Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Rozvoj tvořivosti žáka v hodinách matematiky

The Development of Pupils´ Creativity in Mathematics Lessons

Regina Hrabětová

Dizertační práce
Plzeň 2016

Školitelka:	doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
Školicí pracoviště:	Západočeská univerzita v Plzni Fakulta pedagogická Katedra matematiky, fyziky a výpočetní techniky
Studijní program:	Matematika
Obor:	Obecné otázky matematiky

Prohlašuji, že jsem dizertační práci na téma Rozvoj tvořivosti žáka v hodinách matematiky vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů a literatury. Práce nebyla dosud využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Červen 2016

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. PaedDr. Janě Coufalové, CSc. za odborné vedení své dizertační práce, za předání cenných rad, zkušeností, připomínek, zájem, čas a trpělivost, které mi po celou dobu studia věnovala.

Děkuji také Mgr. Lucii Círové (roz. Mauedové) a žákům základní školy, kteří se na experimentu podíleli.

V neposlední řadě děkuji své rodině a kolegovi PaedDr. Josefu Kepkovi za psychickou podporu, které se mi dostávalo v průběhu psaní této práce.

Název: Rozvoj tvořivosti žáků v hodinách matematiky

Abstrakt: Dizertační práce se zabývá procesem rozvoje tvořivého myšlení žáků, analýzou žákovských strategií a srovnáním řešitelských strategií žáků. Nejdříve jsou vymezeny některé pojmy, které patří mezi teoretická východiska práce, tj. matematická východiska (relace, množiny, binární relace, ekvivalence, grupy a okruhy), tvořivost (podstata tvořivosti, tvořivé vyučování) a strategie řešení (strategie řešení problému). Jsou uvedeny vybrané zahraniční i tuzemské výzkumy týkající se problematiky rozvoje tvořivosti. Metodologie práce je založena na didaktické analýze slovních úloh. Zjišťuje, zda jsou žáci schopni najít různé způsoby řešení problému a jaké strategie při tom použijí. Cílovou skupinu tvořili žáci 4. ročníku základní školy. Vlastní výzkum, jehož data byla získána akčním výzkumem, je založen na analýzách žákovských řešení. Výsledky výzkumu ukázaly vyšší řešitelskou úspěšnost u žáků projektové třídy. Při srovnání pretestu a posttestu příznivě vyplývá snížení počtu žáků, kteří nenašli žádnou strategii řešení i změnu řešitelských strategií z metody pokusu a omylu na pseudoalgebraické metody, zlepšení u žáků, jimž byly předkládány úlohy na rozvoj logického myšlení oproti žákům, u kterých probíhala výuka standardním způsobem. Na druhé straně tento průzkum prokázal malou kreativitu ve vztahu k počtu řešitelských strategií.

Klíčová slova: slovní úloha, řešitelské strategie, žáci základní školy, rozvoj tvořivého myšlení žáka

Title: The Development of Pupils´ Creativity in Mathematics Lessons

Abstract: This dissertation deals with the process of development of pupil's creative thinking, including analysis and comparison of pupils' problem-solving strategies. In the theoretical background, important terms are defined, i.e. mathematical concepts (relations, sets, binary relations, equivalence, groups and circles), creativity (essence of creativity, creative teaching) and problem-solving strategies. Selected research studies relating to issues of creativity development are also discussed. The methodology is based on the didactic analysis of solutions to word problems. It determines whether pupils are able to find different ways of problem solving and what strategies they apply. The target group consisted of fourth grade pupils in primary school. To prepare them for the research problem-solving task, one group was presented with tasks for the development of logical thinking, while another group was taught in a standard way. Data for this research were obtained by analyzing pupils' word problem solutions. Results showed a higher success rate and improvement among pupils in the class prepared in logical thinking. Comparing pre-test and post-test results favorably demonstrated a reduction in the number of pupils who could find no solution strategy, and a change in solution strategies from the trial-and-error method to pseudo-algebraic methods. On the other hand, the research revealed little creativity in relation to the number of problem-solving strategies.

Keywords: word problem, problem-solving strategies, primary school pupils, development of creative thinking

Obsah

1 Úvod

Školská matematika je charakterizována určitým napětím mezi zdánlivě dvěma odlišnými cíli: nácvikem postupů (algoritmická činnost) používáním stereotypních úkolů na jedné straně a učební koncepcí (kreativní, konstruktivní činnost) pro řešení nestereotypních úkolů na druhé straně. Dosažení prvního cíle dovoluje studentům řešit úkoly efektivním, stručným a rychlým způsobem, zatímco podpora kreativity umožní žákům získat to nejdůležitější, a to schopnost matematického kreativního myšlení (Ervynck, 1991). Matematika ve školním vzdělávacím programu v mnoha zemích obsahuje obecná pravidla, zásady. Bližším zkoumáním těchto zásah odhalíme dichotomii mezi doporučením rozvíjet žákovy dovednosti v řešení problémových úloh a zaměřením se na upevňování nácviku algoritmů.

Většina vyspělých zemí má své vlastní systémy pravidelného zkoumání znalostí a dovedností žáků počátečních stupňů vzdělávání. Česká republika však doposud žádné podobné ověřování soustavně neprovádí. Jaké znalosti čeští žáci prokazují ve srovnání s dalšími státy světa, se proto objektivně dozvídáme především z mezinárodních šetření výsledků vzdělávání. V oblasti matematiky a přírodních věd jsou to především výzkumy PISA a TIMSS. PISA (Programme for International Student Assesment) je zřejmě největší a nejdůležitější mezinárodní výzkum v oblasti měření výsledků vzdělávání. V současné době je do něj zapojeno více než 60 zemí světa. Výzkum je zaměřen na zkoumání úrovně kompetencí žáků posledních ročníků povinné školní docházky. Testování probíhá v tříletých cyklech. Pokaždé je kladen důraz na jednu ze sledovaných oblastí (mateřský jazyk, matematika a přírodní vědy). V rámci testování matematiky proběhlo testování v roce 2003, 2012 a 2015. Vedle uvedených oblastí byl též sledován mj. vliv rodiny a školy, postoje žáků k vyučování matematiky, jejich postoje ke škole a učitelům a osobnostní charakteristiky. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je mezinárodní projekt, který zkoumá úroveň znalostí a dovedností žáků, jejichž věk odpovídá čtvrtým a osmým ročníkům našich základních škol, a následně provádí vyhodnocení výsledků vzdělávání v matematice a přírodovědných předmětech. Šetření probíhá od roku 1995 ve čtyřletých cyklech v desítkách zemí celého světa. Česká republika se účastnila těchto výzkumů v letech 1995, 2007, 2011 a 2015. Vyhodnocování testů a následné analýzy výsledků se řídí harmonogramem mezinárodních center. Pro šetření PISA 2015 a TIMSS 2015 budou zjištění prostřednictvím národních zpráv s komentovanými výsledky zveřejněna v prosinci 2016. (Česko. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy [online]. MŠMT, 2015. Dostupné z: http://www.csicr.cz/Stredni-cast/Tiskove-zpravy/PISA-a-TIMSS-2015-Cesti-zaci-projdou-mezinarodnim).

Výsledky průzkumů PISA a TIMSS poukazují na procentuální úspěšnost, popř. neúspěšnost, s jakou žáci dané úlohy řešili. Proto je součástí práce podrobná analýza tří algebraických úloh se zaměřením na řešitelské strategie, které žáci při řešení těchto úloh používají.

Cílem práce je ověřit možnosti rozvoje tvořivosti u žáků ve věku 10-11 let prostřednictvím řešení vhodně zvolených matematických úloh. Uvedený věk odpovídá žákům 4. ročníku a byl zvolen s ohledem na zjištění zahraničního výzkumu jako období zvýšené tvořivosti (blíže odstavec 2.2.2.1).

Po úvodní části následuje teoretická kapitola, která se zabývá východisky práce a vymezením pojmů důležitých pro vlastní výzkum, tedy matematickými východisky (relace, množiny, binární relace, ekvivalence, grupy a okruhy), tvořivostí (problematika teorie výchovy k tvořivosti, podstata tvořivosti, tvořivé vyučování a jeho koncepce a metodika, projektová metoda) a strategií řešení (strategie řešení problému). Třetí kapitola se zaměřuje na metodologii. Jsou zde formulovány výzkumné otázky, dále jsou popsány metody sběru dat, cílová skupina a didaktická analýza slovních úloh. Čtvrtá kapitola je věnována předvýzkumu vedenému na Sportovním gymnáziu u žáků nižšího stupně. Pátá kapitola popisuje vlastní pedagogický experiment založený na odlišných metodách ve vyučování matematiky. V průběhu experimentu byly zadáním pretestu a posttestu dvou tříd, tj. projektové a srovnávací třídy, popsány a následně srovnány a vyhodnoceny řešitelské strategie žáků čtvrtého ročníku základního vzdělávání. (Důvodem změny věku žáků je na jedné straně kritický věk, kdy se mění postoj a vztah k matematice, od pozitivního k negativnímu postoji, a na straně druhé vhodný věk pro podporu tvořivosti.) Závěry práce shrnuje šestá kapitola. Závěry jsou rozděleny na část obsahovou, která charakterizuje rozvoj tvořivosti v matematice, část metodologickou a část praktických aplikací. Jsou též nastíněny možnosti dalšího výzkumu. Práce je doplněna 16 přílohami. Přílohy obsahují úlohy, které byly žákům předkládány v průběhu šestiměsíčního pedagogického experimentu, psychologické testy SUPSO a SPAS a ukázku řešení žáka z pretestu a posttestu.

2 Teoretická východiska práce

Vzhledem k zaměření práce je třeba vyjít ze tří teoretických platforem:

a) matematické,
b) obecně pedagogické,
c) oborově didaktické.

Následující kapitoly jsou proto postupně věnovány uvedeným oblastem.

2.1 Matematická východiska

Aritmetické i geometrické učivo matematiky na 1. stupni ZŠ vychází z několika základních pojmů matematické teorie. Protože si žák 1. stupně postupně vytváří představu o množinách prvků jistých vlastností, jsou to především elementární pojmy teorie množin, kde žák nalézá vztahy mezi různými objekty. Po celých pět let se v aritmetice buduje představa o množině přirozených čísel, žáci se seznamují s porovnáváním čísel a provádějí operace s přirozenými čísly. V geometrii nalézají vztahy mezi různými objekty, nové geometrické pojmy jsou často zaváděny pomocí množinových operací, i když žáci nepracují s množinovou terminologií. Proto se v této kapitole zaměříme na pojem relace a operace.

2.1.1 Relace

2.1.1.1 Množiny

Obecná algebra vychází z pojmů a metod teorie množin. Vyložíme-li nějaké dané ostře vydělené seskupení objektů jako objekt jediný, vytvoříme z tohoto seskupení *množinu*. Objekty náležející do tohoto seskupení se nazývají *prvky* takto vytvořené *množiny*.

Množiny vytváříme proto, abychom na mnohé mohli pohlížet jako na jedno. Seskupení totiž obvykle bývá více objektů, množina z něj vytvořená je objekt jediný. Následkem toho tato množina může být prvkem nějaké jiné množiny. Z daného ostře vyděleného seskupení objektů lze vytvořit toliko jedinou množinu. Jinými slovy, množina, ač není seskupením svých prvků, je tímto seskupením jednoznačně určena; a také naopak, množina jednoznačně určuje seskupení svých prvků. Jednoznačná určenost množiny seskupením svých prvků se nazývá *extensionalita množiny*.

Zápis $X \in Y$ označuje, že *objekt X je prvkem množiny Y* (nebo *X náleží* do *Y*). Tento vztah mezi objekty a množinami nazýváme *vztahem náležení* (objektu do množiny). Zápis $X \notin Y$ označuje, že objekt *X není* prvkem množiny *Y* (*X* nenáleží do *Y*). Zápis $X \subseteq Y$ označuje, že *X*, *Y* jsou množiny a každý prvek množiny *X* je též prvkem množiny *Y*. Tento vztah mezi množinami se nazývá *inkluse*. Je-li $X \subseteq Y$, pak říkáme, že množina *X* je podmnožinou množiny *Y*. Snadno nahlédneme, že pro libovolné množiny *X*, *Y*, *Z* platí:
(i) $X \subseteq X$.

(ii) Je-li $X \subseteq Y$ *a* $Y \subseteq Z$, *pak* $X \subseteq Z$.

Z extensionality množin navíc plyne:

(iii) Je-li $X \subseteq Y$ *a* $Y \subseteq X$, *pak* $X = Y$ (neboli písmena *X*, *Y* označují tutéž množinu).

Z toho, co bylo řečeno, je patrno, že *vytváření* nějaké *množiny* se odehrává ve třech následujících krocích.

1. Musíme mít vytvořeny všechny objekty (rozumí se každý jednotlivě), které budou prvky vytvářené množiny.
2. Z již vytvořených objektů ostře vydělíme seskupení všech prvků vytvářené množiny.
3. Takto vytvořené seskupení prohlásíme za objekt jediný.

Ve všech případech, s nimiž se setkáme, budeme třetí ze shora uvedených kroků provádět samovolně (pochopitelně teprve tehdy, kdy již budou provedeny oba kroky předcházející). Provedení tohoto kroku tedy neklade žádné mimořádné nároky na toho, kdo množiny vytváří.

Je-li *A* nějaký objekt, pak term $\{A\}$ označuje množinu, jejímž jediným prvkem je objekt *A*. Jsou-li *A*, *B* nějaké objekty, pak term $\{A, B\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B. Protože množina je svými prvky jednoznačně určena, je $\{A, B\} = \{B, A\}$. Vytváříme-li seznam nějakých věcí, pak tím, že do něj některou věc zapíšeme vícekrát, počet těchto věcí nezvětšujeme. Je-li tedy $A = B$, je $\{A, B\}$ jednoprvková množina a $\{A, B\} = \{A\} = \{B\}$. Jsou-li A, B, C nějaké objekty, pak $\{A, B, C\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B, C. Podobně $\{A, B, C, D\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B, C, D.

