterém člen s $x'(t)$ chybí. Použijeme k tomu substituci $u(t) = R(t)x(t)$, kde $R(t) = e^{\frac{c}{2}t}$. Všimněme si, že $R(t) > 0$ $\forall t \in [0,\pi]$. Dále platí

$$\begin{aligned} R' &= \frac{c}{2}R, \\ x &= \frac{u}{R}, \\ x' &= \frac{u'R - uR'}{R^2} = \frac{2u' - cu}{2R}, \\ x'' &= \frac{4u'' - 4cu' + c^2u}{4R}. \end{aligned}$$

Nyní vynásobíme (4.25) funkcí $R(t)$ a zjednodušíme výsledek.

$$\begin{aligned} -x''(t)R(t) - c\,x'(t)R(t) &= g\big(t, x(t)\big)R(t), \\ -u''(t) + cu'(t) - \frac{c^2}{4}u(t) - cu'(t) + \frac{c^2}{2}u(t) &= g\big(t, \frac{u}{R}(t)\big)R(t), \\ -u''(t) + \frac{c^2}{4}u(t) &= g\big(t, \frac{u}{R}(t)\big)R(t). \end{aligned}$$

Z předchozího vidíme, že úloha

$$\begin{cases} -u''(t) + \frac{c^2}{4}u(t) = g(t, \frac{u}{R}(t))R(t), & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

je ekvivalentní úloze (4.25) v tom smyslu, že každé řešení jedné úlohy generuje řešení té druhé. V odvozené rovnici ovšem chybí člen s $u'(t)$ a k jejímu řešení je možné využít variačních metod.

5 Zobecněné podmínky kompaktnosti

5.1 Definice a elementární vztahy

Podmínky kompaktnosti hrají v teorii variačních metod unikátní úlohu. V předchozích kapitolách jsme se již seznámili s $Palaisovou - Smaleovou$ podmínkou. Dále ukážeme, že k dokázání stejných vět lze volit i slabší podmínky, které nám mohou umožnit dosáhnout obecnějších výsledků. Nejdříve tedy korektně definujeme podmínky, kterých se tato kapitola bude týkat. Ve všech definicích předpokládáme, že $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, kde X je Banachův prostor.

Definice 5.1 (PS podmínka)**.** Řekneme, že funkcionál F splňuje *Palaisovu-Smaleovu* podmínku na hladině c (PS_c), pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = c, \tag{5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|F'(x_n)\| = 0 \tag{5.2}$$

obsahuje konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že funkcionál F splňuje *Palaisovu-Smaleovu* podmínku (PS), pokud splňuje PS_c podmínku pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Definice 5.2 (C podmínka)**.** Řekneme, že funkcionál F splňuje *Cerami* podmínku na hladině c (C_c), pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = c, \tag{5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|F'(x_n)\|(1 + \|x_n\|) = 0 \tag{5.4}$$

obsahuje konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že funkcionál F splňuje *Cerami* podmínku (C), pokud splňuje C_c podmínku pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Definice 5.3 (obecná podmínka kompaktnosti)**.** Nechť $\psi(x) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ je kladná, nerostoucí, lipschitzovsky spojitá funkce, pro kterou platí

$$\int_0^\infty \psi(x)\ \mathrm{d}x = \infty.$$

Řekneme, že funkcionál F splňuje obecnou podmínku kompaktnosti na hladině c ($C_c^{\psi(.)}$), pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(x_n) &= c, && (5.5) \\ \lim_{n\to\infty} \|F'(x_n)\| \frac{1}{\psi(\|x_n\|)} &= 0 && (5.6) \end{aligned}$$

obsahuje konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že F splňuje obecnou podmínku kompaktnosti ($C^{\psi(.)}$), pokud splňuje $C_c^{\psi(.)}$ podmínku pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Na tomto místě je vhodné si uvědomit, jaké posloupnosti $\{x_n\}$ v Banachově prostoru nemusí obsahovat konvergentní podposloupnosti. V zásadě existují dvě typové možnosti. Buď je posloupnost neomezená - přesněji platí $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, nebo posloupnost využívá nekonečné dimenze prostoru X - například posloupnost tvořená prvky ortonormální báze nekonečnědimenzionálního Hilbertova prostoru.
Dobře to je vidět v následující ekvivaletní definici $C_c^{\psi(.)}$ podmínky. Analogicky lze ekvivalentně zadefinovat jak PS, tak i C podmínku.

Definice 5.4 (ekvivalentní definice $C_c^{\psi(.)}$ podmínky)**.** Uvažujme funkci ψ s vlastnostmi požadovanými definicí (5.3). Řekneme, že funkcionál F, splňuje $C_c^{\psi(.)}$ podmínku na hladině c, pokud platí

- každá omezená posloupnost $\{x_n\} \subset X$ splňující (5.5) a (5.6) obsahuje konvergentní podposloupnost
- $\exists R > 0, \sigma > 0\ \forall x \in F^{-1}[c-\sigma, c+\sigma], \|x\| \geq R : \|F'(x)\| \geq \psi(\|x\|)$.

Z definic jednotlivých podmínek kompaktnosti je zřejmé, že pokud nějaký funkcionál splňuje PS_c podmínku, tak také automaticky splňuje C_c podmínku. Pokud splňuje C_c podmínku, splňuje také $C_c^{\psi(.)}$ podmínku - stačí volit $\psi(x) = \frac{1}{1+x}$.

Následuje lemma, které popisuje ekvivalenci podmínek kompaktnosti v jedné dimenzi, tedy pro funkce jedné reálné proměnné.

Lemma 5.1. *Nechť $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ splňuje $C^{\psi(.)}$ podmínku. Potom f splňuje PS podmínku.*

Důkaz. Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení, že v jedné dimenzi ze splnění podmínky kompaknosti (jak $C^{\psi(.)}$, tak C i PS) plyne, že funkce f splňuje vlastnost podobnou slabé koercivitě.

Z předpokladu, že funkce f splňuje $C^{\psi(.)}$ podmínku plyne, že $\exists R > 0 \, \forall x : |x| \geq R \Rightarrow |f'(x)| \geq \psi(|x|)$. Vzhledem k tomu, že $\psi(.)$ je kladná funkce, to znamená, že pro $x : |x| > R$ derivace funkce f nemění znaménko. Uvažujme nejdříve $x > R$ (pro $x < -R$ bychom postupovali obdobně). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f'(x)$ je kladná. Potom platí

$$f(x) = f(R) + \int\limits_R^x f'(s) \, \mathrm{d}s \geq f(R) + \int\limits_R^x \psi(s) \, \mathrm{d}s.$$

Z toho plyne, že

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Obecně lze ukázat, že platí

$$\left| \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \right| = \infty. \tag{5.7}$$

Nyní dokážeme tvrzení lemmatu sporem. Budeme předpokládat, že f nesplňuje PS_c podmínku pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Tedy předpokládáme, že existuje posloupnost čísel $\{x_n\}$, pro kterou platí $f(x_n) \to c$ a $f'(x_n) \to 0$ a která neobsahuje konvergentní podposloupnost. Vzhledem k tomu, že se pohybujeme v jedné dimenzi, to znamená, že posloupnost $\{x_n\}$ musí být neomezená. Pokud je ale neomezená, tak z (5.7) plyne, že $f(x_n) \not\to c$ a to je spor. $\square$

Z předcházejícího lemmatu plyne, že k nalezení příkladu funkcionálu splňujícího C-podmínku a nesplňujícího PS-podmínku, musíme uvažovat funkcionál s alespoň dvoudimenzionálním definičním oborem. Zajímavější důsledky z něj ale plynou pro různé energetické funkcionály pro eliptické problémy s Dirichletovou okrajovou podmínkou v rezonanci - například pro úlohu

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) + g(x,t) = f(x) & x \in (0, \pi); \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

s omezenou nelinearitou g a danou funkcí f lze ukázat, že se neomezené PS posloupnosti asymptoticky blíží k vlastnímu prostoru, který je tvořen reálnými násobky vlastní funkce $\varphi = \sin(t)$. Vzhledem k tomu, že tento prostor je jednodimenzionální, nemá smysl pokoušet se využít obecnější podmínky kompaktnosti k zobecnění stávajících výsledků řešitelnosti.

5.2 Příklady

Na následujících příkladech ukážeme rozdíly v použitelnosti jednotlivých podmínek kompaktnosti.

Příklad 5.1 (Použití C podmínky v konečné dimenzi $(PS \times C)$)**.** Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1).$$

Definujme $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ a $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Prostory X a Y tvoří ortogonální rozklad prostoru $\mathbb{R}^2$. Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} f(x, 0) &= \infty, \\ \lim_{|y|\to\infty} f(0, y) &= -\infty. \end{aligned}$$

Funkce f tedy má geometrii požadovanou větou o sedlovém bodě. Dále ověříme, že funkce f splňuje C podmínku. Uvažujme posloupnost $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí

$$|f(x_n, y_n)| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$ a

$$\|(x_n, y_n)\|\|\nabla f(x_n, y_n)\| \to 0. \tag{5.8}$$

Naším cílem je dokázat, že z posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Díky konečné dimenzi prostoru $\mathbb{R}^2$ stačí ukázat, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ je omezená. Víme, že

$$\nabla f(x_n, y_n) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}, -\frac{y}{y^2 + 1}\right)$$

a dosadíme do (5.8). Pro spor předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}$ je neomezená a také, bez újmy na obecnosti, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n| \geq 1$. Potom

$$\begin{aligned} \|(x_n, y_n)\|\|\nabla f(x_n, y_n)\| &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\sqrt{\frac{x_n^2}{(x_n^2 + 1)^2} + \frac{y_n^2}{(y_n^2 + 1)^2}} \\ &\geq \sqrt{x_n^2}\sqrt{\frac{x_n^2}{(x_n^2 + x_n^2)^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A to je spor s předpokladem (5.8) a posloupnost $\{x_n\}$ musí být omezená. Analogicky lze ukázat omezenost posloupnosti $\{y_n\}$. Existuje tedy konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$ a funkce f splňuje C-podmínku.

Funkce f ale nesplňuje PS-podmínku! Definujme posloupnost $\{(x_n, y_n)\} = \{(n, n)\}$. Platí

$$f(x_n, y_n) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_n, y_n)\| &= \sqrt{\frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \frac{n^2}{(n^2+1)^2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.
\end{aligned}$$

Tedy $\|\nabla f(x_n, y_n)\| \to 0$ a přitom neexistuje konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$.

Příklad 5.2 (Použití C-podmínky v konečné dimenzi ($C \times C^{\psi(\cdot)}$)). Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(\ln(x^2+1)) - \frac{1}{2}\ln(\ln(y^2+1)).$$

Definujme $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ a $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Prostory X a Y tvoří ortogonální rozklad prostoru $\mathbb{R}^2$. Dále platí

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} f(x, 0) &= \infty, \\
\lim_{|y|\to\infty} f(0, y) &= -\infty.
\end{aligned}$$

Funkce f tedy má geometrii požadovanou větou o sedlovém bodě. Nyní ukážeme, že funkce f splňuje obecnou podmínku kompaknosti $C^{\psi(\cdot)}$. Uvažujme posloupnost $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí

$$|f(x_n, y_n)| < K,$$

pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$ a

$$\frac{\|\nabla f(x_n, y_n)\|}{\psi(\|(x_n, y_n)\|)} \to 0, \tag{5.9}$$

kde
$$\psi(s) = \frac{1}{s\ln(s^2+1)}.$$
Naším cílem je dokázat, že z posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Díky konečné dimenzi prostoru $\mathbb{R}^2$ stačí ukázat, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ je omezená. Víme, že
$$\nabla f(x_n, y_n) = \Big(\frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}, -\frac{y}{(y^2+1)\ln(y^2+1)}\Big)$$
a dosadíme do (5.9). Pro spor předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}$ je neomezená a také, bez újmy na obecnosti, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n| \geq 1$. Potom
$$\frac{\|\nabla f(x_n, y_n)\|}{\psi(\|(x_n, y_n)\|)} \geq \frac{\big(\nabla f(x_n, y_n), (1,0)\big)}{\psi(\|(x_n, 0)\|)} = \frac{x_n^2}{x_n^2+1}\frac{\ln(x_n^2+1)}{\ln(x_n^2+1)} = \frac{x_n^2}{x_n^2+1} \to 1.$$
To je spor s předpokladem (5.9) a posloupnost $\{x_n\}$ musí být omezená. Analogicky lze ukázat omezenost posloupnosti $\{y_n\}$. Existuje tedy konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$ a funkce f splňuje podmínku kompaktnosti $C^{\psi(.)}$.

