SROVNÁNÍ ČESKÝCH A NĚMECKÝCH UČEBNIC MATEMATIKY PRO GYMNÁZIA

COMPARISON OF THE CZECH AND GERMAN TEXTBOOKS ON MATHEMATICS FOR THE SECONDARY GRAMMAR SCHOOLS

Jan Zeman

Abstrakt

V této práci prozkoumáme české a německé učebnice matematiky pro gymnázia. Porovnáme přitom, jaké jsou mezi nimi obsahové a formální rozdíly při výkladu tématu funkce, přičemž se zaměříme na aplikační úlohy. Zhodnotíme, co by z látky, uvedené v učebnicích, nemělo chybět ani přímo v hodině při výuce a co je naopak nadbytečné. Tím se dotkneme také tématu aktuálnosti českých učebnic, které byly poprvé vydány již zhruba před dvaceti lety. Představíme rozdíly v používání učebnic v obou kulturních prostředích.

Klíčová slova: *matematika, gymnázium, učebnice, německý, funkce*

Abstract

In this article, we would strive to present a survey on the Czech and German textbooks for secondary grammar schools. We compare the way, the textbooks present particular topic of functions, and show the differences in subject and form. The aim would be on the application tasks. We give our opinion, what the teacher is supposed to say to the topic direct in the class and what may rest redundant. We would also like to stress the current teaching praxis usability of the Czech textbooks that were first published already 20 years ago. We show the differences in using the textbooks in both cultures also.

Key words: *mathematics, grammar school, textbook, German, functions*

1 ÚVOD

Protože nejsou učebnice na našich gymnáziích obecně povinné, fungují často jako referenční příručky nebo sbírky příkladů především pro učitele. I zde jsou však již pouhým sekundárním zdrojem a žákům samotným se během středoškolského studia nemusejí do ruky ani dostat (třeba i z finančních důvodů). Klíčové je pro ně, co od nich vyžaduje učitel.

Na gymnáziích v Německu jsou učebnice základním pramenem a s učebnicí se během hodiny i doma velmi pracuje. Školství řídí každá spolková země sama. Ministerstvo schvaluje učebnice, které se na gymnáziu smějí používat, a konkrétní škola následně ze seznamu určí podle jaké řady učebnic se na ní bude vyučovat. Učebnice pro konkrétní ročník jsou na začátku roku rozdány a na konci roku vybrány. Tyto učebnice na sebe napříč ročníky navazují, a učitel je tak poté do značné míry vázán na látku, v nich obsaženou.

V této práci prozkoumáme, jaké rozdíly existují mezi českými a německými učebnicemi matematiky, přičemž bude zvláštní pozornost věnována i aplikačním úlohám, které mají motivovat k užití znalostí z matematiky v životě studenta.

2 POUŽITÉ METODY

Budeme porovnávat české učebnice řady *Matematika pro gymnázia* s německými učebnicemi *Lambacher Schweizer.* Obě bavorská gymnázia ve Schwandorfu a Ambergu, která jsme navštívili, používala tuto řadu. Z českých gymnázií jsme komunikovali s profesory matematiky v Teplicích a v Plzni. Ti pozorovali nezávisle na sobě rozdíl v kvalitě obsahu i napříč jednotlivými českými učebnicemi, z nichž každá je zaměřena na určitý ucelený obor matematiky. Učebnice německé jsou oproti tomu uspořádány časově podle osnov. Obsahují látku, která se má v tom kterém ročníku probrat, a každý díl proto obsahuje i více matematických témat. Abychom mohli učebnice srovnávat a zjistit, kde jsou uváděny lepší a jednodušší metody, zaměřili jsme se proto pouze na konkrétní téma funkce. Těm se z řady německých učebnic *Lambacher Schweizer* věnuje desátý díl [4], z českých stejnojmenná kniha *Funkce* od Oldřicha Odvárka [3]. V textu dále zmíníme, co v těchto učebnicích hodnotíme jako přínos či chybu.

3 ZPRACOVÁNÍ PROBLÉMU A VÝSLEDKY

V této části budeme srovnávat jednak výklad exponenciální a logaritmické funkce, jednak výklad funkce mocninné a polynomické. Dále prozkoumáme přítomnost aplikačních úloh.

Nejviditelnější, ale jen formální rozdíl je označení předpisu funkce, kdy se v českých učebnicích používá $y =$, v německých $x \to$, např. pro lineární funkci v německé učebnici: $x \to ax + b \quad (x \in R)$.