Pro zjednodušení úvah týkajících se množin je užitečné zavést tzv. *prázdnou množinu*, to je takovou, která nemá žádné prvky. Protože množina je svými prvky jednoznačně určena, existuje toliko jediná prázdná množina. Pro prázdnou množinu je příznačné, že právě toliko při provádění třetího z prve uvedených kroků můžeme krátce zaváhat. Znak $\emptyset$ budeme používat jako trvalou konstantu označující prázdnou množinu. Uvědomme si, že prázdná množina je objekt, tedy něco, a ne nic, i když žádný objekt není jejím prvkem. Množina $\{\emptyset\}$, jejímž jediným prvkem je prázdná množina, je tedy jednoprvková a následkem toho není prázdná; je *neprázdná*. Platí tedy $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$.

Dále uvedeme operace, jimiž vytváříme z množin opět množiny. Přitom pozornost si zasluhuje pouze druhý krok při vytváření množin, neboť první je splněn triviálně; existence všech prvků výsledné množiny je totiž zaručena existencí množin, z nichž ji vytváříme.

Průnikem množin A, *B* rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí jak do množiny A, tak do množiny B; značit ji budeme $A \cap B$. Řekneme, že *množiny A*, *B* jsou *disjunktní*, jestliže jejich průnikem je prázdná množina (to znamená, je-li $A \cap B = \emptyset$). *Sjednocením množin A*, *B* rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do množiny A nebo do množiny B (to je také ty, které náležejí do obou); značit ji budeme $A \cup B$. *Rozdílem množin A*, *B* v uvedeném pořadí rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do množiny A a nenáležejí do množiny B; značit ji budeme $A \setminus B$. Průnik, sjednocení a rozdíl dvou (ne nutně různých) množin jsou binární operace na oboru všech množin. Jistě se shodneme, že tyto tzv. *booleovské operace* jsou na oboru všech množin ostře vymezené. Snadno ověříme platnost následujících tzv. *de Morganových pravidel*:

Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Uvedené operace byly původně zavedeny a zkoumány při formalisaci logiky. Pro zjednodušení vyjadřování bývá často výhodné použít název *soubor množin* pro ty množiny, jejichž všechny prvky jsou množiny. Níže uvedenými unárními operacemi (tzv. *zobecněnými booleovskými operacemi*) vytvoříme ze souboru množin množinu. *Sjednocením souboru množin* $\mathcal{A}$ rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do některé množiny, která je prvkem souboru $\mathcal{A}$. Sjednocení souboru množin $\mathcal{A}$ značíme $\cup \mathcal{A}$. *Průnikem neprázdného souboru množin* $\mathcal{A}$ rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do každé množiny, která je prvkem souboru $\mathcal{A}$. Průnik neprázdného souboru množin $\mathcal{A}$ značíme $\cap \mathcal{A}$. Snadno ověříme, že pro libovolné dvě množiny A, B platí

$$A \cup B = \cup \{A, B\}, \qquad A \cap B = \cap \{A, B\}.$$

Jsou-li tedy X, Y, Z nějaké objekty, pak $\{X, Y, Z\} = \cup \{\{X, Y\}, \{Z\}\}$.

Prázdná množina je rovněž souborem množin, neboť každý její prvek je množinou. Ukáže-li nám totiž někdo nějaký objekt, který je prvkem prázdné množiny, pak o tomto objektu snadno dokážeme cokoli, co si budeme přát, tedy i to, že je množinou. Zřejmě $\cup \emptyset = \emptyset$, neboť kdyby pro nějaký objekt X bylo $X \in \cup \emptyset$, pak by musela existovat taková množina $Y \in \emptyset$, pro niž by $X \in Y$, to je $X \in Y \in \emptyset$, což je spor.

Naproti tomu při definici průniku souboru $\mathcal{A}$ je předpoklad $\mathcal{A} \neq \emptyset$ nezbytný. Podle definice by $\cap \emptyset$ musela být množina, jejímiž prvky jsou vůbec všechny objekty. Je-li totiž X nějaký objekt, pak udá-li nám někdo jakoukoli množinu Y, která náleží do prázdného souboru $\emptyset$, pak mu snadno dokážeme, že platí $X \in Y$, a tedy $X \in \cap \emptyset$. Jestliže se ale při nějakém studiu soustřeďujeme výhradně jen na prvky a podmnožiny nějaké dané množiny V, pak bývá někdy užitečné učinit dohodu, podle níž je $\cap \emptyset$ rovněž množina a $\cap \emptyset = V$. Pro zobecněné booleovské operace snadno ověříme platnost následujících *zobecněných de Morganových pravidel*.

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdný soubor množin, A nějaká daná množina. Nechť $\tilde{\mathcal{A}}$ je soubor všech těch množin, které jsou tvaru $A \setminus X$, kde $X \in \mathcal{A}$. Potom platí:

$$A \setminus \cup \mathcal{A} = \cap \tilde{\mathcal{A}}.$$

$$A \setminus \cap \mathcal{A} = \cup \tilde{\mathcal{A}}.$$

Je-li tedy A, $\cup \mathcal{A} \subseteq V$, kde V je nějaká daná množina, a jestliže jsme učinili dohodu $\cap \emptyset = V$, pak u shora uvedených zobecněných de Morganových pravidel není třeba předpokládat $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (Vopěnka, 2011).

2.1.1.2 Binární relace

1. Je-li M množina, nazýváme jejím *čtvercem* $M \times M$ množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in M$. Nechť R je libovolná podmnožina $M \times M$. Podmnožina R definuje na množině M *binární relaci* takto: jsou-li $a, b \in M$, říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b, a zapisujeme aRb, právě když dvojice (a, b) je prvkem množiny R. Zápisy

$$aRb \text{ a } (a, b) \in R$$

jsou tedy ekvivalentní.

Studium binárních relací na množině M se tedy neliší od studia podmnožin množiny $M \times M$. Speciálně lze říci, že *binární relace* R je obsažena v relaci R', $R \subset R'$, a lze také mluvit o *průniku* a *sjednocení* binárních relací. *Komplementem* k binární relaci R je binární relace $\overline{R}$ definovaná podmnožinou $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. Jinak řečeno $a\overline{R}b$ právě když $(a, b) \notin R$.

2. Protože binární relace jsou definovány množinami uspořádaných dvojic prvků množiny M, je algebra binárních relací bohatší než algebra podmnožin libovolné množiny. Mějme např. na množině M dvě libovolné binární relace R a S. *Součinem* RS nazveme binární relaci definovanou takto: $a(RS)b$ právě když v M existuje alespoň jeden prvek c tak, že aRc a cSb.

Násobení binárních relací je asociativní

$$(RS)T = R(ST),$$

neboť prvku *a* odpovídá v obou relacích *(RS)T* a *R(ST)* prvek *b* právě když existují prvky *c* a *d* tak, že

$$aRc,\ cSd,\ dTb.$$

Násobení binárních relací však není komutativní. Binární relace *R* a *S* jen výjimečně budou *záměnné*.

$$RS = SR.$$

Jsou-li R_i (i probíhá množinu indexů I) a S binární relace na množině M pak

$$(\bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i})S = \bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i}S\ , \qquad S(\bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i} = \bigcup_{i\in I} SR_\mathrm{i}.\ \ (1)$$

Vztah $a[(\bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i})]Sb$ je totiž ekvivalentní s tvrzením, že existuje prvek *c*, pro který platí $a[(\bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i})]c$ a *cSb*. To je ekvivalentní s tím, že existuje index i_0 tak, že $aR_{i0}c$ a *cSb* tj. $a(R_{i0}S)b$, a tedy $a(\bigcup_{i\in I} R_\mathrm{i}S)b$.

Ve výrocích (1) nelze sjednocení zaměnit za průniky.

Z (1) plyne, že jsou-li *R*, *R´* a *S* binární relace a $R \subseteq R´$, pak

$$RS \subseteq R´S,\ SR \subseteq SR´.\ \ (2)$$

Vztah $R \subseteq R´$ je totiž ekvivalentní s identitou $R \cup R´ = R´$ a odtud plyne

$$(R \cup R´)\ S = RS \cup R´S = R´S,$$

což je ekvivalentní s $RS \subseteq R´S$.

3. Ke každé binární relaci *R* na množině *M* existuje *inverzní relace* R^{-1} definovaná takto: $aR^{-1}b$ právě tehdy když *bRa*. Je zřejmě

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

a z $R \subseteq S$ plyne $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Jsou-li R_i, $i \in I$, S a T binární relace na množině M, pak

$$(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i}^{-1}, \qquad (3)$$

$$(\bigcup_{i \in I} R_\mathrm{i})^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_\mathrm{i}^{-1}, \qquad (4)$$

$$(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}. \qquad (5)$$

Formule $a(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})^{-1}\, b$ značí, že $b(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, a$, tj. bR_ia pro všechna $i \in I$. To ale znamená, že $aR_i^{-1}b$ pro všechna $i \in I$, a tedy také $a(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i}^{-1})\, b$. Analogicky dokážeme identitu (4). Konečně $a(ST)^{-1}b$ značí, že $b(ST)a$, tj. existuje prvek c tak, že bSc a cTa, a tedy $aT^{-1}c$, $cS^{-1}b$; odtud plyne $a(T^{-1}S^{-1})b$.

4. *Jednotkovou relaci E* definujeme tak, že aEb právě když $a = b$. Jinak řečeno relace E je dána množinou všech dvojic (a, a), kde $a \in M$. Zřejmě $E^{-1} = E$ a pro libovolnou binární relaci R je

$$ER = RE = R.$$

Zavedeme ještě *prázdnou relaci O* definovanou prázdnou podmnožinou množiny $M \times M$. Pro libovolnou binární relaci na množině M zřejmě

$O \subseteq R$ a $RO = OR = O$ (Kuroš, 1968).

5. Nějakou danou relační strukturu na množině A označujeme (A, R), přičemž relace R je *binární*. Písmena a, b, c budeme používat k označování prvků množiny A. Místo $(a, b) \in R$ budeme psát též aRb.

Řekneme, že *relace R* je na množině A

(a) *reflexivní*, jestliže pro každé a je aRa;
(b) *symetrická*, jestliže pro každé a, b je aRb právě tehdy, když je bRa;
(c) *antisymetrická*, jestliže pro každé a, b, je-li současně aRb a bRa, pak je $a = b$;
(d) *tranzitivní*, jestliže pro každé a, b, c, je-li aRb a bRc, pak je aRc;
(e) *dichotomická*, jestliže pro každé a, b je buď aRb, nebo bRa.

(Vopěnka, 2011).

2.1.1.3 Ekvivalence

1. Důležitým typem binárních relací jsou *ekvivalence*, tj. binární relace, které jsou *reflexivní*, *tranzitivní* a *symetrické* (viz 2.1.1.2 (5)). Konkrétními příklady takových relací jsou např. rovnost zlomků nebo kongruence celých čísel podle určitého modulu. Ekvivalenci nejčastěji označujeme symbolem $\sim$ nebo $\equiv$.

2. Ekvivalence definované na množině M velmi úzce souvisejí s *rozkladem množiny M na disjunktní třídy*. Rozkladem množiny rozumíme soustavu podmnožin množiny M (tříd tohoto rozkladu), vybraných tak, aby každý prvek množiny M patřil právě do jedné z těchto podmnožin.

Každý rozklad π množiny M definuje na M ekvivalenci.

Jsou-li totiž $a, b \in M$ a položíme-li $a \sim b$ právě když a i b patří do téže třídy rozkladu π, dostaneme na M binární relaci, která zřejmě vyhovuje všem požadavkům uvedeným v definici ekvivalence.

Obráceně, *každá ekvivalence R na množině M definuje rozklad této množiny*. Abychom toto tvrzení dokázali, nazveme *třídou* K_a prvku a množinu těch prvků $x \in M$, pro které je aRx. Z reflexivity relace R plyne $a \in K_a$, tj. množina tříd K_a, $a \in M$ pokrývá celou množinu M. Ze symetrie relace R plyne dále, že když $b \in K_a$, pak $a \in K_b$. Z tranzitivity relace R vidíme, že když $b \in K_a$ a $c \in K_b$, pak $c \in K_a$, tj. $K_b \subseteq K_a$. Z těchto vztahů ihned plyne, že je-li $b \in K_a$, pak $K_b = K_a$, tj. třída je definována libovolným svým prvkem. Jsou-li konečně K_a a K_b dvě libovolné třídy s neprázdným průnikem obsahujícím např. prvek c, pak $K_a = K_c$ i $K_b = K_c$, takže třídy K_a a K_b splynou. Tím jsme dokázali, že množina všech různých tříd K_a je rozkladem množiny M.

Přechod od rozkladu π množiny M k ekvivalenci R definované tímto rozkladem π a pak znovu k rozkladu množiny M definovanému ekvivalencí R vede zřejmě znovu na rozklad π. *Mezi ekvivalencemi na množině M a rozklady množiny M na disjunktní třídy existuje tedy vzájemně jednoznačné zobrazení*.

3. *Jsou-li R_i, $i \in I$ ekvivalence na množině M, je jejich průnik rovněž ekvivalencí*.

Z aR_ia pro všechna $i \in I$ totiž plyne $a(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, a$. Je-li dále $a(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, b$ a $b(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, c$, je aR_ib a bR_ic pro všechna $i \in I$, takže aR_ic pro všechna $i \in I$, a proto $a(\bigcap_{i \in I} R_i)\, c$. Konečně, je-li $a(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, b$, pak aR_ib pro všechna $i \in I$, tj. bR_ia pro všechna $i \in I$, a odtud plyne $b(\bigcap_{i \in I} R_\mathrm{i})\, a$.

Snadno ověříme, že odpovídají-li rozklady π_i, $i \in I$ množiny M ekvivalencím R_i, $i \in I$, pak ekvivalenci $\cap\, R_\mathrm{i}$ odpovídá rozklad, jehož třídy tvoří všechny neprázdné průniky tříd vzatých po jedné z každého rozkladu π_i, $i \in I$. Tento rozklad nazveme *průnik* rozkladů π_i, $i \in I$.

Jsou-li R_i, $i \in I$ ekvivalence na množině M, nebude jejich sjednocení, chápané ve smyslu sjednocení binárních relací, obecně ekvivalencí. *Na množině M existuje však taková ekvivalence, která obsahuje všechny ekvivalence R_i, $i \in I$* (ve smyslu inkluze zavedené pro binární relace) *a je obsažena v každé jiné ekvivalenci, která rovněž obsahuje všechna R_i, $i \in I$*. Tuto ekvivalenci lze nazvat *sjednocením* ekvivalencí $\mathrm{R_i}$, $i \in I$.