Funkce f ale nesplňuje C-podmínku! Definujme posloupnost $\{(x_n, y_n)\} = \{(n, n)\}$. Platí
$$f(x_n, y_n) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
a
$$\begin{aligned}\|(x_n, y_n)\|\|\nabla f(x_n, y_n)\| &= n\sqrt{2} \\ &\cdot \sqrt{\frac{n^2}{(n^2+1)^2\ln^2(n^2+1)} + \frac{n^2}{(n^2+1)^2\ln^2(n^2+1)}} \\ &\leq \frac{2}{\ln(n^2+1)}.\end{aligned}$$

Tedy $\|(x_n, y_n)\|\|\nabla f(x_n, y_n)\| \to 0$ a přitom neexistuje konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{(x_n, y_n)\}$.

5.3 Zobecněné deformační lemma

Klíčovým důsledkem splnění PS_c podmínky je možnost dokázat deformační lemma na úrovni c. Ukazuje se ale, že předpoklad splnění PS_c podmínky je zbytečně silný. Následují věta ukazuje, že stačí předpokládat splnění $C^{\psi(.)}$ podmínky. Tím se ukazuje, že lze méně náročnou $C^{\psi(.)}$ podmínkou nahradit PS podmínku ve větách (2.6), (2.7) a (2.8).

Označme[6]

$$\begin{aligned} F^c &:= \{x \in X : F(x) \geq c\} \\ K_c &:= \{x \in X : F(x) = c \wedge F'(x) = o\} \\ (K_c)_\delta &:= \{x \in X : \operatorname{dist}(x, K_c) \leq \delta\} \\ \widetilde{x} &:= \{x \in X : F'(x) \neq o\} \end{aligned}$$

Věta 5.1 (Amrouss [9])**.** *Nechť X je reálný Banachův prostor a nechť $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ splňuje $C_c^{\psi(.)}$ podmínku. Pak pro libovolné $\overline{\epsilon} > 0,\ \delta > 0$ existují $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ a $\mu \in C^1([0,1] \times X, X)$ takové, že platí*

a) $\mu(0, x) = x \quad \forall x \in X$,

b) $\mu(t, .)$ *je homomorfismus X na X pro libovolné $t \in [0,1]$,*

c) $\mu(t, x) = x \quad \forall t \in [0,1]\ \forall x \in X : x \notin F^{-1}[c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon})$,

d) $F\big(\mu(., x)\big)$ *je rostoucí funkce na $[0,1]$ pro libovolné $x \in X$,*

e) $\mu(1, F^{c-\epsilon} \setminus (K_c)_\delta) \subset F^{c+\epsilon}$,

f) pokud $(K_c) = \emptyset$ *potom* $\mu(1, F^{c-\epsilon}) \subset F^{c+\epsilon}$,

g) $\sup_{t \in [0,1],\ x \in A} \|\mu(t, x)\| + \|\mu^{-1}(t, x)\| < \infty$ *pro libolnou omezenou množinu $A \subset X$,*

h) pokud je F sudý funkcionál, $\mu(t, .)$ je liché zobrazení pro libovolné $t \in [0,1]$.

Důkaz. Z $C_c^{\psi(.)}$ (definice 5.4) podmínky plyne, že platí

$$\|F'(x)\| \geq \psi(\|x\|) \qquad \forall x \in F^{c-\overline{\epsilon}} \setminus \big(F^{c+\overline{\epsilon}} \cup B_R(0)\big) \tag{5.10}$$

pro nějaké kladné $\overline{\epsilon}$. Dále z $C_c^{\psi(.)}$ podmínky plyne, že K_c je kompaktní množina. Nechť $R' > R$ je takové, že $(K_c)_\delta \subset B_{R'}$. Potom dostáváme

$$\|F'(x)\| \geq b \qquad \forall x \in \Big[F^{c-\hat{\epsilon}} \setminus \big(F^{c+\hat{\epsilon}} \cup (K_c)_{\frac{\delta}{4}}\big)\Big] \cap B_{R'}(0) \tag{5.11}$$

[6]Narozdíl od druhé kapitoly zde měníme značení tak, aby odpovídalo původním zdrojům.

pro nějaké kladné konstanty b a $\hat{\epsilon}$. Dále existuje lokálně Lipschitzovsky spojité zobrazení $V : \widetilde{x} \mapsto X$ (pseudogradient), které je liché pro F sudé, $\|V(x)\| \leq 2$ a $|\langle V(x), F'(x)\rangle| \geq \|F'(x)\|$ pro všechna $x \in \widetilde{x}$ [9, Lemma 2.5].

Nyní vezmeme libovolné $\epsilon_1 \in (0, \hat{\epsilon})$ a definujme

$$\begin{aligned}
A &:= F^{-1}(c-\hat{\epsilon}, c+\hat{\epsilon}),\\
B &:= F^{-1}[c-\epsilon_1, c+\epsilon_1],\\
g(x) &:= \frac{\operatorname{dist}(x, X\setminus A)}{\operatorname{dist}(x,B)+\operatorname{dist}(x, X\setminus A)},\\
l(x) &:= \frac{\operatorname{dist}\big(x,(K_c)_{\frac{\delta}{4}}\big)}{\operatorname{dist}(x,(K_c)_{\frac{\delta}{4}})+\operatorname{dist}(x, X\setminus (K_c)_{\frac{\delta}{2}})},\\
h(s) &:= \frac{1}{2\psi(1+s)}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Dále uvažujme

$$W(x) = \begin{cases} g(x)l(x)h(\|x\|)V(x) & \text{pro } x \in \widetilde{x},\\ 0 & \text{jinde.}\end{cases}$$

Z konstrukce plyne, že zobrazení W je lokálně Lipschitzovsky spojité na X, je liché pro F sudé a $\|W(x)\| \leq 2h(\|x\|)$.

Dále pro libovolné $x \in X$ uvažujme počáteční úlohu

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}(t,x) = W\big(\mu(t,x)\big),\\ \mu(0,x) = x.\end{cases}$$

Tato úloha má právě jedno řešení $\hat{\mu}(.,x)$ definované na nějakém otevřeném maximálním intervalu $\big(w_-(x), w_+(x)\big)$ obsahujícím 0. Navíc platí [9, Lemma 2.2, Lemma 2.3]

$$|D_r\|\hat{\mu}(t,x)\|| \leq \|\frac{\mathrm{d}\hat{\mu}}{\mathrm{d}t}(t,x)\| \quad \text{pro } t \in \big(w_-(x), w_+(x)\big),$$

kde D_r označuje pravou derivaci funkce. Dostáváme

$$\begin{aligned}
|D_r\|\hat{\mu}(t,x)\|| &\leq 2h\big(\|\hat{\mu}(t,x)\|\big),\\
\|\hat{\mu}(0,x)\| &= \|x\|.
\end{aligned}$$

Nechť u je řešením úlohy

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{\psi\left(u(t)+1\right)} \\ u(0) = \|x\| \end{cases}$$

definované na nějakém otevřeném intervalu $\big(t_-(x), t_+(x)\big)$. Ukážeme, že můžeme předpokládat, že $t_+(x) = \infty$.

$$t_+(x) = \int\limits_0^{t_+(x)} \mathrm{d}t = \int\limits_0^{t_+(x)} u'(t)\psi\big(1 + u(t)\big)\ \mathrm{d}t.$$

Po substituci za $s = u(t)$ dostaneme

$$t_+(x) = \int\limits_{\|x\|}^{\infty} \psi(1 + s)\ \mathrm{d}s.$$

Tedy $t_+(x) = \infty$.

Dále sporem ukážeme, že $w_+(x) = \infty$ a $w_-(x) = -\infty$. Kdyby tomu tak nebylo, dostáváme [9, Lemma 2.4]

$$\|\hat{\mu}(t, x)\| \le u(t),\ \ \forall t \in \big[0, w_+(x)\big). \tag{5.13}$$

Z předpokladu $w_+(x) < \infty$ plyne, že $u(t)$ je omezená na $\big[0, w_+(x)\big)$ a existuje konstanta M, pro kterou platí

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mu}}{\mathrm{d}t}(t, x)\right\| \ \le\ 2h\big(\|\hat{\mu}(t, x)\|\big) \le M.$$

Dále dostáváme

$$\|\hat{\mu}(t_n, x) - \hat{\mu}(t_m, x)\| \le M|t_n - t_m| \qquad \forall t_n, t_m \in \big[0, w_+(x)\big).$$

Z toho ale plyne, že $\lim_{t\to w_+(x)} \|\hat{\mu}(t, x)\|$ je konečná. To je ve sporu s předpokladem maximality intervalu $\big(w_-(x), w_+(x)\big)$. Musí tedy platit, že $w_+(x) = \infty$. Tvrzení pro $w_-(x)$ bychom dokázali obdobně.

Označme $q : X \mapsto \mathrm{R}$ libovolné Lipschitzovsky spojité zobrazení takové, že $q = 1$ na $\overline{B}_{R'+\frac{1}{2}}$, $q = 0$ na $X \setminus B_{R'+1}$ a $0 \le q(x) \le 1\ \forall x \in X$. Dále označme

$\chi(x) = q(x)W(x)$. $\chi(x)$ je lokálně Lipschitzovské a omezené zobrazení. Nechť $k \in \mathrm{R}$ je takové, že platí $\|\chi(x)\| \le k \;\forall x \in X$ a $\frac{\delta}{2k} \le 1$. Nechť $\xi(t,x)$ je řešením problému

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \chi(\xi), \quad \xi(0,x) = x.$$

Pak $\xi : \mathrm{R} \times X \mapsto X$ je spojité zobrazení a splňuje

$$\|\xi(t,x) - x\| \le k|t| \quad \forall t \in \mathrm{R} \;\forall x \in X. \tag{5.14}$$

Vzhledem k tomu, že $\chi = W$ na $\overline{B}_{R'}$ platí

$$\xi(t,x) = \hat{\mu}(t,x) \quad \forall t \in \mathrm{R} \;\forall x \in \overline{B}_{R'}. \tag{5.15}$$

Deformační zobrazení μ definujeme následovně

$$\mu(t,x) = \begin{cases} \xi(t\frac{\delta}{2k}, x) & t \in [-1,1] \quad x \in \overline{B}_{R'} \\ \hat{\mu}(t\frac{\delta}{2k}, x) & t \in [-1,1] \quad x \in X \setminus \overline{B}_{R'}. \end{cases}$$

Vzhledem ke konstrukci zobrazení μ jsou zřejmě splněny dokazované vlastnosti a), b) a c). Navíc platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\big(\mu(t,x)\big) &= \Big\langle F'\big(\mu(t,x)\big), \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}(t,x)\Big\rangle \\ &= \frac{\delta}{2k} g\big(\mu(t,x)\big) l\big(\mu(t,x)\big) h\big(\|\mu(t,x)\|\big)\big\langle F'\big(\mu(t,x)\big), V\big(\mu(t,x)\big)\big\rangle \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

Z toho plyne d). Pro důkaz e) vezměme libovolné $\epsilon < \frac{\delta}{8k}\min\{\frac{b}{\psi(R')}, 1, \hat{\epsilon}\}$ a $x \in F^{c-\epsilon} \setminus (K_c)_\delta$. Ukážeme, že platí

$$F\big(\mu(1,x)\big) \ge c + \epsilon.$$

Pokud by tomu tak nebylo, tak vzhledem k d) dostáváme

$$c - \epsilon \le F(x) \le F\big(\mu(t,x)\big) \le F\big(\mu(1,x)\big) \le c + \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$

Čili

$$g\big(\mu(t,x)\big) = 1 \quad \forall t \in [0,1]. \tag{5.16}$$

Z (5.14) a (5.15) dostáváme

$$\|\mu(t,x)-x\| \le \frac{\delta}{2}|t| \quad \forall t\in[-1,1]\ \forall x\in \overline{B}_{R'}.$$

Vzhledem k tomu, že $x\notin (K_c)_\delta$, z předchozí nerovnosti plyne $\mu(t,x)\notin (K_c)_{\frac{\delta}{2}}$ nebo $\|\mu(t,x)\| > R'$. A tedy

$$l\big(\mu(t,x)\big)=1 \ \wedge\ F'\big(\mu(t,x)\big)\neq 0 \quad \forall t\in[0,1]. \tag{5.17}$$

Platí ale také

$$F\big(\mu(1,x)\big)-F(x)=$$
$$=\frac{\delta}{2k}\int_0^1 g\big(\mu(t,x)\big)l\big(\mu(t,x)\big)h\big(\|\mu(t,x)\|\big)\big\langle F'\big(\mu(t,x)\big),V\big(\mu(t,x)\big)\big\rangle\ \mathrm{d}t$$

Tedy z (5.10), (5.11), (5.16) a (5.17) dostáváme

$$\begin{aligned}
F\big(\mu(1,x)\big)-F(x) \ &\ge\ \frac{\delta}{2k}\Big[\frac{1}{2\psi(R')}\int_0^1 \|F'\big(\mu(t,x)\big)\|\gamma_{[t,\|\mu(t,x)\|\le R']}\ \mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_0^1 \|F'\big(\mu(t,x)\big)\|\frac{1}{2\psi\big(\mu(t,x)\big)}\gamma_{[t,\|\mu(t,x)\|>R']}\ \mathrm{d}t\Big] \\
&\ge\ \frac{\delta}{4k}\min\Big\{\frac{b}{\psi(R')},1\Big\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

kde γ je charakteristická funkce množiny.