3.1 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÁ FUNKCE

V knize *Funkce* začíná exponenciální funkce příkladem na poločas rozpadu, což může představovat problém, neboť po studentovi, který nemá upevněn průběh rostoucí exponenciální funkce v základním tvaru, se ihned chce poznat její průběh klesající pro kladný základ *x*, který je menší než 1. Po tomto motivačním příkladě je funkce definována jako

$$y = a^x \quad (x \in R),$$

kde *a* je kladné číslo různé od 1, hodnota mocninné funkce v počátku je tedy *f(0) = 1*. Po exponenciální funkci následují exponenciální rovnice, poté funkce logaritmická a analogicky logaritmické rovnice. Logaritmická funkce je definována jako inverzní k exponenciální. Samostatnou kapitolu věnuje učebnice přirozenému logaritmu a Eulerově čísle.

V knize *Lambacher Schweizer* se začne kapitola o funkcích představením lineárního a exponenciálního růstu. Přírůstek *dy* (jak je nazýván v české učebnici) je označen *d = f(t) - f(t - 1)*. Takový lineární přírůstek vede na aritmetickou posloupnost. Oproti tomu exponenciální růst, kdy se v každém kroku po stejných úsecích násobí faktorem *a = g(t) / g(t - 1)*, vede na posloupnost geometrickou. V této souvislosti je vhodná i procentuální interpretace růstu, která v české učebnici schází. V německé učebnici se k pojmu růst funkce příklady neustále vracejí.

Až po výkladu růstu a úkolech následuje výklad funkce exponenciální:

$$x \to b \cdot a^x \quad (x \in R),$$

kde *a > 0, a ≠ 1*. Faktor *a* se nazývá činitel růstu, *b* udává počáteční hodnotu *f(0) = b*. Je připojen výklad, jak toto číslo roztahuje funkci do směru osy *y*. Chybou však je, že není uvedeno, z jakého oboru je číslo *b*. Pokud by totiž bylo záporné, změnilo by průběh exponenciely - z rostoucí funkce a^x by naráz byla funkce klesající.

Kromě poločasu (např. rozpadu) je v německé učebnici vyložen také čas zdvojnásobení (Verdopplungszeit). Ten v české učebnici chybí. Na něj vede tato úloha: Když zdvojnásobení funkce a^x nastane každých 30 minut, jaký musí být základ *a*?

$$f(30) = 2 \cdot f(0)$$

$$a^{30} = 2 \cdot a^0$$

$$\underline{\underline{a = \sqrt[30]{2}}}$$

Následně je vyložena logaritmická funkce. Na samotném začátku se představí příklad $2^x = 512$ a laicky se řekne, že hledané číslo *x* se označuje jako logaritmus z 512 při základu 2. Logaritmická funkce je tedy pro Němce definována jen jako taková, která řeší exponenciální rovnici $a^x = b$. Pojem inverzní funkce není vůbec zmíněn. O přirozeném logaritmu či Eulerově čísle není v německé učebnici zmínka. Jsou vyložena pravidla pro počítání s logaritmy, aby mohla tato být použita ve složitějších exponenciálních rovnicích.

3.2 MOCNINNÁ A POLYNOMIÁLNÍ FUNKCE

V české učebnici je v následujících kapitolách pod lineárně lomenou funkcí uvedena i obecná funkce racionální, která má v čitateli i jmenovateli polynom. Jejím speciálním příkladem je pak funkce polynomiální, mocninná. Ta je nejprve definována s přirozeným exponentem a následně v samostatných kapitolách s exponentem celým a racionálním. Německá učebnice setrvává u mocninných funkcí přirozeného exponentu. Mocninní funkce je zde však oproti české učebnici definována s koeficientem *a*, který ji na grafu roztáhne ve směru osy *y* (podobně, jako v příkladu exponenciální funkce výše):

$$x \to ax^n \quad (n \in N)$$

Odvárkova učebnice tento koeficient *a* u mocninných funkcí neuvádí, je však přítomen v případě funkce kvadratické

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

kde jsou připojeny oba grafy pro případy, kdy je buď *a* > 0 nebo *a* < 0. V případě mocninných funkcí v německé učebnici je tento rozdíl uveden spolu s různým průběhem pro *n* lichá a *n* sudá. Co je v německé učebnici navíc, je udání vztahu mezi funkční hodnotou pro *x* a funkční hodnotou pro nějaký její násobek *kx*. Potom platí:

$$. \; f(kx) = k^n f(x).$$

Užití je nasnadě, např. ve slovní úloze, jak se změní objem jehlanu (čtyřstěnu), když se její velikost zdvojnásobila. Tento vztah v české učebnici chybí.

Po mocninné funkci je v německé učebnici definována funkce polynomická (německé označení ganzrationale Funktion). V české učebnici je definována polynomická funkce v podkapitole k funkci lineárně lomené, a to oproti německé učebnici jen velmi stručně.