Abychom vyslovené tvrzení dokázali, definujeme na množině M binární relaci S: aSb právě když v množině M lze vybrat alespoň jednu konečnou posloupnost prvků

$$a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n = b \quad (1)$$

2.1.2 Grupy a okruhy

2.1.2.1 Grupoidy, pologrupy, grupy

1. Základem všech pojmů, které studujeme v různých partiích algebry, je pojem *algebraické operace*. Nejprve se omezíme na *binární* operace. V nejširším slova smyslu je to zákon, který některým uspořádaným dvojicím prvků dané množiny M (tj. některým prvkům čtverce množiny M, viz 2.1.1.2 (1)) přiřazuje jeden nebo několik prvků množiny M. Nazveme-li tuto operaci *násobení* a užijeme-li obvyklý multiplikativní zápis, vyjadřuje rovnost

$$ab = c, \quad (1)$$

že pro dvojici prvků $a, b \in M$ je součin definován a že jednou z hodnot tohoto součinu je c.

Pojem binární algebraické operace je, v tomto širokém slova smyslu, ekvivalentní s pojmem ternární relace na množině M (pro n = 3, n je prvek množiny M).

Je-li totiž na M definována binární operace, lze na M definovat ternární relaci R, položíme-li $R\ (a, b, c)$ právě když je splněna rovnice (1). Máme-li obráceně na M ternární relaci, můžeme předpokládat, že platí (1) právě když $R\ (a, b, c)$.

2. V dalším textu budeme obvykle chápat *binární algebraickou operaci* v užším smyslu; násobení musí být definováno pro každou uspořádanou dvojici a musí být jednoznačné. Každá množina, v níž je dána algebraická operace tohoto typu, se nazývá *grupoid*.

Také tento pojem je stále ještě příliš široký. Užší je pojem *pologrupy*, který již má různé aplikace. Je to grupoid, v němž platí *asociativní zákon*. Pro libovolné prvky a, b, c je

$$(ab)c = a(bc). \quad (2)$$

Z rovnosti (2) plyne, že součin abc tří libovolných prvků pologrupy je jednoznačně určen. Z toho ihned plyne, že pro všecha přirozená n je součin $a_1 a_2 ... a_n$ libovolných n prvků pologrupy, v uvedeném pořadí, také jednoznačně určeným prvkem pologrupy.

3. Ještě užší je jeden z nejdůležitějších algebraických pojmů, *grupa*. Je to pologrupa, v níž existují *inverzní operace*, tj. pro libovolné prvky a, b má každá z rovnic

$$ax = b, \; ya = b \quad (3)$$

jednoznačné řešení.

Protože rovnice (3) mají jednoznačné řešení, lze v grupě *krátit zleva nebo zprava*. Je-li

$$ab_1 = ab_2 \text{ nebo } b_1 a = b_2 a, \text{ je } b_1 = b_2.$$

Řešení x a y rovnic (3) nemusejí být v libovolné grupě identická. O uvažované operaci totiž nepředpokládáme, že je komutativní, takže součin může záviset na pořadí faktorů. Grupa (nebo pologrupa či grupoid), pro jejíž každé dva prvky a, b platí komutativní zákon

$$ab = ba,$$

se nazývá *Abelova* nebo *komutativní*.

4. *V každé grupě G existuje právě jeden prvek e tak, že*

$$ae = ea = a$$

pro všechna $a \in G$.

Z definice grupy totiž plyne, že pro každý prvek a existuje v G právě jeden prvek e'_a tak, že $ae'_a = a$. Je-li b libovolný jiný prvek grupy G a y řešení rovnice $ya = b$, plyne z asociativního zákona

$$be'_a = (ya)\, e'_a = y(ae'_a) = ya = b,$$

takže $e'_b = e'_a$. Prvek e'_a tedy nezávisí na volbě prvku a a můžeme ho označit e'.

Je tudíž

$$e'_a = a \text{ pro všechna } a \in G. \ (4)$$

Analogicky dokážeme existenci a jednoznačnost takového prvku e'', že

$$e''a = a \text{ pro všechna } a \in G. \ (5)$$

Aplikujeme-li identity (4) a (5) na součin $e''e'$, dostaneme $e''e' = e''$ i $e''e' = e'$, z čehož plyne $e'' = e'$. Tím je věta dokázána.

Prvek e, o kterém říká předešlá věta, že existuje a je jen jeden, se nazývá *jednotkový prvek* grupy G a obvykle jej označujeme symbolem 1.

Ke každému prvku a grupy G existuje právě jeden prvek a^{-1} tak, že

$$a\, a^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Z definice grupy totiž plyne, že existují jednoznačně definované prvky a' a a'' tak, že

$$aa' = 1,\ a''a = 1.$$

Užitím asociativního zákona dostaneme

$$a''aa' = a''(aa') = a''.\ 1 = a'',$$

$$a''aa' = (a''a)a' = 1\ .\ a' = a',$$

takže $a'' = a'$.

Prvek a^{-1} se nazývá *inverzní prvek* k prvku a. Inverzním prvkem k a^{-1} je zřejmě prvek a a $1^{-1} = 1$. Snadno také ověříme, že pro libovolné prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je

$$(a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \ldots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

5. Ověření, že daná pologrupa je grupou, často usnadňuje tato věta:

Pologrupa G je grupou, právě když v G existuje alespoň jeden pravý jednotkový prvek e tak, že

$$ae = a \text{ pro všechna } a \in G,$$

přičemž e lze vybrat tak, že ke každému $a \in G$ existuje alespoň jeden pravý inverzní prvek a^{-1}, pro který

$$aa^{-1} = e.$$

V jednom směru jsme větu dokázali v předešlém bodě. Mějme nyní pologrupu G, která vyhovuje podmínkám věty. Dokážeme, že prvek e je také levým jednotkovým prvkem v G. Je-li $a \in G$ a a^{-1} jeden z jeho pravých inverzních prvků, je

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}.$$

Násobíme-li zprava obě strany této rovnosti jedním z pravých inverzních prvků k a^{-1}, dostaneme vzhledem k jednoznačnosti násobení v pologrupě

$$eae = ae,$$

takže $ea = a$, což jsme chtěli dokázat.

Je-li dále e' některý pravý jednotkový prvek a e'' některý levý jednotkový prvek v G, dokážeme stejně jako při důkazu první věty předešlého odstavce, že $e'' = e'$, tj. dokážeme existenci a jednoznačnost jednotkového prvku v G.

Je-li nyní a opět prvkem G a a^{-1} některý z pravých inverzních prvků k a, vynásobíme rovnost $aa^{-1} = e$ zleva prvkem a^{-1} a dostaneme

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

Násobíme-li tuto rovnost zprava jedním z pravých inverzních prvků k a^{-1}, dostaneme rovnost

$$a^{-1}ae = e,$$

takže $a^{-1}a = e$. Prvek a^{-1} je tedy také levým inverzním prvkem k a.

Stejně jako v důkaze druhé věty předešlého odstavce dokážeme, že každý levý inverzní prvek a je roven libovolnému pravému inverznímu prvku. Odtud plyne, že v G existuje ke každému prvku a právě jeden inverzní prvek a^{-1}.

Abychom dokončili důkaz věty, ukážeme ještě, že prvky

$$x = a^{-1}b \quad \text{a} \quad y = ba^{-1}$$

jsou řešením rovnic (3).

Že rovnice (3) jiná řešení nemají, plyne z toho, že vynásobíme-li např. rovnici $ax_1 = ax_2$ prvkem a^{-1} zleva, dostaneme $x_1 = x_2$.

6. Někdy, zvláště při studiu Abelových grup, užíváme aditivní zápis místo multiplikativního. Grupové operaci říkáme pak *sčítání* a součet zapisujeme $a + b$; jednotkovému prvku grupy říkáme *nulový prvek* a označujeme jej symbolem 0. Místo o inverzním prvku mluvíme o *opačném prvku* a označujeme jej $-a$.

Inverzní operace se v aditivním zápise Abelových grup nazývá *odečítání* – v tomto případě je ovšem jen jedna. Řešení rovnice

$$a + x = b$$

se nazývá *rozdíl* a zapisujeme ho ve tvaru $b - a$. Zřejmě

$$b - a = b + (-a),$$

takže

$$b - (a_1 + a_2) = b - a_1 - a_2.$$

7. Mnoho důležitých příkladů Abelových grup dostaneme ze známých operací s čísly. Tak např. množina všech celých čísel s operací sčítání tvoří Abelovu grupu, zvanou *aditivní grupa celých čísel*. Abelovu grupu vzhledem ke sčítání tvoří také všechna racionální čísla, je to *aditivní grupa racionálních čísel*. Lze mluvit také o aditivních grupách všech reálných i všech komplexních čísel.

Přirozená čísla tvoří vzhledem ke sčítání *aditivní pologrupu přirozených čísel*. Není to však grupa, neboť v ní nelze vždy odečítat. Tento důsledek je významný i pro vyučování matematiky na 1. stupni ZŠ. Dokud se žák pohybuje pouze v množině přirozených čísel, umí určit rozdíl čísel a, b pouze v případě, kdy a ≥ b.

Tvoříme-li z čísel grupy vzhledem k násobení, musíme si uvědomit, že žádná nemůže obsahovat nulu, neboť nulou nelze dělit. Multiplikativní grupu tvoří např. všechna nenulová racionální čísla a také jen všechna kladná racionální čísla. Vzhledem k násobení budou pologrupami, ne však grupami, množiny všech celých čísel, všech celých nezáporných čísel i všech přirozených čísel.

Jako příklad konečné Abelovy grupy uveďme *multiplikativní grupu n-tých odmocnin z jedné*. Řád této grupy je *n*. (*Řádem* konečné grupy nazýváme počet jejích prvků.)

8. Přejdeme k příkladům nekomutativních grup a pologrup. *Transformací* množiny *M* nazveme každé zobrazení této množiny do sebe (tj. na některou její podmnožinu). Speciálním případem transformace je *permutace*, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení množiny *M* na sebe.

V 2.1.1.1. (2) jsme zavedli násobení zobrazení, čímž jsme rozuměli jejich postupné provádění, a dokázali jsme, že tato operace je asociativní. Užijeme-li tuto operaci na transformace, vidíme, že vzhledem k operaci postupného provádění tvoří všechny transformace dané množiny *M* pologrupu. Tato pologrupa se nazývá *symetrická pologrupa množiny M*.

Protože postupným provedením dvou permutací množiny *M* dostaneme opět permutaci, můžeme mluvit o pologrupě permutací množiny *M*. *Identická permutace*, která nemění žádný prvek množiny *M*, je jednotkovým prvkem této pologrupy. Zobrazuje-li dále permutace *x* každý prvek $a \in M$ na *ax*, bude inverzní zobrazení, které zobrazuje *ax* na *a* pro všechna $a \in M$, rovněž permutací. Je to *inverzní permutace* k *x*. Vzhledem k 2.1.2.1 (5) tvoří všechny permutace dané množiny *M* grupu vůči operaci postupného provádění permutací. Takové grupě říkáme *symetrická grupa množiny M*. Je-li množina *M* konečná a má *n* prvků, nazývá se její symetrická grupa *symetrickou grupou n-tého stupně* a značíme ji S_n . S_n je rovněž konečná a má řád n!. Konečná bude také symetrická pologrupa konečné množiny.

Dalším případem nekomutativní grupy je množina všech regulárních čtvercových matic n-tého stupně (kde n ≥ 2) s reálnými prvky vzhledem k operaci násobení matic.

2.1.2.2 Okruhy a tělesa

1. Dalším důležitým algebraickým pojmem je, vedle pojmu grupy, okruh. *Okruhem* nazýváme množinu R, v níž jsou definovány dvě binární algebraické operace (ve smyslu 2.1.2.1.(2)) – *sčítání* a *násobení*, přičemž vzhledem ke sčítání je *R* Abelovou grupou – je to tzv. *aditivní grupa v okruhu R*. Násobení musí se sčítáním souviset *distributivními zákony*.

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca. \quad (1)$$

Na násobení neklademe v obecném případě žádná omezení, tj. okruh *R* může být vzhledem k násobení jen grupoidem. Je to *multiplikativní grupoid okruhu R*. Je-li násobení v okruhu asociativní, říkáme i okruhu *asociativní okruh* a mluvíme o jeho *multiplikativní pologrupě*. Je-li násobení v okruhu asociativní i komutativní, říkáme, že okruh je *asociativní* a *komutativní*.

V každém okruhu platí distributivní zákony i pro rozdíl, tj.

$$a(b - c) = ab - ac, \quad (b - c)a = ba - ca. \quad (2)$$

Z 2.1.2.1. (6) totiž plyne

$$c + (b - c) = b.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost zleva prvkem a a pak na levé straně použijeme prvý z distributivních zákonů (1), dostaneme

$$ac + a(b - c) = ab.$$

Odtud, opět podle 2.1.2.1.(6), plyne prvá z rovností (2).

2. *Každá Abelova grupa G je aditivní grupou některého okruhu*. Stačí předpokládat, že grupovou operaci zapisujeme aditivně a pak zavést v G *nulové násobení*, tj. položit

$$ab = 0$$

pro libovolné a a b z G. Distributivní zákon (1) zřejmě platí. Tento *zerový okruh* s aditivní grupou G je zřejmě asociativní a komutativní. Zerové okruhy hrají v teorii okruhů stejnou roli jako Abelovy grupy v teorii grup.

Prvým příkladem nezerového asociativního a komutativního okruhu je *okruh celých čísel*. Příkladem asociativního, ne však komutativního okruhu je *okruh čtvercových matic n-tého stupně* ($n \geq 2$) s reálnými prvky.

Nakonec uvedeme jeden příklad neasociativního okruhu. Je to *okruh vektorů trojrozměrného Eukleidova prostoru*, kde operacemi jsou obvyklé skládání vektorů a vektorový součin. Snadno ověříme, že tento součin není ani asociativní, ani komutativní, se sčítáním však souvisí distributivní zákony (1).

V tomto okruhu platí pro každé tři vektory a, b, c

$$a^2 = 0 \quad (3)$$

a *Jacobiho identita*

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0, \quad (4)$$

Poznamenejme, že z (3) plyne *antikomutativnost*

$$ba = - ab.$$

Protože totiž

$$a^2 = b^2 = (a + b)^2 = 0,$$

platí

$$0 = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba.$$

3. Každý okruh, který vyhovuje vztahům (3) a (4), se nazývá *Lieův okruh*. Lieovy okruhy tvoří důležitou třídu obecně neasociativních okruhů, patří k nim však i všechny zerové okruhy.