A tedy

$$F\big(\mu(1,x)\big)\ge c-\epsilon+\frac{\delta}{4k}\min\Big\{\frac{b}{\psi(R')},1\Big\}\ge c+\epsilon \tag{5.19}$$

To je spor a tvrzení e) je dokázáno. V případě $K_c=\emptyset$ máme $(K_c)_\delta=\emptyset$, a tedy z e) plyne f). Část g) plyne z (5.13).

□

Důsledkem předchozího lemmatu je následující zobecnění obecného principu minimaxu (věta 2.5). Toto zobecnění lže využít například při důkazu vět (2.6) a (2.7) a díky tomu stačí pro existenci kritického bodu předpokládat splnění $C^{\psi(.)}$ podmínky namísto silnější *Palaisovy* − *Smaleovy* podmínky.

Věta 5.2 (obecný princip minimaxu)**.** *Nechť $\psi(.)$ je funkce s vlastnosti požadovanými definicí (5.3). Nechť X je Banachův prostor, M_0 podmnožina metrického prostoru M a $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Definujme*

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Pokud $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ splňuje

$$a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{t \in M_0} F\big(\gamma_0(t)\big) < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in M} F\big(\gamma(t)\big) < \infty,$$

potom pro libovolné $\bar{\epsilon} \in (0, c - a)$ existuje kladná konstanta $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ taková, že pro $\gamma \in \Gamma$, pro které platí

$$\sup_{t \in M} F\big(\gamma(t)\big) \leq c + \epsilon, \tag{5.20}$$

existuje $x_0 \in X$, pro které platí

1. $c - \bar{\epsilon} \leq F(x_0) \leq c + \bar{\epsilon}$,
2. $\|F'(x_0)\|_{\frac{1}{\psi(\|x_0\|)}} < \epsilon$.

Důkaz. Buď je c kritická hodnota funkcionálu F a pak tvrzení věty platí triviálně. V opačném případě dokážeme tvrzení sporem. Pokud by neplatilo, potom existují $0 < \bar{\epsilon}$ a $\gamma \in \Gamma$ taková, že pro libovolné $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ (5.20) platí a pro libovolné $x \in X$ splňující bod 1. neplatí nerovnost z bodu 2. Lze tedy použít zobecněné deformační lemma na funkcionál $-F$. Definujme $\beta(t) := \mu(1, \gamma(t))$. Vzhledem k tomu, že $c - \bar{\epsilon} > a$ dostáváme

$$\beta(t) = \mu\big(1, \gamma(t)\big) = \gamma(t) \quad \forall t \in M_0,$$

a tedy $\beta \in \Gamma$. Zároveň ale musí platit

$$\sup_{t \in M} F\big(\beta(t)\big) = \sup_{t \in M} F\Big(\mu\big(1, \gamma(t)\big)\Big) \leq c - \epsilon,$$

což je spor s definicí hodnoty c. □

5.4 Využití C podmínky při řešení okrajové úlohy

Následující příklad ilustruje situaci, kdy nám obecnější podmínka kompaktnosti pomůže dokázat řešitelnost diferenciální úlohy. Vzhledem k technické složitosti je konstrukce takového příkladu poměrně náročná.

Příklad 5.3 (Použití C podmínky v nekonečné dimenzi)**.** V tomto příkladě využijeme C podmínku k dokázání řešitelnosti následující úlohy s periodickými okrajovými podmínkami.

$$\begin{cases} -x''(t) - x(t) = g\big(t, x(t)\big), & t \in (0, 2\pi), \\ x(0) = x(2\pi), \\ x'(0) = x'(2\pi). \end{cases} \tag{5.21}$$

Klasickým řešením úlohy (5.21) budeme chápat funkci z prostoru $C^2(0, 2\pi) \cap C[0, 2\pi]$, která v každém bodě intervalu $(0, 2\pi)$ splňuje diferenciální rovnici a vyhovuje okrajovým podmínkám.

Za slabé řešení úlohy (5.21) budeme považovat funkci x z prostoru $H := W^{1,2}_{per}(0, 2\pi)$, která pro libovolné $y \in H$ splňuje integrální rovnost

$$\int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} g(t, x(t))y(t)\ \mathrm{d}t. \tag{5.22}$$

Prostor H je podprostor prostoru $W^{1,2}(0, 2\pi)$, který je generovaný funkcemi $\{1, \sin nt, \cos nt; n \in \mathbb{N}\}$. Na prostoru H budeme pracovat se standardní normou prostoru $W^{1,2}(0, 2\pi)$.

To, že každé klasické řešení $\widetilde{x}(t)$ úlohy (5.21) je zároveň jejím slabým řešením plyne z následující úvahy. Uvažujme libovolné $y \in H$. Platí

$$\begin{aligned}
-\widetilde{x}''(t) - \widetilde{x}(t) = g(t, \widetilde{x}(t)), &\qquad t \in (0, 2\pi), \\
-\widetilde{x}''(t)y(t) - \widetilde{x}(t)y(t) = g(t, \widetilde{x}(t))y(t), &\qquad t \in (0, 2\pi), \\
-\int_0^{2\pi} \widetilde{x}''(t)y(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \widetilde{x}(t)y(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} g(t, \widetilde{x}(t))y(t)\ \mathrm{d}t, \\
\int_0^{2\pi} \widetilde{x}'(t)y'(t)\ \mathrm{d}t - \underbrace{\Big[\widetilde{x}'(t)y(t)\Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \widetilde{x}(t)y(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} g(t, \widetilde{x}(t))y(t)\ \mathrm{d}t, \\
\int_0^{2\pi} \widetilde{x}'(t)y'(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \widetilde{x}(t)y(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} g(t, \widetilde{x}(t))y(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pro důkaz existence slabého řešení úlohy (5.21) budeme předpokládat, že funkce $g : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ má následující speciální tvar:

$$g(t, s) = \Gamma(t)h(s),$$

kde

$$\Gamma(t) = \begin{cases} -1 & t \in (\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}) \cup (\frac{6\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}), \\ 1 & t \in (\frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}) \cup (\frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}), \\ 0 & \text{pro ostatní } t \in (0, 2\pi). \end{cases} \tag{5.23}$$

Dále budeme předpokládat, že funkce $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je spojitá a existuje konstanta $R > 0$, pro kterou platí

$$h(s) = \frac{\operatorname{sgn}(s)}{\sqrt{|s|}} \text{ pro } |s| > R. \tag{5.24}$$

Existuje tedy $K > 0$ takové, že pro libovolnou dvojici $t \in [0, 2\pi]$ a $s \in \mathbb{R}$ platí

$$|g(t, s)| < K.$$

K důkazu existence slabého řešení úlohy (5.21) použijeme větu o sedlovém bodě (2.8). Definujme funkcionál $F : H \mapsto \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x'(t))^2 \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t))^2 \, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\int_0^{x(t)} g(t, s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{5.25}$$

Kritické body funkcionálu F jsou slabými řešeními úlohy (5.21) a naopak. Dále pro libovolné $x, y \in H$ platí

$$F'(x)y = \int_0^{2\pi} x'(t)y'(t) \, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} x(t)y(t) \, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} g(t, x(t))y(t) \, \mathrm{d}t. \tag{5.26}$$

Definujme následující podprostory prostoru H

$$\begin{aligned} H_+ &= \operatorname{Lin}\{\sin(nt), \cos(nt);\ n \in \mathbb{N}, n > 1\}, \\ H_{\cos} &= \operatorname{Lin}\{\cos(t)\}, \\ H_{\sin} &= \operatorname{Lin}\{\sin(t)\}, \\ H_0 &= \operatorname{Lin}\{1\}. \end{aligned}$$

Platí $H_+ \oplus H_{\cos} \oplus H_{\sin} \oplus H_0 = H$. Ukážeme, že funkcionál F je slabě koercivní na podprostoru $H_+ \oplus H_{\cos}$ a slabě antikoercivní na $H_{\sin} \oplus H_0$.

Nechť $x \in (H_+ \oplus H_{\cos})$, potom $x = x_+ + x_{\cos}$, kde $x_+ \in H_+$, $x_1 \in H_{\cos}$ a[7]

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F(x_+ + x_{\cos}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((x_+ + x_{cos})'\big)^2 \,\mathrm{d}t - \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x_+ + x_{cos})^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \int_0^{(x_+ + x_{\cos})(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((x_+')^2 + (x_{\cos}')^2\big)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x_+^2 + x_{\cos}^2)\,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{x_{\cos}(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_{\cos}(t)}^{(x_+ + x_{\cos})(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s \Big)\,\mathrm{d}t = \\
&\geq \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (x_+')^2\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\int_0^{x_{\cos}(t)} g(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - K\|x_+\|_{L^1} \geq \\
&= \underbrace{c\|x_+\|^2 - K\|x_+\|_{L^1}}_{:=\gamma(x_+)} + F(x_{\cos}(t))
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

pro nějakou kladnou konstantu c.

Vzhledem k tomu, že funkce γ je slabě koercivní na H, je z předchozí nerovnosti patrné, že pokud ukážeme, že funcionál F je slabě koercivní na $H_{\cos}$ bude slabě koercivní i na $H_+ \oplus H_{\cos}$. Stačí tedy vyšetřit, jakých hodnot nabývá F na $H_{\cos}$.

Nechť $x_{\cos} = \rho\cos(t)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Protože nás bude zajímat chování funkcionálu F pro dostatečně velké ρ, budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $|\rho\sin(t)| > R \;\forall t \in (\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$.

$$
\begin{aligned}
F(x_{\cos}) &= F(\rho\cos(t)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((\rho\cos(t))')^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\rho\cos(t))^2\,\mathrm{d}t -
\end{aligned}
$$

[7] Pro lepší čitelnost v následujících řádcích vynecháváme argument funkcí.

