

Difúzní modely na grafech

Jan Matas¹

1 Úvod

Tato práce se zabývá matematickým modelováním difúze mezi oddělenými oblastmi, jejichž vzájemná propojení modelujeme grafy. S pomocí teorie grafů a obyčejných diferenciálních rovnic vytvoříme obecný difúzní model nad grafem se dvěma vrcholy, který následně zobecníme pro obecný souvislý neorientovaný graf.

Difúzi zde nechápeme pouze jako přesun z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací, ale jako obecnější proces přesunu daný difúzní funkcí. Je-li difúzní funkce lineární, modelujeme difúzi v již popsaném klasickém pojetí. Zvolíme-li ji ale nelineární, můžeme modelovat složitější procesy, např. shlukování a koexistence.

2 Difúzní modely pro graf se dvěma vrcholy

Mějme dvě místa (lokality), na kterých může přebývat nějaká populace, a která jsou navzájem propojena. Jedinci populace se tak mohou libovolně přemisťovat z jednoho místa do druhého. Tuto situaci můžeme znázornit grafem se dvěma vrcholy, x a y , které představují jednotlivé lokality, a neorientovanou hranou, reprezentující jejich propojení.

Dynamiku migrace jedinců populace mezi jednotlivými lokalitami můžeme popsat následující soustavou diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \psi(x(t) - y(t)), \\y'(t) &= \psi(y(t) - x(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ reprezentují relativní četnosti jedinců celkové populace přebývajících v jednotlivých lokalitách a difúzní funkce $\psi(s)$ charakterizuje vnitřní tendence pohybu populace.

Po formálním zavedení modelu jsme se zabývali jejich asymptotickým chováním pro konkrétní volby difúzní funkce $\psi(s)$, například v případě lineární difúze je asymptoticky klidovým stavem vždy 0.5, viz průběh řešení na Obrázku 1.

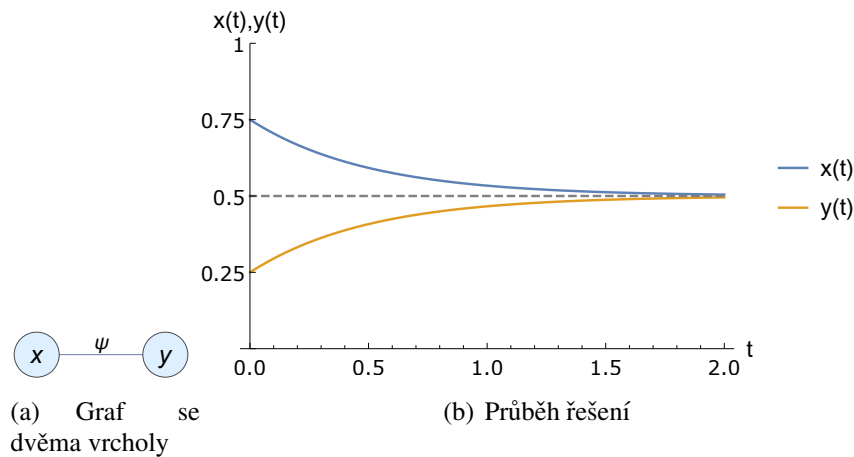
3 Difúzní modely pro obecný neorientovaný graf

Ve druhé části práce jsme se zabývali zobecněním výše popsaných modelů. Mějme obecný souvislý neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = \{1, \dots, n\}$ popsany maticí sousednosti $\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{n \times n}$. Pak můžeme soustavu rovnic popisující model difúze na grafu zapsat ve tvaru:

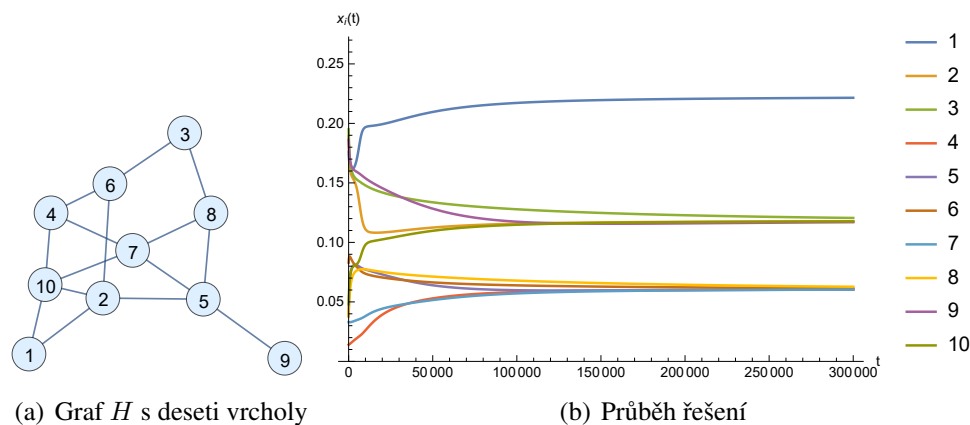
$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi(x_i(t), x_j(t)), \quad i \in V(G), t \geq 0,\tag{2}$$

kde $\phi(u, v)$ je difúzní funkce.

¹ student bakalářského studijního programu Matematika, obor Matematika a finance, e-mail: janmatas@students.zcu.cz



Obrázek 1: Volbou difúzní funkce $\psi(s) := -rs, r > 0$ a dosazením do soustavy (1) získáme model lineární difúze. Na obrázku je zachycen průběh řešení počáteční úlohy pro takto vzniklou soustavu s počátečními hodnotami $x(0) = 0.75, y(0) = 0.25$ a $r = 1$.



Obrázek 2: Volbou difúzní funkce $\psi(s) := ruv(u - v)(v - (2u - u^2))(u - (2v - v^2)), r > 0$ a dosazením do soustavy (2) získáme model koexistence. Na obrázku je zachycen průběh řešení počáteční úlohy takto vzniklé soustavy nad grafem H pro počáteční podmínky $\mathbf{x}_0 = (0.176, 0.189, 0.195, 0.014, 0.038, 0.083, 0.033, 0.038, 0.186, 0.048)^T$ a $r = 1$.

Tyto modely nemusí popisovat pouze stěhování jedinců, ale i např. změny názorů, preferencí (volebních, spotřebitelských), strategií apod., které jsou reprezentovány vrcholy grafu a hrany pak představují možné přechody. Dalším zdokonalením modelů bychom mohli zkoumat chování voličů spotřebitelů, hráčů, atd.

4 Seznam literatury a citace

Literatura

de Vries, G., et al. (2006), *A Course in Mathematical Biology*, SIAM.

Kelley, W., Peterson, A. (2010), *The Theory of Differential Equations*, Springer.