Mezi asociativními a Lieovými okruhy je tato zajímavá souvislost:

Je-li R libovolný asociativní okruh, pak při zachování aditivní grupy okruhu a záměně operace násobení operací alternace

$$a \circ b = ab - ba,$$

dostaneme Lieův okruh $R^{(-)}$.

Nejprve ověříme platnost distributivních zákonů. Ověřme třeba jen prvý ze zákonů (1):

$$a \circ (b + c) = a(b + c) - (b + c)a = ab + ac - ba - ca = (ab - ba) + (ac - ca) = a \circ b + a \circ c.$$

Množina R s operacemi sčítání a alternace je tedy okruhem. Označme ji $R^{(-)}$. Zbývá prověřit platnost vztahů (3) a (4).

$$a \circ a = aa - aa = 0,$$

$(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = (ab - ba)c - c(ab - ba) + (bc - cb)a - a(bc - cb) + (ca - ac)b - b(ca - ac) = 0.$

Okruh $R^{(-)}$ je tedy Lieovým okruhem.

4. *Ponecháme-li v asociativním okruhu R jeho aditivní grupu beze změny a operaci násobení zaměníme symetrizující operací*

$$a\ .\ b = ab + ba,$$

dostaneme okruh $R^{(+)}$*, v němž pro libovolné prvky a, b platí*

$$a\ .\ b = b\ .\ a, \quad (5)$$

$$[(a\ .\ a)\ .\ b]a = (a\ .\ a)\ .\ (b\ .\ a). \quad (6)$$

Nejprve ověříme alespoň prvý z distributivních zákonů (1):

$$a\ .\ (b + c) = a(b + c) + (b + c)a = ab + ac + ba + ca = (ab + ba) + (ac + ca) = a\ .\ b + a.\ c.$$

Dále dokážeme, že platí (5) a (6)

$$a\ .\ b = ab + ba = ba + ab = b\ .\ a,$$

$[(a\ .\ a)\ .\ b]\ .\ a = [(aa + aa)b + b(aa + aa)]a + a[(aa + aa)b + b(aa+ aa)] = aaba + aaba + baaa + baaa + aaab + aaab +abaa +abaa = (aa + aa)(ba + ab) + (ba + ab)(aa + aa) = (a\ .\ a)\ .\ (b\ .\ a)$.

Každý okruh, pro jehož prvky platí (5) a (6), se jmenuje *Jordanův okruh*. Obecně je neasociativní. K Jordanovým okruhům však patří všechny asociativní a komutativní okruhy.

5. *Ve všech okruzích R je roven nulovému prvku každý součin, který má alespoň jeden nulový faktor. Jinak řečeno*

$$a\ .\ 0 = 0\ .\ a = 0 \quad (7)$$

pro všechny prvky a v okruhu R.

D ů k a z: Je-li *x* libovolný pomocný prvek okruhu R, je vzhledem k (2)

$$a\ .\ 0 = a(x - x) = ax - ax = 0.$$

Jsou-li a, b libovolné prvky nějakého okruhu R, platí

$$(-a)b = a(-b) = -ab, \quad (8)$$

$$(-a)(-b) = ab. \quad (9)$$

Opravdu

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0\ .\ b = 0,$$

a stejně ověříme druhou polovinu rovností (8). Užitím (8) pak dostaneme

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab,$$

čímž je dokázána i rovnost (9).

6. Tvrzení obrácené k tvrzení vyjádřenému rovnostmi (7), které platí pro číselné okruhy, obecně neplatí. Existují okruhy, v nichž jsou *dělitelé nuly*, tj. takové nenulové prvky a, b, jejichž součin je roven nulovému prvku

$$ab = 0.$$

Vedle všech zerových okruhů jsou to např. okruhy matic. Mluvili jsme již o okruhu reálných čtvercových matic. Je-li R libovolný okruh, lze obecně studovat všechny možné čtvercové matice n-tého stupně s prvky z R. Definujeme-li obvyklým způsobem sčítání a násobení matic, dostaneme, jak se snadno ověří, okruh, který je dokonce asociativní, je-li asociativní výchozí okruh R. Nulovým prvkem tohoto okruhu je nulová matice sestavená z nulových prvků. Tento okruh se nazývá *úplný okruh matic n-tého stupně nad okruhem R* a označujeme ho R_n.

Je-li $n \geq 2$ a okruh R neobsahuje pouze nulový prvek, existují v úplném okruhu matic R_n dělitelé nuly.

Je-li totiž a nenulový prvek z R, nerovná se žádná z matic

$$\begin{pmatrix} a\ 0 \dots 0 \\ 0\ 0 \dots 0 \\ \dots . \dots \dots \\ 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 00 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \dots 00 \\ 0 \dots 0a \end{pmatrix}$$

nulové matici, ale jejich součin je nulovou maticí.

Jiným příkladem okruhů obsahujících dělitele nuly jsou *úplné okruhy funkcí*. Mějme libovolnou množinu M a libovolný okruh R. Utvořme množinu všech možných *funkcí* na M, jejichž hodnoty jsou v R, tj. všech možných zobrazení f množiny M do okruhu R. Obraz prvku $x \in M$ při zobrazení f označíme teď $f(x)$. Definujeme-li sčítání a násobení funkcí jako obvykle rovnostmi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x),$$

tj. sčítáním a násobením hodnot daných funkcí pro všechna x z M, stane se tato množina funkcí okruhem. Není těžké ověřit, že jsou splněny všechny požadavky definice okruhu a že okruh funkcí bude asociativní nebo komutativní, bude-li asociativní nebo komutativní již výchozí okruh *R*.

Sestrojený okruh nazýváme *úplný okruh funkcí nad M* s hodnotami v okruhu *R*. Je-li *M* množina bodů číselné osy a *R* množina všech reálných čísel, je náš okruh obyčejným okruhem všech reálných funkcí reálné proměnné.

Každý úplný okruh funkcí s hodnotami v okruhu R nad množinou M obsahující alespoň dva prvky, má dělitele nuly, jestliže R obsahuje alespoň jeden nenulový prvek.

Nulovým prvkem je v tomto okruhu *nulová funkce*, identicky (tj. pro všechna $x \in M$) rovná nulovému prvku. Rozložíme-li množinu *M* na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny *A* a *B*, existují zřejmě dvě takové nenulové funkce *f* a *g*, že *f* je rovna nulové funkci na *A* a *g* na *B*. Součin *fg* je zřejmě nulovou funkcí.

7. Asociativní komutativní okruh, který neobsahuje dělitele nuly, se nazývá *obor integrity*. Sem patří speciálně všechny číselné okruhy. Následující konstrukcí můžeme získat další důležité příklady oborů integrity.

Je-li *R* libovolný asociativní a komutativní okruh, lze studovat všechny *polynomy*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad n \geq 0,$$

neurčité x s koeficienty $a_0, a_1, ..., a_n$ z *R*; je-li $a_n \neq 0$, je *n stupněm* polynomu. Definujeme-li sčítání a násobení, dostaneme okruh, o čemž se lze snadno přesvědčit. Tento okruh se nazývá *okruh polynomů R[x]* neurčité *x* nad okruhem *R*. Také tento okruh je asociativní a komutativní. Nulovým prvkem tohoto okruhu polynomů je polynom, jehož všechny koeficienty jsou rovny nulovému prvku.

Analogicky definujeme okruh $R[x_1, x_2, ...x_n]$ libovolného konečného počtu neurčitých. Je to prostě okruh polynomů neurčité x_n nad okruhem $R[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$. Lze mluvit i o okruhu polynomů libovolné nekonečné množiny neurčitých nad *R*, předpokládáme-li, že každý konkrétní polynom závisí jen na konečně mnoha z těchto neurčitých.

8. Nad libovolným asociativním a komutativním okruhem *R* lze brát nejen polynomy, ale i (formální) *mocninné řady*.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \quad (10)$$

neurčité x. Definice operací rozšíříme bez obtíží z polynomů na mocninné řady:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)\, x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \,.\, \sum_{l=0}^{\infty} b_lx^l = \sum_{m=0}^{\infty} c_mx^m, \text{ kde}$$

$$C_m = \sum_{k+l=m} a_kb_l.$$

Stejně jako u polynomů zjistíme, že tím dostaneme asociativní a komutativní okruh, zvaný *okruh mocninných řad* neurčité x nad okruhem R. Označíme ho $R\{x\}$. Stejně jako u polynomů lze i u mocninných řad přejít nejprve k okruhům mocninných řad libovolného počtu neurčitých a pak i k okruhům mocninných řad s libovolnou nekonečnou množinou neurčitých. V tomto případě je účelné požadovat, aby každá mocninná řada obsahovala jen konečný počet neurčitých.

Je-li R oborem integrity, je i každý okruh mocninných řad nad R oborem integrity.

Tvrzení stačí dokázat pro okruh $R\{x\}$ mocninných řad jedné neurčité. Řekneme-li, že n je nejnižší stupeň mocninné řady (10), když

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0,\ a_n \neq 0,$$

má každá nenulová řada určitý *nejnižší stupeň*. Protože R neobsahuje dělitele nuly, je nejnižší stupeň součinu dvou řad roven součtu jejich nejnižších stupňů. Odtud už plyne naše tvrzení.

9. Pojem *jednotkového prvku*, který jsme zavedli v 2.1.2.1.(4) pro grupy, lze ovšem přenést i na grupoid nebo okruh R. Je to takový prvek 1, že pro všechna $a \in R$ je

$$a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a.$$

Existuje-li v okruhu R jednotkový prvek, je jen jeden. Okruh však nemusí mít žádný jednotkový prvek (jako např. okruh sudých čísel).

Každý Lieův okruh (viz 2.1.2.2.(3)), *který neobsahuje jen nulový prvek, je okruhem bez jednotkového prvku*.

K důkazu předpokládejme, že Lieův okruh L obsahuje jednotkový prvek 1. Položíme-li a = 1, plyne z (3) $1^2 = 0$, takže 1 = 0, a to znamená, že okruh L obsahuje jen nulový prvek.

Je-li R okruh s jednotkovým prvkem, mají jednotkový prvek všechny okruhy matic nad R, všechny okruhy funkcí s hodnotami v R, a je-li R asociativní a komutativní, i okruhy polynomů a mocninných řad libovolného počtu neurčitých nad R.

Jednotkovým prvkem okruhu matic je jednotková matice, v jejíž hlavní diagonále jsou jednotkové prvky a ostatní prvky jsou nulové. Jednotkovým prvkem okruhu funkcí je funkce identicky rovná 1. Jednotkovým prvkem okruhu polynomů (i okruhu mocninných řad) je polynom (mocninná řada), jehož všechny koeficienty jsou nulové prvky s výjimkou koeficientu a_0, který je roven 1.

10. Každý okruh je vzhledem k násobení grupoidem nebo, je-li asociativní, pologrupou. Obsahuje-li okruh alespoň jeden nenulový prvek, nemůže být grupou, což plyne z vlastnosti násobení (7). Může se však stát, že všechny nenulové prvky okruhu tvoří grupu vzhledem k násobení. Takovýto okruh, který je ovšem nutně asociativní, se nazývá *těleso* a grupa jeho nenulových prvků *multiplikativní grupa* tohoto tělesa.

Tělesu s komutativním násobením říkáme *komutativní těleso* a s nekomutativním násobením *nekomutativní těleso*. Základními příklady komutativních těles jsou těleso racionálních čísel, těleso reálných čísel a těleso komplexních čísel.

Z definice tělesa plyne, že *neobsahuje dělitele nuly*. *V každém tělese je jednotkový prvek*, neboť jednotkový prvek multiplikativní grupy je v důsledku rovnice (7) jednotkovým prvkem tělesa. Konečně *v každém tělese má každá z rovnic*

$$ax = b,\ ya = b,\ \text{kde } a \neq 0 \quad (11)$$

právě jedno řešení.

Je-li totiž $b \neq 0$, má každá z rovnic (11) jednoznačně definovaná řešení v multiplikativní grupě tělesa a nulový prvek nemůže být řešením žádné z nich. Je-li $b = 0$, je nulový prvek řešením obou rovnic (11) a žádná jiná řešení nemohou existovat, neboť těleso nemá dělitele nuly.

Obráceně, *asociativní okruh R je tělesem, má-li v něm každá z rovnic tvaru* (11), *pro libovolné* $a \neq 0$ *a libovolné b alespoň jedno řešení*.

Nejdříve dokážeme, že R neobsahuje dělitele nuly. Je-li $a \neq 0$ i $b \neq 0$, ale $ab = 0$, označíme e jedno z řešení rovnice $ax = a$ a c jedno z řešení rovnice $bx = e$.

Pak

$$0 = 0 \,.\, c = abc = ae = a,$$

což je spor s předpokladem.

Z toho plyne, že množina nenulových prvků okruhu R tvoří multiplikativní pologrupu, která je dokonce grupou, neboť pro $a \neq 0$, $b \neq 0$ mají rovnice (11) řešení v této množině, a to jediné, jak plyne z toho, že v R nejsou dělitelé nuly. Je-li totiž $ax_1 = ax_2$ a $a \neq 0$, je $a(x_1 - x_2) = 0$, takže $x_1 = x_2$. Tím je věta dokázána (Kuroš, 1968).

2.2 Tvořivost

2.2.1 Problematika teorie výchovy k tvořivosti

Tvořivost zaujímá v současném výchovně vzdělávacím procesu významné místo. Pojetí výchovy k tvořivosti je zaměřeno na rozvoj potenciálu tvořivosti žáků. Vychází z poznatků současné psychologie a pedagogiky o rozložení tvořivosti v lidské populaci a o možnostech jejího dalšího rozvíjení. Představuje tak ucelený komplex cílů, metod, forem a strategií vyučování, které se zaměřují na rozvoj tvořivosti žáků a na následné formování jejich tvořivé osobnosti. Žák je v průběhu vzdělávání vystaven působení celé řady faktorů ovlivňujících kvalitu jeho výchovy a vzdělávání. Co se týče školy, nejvýznamnějším faktorem vždy byla, je a bude osobnost učitele. Jestliže společnost očekává od školy absolventy nejen vzdělané, ale i tvořivé, je z tohoto důvodu tvořivost očekávána především od učitele a jeho práce (Petrová, 1999).