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho\cos(t)} g(t,s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & -\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho\cos(t)} g(t,s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho\cos(t)} \Gamma(t)h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \int_{\frac{2\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \\
& \quad -\int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{6\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_0^{\rho\sin(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \\
& \quad -\int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\int_0^{-\rho\sin(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\int_0^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_{\rho\sin(t)}^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\int_{-\rho\sin(t)}^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & 2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_{\rho\sin(t)}^{\rho\cos(t)} h(s)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\int_{|\rho|\sin(t)}^{|\rho|\cos(t)} s^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \\
= \quad & 4\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}}\left[\big(|\rho|\cos(t)\big)^{\frac{1}{2}} - \big(|\rho|\sin(t)\big)^{\frac{1}{2}}\right]\ \mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

$$= \quad |\rho|^{\frac{1}{2}} \underbrace{4\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} \Big[\big(\cos(t)\big)^{\frac{1}{2}} - \big(\sin(t)\big)^{\frac{1}{2}}\Big] \,\mathrm{d}t}_{:=C>0} = |\rho|^{\frac{1}{2}}C.$$

Vidíme, že $F(x_{\cos}) \to \infty$ pro $|\rho| \to \infty$ a tedy i pro $\|x_{\cos}\| \to \infty$. Vzhledem k (5.27) dostáváme

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in(H_+\oplus H_{\cos})}} F(x) = \infty.$$

Analogicky lze ukázat, že platí

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in(H_0\oplus H_{\sin})}} F(x) = -\infty.$$

Funkcionál F tedy má geometrii odpovídající větě o sedlovém bodě. Zbývá dokázat, že je splněna C podmínka. Předpokládejme tedy, že máme danou posloupnost $\{x_n\} \subset H$, pro kterou platí

$$\|F'(x_n)\|(1 + \|x_n\|) \to 0, \tag{5.28}$$

$$\exists K > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |F(x_n)| < K. \tag{5.29}$$

Potřebujeme dokázat, že z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Označme $x_n = x_n^0 + x_n^{\cos} + x_n^{\sin} + x_n^+$, kde $x_n^0 \in H_0$, $x_n^{\cos} \in H_{\cos}$, $x_n^{\sin} \in H_{\sin}$ a $x_n^+ \in H_+$. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{x_n^0\}$ je omezená. Z (5.28) a definice nelinearity g plyne, že pro dostatečně velké n a libovolné $\epsilon > 0$ platí

$$\begin{aligned} \epsilon \quad &\geq \quad |F'(x_n)x_n^0| = \Big|-\int\limits_0^{2\pi} x_n x_n^0 \,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t, x_n)x_n^0 \,\mathrm{d}t\Big| \geq \\ &\geq \quad \|x_n^0\|^2 - \int\limits_0^{2\pi} K|x_n^0| \,\mathrm{d}t \geq \|x_n^0\|^2 - K\|x_n^0\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Z předchozí rovnice plyne, že posloupnost $\{x_n^0\}$ je omezená. Omezenost posloupnosti $\{x_n^+\}$ dokážeme analogicky. Pro dostatečně velké n a libovolné

$\epsilon > 0$ existuje kladná konstanta c_1, pro kterou platí

$$\begin{aligned}\epsilon \ &\geq \ |F'(x_n)x_n^+| = \Big|\int\limits_0^{2\pi} x_n'(x_n^+)' \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} x_n x_n^+ \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n)x_n^+ \ \mathrm{d}t\Big| = \\ &= \ \Big|\int\limits_0^{2\pi} \big((x_n^+)'\big)^2 \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} (x_n^+)^2 \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n)x_n^+ \ \mathrm{d}t\Big| = \\ &\geq \ c_1\|x_n^+\|^2 - \int\limits_0^{2\pi} K|x^+|_n \ \mathrm{d}t = c_1\|x_n^+\|^2 - K\|x_n^+\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Dále ukážeme, že posloupnosti $\{x_n^0\}$ a $\{x_n^+\}$ nejsou pouze omezené, ale také že v normě konvergují k nule.

Vzhledem k tomu, že posloupnosti $\{x_n^0\}$ a $\{x_n^+\}$ jsou omezené, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro skoro všechna $t \in (0, 2\pi)$ platí $x_n(t) \to \infty$.

To znamená, že díky Lebesqueove větě platí

$$\int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n) \ \mathrm{d}t \to 0$$

a také

$$\|g(t,x_n)\|_{L^1} = \int\limits_0^{2\pi} |g(t,x_n)| \ \mathrm{d}t \to 0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty} |F'(x_n)x_n^0| \ &= \ \lim_{n\to\infty}\Big| - \int\limits_0^{2\pi} x_n x_n^0 \ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n)x_n^0 \ \mathrm{d}t\Big| \geq \\ &= \ \lim_{n\to\infty} \|x_n^0\|^2.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že $\|x_n^0\| \to 0$. Vzhledem k tomu, že funkcionál F je spojitě diferencovatelný, můžeme tedy v posloupnosti x_n zanedbat složku z prostoru H_0 a dále budeme pracovat s $x_n = x_n^{\cos} + x_n^{\sin} + x_n^+$.

Nyní ukážeme, že $\|x_n^+\| \to 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} |F'(x_n)x_n^+| = \Big|\int\limits_0^{2\pi} x_n'(x_n^+)'\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} x_n x_n^+\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n)x_n^+\ \mathrm{d}t\Big| = \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\int\limits_0^{2\pi} \big((x_n^+)'\big)^2\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} (x_n^+)^2\ \mathrm{d}t - \int\limits_0^{2\pi} g(t,x_n)x_n^+\ \mathrm{d}t\Big| \geq \\
&\geq \lim_{n\to\infty}\big(c_1\|x_n^+\|^2 - \|g(t,x_n)\|_{L^1}\|x_n^+\|_{L^\infty}\big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} c_1\|x_n^+\|^2.
\end{aligned}
$$

Z toho plyne, že $\|x_n^+\| \to 0$. Vzhledem ke spojité diferencovatelnosti funkcionálu F stačí tedy vyšetřit, jak se chová derivace funkcionálu F na dvoudimenzionálním podprostoru $H_{\cos} \oplus H_{\sin}$. Pro zjednodušení označme $i(\alpha,\beta) := \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$. Vzhledem k symetriím

$$F\big(i(\alpha,\beta)\big)\sim F\big(i(\alpha,-\beta)\big) \sim F\big(i(-\alpha,-\beta)\big)\sim F\big(i(-\alpha,+\beta)\big)^{8}$$

a

$$F\big(i(\alpha,\beta)\big)\sim -F\big(i(\beta,\alpha)\big),$$

které platí pro velké α a β, stačí při vyšetřování F' uvažovat situaci, kdy $\alpha \geq \beta \geq 0$.

Platí

$$
\begin{aligned}
&\|F'\big(i(\alpha,\beta)\big)\|\|i(\alpha,\beta)\| \geq F'\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0) = \\
&= -\int\limits_0^{2\pi} g\big(t,i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t = -\int\limits_0^{2\pi} \Gamma(t)h\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t = \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} h\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{2\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} h\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t - \\
&\quad - \int\limits_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{6\pi}{8}} h\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} h\big(i(\alpha,\beta)\big)i(\alpha,0)\ \mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

[8] tj. $\lim F\big(i(\alpha,\beta)\big) - F\big(i(\alpha,-\beta)\big) = 0$ pro $\alpha^2+\beta^2 \to \infty$

$$
\begin{aligned}
= & \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} \Big[h\big(i(\alpha,\beta)\big) i(\alpha,0) - h\big(i(\beta,\alpha)\big) i(0,\alpha) - \\
& -h\big(i(\beta,-\alpha)\big) i(0,-\alpha) + h\big(i(-\alpha,\beta)\big) i(-\alpha,0) \Big] \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Diskuzi rozdělíme na dva případy. Buď $\alpha = \beta$ nebo $\alpha > \beta$. Začněme s první možností. K upravení předchozího integrálu využijeme předpokladu $\alpha = \beta$ a dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že α je dostatečně velké, tak aby platilo
$\alpha\big(\cos(t) - \sin(t)\big) > K \ \forall t \in (\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8})$.

$$
\begin{aligned}
= & \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} \Big[h\big(i(\alpha,\alpha)\big) i(\alpha,-\alpha) + h\big(i(\alpha,-\alpha)\big) i(\alpha,\alpha) \Big] \, \mathrm{d}t = \\
= & \ \alpha^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} \Big[h\big(i(1,1)\big) i(1,-1) + h\big(i(1,-1)\big) i(1,1) \Big] \, \mathrm{d}t}_{:=D>0} = \\
= & \ \alpha^{\frac{1}{2}} D. \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

Nyní uvažujme druhou možnost, kdy $\alpha > \beta$. Definujme

$$
\Omega_{0,\alpha,\beta} := \{t \in (\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}) : \ |i(-\beta,\alpha)| \leq R\}
$$

a

$$
\Omega_{1,\alpha,\beta} := \{t \in (\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}) : \ |i(-\beta,\alpha)| > R\}.
$$

Pro takto definované množiny platí

$$
\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{Meas}(\Omega_{0,\alpha,\beta}) = 0
$$

a

$$
\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{Meas}(\Omega_{1,\alpha,\beta}) = \frac{\pi}{8}.
$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
&\|F'\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)\|\|i(\alpha,\beta)\| \geq \\
\geq\ & F'\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta) = -\int\limits_0^{2\pi} g\bigl(t, i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t = \\
=\ & -\int\limits_0^{2\pi} \Gamma(t)h\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t = \\
=\ & \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} h\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{2\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} h\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t - \\
& -\int\limits_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{6\pi}{8}} h\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{6\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} h\bigl(i(\alpha,\beta)\bigr)i(\alpha,\beta)\ \mathrm{d}t = \\
=\ & \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{2\pi}{8}} \Bigl[h\bigl(\underbrace{i(\alpha,\beta)}_{:=a}\bigr)i(\alpha,\beta) - h\bigl(\underbrace{i(\beta,\alpha)}_{:=b}\bigr)i(\beta,\alpha) - \\
& -h\bigl(\underbrace{i(\beta,-\alpha)}_{:=c}\bigr)i(\beta,-\alpha) + h\bigl(\underbrace{i(-\alpha,\beta)}_{:=d}\bigr)i(-\alpha,\beta)\Bigr]\ \mathrm{d}t = \\
=\ & \int\limits_{\Omega_{1,\alpha,\beta}} \Bigl[h(a)a - h(b)b - h(c)c + h(d)d\Bigr]\ \mathrm{d}t + \\
& + \int\limits_{\Omega_{0,\alpha,\beta}} \Bigl[h(a)a - h(b)b - h(c)c + h(d)d\Bigr]\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že integrand ve druhém integrálu je zdola omezený a zajímá nás situace, kdy $\alpha \to \infty$ (a tedy $\mathrm{Meas}(\Omega_{0,\alpha,\beta}) \to 0$), bude pro odhadnutí předcházejícího výrazu klíčové chování prvního integrálu. Označme $e := \frac{\beta}{\alpha}$.

$$
\int\limits_{\Omega_{1,\alpha,\beta}} \Bigl[h(a)a - h(b)b - h(c)c + h(d)d\Bigr]\ \mathrm{d}t =
$$

$$= \int\limits_{\Omega_{1,\alpha,\beta}} (\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d})\ \mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{1,\alpha,\beta}} \Big(\sqrt{i(\alpha,\beta)} - \sqrt{i(\beta,\alpha)} - \sqrt{i(-\beta,\alpha)} - \sqrt{i(\alpha,-\beta)}\Big)\ \mathrm{d}t =$$
$$= \alpha^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\Omega_{1,\alpha,\beta}} \Big[\underbrace{\sqrt{i(1,e)} - \sqrt{i(e,1)}}_{:=E_1>0} \underbrace{-\sqrt{i(-e,1)} + \sqrt{i(1,-e)}}_{:=E_2>0}\Big]\ \mathrm{d}t =$$
$$= \alpha^{\frac{1}{2}}(E_1 + E_2)\,\mathrm{Meas}(\Omega_{1,\alpha,\beta}). \tag{5.31}$$

Z (5.30) a (5.31) plyne, že pro dostatečně velké α a β a nějakou kladnou konstantu ϵ platí
$$\|F'\big(i(\alpha,\beta)\big)\|\|i(\alpha,\beta)\| > \epsilon > 0. \tag{5.32}$$
Z předchozí nerovnosti a (5.28) plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ musí být omezená. Můžeme tedy předpokládat, že slabě konverguje k funkci x_0. A díky kompaktnímu vnoření H do $L^2(0,\pi)$ posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x_0 v normě prostoru $L^2(0,\pi)$.

Víme tedy, že
$$\big(F'(x_n) - F'(x_0)\big)(x_n - x_0) \to 0$$
a
$$\big(F'(x_n) - F'(x_0)\big)(x_n - x_0) = \int_0^\pi \big((x_n - x_0)'\big)^2\ \mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^\pi (x_n - x_0)^2\ \mathrm{d}t}_{\to 0} -$$
$$- \underbrace{\int_0^\pi (g(x_n) - g(x_0))(x_n - x_0)\ \mathrm{d}t}_{\to 0},$$
což znamená, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x_0 v normě prostoru $W^{1,2}(0,\pi)$. C podmínka je splněna.