Zajímavé téma je roztahování a posunování polynomiácké funkce, kterému se speciálně věnuje pouze německá učebnice. V učebnici české je uvedeno pouze pro případ kvadratické funkce, paraboly, pro správné určení jejího vrcholu. Jak ale bude např. vypadat předpis funkce, posunuté o 2 díly ve směru osy *x* oproti funkci $x \to 0{,}25(x+1)^2(x-3)$?

V německé knize je posunutí funkce *f(x)* definováno jako $g(x) = f(x+a)+b$. Graf funkce *g* je oproti grafu funkce *f* posunut o *(-a)* ve směru osy *x,* o *b* ve směru osy *y*. V předpisu funkce z dané úlohy tak musíme místo každého *x* brát *(x – 2)* a dostaneme posunutou výslednou funkci s předpisem $x' \to 0{,}25(x'-1)^2(x'-5)$.

To může velmi pravděpodobně studenty mást. Proč se u obou „posunovacích“ koeficientů *a, b* se stejnými znaménky jednou funkce posune proti směru osy a jednou v jeho směru? Je proto nutno u posunutí funkce chvíli setrvat a nacvičit jej alespoň na několika příkladech. V učebnici se v samotných příkladech na posunutí funkce se nejdříve posouvá ve směru osy *y*, poté ve směru osy *x*, poté v obou směrech najednou a teprve potom se student učí výše uvedený obecný postup při určování takového posunutí. Tento typ příkladu v českých učebnicích naprosto schází, stejně jako takové příklady, u kterých je nutno na základě grafu funkce určit její předpis.

Po výkladu posunování funkcí je uvedeno jejich roztahování do směru os *x* a *y*. I to v českých učebnicích chybí. Symetrie, sudost nebo lichost funkce je oproti tomu v obou učebnicích vyložena analogicky.

3.3 APLIKAČNÍ ÚLOHY

V knize *Funkce* jsou úlohy uvedeny na koncích jednotlivých kapitol. Většinou jde o konkrétní typové příklady přesně k danému tématu, velmi málo z nich lze označit za aplikační. Uveďme alespoň tyto:

123/7.1 Závislost tlaku *p* na nadmořské výšce *h* (v km) lze vyjádřit přibližně vztahem $p = p_0 \cdot 0{,}88^h$, kde $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,Pa$ je tlak v nadmořské výšce 0 metrů. Vypočítejte, jaký je tlak vzduchu na vrcholcích těchto hor: Sněžka, Mont Blanc, Mount Everest. (Žáci vyhledají tyto nadmořské výšky: Sněžka 1603 m. n. m., Mont Blanc 4810 m. n. m., Mount Everest 8818 m. n. m.)

$$p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}88^{1{,}603} \approx \underline{\underline{82{,}5 \cdot 10^3}}$$

$$p_2 = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}88^{4{,}810} \approx \underline{\underline{54{,}8 \cdot 10^3}}$$

$$p_3 = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}88^{8{,}818} \approx \underline{\underline{32{,}7 \cdot 10^3}}$$

Tlaky vzduchu na Sněžce, Mont Blancu a Mount Everestu jsou po řadě 82,5 kPa; 54,8 kPa; 32,7 kPa.

147/7.44 Počet bakterií jisté kultury vzroste za jednu hodinu o 32%. Vyjádřete závislost počtu bakterií na čase jednak vzorcem $N_t = N_0 a^t$, jednak vzorcem $N_t = N_0 e^{\lambda t}$, kde *λ* je konstanta (N_0 značí počet bakterií v čase 0 h, N_t jejich počet v čase *t*).

$$\underline{\underline{N_t = N_0 \cdot 1{,}32^t}}$$

$$e^{\lambda} = 1{,}32$$

$$\lambda = \ln 1{,}32 \approx 0{,}278$$

$$\underline{\underline{N_t = N_0 \cdot e^{0{,}278t}}}$$

Hledané závislosti počtu bakterií na čase jsou $N_t = N_0 \cdot 1{,}32^t$ a $N_t = N_0 \cdot e^{0{,}278t}$.

V jednotlivých kapitolách učebnice *Lambacher Schweizer* je vyloženo poměrně málo látky. Na začátku je pokaždé vyřešen motivační příklad, udána jedna definice a následuje kolem 15 povětšinou aplikačních úloh. Po výkladu se tak látka neprocvičuje na obyčejných příkladech. V rámci každé kapitoly jsou uvedeny také úlohy, které nemají souvislost s aktuální látkou a slouží jen k procvičení základních znalostí, na což naváže poslední kapitola knihy, kde jsou pouze a jen aplikační úlohy. Dobrým příkladem jedné takové na odhad, kde není nic zadáno, je např. určení hmotnosti skalních útvarů dané hustoty s fotografií v poměru k výšce postavy. Žák má útvar idealizovat polokoulí, určit funkci pro její objem a dosadit poloměr, odhadnutý z fotografie (Fig. 1), následně zapojit znalosti z fyziky.