Podle Mirona a Miloty Zelinových (1990) je výchova pro budoucnost prvním důvodem, proč se tvořivostí zabývat. Čím lépe se připraví mladí lidé na plnění potřebných požadavků, tím lépe pro ně samé i pro společnost, ve které budou žít.

Druhým důvodem, proč se systematicky věnovat tvořivosti, je důležitost této otázky pro vědecký výzkum. Nejen pedagogové, ale též filozofové a psychologové dospěli k závěru, že fenomén tvořivosti je v mnoha směrech velmi významným činitelem. J. P. Guilford, tehdejší předseda americké psychologické společnosti, se svým vystoupením v roce 1950 zasadil o počátek obrovského zájmu o psychologii tvořivosti. Vystoupil s myšlenkou, že tehdejší psychologie na jedné straně přeceňovala význam inteligence, na straně druhé podceňovala, nebo si přinejmenším málo všímala tvořivosti. Poukázal na to, že právě tvořivost je jednou z nejvyšších kognitivních funkcí člověka. Cenná je zejména proto, že směřuje k tvorbě nového, pro člověka a lidstvo užitečného, zatímco klasická inteligence vedla člověka v podstatě k přizpůsobování se, k reprodukci práce a sebe sama. V současné době se téměř na celém světě konají školení, kurzy, výcviky v tvořivosti, tvořivost se zařazuje do škol jako samostatný předmět, vypracovávají se učebnice a programy, ve kterých je základním požadavkem rozvíjení tvořivosti, zpracovávají se nové metodické příručky, ve kterých se uplatňuje kreativizace člověka. Pokud se jedná o vědecký výzkum, za východiska moderní teorie tvořivosti u nás lze pokládat zejména práci J. Hlavsy, jeho knihu Psychologické problémy výchovy k tvorivosti (Praha, SPN 1981) a knihu Psychologické základy teórie tvorby (Praha, Academia 1985). Dalším zásadním, do detailu propracovaným příspěvkem k rozvoji tvořivosti v praxi je kniha Tvořivé vyučování od I. Lokšové a J. Lokši (Praha, Grada 2003), Rozvoj tvorivosti detí a mládeže od Mirona a Miloty Zelinových (Bratislava, SPN 1990) a Tvořivost v teorii a v praxi od A. Petrové (Praha, Vodnář 1999).

Třetím důvodem, proč se zabývat tvořivostí, je požadavek praxe. Člověk se nemůže vzdělávat nebo všestranně rozvíjet starými metodami, ani pomocí starého obsahu. Reforma školství zahrnuje změnu školních výchovně-vzdělávacích systémů, a to inovaci, modernizaci a aktualizaci obsahu vzdělávání a výchovy a inovaci metod, forem a způsobů vyučování a výchovy dětí a mládeže. Inovované metody musí obsahovat rozvíjení tvořivosti, která přináší zvýšení aktivity a iniciativy žáků.

Čtvrtým důvodem, proč je důležité se tvořivostí profesionálně, intenzivně a systematicky zabývat, je důvod lidsko-společenský. Vědecké studie a praxe dokazují (Edison, manželé Curieovi, Einstein, apod.), že v tvořivé práci nachází člověk svůj smysl života, seberealizaci a štěstí. Tvořivost probouzí v člověku pocit autentičnosti, samostatnosti a činorodosti, produkuje ale také city, touhy a cíle. Tvořivý člověk je odolnější vůči stresu a frustraci, zejména tehdy, když si osvojí správný životní styl. Ten se vyznačuje nejen tvořivým myšlením, ale též preferencí pozitivních hodnot, aktivitou, odvahou, hledáním a objevováním.

2.2.1.1 Podstata tvořivosti

Sternberg, Ohara, Lubart (1997) rozumí pojmu tvořivost jako investici organizace nebo jednotlivce do šesti rozvojových zdrojů. Těmi jsou vědomosti, intelektuální schopnosti, styly myšlení, motivace, osobnost a prostředí. Jejich použití při realizaci tvůrčí činnosti je podmínkou úspěchu v rozvoji kreativity. Každá komplexní lidská činnost se uskutečňuje a rozvíjí v šesti fázích: vize, tvorba, komunikace, inspirace, stabilizace, realizace. Nedostává-li se člověku každé z těchto fází kompetentně a tvořivě, stává se jednostranným a méně efektivním (Robbinsová, 1995).

Trend vývoje teorie tvořivosti lze sledovat od nejstarších psychoanalytických teorií, které chápaly tvořivost jako funkci ega, přes modely spojené s naučeným chováním v behaviorálních teoriích a tvarovou teorii, až k současným systémovým přístupům slučitelným se vznikajícími počítačovými vědami, jak je rozvíjí např. Wagner (1996) nebo Bond, Otterson (1998). Výsledky některých průzkumů prokazují, že odpovědi respondentů na základě metody generování myšlenek na počítači pomocí softwaru byly zřetelně tvořivější než odpovědi lidí při řešení týchž problémů pomocí klasické metody „tužka a papír“.

Teoretické přístupy k vymezení pojmu tvořivost se liší. Z analýzy jednotlivých definic tvořivosti je ale zřejmé, že ve velké většině tvoří jejich základní komponenty originalita (nebo novost) a užitečnost. Tvořivost je podle Pietrasinski (1972) chápána jako aktivita, která přináší doposud neznámé a současně společensky hodnotné výtvory. Přídavné jméno tvořivý označuje nejen produkt, ale také proces, který k němu vede, společně s příznivými podmínkami nebo podnětným prostředím (tvůrčí záměr, kolektiv, apod.).

Kritéria novosti a užitečnosti se určují na základě dvou hledisek:

1. Z hlediska širšího, celospolečenského a historického kontextu – jedná se o objektivní nebo absolutní tvořivost, která přináší něco zcela nového, co je přínosem z pohledu doby a společnosti (např. objevy a vynálezy).
2. Z hlediska užšího, skupinového a momentálního kontextu – jedná se o subjektivní nebo relativní tvořivost ve vztahu k určité skupině, kde jednotlivec přišel na něco nového a užitečného dříve než ostatní (Musil, 1985).

Novost se obvykle posuzuje podle vzácnosti výskytu dané myšlenky, nápadu nebo řešení v určitém kontextu a k určitému sociálnímu prostředí. Užitečnost se hodnotí na základě společenské praxe.

Vzhledem k orientaci práce na rozvoj tvořivosti v prostředí školy bude v dalším textu akcentováno druhé hledisko.

2.2.2 Tvořivé vyučování

2.2.2.1 Koncepce tvořivého vyučování

Základem tvořivého vyučování je utváření podmínek pro rozvoj tvořivosti žáků, především pak předkládání různých podnětů k tvořivým činnostem ve výuce. To znamená uskutečnění didaktické analýzy obsahu učiva z hlediska možností rozvíjení tvořivosti a orientaci metodických postupů tak, aby žáci získávali poznatky vlastními aktivitami a prostřednictvím vyučovacích metod. Tvořivost představuje jistou dovednost, které se lze naučit, resp. kterou lze ve vyučování zdokonalovat. Pro tyto účely musí být žáci seznámeni s obsahem učiva a s tvůrčím postupem řešení učebních úloh.

Tento postup se musí naučit aktivně používat (nejdříve se naučí v matematice řešit úlohy určitého typu, až potom mohou vytvářet nová řešení daných úloh apod.).

Základní východiska rozvoje tvořivosti žáků ve vyučování shrnula například Jurčová (1989):

- Ve školní výuce se rozvoj tvořivosti chápe především jako formativní vliv na žáka.
- Tvořivý potenciál je možné úmyslným působením ovlivnit, předpoklady jedince k tvůrčí činnosti je možné posílit a rozvíjet.

Výchova k tvořivosti je možná a potřebná na všech věkových úrovních, nevyužití možností mladších dětí vytváří bariéry v jejich tvořivém vývoji v pozdějším období.

Tvořivost se může rozvíjet ve všech vyučovacích předmětech, i když každý z nich k tomu přispívá specifickým způsobem.

Stimulace rozvoje tvůrčího potenciálu žáků vyžaduje odbornou přípravu učitelů, kteří by se měli seznámit se základy psychologie tvůrčí činnosti, se znaky tvořivých úloh, s principy jejich tvorby, s metodami jejich aplikace atd.

Náročnost tvořivého vyučování vyžaduje vytvořit učitelům potřebný prostor a časové možnosti pro tvořivé činnosti se žáky. Zredukovat obsah učiva, který neadekvátním rozsahem často znemožňuje efektivněji využívat tvořivé vyučovací metody.

V rámci rozvíjení tvořivosti žáků ve vyučování je nutné respektovat fakt, že rozvoj jejich intelektuálních a tvořivých schopností neprobíhá stejným způsobem a stejným tempem. Každý žák tak potřebuje pro svůj tvůrčí výkon specifické podněty, které mohou podnítit jeho tvůrčí aktivitu a schopnosti.

Není možné efektivně rozvíjet tvořivost žáků bez všeobecných znalostí o vývoji psychiky jedince a o vývoji tvořivosti. Z hlediska vývojové psychologie začíná příchodem dítěte do školy období mladšího školního věku (6–11 let). V tomto období se stávají žáky prvního stupně základní školy a postupně si zvykají na nároky školy a školní práci. Získali už hodně poznatků, ale stále se musí mnohému naučit. Z pohledu vývoje psychických funkcí je možné mladší školní věk charakterizovat jako období základního rozvoje rozumových funkcí, doznívání citových funkcí a stabilizace motorových funkcí.

Z hlediska tvořivosti charakterizuje Hlavsa a kol. (1981) mladší školní věk jako období hravé, ale s vyšší intelektovou fantazijní a zážitkovou náplní. Typická je pro ně hra s pravidly, přijímání rolí a perspektiv druhého. Toto období je adekvátní pro rozvoj rozumových a tvořivých schopností, realizaci problémových přístupů ve výuce při řešení vhodně formulovaných úloh a příkladů. Samotnou tvořivost je možné používat a rozvíjet ve všech předmětech prvního stupně základní školy, vedle matematiky především v českém jazyce, ve výtvarné, hudební, a dramatické výchově. V tvořivých úkolech se relativně úspěšně a efektivně uplatňují cvičné problémy, asociační cvičení, interpretace obrázků, hádanky, hlavolamy, doplňování kreseb a vět.

Výzkum zaměřený na vývoj tvořivosti provedli ve Švédsku s dětmi ve věku 4–16 let Smith a Carlsson (1983, 1985, 1987). Výsledkem výzkumného projektu bylo mj. zjištění průběhu křivky vývoje tvořivosti. První rysy skutečné tvořivosti se objevují u dětí ve věku 5–6 let. Po této první tvůrčí fázi dochází k poklesu tvořivosti nástupem dítěte do školy (ve Švédsku v sedmi letech) a k novému zvýšení ve věku 10–11 let. Předpubertální věk kolem dvanácti let je opět obdobím snížené tvořivosti, které se současně projevuje zvýšenou úzkostí a obrannými strategiemi. K obnovení tvořivosti dochází pozvolna v období puberty mezi čtrnácti a patnácti lety a konečně k jejímu opětovnému nárůstu ve věku kolem šestnácti let, kdy se tvořivost postupně stabilizuje. Vrchol tvořivosti spojený s osvojením kognitivních schopností je u dětí ve věku 10–11 let. S těmito výsledky korespondují též poznatky a zjištění Hlavsy a kol. (1986), který poukazuje na pokles tvůrčí aktivity žáků po nástupu do školy mezi šestým a osmým rokem a na její další vzestup kolem deseti až jedenácti let. Období mladšího školního věku je tedy z hlediska zavedení aktivit zaměřených na rozvíjení tvořivosti žáků klíčové.

2.2.2.2 Metodika tvořivého vyučování

Metodika tvořivého vyučování zahrnuje účinný systém pracovních metod, forem a strategií učitele zabezpečující rozvoj tvořivosti žáka. Základní činností žáka ve škole je učit se. Z tohoto důvodu je možné efektivně rozvíjet jeho tvořivost právě ve vyučovacím procesu. Na základní škole má tvořivost žáků své vlastní zákonitosti. Žák neobjevuje a nevytváří hodnoty společenského či ekonomického významu. Jeho tvořivá činnost souvisí s obsahem učiva, s výchovně-vzdělávacími cíli a metodami. Má tedy spíše didaktický charakter. Důsledky vyplývající z tvořivé činnosti podněcují jeho touhu po poznání, snahu něco vytvořit, vyřešit zadaný problém (Lokšová, Lokša, 2003).

Podle Hlavsy a kol. (1986) lze za psychologickou metodu rozvíjení považovat psychologicky zdůvodněné uspořádání celé situace, přesně formulované instrukce, promyšlená cvičení a jejich následnou kontrolu. Z pedagogického hlediska je nutné začleňovat dané metody do celého výchovně-vzdělávacího systému, vytvořit odpovídající školní podmínky a dovednosti pedagogů, promyslet časový rozvrh a kombinace metod, ověřit přínos a úměrnost použitých metod.

Metodika rozvoje tvořivosti žáka v procesu tvořivého vyučování se neustále přetváří a doplňuje. V rámci této problematiky existuje několik názorů na dělení metod rozvíjení tvořivosti.

Lerner (1988) podává přehled metod tvořivého vyučování podle charakteru poznávané činnosti při osvojování učiva. Svoji pozornost zaměřuje též na učitele, který činnost žáků organizuje. Rozlišuje pět základních metod výuky:

1. informačně-receptivní metoda,
2. reproduktivní metoda,
3. metoda problémového výkladu,
4. heuristická metoda,
5. výzkumná metoda.

Tyto metody lze rozdělit do dvou skupin:

a) reproduktivní metody (1., 2.) – žáci si osvojují hotové poznatky a reprodukují je,
b) produktivní metody (4., 5.) – žáci získávají nové poznatky jako výsledek tvořivé činnosti.

Metodu problémového výkladu (3) lze zařadit do obou skupin.

2.2.2.3 Projektová metoda

Projektová metoda je považována za nejlepší metodu přibližující řešení reálných situací. Maňák (1998) definuje projektovou metodu jako komplexní praktický problém ze životní reality, plán konkrétní akce, činnosti, do níž se zapojují všichni žáci jedné nebo více tříd, nebo také celé školy, a to podle svých zájmů a předpokladů, metodu, která je zaměřena na řešení takových otázek, jež žáky zajímají.