Poznámka 5.1. V důkazu platnosti C podmínky bylo klíčové dokázat platnost vztahů (5.30) a (5.31). K důkazu platnosti standardní PS podmínky, ale tyto vztahy nestačí. Odpovídá to tomu, že Gâteauxova derivace funkcionálu F v bodech nějaké neomezené posloupnosti ve vhodně zvoleném směru sice konverguje k 0 (a tedy PS podmínka nemusí platit), ale vynásobíme-li ji normou bodů, tak už k nule nekonverguje (a C podmínka platí).

6 Aplikace na p-Laplacián

6.1 Úvod k problému

V této kapitole následujeme a zobecňujeme práci profesorů Drábka a Takáče [8]. Budeme zkoumat geometrii a chování Palaisových-Smaleových posloupností pro energetický funkcionál

$$J_{\lambda_1}(x) := \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla x|^p \,\mathrm{d}t - \frac{\lambda_1}{p}\int\limits_\Omega |x|^p \,\mathrm{d}t - \int\limits_\Omega fx \,\mathrm{d}t$$

definovaný na $W_0^{1,p}(\Omega)$, kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, λ_1 je první vlastní číslo Dirichletova p-Laplaciánu $\Delta_p x := \mathrm{div}(|\nabla x|^{p-2}\nabla x)$ na $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $f \in L^\infty(\Omega)$ je daná funkce. Tento energetický funkcionál je odvozený od diferenciální úlohy

$$\begin{cases} -\Delta_p x - \lambda_1 |x|^{p-2}x = f & \text{v } \Omega, \\ x = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pro první vlastní číslo λ_1 platí

$$\inf\Big\{\int\limits_\Omega |\nabla x|^p \,\mathrm{d}x : x \in W_0^{1,p}(\Omega) \wedge \int\limits_\Omega |x|^p \,\mathrm{d}t = 1\Big\}.$$

První vlastní číslo λ_1 je jednonásobné a odpovídající vlastní funkci označíme φ_1. Tato vlastní funkce může být normalizována tak, aby $\varphi_1 > 0$ v Ω a $\|\varphi_1\|_{L^p(\Omega)} = 1$ díky [3]. Navíc $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$.

Motivováni *Fredholmovou alternativou* budeme vyšetřovat situaci, kdy pravá strana f a φ_1 jsou na sebe kolmé v $L^2(\Omega)$ smyslu. Proto definujeme

$$\begin{aligned} L^2(\Omega)^\perp &:= \Big\{x \in L^2(\Omega) : \int\limits_\Omega x\varphi_1 \,\mathrm{d}t = 0\Big\}, \\ M^{\perp,L^2} &:= \Big\{x \in L^2(\Omega) : \int\limits_\Omega xy \,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall y \in M\Big\}. \end{aligned}$$

Platí tedy $L^2(\Omega) = \mathrm{Lin}\{\varphi_1\} \oplus L^2(\Omega)^\perp$. Podobně můžeme pro $p > 2$ tento rozklad aplikovat na $W_0^{1,p}(\Omega)$ díky tomu, že $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. To nám umožňuje jednoznačně rozdělit libovolnou funkci x z $W_0^{1,p}(\Omega)$ následujícím způsobem

$$x = \tau\varphi_1 + x^\perp,$$

kde $\tau \in \mathbb{R}$ a $\int\limits_\Omega x^\perp \varphi_1 \; \mathrm{d}t = 0$.

Během studia funkcionálu J_{λ_1} se budeme soustředit na porozumění chování jeho nelineární části E.

$$E(x) := \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |\nabla x|^p \; \mathrm{d}t - \frac{\lambda_1}{p} \int\limits_\Omega |x|^p \; \mathrm{d}t.$$

Z Poincarého nerovnosti plyne, že funkcionál E je pozitivně p-homogenní a nezáporný. Navíc $E(x) = 0$ právě tehdy, když x je reálným násobkem φ_1.

Tato kapitola je koncipována následovně. Nejdříve představíme nástroje a dodatečné předpoklady. Poté porovnáme nové výsledky s předchozími. Nakonec nové výsledky dokážeme.

6.2 Předpoklady a značení

Budeme používat standardní skalární součin na $L^2(\Omega)$ definovaný následovně $\langle x, y \rangle := \int\limits_\Omega xy \; \mathrm{d}t$. Tento skalární součin také indukuje dualitu mezi $L^p(\Omega)$ a $L^{p'}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ a $1 < p, p' < \infty$, a mezi prostory $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ rovněž.

Nadále v této kapitole budeme předpokládat, že platí

Předpoklad 1. Pokud $N \geq 2$, potom Ω je omezená oblast $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je kompaktní manifold třídy $C^{1,\alpha}$ pro nějaké $\alpha \in (0,1)$, a Ω také splňuje "the interior sphere condition"v každém bodě $\partial\Omega$. Pokud $N = 1$, potom Ω je omezený interval v $\mathbb{R}$. ■

Dále definujeme množinu

$$U := \{t \in \Omega : \nabla\varphi_1(t) \neq 0\}.$$

Také budeme pracovat s funkcí $\mathbf{a} \mapsto \frac{1}{p}|\mathbf{a}|^p : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ společně s její první a druhou Fréchetovou derivací $\mathbf{a} \mapsto |\mathbf{a}|^{p-2}\mathbf{a} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ a $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N\times N}$, kde $\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a pro $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}) := |\mathbf{a}|^{p-2}\Big(\mathbf{I} + (p-2)\frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\Big).$$

V případě $N = 1$ se předcházející výraz redukuje na

$$A(a) = (p-1)|a|^{p-2}.$$

Všimněme si, že $I + (p-2)\frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$ je pozitivně definitní, symetrická $N \times N$ matice s vlastními čísly 1 a $p-1$. Matice $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ dále splňuje nerovnosti

$$\min\{1, p-1\}|\mathbf{a}|^{p-2}|\mathbf{v}|^2 \le \langle \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^N} \le \max\{1, p-1\}|\mathbf{a}|^{p-2}|\mathbf{v}|^2 \quad (6.1)$$

pro všechna $\mathbf{a},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N,\ \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Nyní zadefinujeme prostor funkcí D_{φ_1}, který přirozeně vyvstává při řešení našeho problému. Existují velké rozdíly v jeho definici a vlastnostech v případech $1 < p < 2$ a $p > 2$. Norma na tomto prostoru je (v obou případech) definována následovně

$$\|x\|_{D_{\varphi_1}} := \Big(\int\limits_\Omega |\nabla\varphi_1|^{p-2}|\nabla x|^2 \,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2)$$

Pro $p > 2$ je (6.2) také norma na $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Takáč [20]) a D_{φ_1} označíme zúplnění $W_0^{1,p}(\Omega)$ vzhledem k této normě. Vnoření $D_{\varphi_1} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ je kompaktní.

Pro $1 < p < 2$ definujeme $x \in D_{\varphi_1}$ právě tehdy, když $x \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\nabla x(t) = \mathbf{0}$ pro skoro všechna $t \in \Omega \setminus U$ a $\|x\|_{D_{\varphi_1}} < \infty$. Tento prostor s normou $\|.\|_{D_{\varphi_1}}$ je spojitě vnořen do $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Dále uvažujeme případ $p > 2$. Abychom získali informace o chování funkcionálu E, vezměme libovolnou funkci $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a použijeme Taylorovu formuli druhého stupně v energetické formě [7, Proposition 3.2.27]

$$\begin{aligned} E(\varphi_1 + \phi) &= E(\varphi_1 + \phi) - E(\varphi_1) = \\ &= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla(\varphi_1 + \phi)|^p \,\mathrm{d}t - \frac{\lambda_1}{p}\int\limits_\Omega |\varphi_1 + \phi|^p \,\mathrm{d}t = \\ &= Q_\phi(\phi, \phi), \end{aligned}$$

kde Q_ϕ je symetrická bilineární forma na $[W_0^{1,p}(\Omega)]^2$ definovaná následovně

$$\begin{aligned} Q_\phi(w_1, w_2) \;:=\; & \int\limits_\Omega \Big\langle \Big(\int\limits_0^1 \mathbf{A}\big(\nabla(\varphi_1 + s\phi)\big)(1-s)\mathrm{d}s\Big)\nabla w_1,\ \nabla w_2 \Big\rangle \,\mathrm{d}t - \\ & -\lambda_1(p-1)\int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^1 |\varphi_1 + s\phi|^{p-2}(1-s)\mathrm{d}s\Big) w_1 w_2 \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

pro $w_1, w_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pro $\phi \equiv 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} Q_0(w_1, w_2) &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \langle \mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\nabla w_1,\ \nabla w_2\rangle\ \mathrm{d}t - \\ &\quad -\lambda_1 \frac{p-1}{2}\int\limits_\Omega \varphi_1^{p-2} w_1\ w_2\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Kvadratická forma Q_0 je pozitivně semidefinitní, tedy $Q_0(y,y) \geq 0\ \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Navíc Q_0 lze uzavřít v $L^2(\Omega)$ a definiční obor jejího uzávěru je roven D_{φ_1} [20, p. 199]. Abychom mohli říci pro jaké $y \in D_{\varphi_1}$ platí $Q_0(y,y) = 0$, musíme přidat následující předpoklad:

Předpoklad 2. Pokud $N \geq 2$ a $\partial\Omega$ není souvislá, potom neexistuje funkce $y \in D_{\varphi_1} :\ Q_0(y,y) = 0$ s následujícími čtyřmi vlastnostmi:

- $y = \varphi_1 \chi_S$ s.v. v Ω, kde $S \subset \Omega$ je Lebesgueovsky měřitelná a $0 < \mathrm{Meas}\{S\} < \mathrm{Meas}\{\Omega\}$;
- $\overline{S}$ je souvislá množina a $\overline{S} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$;
- pokud V je souvislou podmnožinou U, tak buď $V \subset S$ nebo $V \subset \Omega \setminus S$;
- $(\partial S) \cap \Omega \subset \Omega \setminus U$. ■

V [20, Section 2.1] byla formulována hypotéza, že splnění předpokladu 2 automaticky plyne z předpokladu 1. Navíc je tento druhý předpoklad automaticky splněn v případě $1 < p < 2$.

Lemma 6.1. *Nechť $p > 2$ a předpoklady 1 a 2 jsou splněny. Potom funkce $y \in D_{\varphi_1}$ splňuje $Q_0(y,y) = 0$ právě tehdy, když $y = k\varphi_1$ pro nějakou konstantu $k \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. [20, Proposition 4.4] □

Poznámka 6.1. Předcházející přípravu ke kvadratizační proceduře, kdy hodnoty funkcionálu E budeme odhadovat pomocí hodnot Q_0, lze provést i v případě $1 < p < 2$. Je ale třeba, protože nelze obecně dvakrát diferencovat funkcionál E, omezit se na podprostor D_{φ_1}. Vzhledem k tomu, že to v této kapitole nepotřebujeme, nebudeme zacházet do detailu.

Stejným způsobem můžeme přistoupit ke Fréchetově derivaci E'. Nechť ϕ a y jsou libovolné funkce z $W_0^{1,p}(\Omega)$. K výpočtu $E'(\varphi_1+\phi)y$ použijeme Taylorovu formuli prvního stupně [7, Theorem 3.2.6]

$$
\begin{aligned}
E'(\varphi_1+\phi)y &= E'(\varphi_1+\phi)y - E'(\varphi_1)y \\
&= \int_\Omega |\nabla(\varphi_1+\phi)|^{p-2}\left\langle \nabla(\varphi_1+\phi),\ \nabla y\right\rangle \,\mathrm{d}t - \\
&\qquad -\lambda_1 \int_\Omega |\varphi_1+\phi|^{p-2}(\varphi_1+\phi)y \,\mathrm{d}t \\
&= X_\phi(\phi, y),
\end{aligned}
$$

kde X_ϕ je symetrická bilineární forma na $[W_0^{1,p}(\Omega)]^2$ definovaná následovně

$$
\begin{aligned}
X_\phi(w_1,w_2) \;&:=\; \int_\Omega \left\langle \Big(\int_0^1 \mathbf{A}\big(\nabla(\varphi_1+s\phi)\big)\mathrm{d}s\Big)\nabla w_1,\ \nabla w_2 \right\rangle \mathrm{d}t - \\
&\qquad -\lambda_1(p-1)\int_\Omega \Big(\int_0^1 |\varphi_1+s\phi|^{p-2}\mathrm{d}s\Big) w_1 w_2 \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

pro $w_1, w_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pro $\phi \equiv 0$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
X_0(w_1,w_2) &= \int_\Omega \langle \mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\nabla w_1,\ \nabla w_2\rangle \,\mathrm{d}t - \\
&\qquad -\lambda_1(p-1)\int_\Omega \varphi_1^{p-2} w_1\, w_2 \,\mathrm{d}t = \\
&= 2Q_0(w_1,w_2).
\end{aligned}
$$

V případě $p > 2$ budeme často využívat zobecněnou Poincarého nerovnost (Fleckinger, Takáč [11]):
Existuje kladná konstanta $c = c(p,\Omega)$ taková, že pro libovolnou funkci $x \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $x = \tau\varphi_1 + x^\perp$ platí

$$
E(x) \ge c\Big(|\tau|^{p-2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^{p-2}|\nabla x^\perp|^2 \,\mathrm{d}t + \int_\Omega |\nabla x^\perp|^p \,\mathrm{d}t\Big).
$$

6.3 Výsledky

Začneme se shrnutím předcházejících výsledků. Následující věta byla dokázána profesory Drábkem a Takáčem v [8].