Fig. 1

Kniha obsahuje též kapitoly, které následují po shrnutí určitého čtvrtletního celku a které se celé věnují jedné konkrétní aplikační úloze, která má danou látku pokrýt. Jednou z nich je např. globální problém přelidnění planety, kde se užije exponenciální funkce. Jsou ukázány statistiky z dějin a představeny tři prognózy možného demografického vývoje v následujících desetiletích. Studentům navrhuje učebnice vypracování projektu na toto téma a dává tipy na zdroje informací.

4 DISKUZE VÝSLEDKŮ

V knize *Lambacher Schweizer* začíná téma exponenciální funkce pojmem jejího růstu, na kterém následně staví mnoho příkladů. Dle našeho názoru by tohoto tématu mělo být v české učebnici více, především v procentuální interpretaci. V německé učebnici je jej však naopak více, než je nutné. Cílem matematiky v německém prostředí muže být příprava pro orientaci v ekonomii, my se však přikláníme spíše ke cviku ve správných úsudcích pro občanskou angažovanost, jak matematickou gramotnost definuje studie Pisa [1]. Tak se v Odvárkově knize *Funkce* o rostoucích funkcích dovíme v rámci výkladu o lineární funkci a až po vyložení a důkladném procvičení funkce konstantní.

V případě mocninné a polynomické funkce v české učebnici schází jejich posunutí a roztažení. Naopak přínosem je, že jsou uvedeny mocninné funkce i pro exponenty s celými a racionálními čísly, tedy včetně funkce pro odmocniny (např. $y = x^{\frac{1}{2}}$), které v německé učebnici chybějí. Také je jen v české učebnici pojednáno obecně o pojmu inverzní funkce.

V německé knize je nová látka vyložena poměrně rychle se snahou o co největší přístupnost a nápaditost. Není zde procvičována na typových příkladech, ale na úlohách, propojující jednak již probranou minulou látku, jednak i další školní předměty či aktuální témata, velmi často v aplikačních úlohách. V maturitních příkladech z německé učebnice se setkáme s úlohami, kde nejsou zadány žádné údaje a kde je vyžadován slovní popis postupu.

5 ZÁVĚR

V tomto článku jsme na konkrétním tématu funkce prozkoumali hlavní rozdíly mezi českými a německými učebnicemi. Nelze tvrdit, že by existoval nějaký obecný rozdíl v kvalitě obsahu. Řada českých učebnic pro gymnázia vykazuje určitou stabilitu, díky níž je možno se při výuce matematiky na střední škole k učebnicím kdykoliv vrátit. Německé učebnice jsou aktuálnější, méně ponořené v oboru, proto také rozdrobenější a méně souvislé.

V současné české pedagogické literatuře (viz např. [2]) jsou zmínky o tom, že žáci prostě přeskakují příklady, které se jim zdají na první pohled příliš těžké, právě ty aplikační, kde není na první pohled vidět způsob řešení. Množství aplikačních úloh při dobře zvoleném tématu je podnětné i pro výchovu studenta k občanství. Naopak zase v přemíře úloh z reálného života se ztrácí hierarchie vědomostí, záchytné body, získané procvičením látky právě na typických, klasických úlohách.

Je nyní úkolem učitele, přinést kvality, které české učebnice pro gymnázia určitě zachovávají, rozumným způsobem lidem na škole a neochuzovat výklad o nutné odhady výsledků či aktuální problémy, např. z novějších učebnic či z vlastní práce.

References

1. BLAŽEK, R., PŘÍHODOVÁ, S., Mezinárodní šetření PISA 2015. Praha: Česká školní inspekce. 2016. 54 s. 978-80-88087-08-3.
2. BOCHNÍČEK, Z., HALIŠKA, Z. Na pomoc pedagogické praxi. Brno: Masarykova univerzita. 2013. 131 s. ISBN 978-80-210-6302-0.
3. ODVÁRKO, O. Funkce. Praha: Prometheus, 1996. 160 s. ISBN 80-85849-09-7.
4. SCHMID, A; WEIDIG, I. Lambacher Schweizer 10. Stuttgart: Ernst Klett Verlag. 2008. 174 s. ISBN 978-3-12-731960-6.

Contacts

Ing. Jan Zeman
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta filozofická
Sedláčkova 38, 306 14 Plzeň
Tel: +420 377 635 501

E-mail: janzeman@email.cz