Při této metodě jsou žáci vedeni k řešení komplexních problémových situací. Projektová metoda pochází z pragmatické pedagogiky, která chápe vzdělávání jako nástroj řešení problémů, s nimiž se člověk setkává v reálném životě. Za cíl si klade kvalitní vyučování komplexním přístupem, snaží se vyvarovat se poskytování pouhých útržkovitých poznatků, izolovaných od praktického života.

Pro řešení projektů je třeba:

- zvolit téma, které je žákům blízké a které odpovídá jejich zájmům, je úměrné jejich věku i úrovní předešlých vědomostí,
- motivovat žáky pro práci na projektu,
- rozvést daný nápad a téma a sestavit plán jednotlivých kroků,
- vytvořit skupiny pro jednotlivé úkoly a vybrat vedoucí skupin,
- stanovit cíl projektu a termín ukončení,
- zvolit metody, formy a prostředky práce, zdroje informací, způsob zpracovávání informací a jejich vyhodnocení,
- dokumentovat průběh a řešení projektu,
- vyhodnotit a zveřejnit výsledky. (Lokšová, Lokša, 2003)

Realizace projektu probíhá obvykle podle následujícího plánu (Maňák, Švec, 2003):

1. Stanovení cíle
2. Vytvoření plánu řešení
3. Realizace plánu
4. Vyhodnocení projektu

2.3 Strategie řešení

2.3.1 Problém

Dříve, než budeme diskutovat o tom, co je řešení úlohy, nějakého problému, musíme vymezit, co myslíme samotným problémem. Problém je v podstatě situace, která člověka konfrontuje, vyžaduje jeho rozhodnost a není pro ni z počátku známá cesta k řešení. V každodenním životě se setkáváme s celou škálou problémů, od jednoduchých po složité. Jednoduchým problémem může být nalezení nejlepší strategie, jak přejít ulici, až po složitější problém, jak sestavit nové kolo. Samozřejmě i přejití ulice nemusí být jednoduché v některých situacích (při návštěvě země, jakou je například Anglie). Podobné dennodenní situace řešíme obvykle podvědomě, aniž bychom si poznamenávali postupy, kterými bychom dospěli k řešení. Vědomými, a tím i zřejmými se naše metody a strategie řešení problému stávají v momentu, kdy se ocitáme mimo naše obvyklé prostředí. Zde naše obvyklé způsoby a zvyky řešení nefungují. Můžeme se ale vědomě přizpůsobit jiným metodám, abychom dosáhli svých cílů.

Hodně z toho, co děláme, je založeno na našich dřívějších zkušenostech. Výsledek se bude samozřejmě lišit podle úrovně každého jednotlivce. V situacích, ve kterých je požadováno najít výsledek daného problému, pátráme po předchozích zkušenostech ve snaze najít způsob řešení podobného problému, který jsme v minulosti řešili.

Když se žáci setkávají ve škole se stejnými běžnými problémy, jejich přístup se příliš neliší. Mají tendenci se vypořádat s problémy založenými na své minulé zkušenosti. Za domácí úkol dostávají úkoly podobné těm, které řešili ve škole týž den. Žák tak neřeší problém, pouze napodobuje nebo procvičuje řešení dřívějších problémů, se kterými se setkal. Opakování „dovednosti“ je užitečné pro získání dovednosti. Podobně tomu bude i se získáváním dovednosti řešit problémy. V práci proto budou předloženy problémy pro rozvoj tvořivého myšlení žáka.

Speciálně ve výuce matematiky se někdy setkáváme s uměle vytvořenými situacemi, které neřešíme v běžném životě. Lidé se většinou nezabývají např. úlohami o pohybu, směsích, apod. Též z historického hlediska bylo studium matematiky vždy považováno za tematické. Bez vědomého úsilí vzdělavatelů tomu bude i nadále. Můžeme měnit témata v sylabech v různém pořadí, ale stále to budou témata, která propojují spíše předměty než matematické postupy, a to není způsob, kterým většina lidí uvažuje. Dedukce v sobě zahrnuje široké spektrum myšlení.

Ve vyučování matematiky může být pro žáky studující matematiku výhodou už samotný fakt, že budou považovat řešení problému za cíl, ne za pouhý prostředek k němu. Řešení problému může být cesta, jak představit žákům krásu matematiky, ale může též vést ke sjednocení jejich matematických zkušeností do smysluplného celku. Smyslem takto vedené výuky je seznámit žáky s různými řešitelskými strategiemi a procvičovat s nimi jejich používání. Lze očekávat, že taková výuka ukáže žákům způsob, jak přistupovat k problémům a k jejich řešení. Dostatek času v praktikování tohoto způsobu vyučování by měl vést k dosažení cíle nejen v řešitelských strategiích matematických problémů, ale i pri řešení problémů každodenního života. (Tento přechod učení může být realizován představením řešitelských strategií v matematických situacích i v situacích běžného života.)

Učitelé by měli zaměřit svoji pozornost na to, co řešení problému je, jak využít řešení problému při výuce v matematice a jak by mělo být řešení problému prezentováno žákům. Řešení problému by měli chápat třemi odlišnými způsoby.

a) Řešení problému je předmět studia.
b) Řešení problému je přístup k určitému problému.
c) Řešení problému je způsob vyučování.

2.3.2 Strategie řešení problému

Existuje několik běžných strategií, které žáci prvního stupně mohou použít, aby vyřešili zadaný problém.

Mezi běžné řešitelské strategie problému patří:

- odhadni (obsahuje odhad a kontrolu, odhad a zlepšení),
- zinscenuj (obsahuje inscenaci a využití vybavení, pomůcek),
- nakresli (obsahuje nakreslené obrázky a diagramy),
- vytvoř seznam (obsahuje tabulku),
- mysli (obsahuje používané dovednosti).

1 Odhadni

Týká se dvou strategií: strategie *Odhadni a zkontroluj* a strategie *Odhadni a vylepši*. Strategie *Odhadni a zkontroluj* je jednou z nejjednodušších strategií. Každý žák může odhadnout výsledek. Jestliže dokáže též zkontrolovat, zda odhad vyhovuje podmínkám problému, dosáhl tohoto stupně. Jedná se o strategii, která v případě vyšších čísel v zadání úkolu často zabere spoustu času, protože vyžaduje hodně početních operací (například úlohu č. 1 *Slepice & koně* popsanou v odstavci 3.5.1 řeší numerickou metodou (a) pokus-omyl). Jestliže se objeví ještě složitější problémy, další popsané strategie se logicky stanou důležitějšími a efektivnějšími.

Strategie *Odhadni a vylepši* je o trochu náročnější, než strategie Odhadni a zkontroluj. Spočívá v tom, že žák svůj první nesprávný odhad vylepší po rozvaze dalším odhadem. Tento odhad není na rozdíl od předešlé strategie nahodilý, proto se žák dostane rychleji k řešení zadaného úkolu (například úlohu č. 1 *Slepice & koně* popsanou v odstavci 3.5.1 řeší numerickou metodou (a) řízený pokus-omyl).

2 Zinscenuj

Obsahuje dvě strategie, které jsou úzce propojeny, strategii *Zinscenuj* (dramatizace) a strategii *Použij vybavení*.

Žáci, zvláště ti mladší, si sami zahrají roli podle zadané slovní úlohy v rámci strategie *Zinscenuj*. Tato strategie může být efektivní pro demonstraci úkolu před celou třídou (například úlohu č. 1 *Slepice & koně* popsanou v odstavci 3.5.1 lze předvést pomocí deseti žáků. Ti mohou vztyčit dvě paže (počet nohou slepic) nebo přidat ke svým dvěma pažím dvě dolní končetiny (počet nohou koní). Problém může nastat, když je v zadání úlohy větší číslo, než je počet žáků ve třídě.

Strategie *Použij vybavení* je podobná strategii *Zinscenuj*. Žák může použít jakýkoli objekt (pomůcku, vybavení i spolužáka), který mu pomůže znázornit situaci pro vyřešení problému. Ze zkušenosti vyplývá, že by žáci měli být povzbuzováni používat tuto strategii. Když jsou o něco starší, může se jim zdát, že je tato strategie vhodná spíše pro malé děti. Dávají pak přednost použití strategie *Nakresli*. Existují ale problémy, kde použití strategie *Použij vybavení* je lepší, než strategie *Nakresli.* Žáci by proto měli být čas od času motivováni právě pro volbu této strategie.

3 Nakresli

Ve strategii *Nakresli* je používán obrázek. Tento obrázek by ale neměl být příliš propracovaný. Měl by obsahovat pouze dostatek detailů pro vyřešení problému (např. hrubý náčrt kružnice se dvěma čárkami je postačující pro znázornění slepice). Není zapotřebí podrobné znázornění zobáku, peří, apod. Všichni žáci by měli být povzbuzováni k používání této strategie, protože je lépe vede k pochopení problému a k pozdějšímu rozvíjení sofistikovanějších strategií.

Není vždy jednoduché rozpoznat, zda se jedná o kreslení obrázku či kreslení diagramu. Někdy je však tento posun zcela zřejmý (tak jako se v případu znázornění slepice strategie posunula od kreslení obrázku ke kreslení diagramu).

4 Vytvoř seznam

Vytvoření utříděného seznamu a tabulky patří mezi dva aspekty systematické práce. Většina dětí začíná chaotickým záznamem daného problému. Často bývá doprovázen několika výpočty na různých částech papíru. Dětem to pomáhá k rozvoji logické a systematické práce v matematice. Počátek organizování práce jim pomáhá též v procesu jejich zkoumání a objevování.

Existují různé způsoby pro použití tabulky. Žáci mohou do tabulky zapisovat čísla, aby vyřešili nějakou úlohu, nebo „fajfky“ a křížky, které se často používají v logických úlohách. Tabulky se také mohou stát efektivním způsobem pro nalezení číselné řady.

Jestliže má být použit *Uspořádaný seznam*, měl by být uspořádán podle přirozeného logického řádu. Nákupní seznam není obecně uspořádaný. Jednotlivé položky přibývají podle toho, co nás zrovna napadne. Trocha přemýšlení může vést k jeho uspořádání. Lze je provést např. tak, že dáme dohromady maso, zeleninu, nápoje, apod. Ještě více bychom seznam uspořádali, kdybychom všechny druhy masa, zeleniny seřadili podle abecedy. Někdo může vytvořit seznam položek podle postupného výskytu potravin na cestě v obchodě.

5 Mysli

Tato strategie se používá v širším kontextu s dalšími. Je to částečně proto, že uvedené strategie nejsou užívány osamoceně, ale v kombinaci s jinými strategiemi.

Strategie, které sem patří, se nazývají *Buď systematický*, *Drž se stopy*, *Hledej vzorce*, *Použij symetrii*, *Pracuj zpětně* a *Použij známé dovednosti*. Tyto strategie převyšují výše popsané strategie.

Strategie *Buď systematický* znamená vytvořit tabulku nebo uspořádaný seznam, ale znamená to též dodržovat určitý řád při práci tak, aby bylo snadné vracet se zpátky v případě potřeby. Jedná se o logickou práci a ujištění se, že nebyl vynechán žádný důležitý krok. Rozumí se tím rovněž sledování myšlenky, kam povede, spíše než pouhé přeskakování z místa na místo při hledání nápadů.

Je velmi důležité *držet se stopy* v práci. Skupina dětí byla pozorována při strategii *Zinscenuj problém*. Ke konci měla potíže jednoduše proto, že nebyla schopná se držet linie při tom, co právě prováděla. To znamená, že držení se stopy je důležité zejména pro strategie *Zinscenuj* a *Použij vybavení*. Důležité je též v mnoha dalších situacích. Žáci musí vědět, kde se beznadějně ztratili, nebo kde se mohou ztratit. Tato problematika nabývá na důležitosti zvláště v případech složitějších úloh, které vyžadují více kroků.

V mnoha ohledech je strategie *Hledej vzorce* to, o čem celá matematika je. Chceme vědět, jak spolu věci souvisí, jak jsou propojené, a to je mnohem jednodušší, když umíme nalézt vzorce. Vzorce činí věci jednoduššími, protože nám řeknou, jak se skupina předmětů bude chovat určitým způsobem. Když známe vzorce, můžeme mnohem lépe řídit a kontrolovat, co děláme (např. úlohu č. 1 *Slepice & koně* popsanou v odstavci 3.5.1 řeší numerickou metodou (b)).

Strategie *Použij symetrii* nám pomáhá redukovat stupeň obtížnosti problému. Například při hře piškvorků si musíme uvědomit, že jsou tři, ne devět způsobů, jak umístit první symbol. To okamžitě sníží počet možností pro hru a učiní ji jednodušší pro analýzu.

Strategie *Pracuj zpětně* je standardní strategie, která pouze vypadá, že má omezené použití. Jedná se totiž o mocnou zbraň, když je použita tak, jak má být použita. Nejvíce tuto strategii oceníme při hraní her. Často se totiž ukazuje, že má smysl se dívat, co se stane na konci hry a potom pracovat zpětně, tj. vrátit se k předešlým krokům, abychom zjistili, jaké tahy jsou ty nejlepší (například hra šachy, dáma a sudoku).

Strategie *Použij známé dovednosti* není obvykle uvedená na seznamu řešitelských strategií problémů, přestože je docela běžná. Princip spočívá v rozpoznání dovedností, které máme a které můžeme aplikovat pro daný problém (žák umí řešit soustavu rovnic o dvou neznámých, může tedy vyřešit úlohu č. 1 *Slepice & koně* popsanou v odstavci 3.5.1, $x + y = 10$, $2x + 4y = 26$).

Žákovské strategie se mohou rozvíjet dvojím způsobem:

- žákova schopnost používat strategie se rozvíjí zkušeností a praxí,
- strategie samy se stávají abstraktnějšími a složitějšími.