Věta 6.1 (Drábek, Takáč). *Nechť* $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, *předpoklad 1 je splněn a* $0 \neq f = f^{\perp} \in L^{\infty}(\Omega)^{\perp, L^2}$. *Nechť pro* $p > 2$ *platí předpoklad 2 a pro* $1 < p < 2$ *platí* $f^{\perp} \notin D_{\varphi_1}^{\perp, L^2}$. *Potom*

a) Pro $p > 2$ *a* $-\infty < c < 0$ *funkcionál* J_{λ_1} *splňuje PS podmínku na úrovni* c.

b) Pro $p > 2$ *funkcionál* J_{λ_1} *nesplňuje PS podmínku na úrovni* $c = 0$.

c) Pro $p > 2$ *a* $0 < c < \infty$ *každá PS posloupnost pro* J_{λ_1} *na úrovni c taková, že* $\{J'_{\lambda_1}(u_n)\}$ *je omezená posloupnost v* $L^{\infty}(\Omega)$ *obsahuje konvergentní podposloupnost.*

d) Pro $1 < p < 2$ *a libovolné* $c \in \mathrm{R}$ *každá PS posloupnost pro* J_{λ_1} *na úrovni c taková, že* $\{J'_{\lambda_1}(u_n)\}$ *je omezená posloupnost v* $L^{\infty}(\Omega)$ *obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Všimněme si předpokladů v částech *c*) a *d*), ve kterých požadujeme, aby $\{J'_{\lambda_1}(u_n)\}$ byla omezená posloupnost v $L^{\infty}(\Omega)$. Tyto předpoklady jsou ve své podstatě umělé - s jejich pomocí dokázali autoři využít výsledky z teorie regularity k dokázání tvrzení, přestože tyto podmínky nevyvstávají přirozeně. Naším hlavním cílem bylo odstranění těchto podmínek. Úspěšně se to podařilo v případě, kdy $p > 2$ (část *a*) následující věty) a pouze částečného úspěchu bylo dosaženo v případě, kdy $1 < p < 2$ (část *d*). Navíc pro $p > 2$ jsme ověřili, že neomezená PS posloupnost na úrovni $c = 0$ zkonstruovaná v [8] nenarušuje pouze PS podmínku, ale obecnější $C^{\psi(\cdot)}$ podmínku rovněž (část *b*). Část *c*) následující věty, ve které nebylo dosaženo žádného vylepšení oproti předchozímu výsledku, uvádíme pro úplnost.

Věta 6.2 (Souhrn výsledků). *Nechť* $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, *předpoklad 1 je splněn a* $0 \neq f = f^{\perp} \in L^{\infty}(\Omega)^{\perp, L^2}$. *Nechť pro* $p > 2$ *platí předpoklad 2 a pro* $1 < p < 2$ *platí* $f^{\perp} \notin D_{\varphi_1}^{\perp, L^2}$. *Potom*

a) Pro $p > 2$ *a* $c \neq 0$ *funkcionál* J_{λ_1} *splňuje PS podmínku na úrovni* c.

b) Pro $p > 2$ *funkcionál* J_{λ_1} *nesplňuje* $C^{\psi(\cdot)}$ *podmínku na úrovni* $c = 0$.

c) Pro $1 < p < 2$ a libovolné $c \in \mathrm{R}$ každá PS posloupnost pro J_{λ_1} na úrovni c taková, že $\{J'_{\lambda_1}(u_n)\}$ je omezená posloupnost v $L^\infty(\Omega)$ obsahuje konvergentní podposloupnost.

d) Pro $1 < p < 2$ a $c > 0$ funkcionál J_{λ_1} splňuje C podmínku na úrovni c.

Zajímavé jsou rovněž odhady geometrie E a E' popsané v lemmatu (6.5).

6.4 Pomocná tvrzení a důkazy

Jak již bylo napsáno v úvodu kapitoly, použijeme k odhadu hodnot zobrazení E a E' Taylorův rozvoj. Proto nejdříve začneme s několika lemmaty, která nám přiblíží chování funkcionálu E. První z nich je malé, ale přesto důležité vylepšení [8, Proposition 3.6]. Dává nám informaci o tom, jak růst v τ a α a jejich poměr ovlivňuje hodnoty funkcionálu $E(\tau\varphi_1 + \alpha(\tau)x^\perp)$.

Lemma 6.2. *Nechť $p > 2$ a $x^\perp$ je libovolná nenulová funkce z $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$ nebo $1 < p < 2$ a $x^\perp$ je libovolná nenulová funkce z $D_{\varphi_1}(\Omega)^\perp$. Nechť jsou předpoklady 1 a 2 splněny. Potom*

$$E\big(\tau\varphi_1 + \alpha(\tau)x^\perp\big) = |\tau|^{p-2}\alpha^2(\tau)\big(Q_0(x^\perp, x^\perp) + o(1)\big)$$
$$\text{pro } |\tau| \to \infty \ \wedge \ \frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to 0.$$

Povšimněme si, že $Q_0(x^\perp, x^\perp) \neq 0$ kvůli $x^\perp \not\equiv 0$.

Důkaz. Označme $x = \tau\varphi_1 + \alpha(\tau)x^\perp = \tau(\varphi_1 + y^\perp)$, kde $y^\perp := \frac{\alpha(\tau)}{\tau}x^\perp$ pro $\tau \neq 0$. Dále využijeme p-homogenity funkcionálu E a Taylorovy formule

$$\begin{aligned}
E\big(\tau\varphi_1 + \alpha(\tau)x^\perp\big) &= |\tau|^p\ E(\varphi_1 + y^\perp) \\
&= |\tau|^p\ Q_{y^\perp}(y^\perp, y^\perp) \\
&= |\tau|^{p-2}\ \alpha^2(\tau)\ Q_{y^\perp}(x^\perp, x^\perp) \\
&= |\tau|^{p-2}\ \alpha^2(\tau)\ \big(Q_0(x^\perp, x^\perp) + o(1)\big)
\end{aligned}$$

pro $|\tau| \to \infty \ \wedge \ \frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to 0$, kde poslední rovnost plyne z

$$\lim_{|\tau|\to\infty} Q_{y^\perp}(x^\perp, x^\perp) = Q_0(x^\perp, x^\perp) + o(1). \tag{6.3}$$

Rovnost (6.3) dokážeme pomocí Lebesgueovy věty. Bez újmy na obecnosti předpokládáme $\frac{\alpha(\tau)}{\tau} < 1$. Tedy $y^\perp = \frac{\alpha(\tau)}{\tau}x^\perp$ splňuje $|y^\perp| < |x^\perp|$ uvnitř

Ω. Dále bychom mohli zkonstruovat integrovatelné majoranty stejně jako v důkazu [8, Proposition 3.6]. Čtenář také může nahlédnout do důkazu lemmatu (6.4), kde dokážeme obecnější výsledek než (6.3) pro $p > 2$. $\square$

Poznámka 6.2. Pro $p > 2$ z vylepšené Poincarého nerovnosti plyne, že zdánlivě velmi omezující předpoklad $\frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to 0$ bude automaticky splněn pro PS posloupnosti - tedy tam, kde nás odhady zajímají nejvíce.

Analogicky lze dokázat následující lemma, kde pracujeme s Fréchetovou derivací E'.

Lemma 6.3. *Nechť $p > 2$ a $x^\perp, y^\perp$ jsou libovolné nenulové funkce z $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$. Nechť jsou předpoklady 1 a 2 splněny. Potom*

$$E'\big(\tau\varphi_1 + \alpha(\tau)x^\perp\big)y^\perp = |\tau|^{p-2}\alpha(\tau)\big(X_0(x^\perp, y^\perp) + o(1)\big)$$
$$\text{pro } |\tau| \to \infty \ \wedge \ \frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to 0.$$

Motivováni snahou zobecnit předcházející lemmata se budeme snažit vyšetřit situaci, kdy kolmá část $x^\perp$ není zafixována. Proto je nejdříve třeba dokázat následující lemma.

Lemma 6.4. *Nechť $p > 2$ a $\{x_n^\perp\}$ a $\{y_n^\perp\}$ jsou omezené posloupnosti funkcí z $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$. Nechť jsou předpoklady 1 a 2 splněny a $\|y_n^\perp\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Potom existuje podposloupnost $\{y_{n_k}^\perp\}$ posloupnosti $\{y_n^\perp\}$ taková, že*

$$\begin{aligned} Q_{y_{n_k}^\perp}(x_{n_k}^\perp, x_{n_k}^\perp) &= Q_0(x_{n_k}^\perp, x_{n_k}^\perp) + o(1) \quad \text{pro } n \to \infty, \\ X_{y_{n_k}^\perp}(x_{n_k}^\perp, x_{n_k}^\perp) &= X_0(x_{n_k}^\perp, x_{n_k}^\perp) + o(1) \quad \text{pro } n \to \infty. \end{aligned}$$

Důkaz. Dokážeme pouze první část tvrzení. Druhou lze dokázat zcela analogicky.

Začneme odečtením $Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp)$ od $Q_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp)$ a použijeme Hölderovu nerovnost.

$$\begin{aligned} &\big|Q_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp) - Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp)\big| \leq \\ \leq\ &\Big|\int_\Omega \Big(\int_0^1 \mathbf{A}\big(\nabla(\varphi_1 + sy_n^\perp)\big)(1-s)\ \mathrm{d}s - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\Big)\left\langle \nabla x_n^\perp,\ \nabla x_n^\perp \right\rangle \mathrm{d}t\Big| \\ &+\lambda_1(p-1)\Big|\int_\Omega \Big(\int_0^1 |\varphi_1 + sy_n^\perp|^{p-2}(1-s)\ \mathrm{d}s - \frac{1}{2}\varphi_1^{p-2}\Big)(x_n^\perp)^2 \mathrm{d}t\Big| \leq \end{aligned}$$

$$\le \Big[\int_\Omega \Big|\int_0^1 \mathbf{A}\big(\nabla(\varphi_1 + s y_n^\perp)\big)(1-s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\Big|^{\frac{p}{p-2}}\,\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p-2}{p}} \|x_n^\perp\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

$$+\lambda_1(p-1)\Big[\int_\Omega \Big|\int_0^1 |\varphi_1 + s y_n^\perp|^{p-2}(1-s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\varphi_1^{p-2}\Big|^{\frac{p}{p-2}}\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p-2}{p}} \|x_n^\perp\|^2_{L^p(\Omega)}.$$

Dále ukážeme, že výrazy v hranatých závorkách v předchozí nerovnosti konvergují k 0 pro $n \to \infty$. To společně s omezeností posloupnosti $\{x_n^\perp\}$ v $W_0^{1,p}(\Omega)$ dokončí důkaz. Opět použijeme Lebesgueovu větu. Z $\|y_n^\perp\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0$ a spojitého vnoření $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ plyne, že existuje podposloupnost $\{y_{n_k}^\perp\}$ taková, že $|\nabla y_{n_k}^\perp(x)|$ a $y_{n_k}^\perp(x)$ konvergují bodově k 0 s.v. v Ω. Navíc existují L^p integrovatelné majoranty $h_1(x)$ resp. $h_2(x)$ obou posloupností [7, Remark 1.2.18]. Díky (6.1) a nerovnostem z [20] dostáváme

$$\Big|\int_0^1 \mathbf{A}\big(\nabla(\varphi_1 + s y_{n_k}^\perp)\big)(1-s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\Big| \le$$

$$(p-1)\int_0^1 |\nabla(\varphi_1 + s y_{n_k}^\perp)|^{p-2}(1-s)\,\mathrm{d}s + \frac{p-1}{2}|\nabla\varphi_1|^{p-2} \le$$

$$(p-1)(|\nabla\varphi_1| + \frac{1}{2}|\nabla y_{n_k}^\perp|)^{p-2} \le (p-1)(|\nabla\varphi_1| + \frac{1}{2}h_1)^{p-2} := g_1,$$

$$\Big|\int_0^1 |\varphi_1 + s y_{n_k}^\perp|^{p-2}(1-s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\varphi_1^{p-2}\Big| \le$$

$$(\varphi_1 + \frac{1}{2}|y_{n_k}^\perp|)^{p-2} \le (\varphi_1 + \frac{1}{2}h_2)^{p-2} := g_2.$$

Je zřejmé, že $g_i \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega),\ i = 1, 2$ a předpoklady Lebesqueovy věty jsou splněny. □

Dáme-li dohromady lemma (6.4) s ideami z důkazu (6.2) dostáváme následující odhady E a E'.