Ne všichni žáci se mohou rozvíjet výše uvedeným způsobem. Někteří žáci mohou přeskočit různá stadia. Když je pak žáku předložen zcela nový, neobvyklý problém, může se vracet k předešlému stadiu během řešení problému. Rozvoj žákových strategií můžeme pozorovat při znázorňování úkolu. V případě strategie *Nakresli* žáci často začínají s detailním znázorňováním problému. Postupně zjišťují, že není nezbytné zaznamenávat všechny detaily nebo barvy. Jejich obrázek se stává více symbolickým a obsahuje pouze nezbytné znaky (prase znázorňují jako kolečko a jeho nohy jako čtyři čárky). Potom si žáci začínají uvědomovat, že mohou předměty označovat tečkami nebo písmeny. Přesnější diagramy mohou být požadovány v geometrických úkolech, ale diagramy jsou užitečné v mnoha jiných úkolech bez geometrického obsahu. V případě strategie *Odhadni* se žáci posunou od strategie *Odhadni a zkontroluj* ke strategii *Odhadni a vylepši*. Zde je zřejmý rozvoj jednoduché strategie.

Všichni vědečtí pracovníci v oblasti matematiky používají strategii *Odhadni a zkontroluj*. Jejich odhady jsou nazývány domněnkami, jejich kontroly důkazy. Zkontrolovaný odhad se stává theoremem. Řešení problému žáky je velmi blízké matematickému výzkumu. Jediný rozdíl mezi nimi spočívá v tom, že ve škole učitel zná řešení problému. Ve výzkumu nikdo nezná řešení, takže kontrola řešení nabývá na své důležitosti. (http://nzmaths.co.nz/)

Strategiemi řešení se zabývá Novotná (2000). Autorka uvádí, že při analýze strategií je třeba zohlednit tyto pohledy:

„Řešení bylo nalezeno náhodně nebo po získání vhledu do struktury úlohy.

Řešení je založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce/postupu, nebo naopak na porozumění struktuře úlohy do té míry, že řešitel je dokonce schopen převést ji na jednu (nebo sled) jednodušší úlohu.

Řešitel použil aritmetický nebo algebraický aparát.

Při stejném zadání může řešitel volit různé zpracování zadaných vztahů. Tento pohled nemá „antagonistický" charakter."

(Novotná, 2000, s.37)

Mezi zahraniční autory, kteří se zabývají řešením problému, patří W. Goodfriend (www.study.com Types of Problems & Problem Solving Strategies). Ve svém článku uvádí, že pedagogická psychologie rozděluje problémové úlohy do dvou různých kategorií. První kategorie spočívá v tom, jestli je daný úkol jednoznačně nebo nejednoznačně definován. Jednoznačně definovaná úloha je ta, která má jasný cíl nebo řešení, tím pádem i řešitelské strategie. Nejednoznačně definovaná úloha je nejasná, zavádějící, a nemá tedy ani jasné řešitelské strategie. Druhá kategorie spočívá v rozlišení problémových úloh na stereotypní a nestereotypní úlohy. Tak, jak názvy napovídají, stereotypní úloha je po řadě opakování známá a vyžaduje naučené způsoby řešení. Oproti tomu nestereotypní úloha je více abstraktní a vyžaduje řešitelské strategie, se kterými se žák doposud nesetkal. Stereotypní úkoly se mnohdy používají ve škole: zapamatování si jednoduchých faktů, jak sčítat a odčítat, atd. Učitel by však neměl zapomínat na zadávání nestereotypních úloh, které vyžadují kritické myšlení žáka a právě objevování jeho nových řešitelských strategií.

3 Metodologie

V této kapitole se zaměříme na stanovení cíle výzkumu, formulaci výzkumných otázek, metody sběru dat a charakteristiku výzkumného vzorku. Výzkum je svou povahou výzkumem kvalitativním, ve kterém je autorka práce zapojena jako pozorovatel, na rozdíl od předvýzkumu, kde působila jako učitel. Vzhledem k tomu, že se matematický obsah týká slovních úloh, bude součástí této kapitoly též jejich didaktická analýza.

3.1 Cíl výzkumu

Cílem práce je ověřit možnosti rozvoje tvořivosti u žáků ve věku 10-11 let prostřednictvím řešení vhodně zvolených matematických úloh. Uvedený věk odpovídá žákům 4. ročníku a byl zvolen s ohledem na zjištění zahraničního výzkumu jako období zvýšené tvořivosti (blíže odstavec 2.2.2.1).

3.2 Formulace výzkumných otázek

K naplnění uvedeného cíle byl připraven a realizován pedagogický výzkum, který umožnil najít odpovědi na následující výzkumné otázky:

1) Vede předkládání a následné řešení vhodně zvolených matematických úloh ke změnám v řešitelských strategiích žáků?
2) Dochází řešením těchto úloh i ke změně v četnosti použití řešitelských strategií žáků?
3) Dochází řešením těchto úloh u žáků i ke změnám v oblasti dimenze prožívání a sebepojetí jejich školní úspěšnosti?

3.3 Metody sběru dat

Pro kvalitativně orientovaný výzkum byly vybrány následující metody sběru dat:

- participační (účastnické) pozorování,

- neformální rozhovory se žáky po hodinách výuky,
- práce vybraných žáků (artefakty),
- atomární analýza žákovských strategií (testy v kapitole 5),
- srovnávací analýza (výše uvedených testů),
- psychologické testy SUPSO 1-2 a SPAS 1-2 (popsáno v odstavci 5.11).

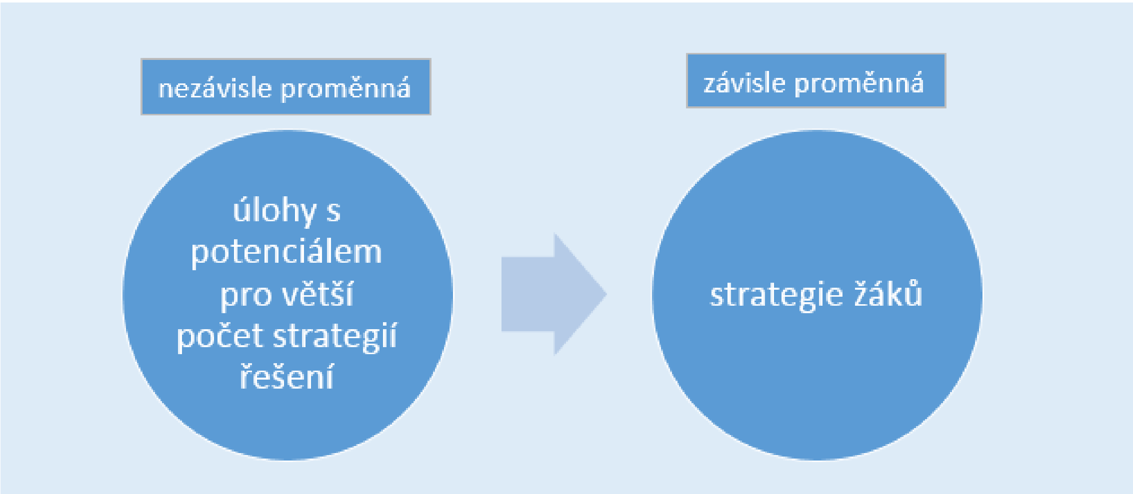
Participační pozorování jsou podle (Gavora, 2000) podrobné zápisy o lidech a osobách. Výzkumník zaznamenává vše, co se chronologicky událo, jako nestranný pozorovatel. Nevyvozuje na počátku žádné závěry. Přesně určuje, co bude pozorovat a jaké jsou cíle jeho pozorování. Jeho záznam z pozorování je úplný, přesný a verbální, uvádí např. přesné citace výroků, popisuje situace. Terénní zápisy si pozorovatel obvykle zaznamenává na konci pozorování. Záznam terénních zápisů doplňuje o vlastní komentáře. Participační pozorování je dlouhodobé, trvá týdny nebo měsíce. Záměrem je, aby se pozorovatel sžil s prostředím, účastnil se aktivit pozorovaných osob. Pozorované osoby pak v dlouhodobém času výzkumu ztrácí zábrany a chovají se přirozeně a otevřeně. Participační pozorování se používá souběžně s jinými metodami, jakými jsou např. nestrukturované interview, sbírání artefaktů – listů, dokumentů, výtvorů zkoumaných osob.

Rozhovory jsou nedílnou součástí kvalitativně vedeného výzkumu. V provedeném výzkumu jsem zvolila výhradně nestrukturované, neformální rozhovory, které jsem s žáky vedla po konci vyučování. Žáky jsem neoslovovala pouze já, přicházeli za mnou sami. Z těchto rozhovorů je pořízen popis s cílem získat doplňující informace nebo poznámky žáků.

Mezi artefakty, které jsem v rámci výzkumu sbírala, patří vybrané práce žáků, kde bylo možné pozorovat rozvoj jejich řešitelských strategií. Jednalo se o úlohy podporující kreativitu a logické myšlení, které v období mezi testováním dostávali (detailněji popsáno v kapitole 3.5 Didaktická analýza slovních úloh).

Atomární analýza žákovských strategií je založena na myšlence atomizace řešení a myšlence komparativní analýzy. Experimentátor eviduje všechny jevy získaného materiálu (písemné práce žáků, videozáznamy). Jednotlivé jevy jsou vnímány jako myšlenkové kroky neboli atomy, které je možno pro přehlednost rozdělit na atomy statické a dynamické. Statickými atomy myslíme vše, co je napsáno, řečeno či viděno (číslice, slova, čárky, tečky, přeškrtnutí, úprava, zaváhání v odpovědi, tichá nesrozumitelná mluva, pohyb, atd.). Statickým atomům předcházejí atomy dynamické, které jsou smyslům experimentátora neviditelné. Jedná se o postup probíhající v hlavě žáků ještě před tím, než cokoliv napsali, řekli, udělali. Tyto atomy evidujeme na základě argumentace vycházející z důkladného prostudování materiálu. Všechny jevy jsou následně podrobeny důkladné analýze. Na závěr se experimentátor může pokusit o interpretaci řešitelského postupu a myšlení konkrétního žáka na základě svých zkušeností (Nuslová, 2010).

V přirozeném experimentu lze obtížně kontrolovat všechny podmínky, které mohou ovlivnit výsledek. Řešením je technika laboratorního experimentu. Spočívá v tom, že například dvě srovnatelné skupiny lidí umístíme do stejných podmínek. Jednu budeme chápat jako experimentální skupinu, druhou nazveme kontrolní skupinou. Změříme hodnotu závisle poměnné v obou skupinách. Pak necháme na experimentální skupinu působit faktor (nezávisle proměnnou), jehož vliv chceme pozorovat. Po ukončení experimentu opět stejným způsobem změříme závisle proměnnou u obou skupin. V provedeném experimentu (kap. 5) pracujeme s proměnnými „úlohy s potenciálem pro větší počet strategií řešení“ a „strategie žáků“.



Graf 1 – Nezávisle proměnná a závisle proměnná

3.4 Cílová skupina (Charakteristika výzkumného vzorku)

Výzkumný soubor tvoří žáci čtvrtého ročníku 4. základní školy v Plzni.

4. základní škola se nachází na Severním Předměstí Plzně v části zvané Košutka, ve vnitrobloku domů stranou od hlavních dopravních tepen, v bezprostřední blízkosti zastávek městské hromadné dopravy. Škola je vystavěna jako bezbariérová, s možností integrace handicapovaných žáků. Jde o plně organizovanou státní školu se všemi postupnými ročníky, zpravidla po 2 až 4 paralelních třídách v ročníku. Provoz zahájila v roce 1990 a svým vybavením patří k nejmodernějším školám v Plzni. Materiálně technické a hygienické podmínky školy jsou hodnoceny jako nadstandardní. Od samotného počátku se škola zaměřuje na poskytování kvalitního základního vzdělávání pro všechny žáky s přihlédnutím k jejich individuálním možnostem. Nabízí rozšířenou výuku v anglickém jazyce a tělesné výchově. Pro sportovní činnost má škola výborné zázemí. Svým žákům škola poskytuje kromě základního vzdělání i bohatou nabídku zájmové činnosti.

Od 1. 9. 2007 probíhá výuka podle Školního vzdělávacího programu 4. základní školy. Jejím základním cílem je rozvoj žákovy osobnosti s přihlédnutím k jeho individuálním možnostem. Chce, aby každé z dětí zažilo ve škole pocit úspěchu, seberealizace, štěstí a uspokojení z vlastní práce. Na 1. stupni klade důraz především na zvládnutí techniky čtení jako nezbytného základu pro další studium. Pozorně vede žáky k osvojení správných návyků a dovedností uplatnitelných při učení i v běžném životě. V průběhu výuky jsou využívány formy a metody práce podporující aktivní vztah k učení, vzájemnou spolupráci žáků a tvořivost. Matematika pro 4. ročník je v rámci učebního plánu dotována 4 hodinami týdně.

Účastníci experimentu byli žáky 4. ročníku základní školy. Třídu navštěvovalo celkem 23 žáků, z toho 12 dívek a 11 chlapců. Třídní učitelkou byla paní Mgr. Lucie Círová. Žáky vedla od 3. ročníku a podařilo se jí s nimi navázat přátelský vztah. Její způsob vedení výuky je obecně kreativní. Mezi její oblíbené předměty patří především český jazyk a hudební výchova. Přestože matematika mezi její oblíbené předměty nepatří, ráda se zhostila změny ve své výuce matematiky, což kladně ocenila i celá řada jejích žáků.

3.5 Didaktická analýza slovních úloh

Výzkum vycházel z výsledků studie Michala Tabacha a Alexe Friedlandera z roku 2012 (Tabach, Friedlander, 2013). Jejich cílem bylo prozkoumat souvislost úrovně kreativity s růstem matematických znalostí žáků od 4. ročníku po 9. ročník. Z experimentu vyplynulo, že žáci 4. ročníku v izraelské škole vykazovali malou úroveň kreativity právě v souvislosti s úrovní matematických znalostí. Byla proto položena otázka, zda je možný rozvoj žáků v této oblasti. Nalezení odpovědi vyžaduje jejich sledování po určitou dobu.