Lemma 6.5. *Nechť $p > 2$ a $\{x_n^\perp\}$ je omezená posloupnost funkcí z $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$. Nechť $|\tau_n| \to \infty$ a $\frac{\alpha_n}{\tau_n} \to 0$. Nechť jsou předpoklady 1 a 2 splněny. Potom* *existuje podposloupnost* $\{x_{n_k}^{\perp}\}$ *posloupnosti* $\{x_n^{\perp}\}$ *taková, že pro* $n \to \infty$ *platí*

$$
\begin{aligned}
E\big(\tau_{n_k}\varphi_1 + \alpha_{n_k} x_{n_k}^{\perp}\big) &= |\tau_{n_k}|^{p-2}\alpha_{n_k}^2\big(Q_0(x_{n_k}^{\perp}, x_{n_k}^{\perp}) + o(1)\big),\\
E'\big(\tau_{n_k}\varphi_1 + \alpha_{n_k} x_{n_k}^{\perp}\big)x_{n_k}^{\perp} &= |\tau_{n_k}|^{p-2}\alpha_{n_k}\big(X_0(x_{n_k}^{\perp}, x_{n_k}^{\perp}) + o(1)\big).
\end{aligned}
$$

Nyní můžete přistoupit k důkazu věty (6.2).

Důkaz. Část (a). V prvním kroku dokážeme, že každá PS posloupnost pro daný funkcionál je omezená. Toto tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje neomezená PS posloupnost $\{x_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Funkce z této posloupnosti rozdělíme na součet reálných násobků funkcí φ_1 a $x_n^{\perp}$, které jsou na sebe kolmé v $L^2(\Omega)$ smyslu. Abychom předešli nejasnostem, budeme předpokládat, že platí $\|x_n^{\perp}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1 \ \forall n \in \mathrm{N}$, což zaručí jednoznačnost rozdělení. Pro nějaká čísla τ_n a α_n tedy platí

$$x_n = \tau_n\varphi_1 + \alpha_n x_n^{\perp} \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Dále definujeme

$$y_n^{\perp} := \frac{\alpha_n}{\tau_n} x_n^{\perp} \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Vzhledem k tomu, že $\{x_n\}$ je PS posloupností, platí také

$$J_{\lambda_1}(x_n) \ \to \ c, \tag{6.4}$$

$$J'_{\lambda_1}(x_n) \ \to \ o \quad \text{v } W_0^{-1,p'}(\Omega). \tag{6.5}$$

Ze zobecněné Poincarého nerovnosti a (6.4) plyne, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ musí být omezená. Tedy $\tau_n \to \infty$ a můžeme použít lemma 6.5[9].

$$
\begin{aligned}
E(x_n) &= |\tau_n|^p E(\varphi_1 + y_n^{\perp})\\
&= |\tau_n|^p Q_{y_n^{\perp}}(y_n^{\perp}, y_n^{\perp})\\
&= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2 Q_{y_n^{\perp}}(x_n^{\perp}, x_n^{\perp})\\
&= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2\big(Q_0(x_n^{\perp}, x_n^{\perp}) + o(1)\big) \quad \text{pro } n \to \infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E'(x_n)\alpha_n x_n^{\perp} &= |\tau_n|^{p-1}\alpha_n E'(\varphi_1 + y_n^{\perp})x_n^{\perp}\\
&= |\tau_n|^{p-1}\alpha_n X_{y_n^{\perp}}(y_n^{\perp}, x_n^{\perp})\\
&= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2 X_{y_n^{\perp}}(x_n^{\perp}, x_n^{\perp})\\
&= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2\big(2Q_0(x_n^{\perp}, x_n^{\perp}) + o(1)\big) \quad \text{pro } n \to \infty
\end{aligned}
$$

[9] podposloupnost x_{n_k} označíme znovu x_n

Tedy pro $n \to \infty$ máme

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1}(x_n) &= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2\big(Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp) + o(1)\big) - \alpha_n \int\limits_\Omega f x_n^\perp \mathrm{d}t \to c, \quad (6.6) \\ J'(u_n)\alpha_n x_n^\perp &= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2\big(2Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp) + o(1)\big) - \alpha_n \int\limits_\Omega f x_n^\perp \mathrm{d}t \to 0. (6.7) \end{aligned}$$

Dále ukážeme, že $\alpha_n \int\limits_0^1 f x_n^\perp \mathrm{d}x \to 0$. Musíme uvažovat dvě možnosti. Buď $\exists c_1 > 0 : Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp) > c_1 \ \forall n \in \mathrm{N}$ nebo můžeme předpokládat, že $Q_0(x_n^\perp, x_n^\perp) \to 0$. V prvním případě požadované tvrzení plyne z toho, že $\alpha_n \to 0$ kvůli vztahu (6.6). V druhém případě je $\{x_n^\perp\}$ omezená posloupnost v $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$, a tedy bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že konverguje k nějaké funkci $x_0^\perp \in W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$. Vzhledem ke kompaktnímu vnoření $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ máme $x_n^\perp \to x_0^\perp$ v $L^2(\Omega)$. Kvadratický funkcionál Q_0 je uzavřitelný v $L^2(\Omega)$, a tedy $Q_0(x_0^\perp, x_0^\perp) = 0$. Z lemmatu 6.1 tedy plyne, že funkce $x_0^\perp$ je reálný násobek φ_1. Ale $x_0^\perp$ a φ_1 jsou ortogonální, a tedy $x_0^\perp = 0$. To znamená, že $\int\limits_\Omega f x_n^\perp \mathrm{d}t \to \int\limits_\Omega f x_0^\perp \mathrm{d}t = 0$ a omezenost posloupnosti α_n dává požadované tvrzení.

Máme-li $\alpha_n \int\limits_0^1 f x_n^\perp \mathrm{d}t \to 0$ společně s (6.6) a (6.7), dostáváme

$$\begin{aligned} E(x_n) &= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2 Q_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp) \to c \neq 0, && (6.8) \\ E'(x_n)\alpha_n x_n^\perp &= |\tau_n|^{p-2}\alpha_n^2 X_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp) \to 0. && (6.9) \end{aligned}$$

To je ale spor vzhledem k tomu, že zřejmě platí $0 \le Q_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp) \le X_{y_n^\perp}(x_n^\perp, x_n^\perp)$. Posloupnost $\{x_n\}$ musí tedy být omezená. Dále ukážeme, že z každé PS posloupnosti můžeme vybrat její konvergentní podposloupnost.

Z omezenosti $\{x_n\}$ plyne, že existuje její podposloupnost, pro jednoduchost opět označená $\{x_n\}$, která slabě konverguje v $W_0^{1,p}(\Omega)$ k nějaké funkci x_0. Potřebujeme ukázat, že také $x_n \to x_0$ silně. Je několik možností jak toto tvrzení dokázat. Použijeme myšlenku podobnou té, se kterou se setkáváme při vyšetřování monotónních operátorů.

Označme $y_n := x_n - x_0$. Máme $J'_{\lambda_1}(x_n)y_n \to 0$ a tedy

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla x_n(\nabla x_n - \nabla x_0)\ \mathrm{d}t - \lambda_1 \int_\Omega |x_n|^{p-2}x_n(x_n - x_0)\ \mathrm{d}t - \int_\Omega f(x_n - x_0)\ \mathrm{d}t \to 0. \tag{6.10}$$

Z definice $\{y_n\}$ plyne, že tato posloupnost slabě konverguje k nulové funkci ve $W_0^{1,p}(\Omega)$ a kompaktní vnoření $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ dává $y_n \to o$ v $L^p(\Omega)$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x_n|^{p-2}x_n(x_n - x_0)\ \mathrm{d}t &\to 0, \\ \int_\Omega f(x_n - x_0)\ \mathrm{d}t &\to 0. \end{aligned}$$

To znamená, že (6.10) se redukuje na

$$\int_\Omega |\nabla x_n|^{p-2}\nabla x_n(\nabla x_n - \nabla x_0)\ \mathrm{d}t \to 0.$$

Vzhledem k tomu, že $y_n \rightharpoonup 0$ platí také

$$\int_\Omega |\nabla x_0|^{p-2}\nabla x_0(\nabla x_n - \nabla x_0)\ \mathrm{d}t \to 0.$$

Nyní odečteme předchozí dvě rovnosti a použijeme Hölderovu nerovnost

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \big(\nabla |x_n|^{p-2}\nabla x_n - |\nabla x_0|^{p-2}\nabla x_0\big)(\nabla x_n - \nabla x_0)\ \mathrm{d}t \qquad (\to 0) \\ &= \int_\Omega \Big(|\nabla x_n|^p - |\nabla x_n|^{p-2}\nabla x_n \nabla x_0 - |\nabla x_0|^{p-2}\nabla x_0 \nabla x_n + |\nabla x_0|^p\Big)\ \mathrm{d}t \\ &\geq \|x_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|x_0\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|x_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \\ &\qquad - \|x_n\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|x_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|x_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &= \Big(\|x_n\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|x_0\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Big)\Big(\|x_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|x_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Big) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Tedy $\|x_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \|x_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ a díky stejnoměrné konvexitě $W_0^{1,p}(\Omega)$ musí platit $x_n \to x_0$.

Část (b). Ověříme, že neomezená PS posloupnost zkonstruovaná v [8] narušuje také $C^{\psi(.)}$ posloupnost. Myšlenka konstrukce takové PS posloupnosti je následující. Nejdříve si uvědomme, že pro libovolné $\tau \in \mathrm{R}$ je funkcionál $x^\perp \mapsto J_{\lambda_1}(\tau\varphi_1 + x^\perp)$ definovaný na $W_0^{1,p}(\Omega)^\perp$ slabě koercivní a jeho globální minimum $x_\tau^\perp$ splňuje následující rovnice

$$\begin{cases} -\Delta_p(\tau\varphi_1 + x_\tau^\perp) - \lambda_1|\tau\varphi_1 + x_\tau^\perp|^{p-2}(\tau\varphi_1 + x_\tau^\perp) \\ \qquad = f^\perp + \varsigma_\tau\varphi_1 \quad \text{in } \Omega, \\ x_\tau^\perp = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\ \left\langle x_\tau^\perp, \varphi_1 \right\rangle = 0 \end{cases}$$

pro nějaký Lagrangeův multiplikátor ς_τ.

Poté vezmeme libovolnou posloupnost $\{\tau_n\}$ takovou, že $\tau_n \to \infty$ a pro jednoduchost označíme $x_{\tau_n}^\perp = x_n^\perp$ a $\varsigma_{\tau_n} = \varsigma_n$. Lze dokázat [21, Proposition 6.1], že $\varsigma_{\tau_n} \to 0$, $J_{\lambda_1}(\tau_n\varphi_1 + x_n^\perp) \to 0$ a

$$J'_{\lambda_1}(\tau_n\varphi_1 + x_n^\perp)\phi = \varsigma_n \int_\Omega \varphi_1\phi \tag{6.11}$$

pro libovolnou testovací funkci $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ [8, Proposition 4.4].

Tedy $\{x_n^\perp\}$ je neomezená PS posloupnost, protože pravá strana (6.11) konverguje k 0. Abychom dokázali, že $C^{\psi(.)}$ podmínka je narušena také, musíme vyšetřit jak rychlá je tato konvergence. Odpověď je dána následujícím odhadem z [21, Proposition 6.1]

$$\lim_{n\to\infty} \varsigma_n|\tau_n|^{p-2}\tau_n = (p-2)\|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}^{-2} Q_0(w,w), \tag{6.12}$$

kde $w \in D_{\varphi_1}$ je jednoznačné řešení úlohy

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(\mathbf{A}(\nabla\varphi_1)\nabla w\big) = \lambda_1\varphi^{p-2}w + f \quad \text{v } \Omega; \\ w = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Navíc máme $Q_0(w,w) > 0$.

Z (6.11), (6.12) a $\|x_n^\perp\|_{W_0^{1,p}}(\Omega) \to 0$ (viz. důkaz [8, Proposition 4.4]) plyne, že existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové. že platí

$$\|J'_{\lambda_1}(\tau_n\varphi_1 + x_n^\perp)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \le c_1|\tau_n|^{1-p} \le c_2\|\tau_n\varphi_1 + x_n^\perp\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-p}.$$

Tedy $\|J'_{\lambda_1}(\tau_n\varphi_1 + u_n^\perp)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$ konverguje k 0 příliš rychle na to, aby mohla $C^{\psi(.)}$ podmínka platit.

Část (c). Zde nedošlo k žádnému vylepšení.

Část (d). Opět dokážeme sporem. Nechť $\{x_n\}$ je C posloupnost pro funkcionál J_{λ_1}. Máme tedy

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1}(x_n) &= E(x_n) - \int_\Omega f x_n \,\mathrm{d}t \to c > 0, \\ J'_{\lambda_1}(x_n)u_n &= E'(x_n)x_n - \int_\Omega f x_n \,\mathrm{d}t \to 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $E(x_n) = \frac{1}{p}E'(x_n)x_n$ dále dostáváme

$$\begin{aligned} \int_\Omega f x_n \,\mathrm{d}t &\to \frac{pc}{1-p} \\ E'(x_n)x_n &\to \frac{pc}{1-p} \\ E(x_n) &\to \frac{c}{1-p} \end{aligned}$$

Pro kladné c je výraz $\frac{c}{1-p}$ záporný, ale z Poincarého nerovnosti plyne $E(y) \geq 0 \quad \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a to je spor. To znamená, že neexistují žádné C posloupnosti pro J_{λ_1} na kladných úrovních a Cerami podmínka triviálně platí. $\square$

6.5 Fredholmova alternativa pro p-Laplacián

V závěrečné části pro úplnost doplníme informace o řešitelnosti problému, který motivoval části předchozí. Tedy hledání slabých řešení úlohy

$$\begin{cases} -\Delta_p x - \lambda_1 |x|^{p-2}x = f & \text{v } \Omega, \\ x = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kdy funkce $f \in L^\infty(\Omega)$ je kolmá na φ_1 v $L^2(\Omega)$ smyslu.

Ani v jednom z případů $1 < p < 2$ a $p > 2$ nebyla dokázana platnost nějaké podmínky kompaktnosti na všech hladinách - viz věta (6.2). Přesto lze v obou případech dokázat existenci alespoň jednoho slabého řešení. Pro $1 <$

$p < 2$ to dokázali Drábek a Holubová v [6] pomocí metody horního a dolního řešení. Pro $p > 2$ to plyne z toho, že funkcionál J_{λ_1} je zdola omezený. Navíc, protože $J_{\lambda_1}(o) = 0$ a $J'_{\varphi_1}(o) \neq o$, je jeho infimum záporné. Z Ekelandova variačního principu ([7, Theorem 7.4.19]) plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $\|J'_{\varphi_1}(x_n)\| \to 0 \wedge J_{\lambda_1}(x_n) < \epsilon < 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Na záporných hladinách platí PS podmínka a musí tedy existovat i kritický bod funkcionálu J_{λ_1}, který je zároveň slabým řešením úlohy.

7 Závěr

Podmínky kompaktnosti, které zobecňují $Palaisovu - Smaleovu$ podmínku, se v praxi nepoužívají příliš často. V literatuře (str. 72 [19]) se lze například setkat s názorem, že přínos těchto podmínek je příliš malý na to, aby ospravedlnil jejich podrobné zkoumání. Zřejmě ale kromě principiálního důvodu používat co nejobecnější tvrzení, může být přínos těchto podmínek i čistě praktický. Dobře to je vidět v předchozí kapitole, jejíž podstatnou část zabírá důkaz části a) věty (6.2), kde dokazujeme platnost $Palaisovy - Smaleovy$ podmínky, zatímco důkaz části d) - platnost $Cerami$ podmínky - je zcela triviální. Zřejmě je tedy Palaisova-Smaleova podmínka upřednostňována proto, že je ze zmíněných podmínek kompaktnosti neznámější a nejsnadněji pochopitelná.

Původní výsledky v této práci jsou především ve třetí a šesté kapitole a příklady z podkapitol 4.2 a 5.4. Lze říci, že problém zkoumaný v šesté kapitole byl zcela vyčerpán pro $p > 2$, zatímco pro $1 < p < 2$ není jasné, jak v jeho řešení pokračovat. Proto se k další práci a studiu nabízí problematika zmíněná ve třetí kapitole, nebo případně studium složitějších problémů s p-Laplaciánem založených na odhadech z šesté kapitoly (lemma 6.5).

Shrnutí

Tato disertační práce se zabývá studiem variačních metod a především podmínek kompaktnosti v nich používaných. Metody jsou demonstrovány na okrajových úlohách pro eliptické rovnice

$$-x''(t) = g\big(t, x(t)\big)$$

a

$$-\Delta_p x - \lambda_1 |x|^{p-2} x = f,$$

kde $\Delta_p x := \mathrm{div}(|\nabla x|^{p-2}\nabla x)$ je p-Laplacián, $p > 1$ a λ_1 je jeho první vlastní číslo.

Disertační práce je rozdělena do sedmi kapitol. V první a druhé jsou čtenáři představeny základy variačních metod. První obsahuje krátký úvod. Druhá obsahuje klasické variační věty - například deformační lemma, obecný princip minimaxu a větu o sedlovém bodě. Ve třetí kapitole je naznačena možnost, jak lze nalézt kritické body funkcionálu, jež nejsou extrémy a ani je nelze nalézt pomocí metod minimaxu. Ve čtvrté kapitole se věnujeme diferenciální rovnici druhého řádu. Je v ní obsažen příklad využívající větu o sedlovém bodě k dokázání řešitelnosti okrajové úlohy. Dále jsou v kapitole interpretovány klasické výsledky jako Fredholmova alternativa nebo Landesman-Lazerovy podmínky řešitelnosti pomocí variačních metod. V páté kapitole jsou představeny obecnější podmínky kompaktnosti než obvykle používaná Palais-Smaleova podmínka. Na příkladech jsou ukázány nové možnosti, které nám tyto podmínky nabízejí. Šestá kapitola představuje jádro práce. Je v ní zkoumána platnost různých podmínek kompaktnosti pro okrajovou úlohu s p-Laplaciánem a obecně také geometrie energetického funkcionálu pro p-Laplacián. Sedmá kapitola obsahuje krátké zhodnocení výsledků a navržení směru dalšího studia.

Summary

This dissertation studies variational methods and compactness conditions used in them. The methods are illustrated on the boundary problems for elliptic equations

$$-x''(t) = g\big(t, x(t)\big)$$

and

$$-\Delta_p x - \lambda_1 |x|^{p-2} x = f,$$

where $\Delta_p x := \mathrm{div}(|\nabla x|^{p-2}\nabla x)$ stands for p-Laplacian, $p > 1$ and λ_1 is its first eigenvalue.

This doctoral thesis is divided into seven chapters. In the first two we introduce the basics of the variational theory. The first contains a short introduction. The second includes classical variational theorems - e.g. the deformation lemma, general minimax principle or the saddle point theorem. The third chapter presents a way to find a critical point of a functional which is not a local extrema or a minimax point. In the fourth chapter we investigate second order boundary value problem. The chapter includes an example of use of the saddle point theorem as well as varional view on some well known results - eg. the Fredholm alternative or Landesman-Lazer conditions. The fifth chapter introduces compactness conditions that are more general than the standard Palais-Smale condition. Several examples show the advantages of these new conditions. In the sixth chapter we thoroughly investigate the Fredholm alternative for the p-Laplacian and the geometry of the energy functional related to the p-Laplacian in general. The seventh chapter includes a short assessment of the results.

Reference

[1] Ahmad S., Lazer C., Paul J.; *Elementary Critical Point Theory and Perturbations of Elliptic Boundary Value Problems at Resonance*, Indiana Univ. Math. J. (1976).

[2] Ambrosetti A., Rabinowitz P. H.; *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J.Funct.Anal. (1973).

[3] Anane J.; *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, Comptes Rendus Acad.Sci. Paris Série I (1987).

[4] Cerami G.; *Un criterio di esistenza per i punti critici su varieta illimitate*, Rend. Acad. Sci. Let. Ist. Lombardo (1978).

[5] Drábek P., Girg P., Takáč P., Ulm M.; *The Fredholm alternative for the p-Laplacian: bifurcation from infinity, existence and multiplicity*, Indiana Univ. Math. J. (2004).

[6] Drábek P., Holubová G.; *Fredholm Alternative for the p-Laplacian in Higher Dimensions*, J. Math. Anal. Appl. (2001).

[7] Drábek P., Milota J.; *Methods of nonlinear analysis*, Birkhäuser(2013).

[8] Drábek P., Takáč P.; *Poincaré inequality and Palais-Smale condition for the p-Laplacian*, Calc. Var. (2007).

[9] El Amrouss A. R.; *Critical Point Theorems and Applications to Differential Equations*, Acta Math. Sinica, English Series (2005).

[10] Fabry C.; *Landesman-Lazer Conditions for Periodic Boundary Value Problems with Asymmetric Nonlinearities*, Journal of Differential Equations, Vol. 116, pp. 405-418, (1995).

[11] Fleckinger J., Takáč P.; *An improved Poincaré inequality and the p-Laplacian at resonance for* $p > 2$, Adv.Differ Equ. (2002).

[12] Fučík S.; *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*, D. Reidel Publ. Company, Holland 1980.

[13] Invernizzi S.; *A note on nonuniform nonresonance for jumping nonlinearities*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 27, No. 2, pp. 285-291, (1986).

[14] Jirásek P.; *Fredholmova alternativa*, diplomová práce (2009), Západočeská univerzita v Plzni.

[15] Palais R.S.; *Critical point theory and the minimax principle*, Proc. Symp. Pure Math (1970).

[16] Rabinowitz P. H.; *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc. (1986).

[17] Schechter M.; *Minimax Systems and Critical Point Theory*, Birkhäuser(2009).

[18] Schechter M.; *The Use of Cerami Sequences in Critical Point Theory*, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2007, Article ID 58948.

[19] Struwe M.; *Variational Methods*, Springer, Berlin, (1996).

[20] Takáč P.; *On the Fredholm alternative for the p-Laplacian at the first eigenvalue*, Indiana Univ. Math. J. (2002).

[21] Takáč P.; *On the number and structure of solutions for a Fredholm alternative with the p-Laplacian*, J.Differ.Equ. (2002).

[22] Tomiczek P., Jirásek P.; *Nonlinear differential equation and Fucik spectrum*, Advances in Mathematics Research. Volume 15, Nova Publishers (2010).

Seznam publikací a vědeckých vystoupení

Vydané publikace:

Tomiczek P., Jirásek P.; *Nonlinear Differential Equation and Fucik Spectrum*, kapitola v knize Advances in Mathematics research Volume 15. (2010).

Jirásek P.; *Fredholmova alternativa*, článek ve sborník 18. konference studentů v matematice na školách VŠTEZ (2010).

Jirásek P.; *On compactness conditions for the p-Laplacian*, Communications on Pure and Applied Analysis Volume 15, Issue 3, (2016).

Vystoupení:

Fredholmova alternativa, 18. konference studentů v matematice na školách VŠTEZ (2010).

Úvod do variačních metod, 19. konference studentů v matematice na školách VŠTEZ (2011).

Landesman-Lazer conditions from a variational point of view, Seminar in Differential Equations (2012).

On compactness conditions for the p-Laplacian, Equadiff 13 (2013).

On the Fredholm alternative for the p-Laplacian, Seminar in Differential Equations (2014).