Na uvedený výzkum jsem proto navázala experimentem, který proběhl v průběhu pololetí (leden 2014 – červen 2014) na vybrané základní škole v Plzni. Průzkumu se účastnilo 23 žáků 4. ročníku. Cílem experimentu bylo ověřit, zda jsou žáci 4. ročníku schopni najít různé způsoby řešení problému a jaké strategie při řešení použijí. Na začátku šetření (leden 2014) byl obdobně jako izraelským žákům i českým žákům předložen test se třemi úkoly. Úlohy byly modifikovány tak, aby byl zachován jejich matematický obsah a text současně odpovídal českému prostředí (uvádění ceny v Kč, jména dětí apod.). Na splnění každého úkolu měli žáci půl hodinu. Před zadáním testu byla vždy provedena analýza a priori, ve které byly hledány předpokládané řešitelské strategie žáků. Po provedení testu byla detailně zkoumána práce každého žáka a zaznamenána jeho řešitelská strategie. Provedení pretestu a posttestu (červen 2014) umožnilo sledovat posun řešitelských strategií žáků ze dvou pohledů – změna řešitelské strategie a četnost použití strategií. Výstupy byly srovnávány s výsledky studie izraelských autorů. V období mezi testováním žáci řešili každý týden v jedné vyučovací hodině 4 – 6 úloh zaměřených na rozvoj kreativity a logického myšlení. Žáci prezentovali své způsoby řešení a vedli diskusi nad způsoby řešení svých spolužáků. Na konci hodiny jim byly představovány i další možné řešitelské strategie. Následně bylo provedeno srovnání výsledků testů u žáků v experimentální skupině a ve skupině srovnávací, ve které výuka probíhala standardním způsobem.

V následujícím textu budou analyzovány všechny tři úlohy testu.

3.5.1 Úloha č. 1

Babička má na farmě slepice a koně. Dohromady mají 10 hlav a 26 nohou. Kolik slepic a kolik koňů je na farmě?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Žáci 4. – 9. ročníku izraelské školy používali celkem 15 řešitelských strategií (Tabach, Friedlander, 2013). Metody řešení úlohy Slepice & koně jsou tříděny do dvou kategorií, na numerické a algebraické. Každá kategorie je pak rozdělena na několik řešitelských strategií.

- Numerická metoda (a):

  Tato metoda je založena na metodě pokusu omylu. Žáci začínají počátečním odhadem. Jestliže se přímo nedostanou k cíli, následuje předtím několik dalších odhadů.

- Numerická metoda (b):

  Žáci hledají vzorce (postup) a odpovědi nalézají v numerických operacích.

- Numerická metoda (c):

  Žáci kombinují předešlé dvě metody.

Pro každou z těchto tří numerických metod mohou žáci (1) vycházet z počtu hlav jako konstanty a poté dopočítat odpovídající počet nohou, (2) vycházet z počtu nohou jako konstanty a dopočítat odpovídající počet hlav nebo (3) střídat obě metody. Identifikujeme tedy celkem devět numerických způsobů řešení.

- Algebraická metoda (a):

Tato metoda je založena na grafech funkcí. Žáci vyhodnocují dva grafy funkce v souřadnicovém systému.

- Algebraická metoda (b):

Žáci řeší rovnici s jednou neznámou.

- Algebraická metoda (c):

Žáci řeší soustavu rovnic o dvou neznámých.

Protože pro každou ze dvou posledních metod může neznámá reprezentovat počet hlav nebo počet nohou, identifikujeme celkem pět algebraických způsobů řešení.

Dále identifikujeme též pseudo-algebraickou metodu. Ta spočívá v přiřazení fixních hodnot k neznámým, provedení numerického výpočtu a nakonec odpovědi v symbolickém vyjádření. Tato úloha tedy dává prostor pro patnáct metod řešení.

Žáci 4. ročníku izraelské školy používali pouze numerické metody (a), (b). V závorkách jsou uvedena procenta žáků, kteří tímto způsobem řešili zadaný úkol (numerická metoda (a) – 75 % žáků, numerická metoda (b) – 25 % žáků).

- Numerická metoda (a1):

Žáci používají metodu pokusu omylu. Vycházejí z počtu hlav jako konstanty.

- Numerická metoda (a2):

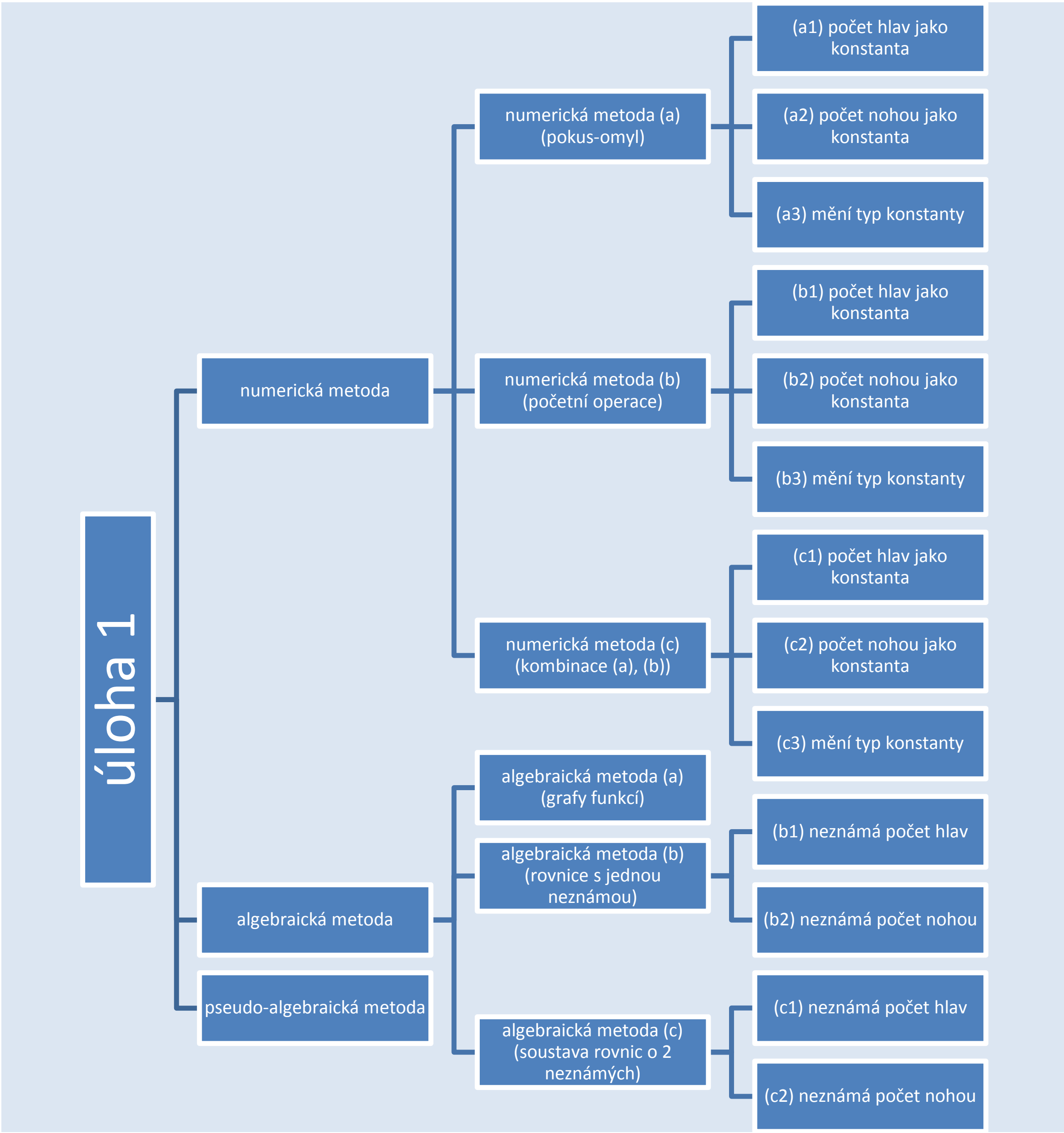
Žáci používají metodu pokusu omylu. Vycházejí z počtu nohou jako konstanty.

- Numerická metoda (b1):

Žáci používají metodu založenou na dedukci. Vycházejí z počtu hlav jako konstanty. Jestliže je 10 slepic, budou mít 20 nohou, takže bude zapotřebí ještě 26 – 20 = 6 nohou. Kůň má o dvě nohy víc než slepice, takže 6 : 2 = 3, což je počet koní. Počet hlav je stále stejný, proto vymění tři slepice za koně.

- Numerická metoda (b2):

Žáci používají metodu založenou na dedukci. Vycházejí z počtu nohou jako konstanty. Je 26 nohou, což znamená 13 párů nohou. Máme jen 10 hlav, takže 13 – 10 = 3 je počet zvířat se dvěma páry nohou (čtyři nohy).



Graf 2 – Strategie řešení úlohy 1

3.5.2 Úloha č. 2

Pepík měl loni kartu do Cinema City, za kterou zaplatil 500 Kč. Za každý film pak navíc zaplatil pouze 50 Kč. Franta neměl klubovou kartu, proto za každý film zaplatil 100 Kč. Během roku viděli Pepík i Franta stejné filmy a byli překvapeni, že každý z nich zaplatil stejnou částku. Kolik filmů každý z nich viděl tento rok?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Pokus se najít různé způsoby řešení.*

Žáci 4. – 9. ročníku izraelské školy využívali 4 řešitelské strategie k vyřešení zadaného úkolu. První tři řešitelské strategie (a – c) jsou tříděny jako numerické metody, zatímco řešitelská strategie (d) je považována za pseudo-algebraickou metodu řešení.

- Numerická metoda (a):

  Tato metoda je založena na systematickém postupném hledání. Je zajímavé, že si žáci nevybrali porovnat celkovou částku peněz, které zaplatil člen klubu Pepík s částkou, kterou zaplatil ne-člen klubu Franta. Na místo toho sledují rozdíl cen lístků, který odpovídá 500 Kč členského poplatku. Postupně tedy zapisují do řádků 50 (cena lístku Pepíka) a 100 (cena lístku Franty), dále 100 a 200, až se dostanou na desátý řádek 500 a 1 000.

- Numerická metoda (b):

  Tato metoda je založena na odhadu žáka. Odhadne např. 5 návštěv kina a počítá: Franta 100 . 5 = 500, Pepík 50 . 5 = 250; 250 + 500 = 750. Pepík zaplatil více. Zkusí tedy 15 návštěv kina: Franta 100 . 15 = 1 500, Pepík 50 . 15 = 750; 750 + 500 = 1 250. Pepík zaplatil méně. Žák tedy zkouší čísla mezi čísly 5 a 15, až se dostane k číslu 10: Franta 100 . 10 = 1 000, Pepík 50 . 10 = 500; 500 + 500 = 1 000.

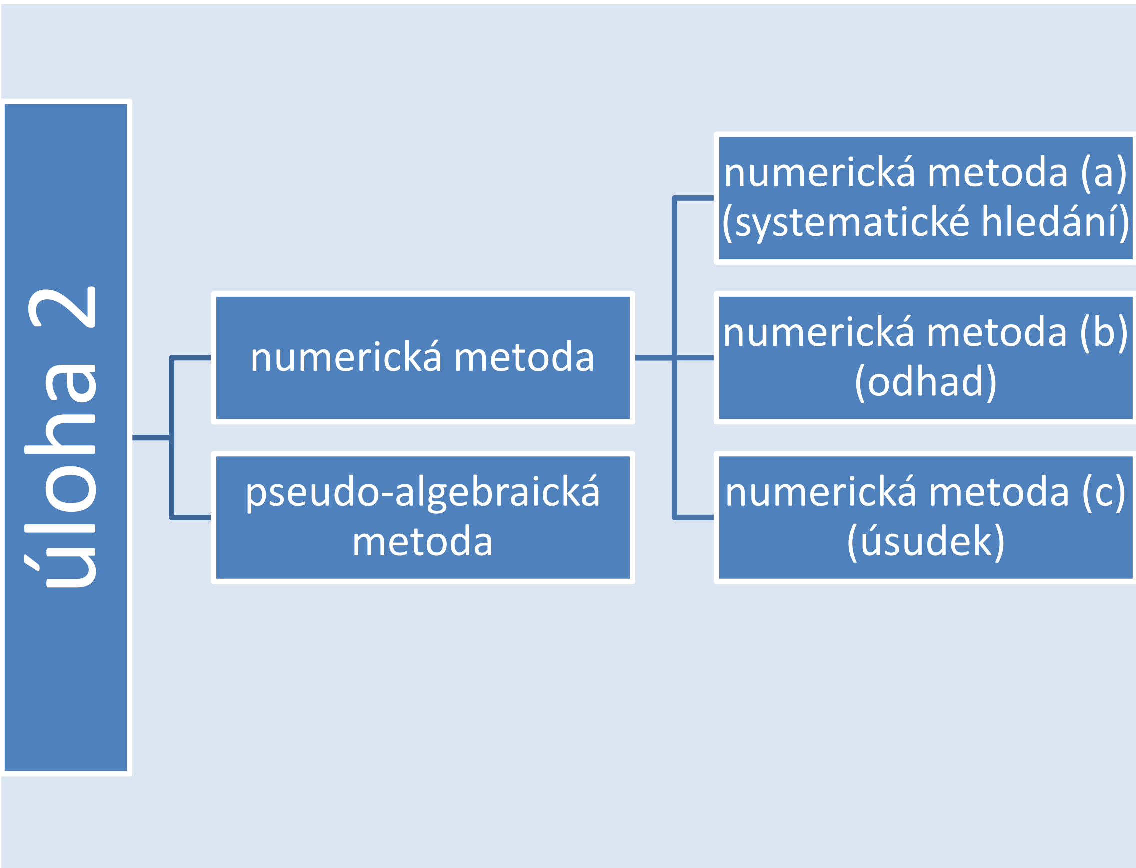
- Numerická metoda (c):

  Tato metoda ukazuje strategii založenou na úsudku. Je založena na rozdílu mezi částkami placenými za každý film a platbou člena klubu. Počet návštěv kina musí být sudé číslo, protože platba obou účastníků musí mít na konci dvě nuly. Člen klubu ušetří za každý film 50 Kč (100 – 50 = 50), takže každý z nich viděl 10 filmů (500 : 50 = 10).

- Pseudo-algebraická metoda (d):

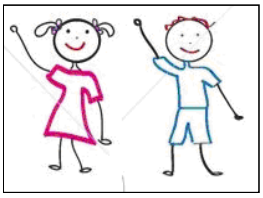
Tato metoda je charakterizována jako pseudo-algebraická, protože žák „připravil“ základ pro tvorbu symbolického modelu této situace. Poté, kdy uvede schéma částek za každou platbu, předvádí řadu numerických výpočtů, místo toho, aby pokračoval algebraicky ve vyřešení úlohy.

- x – počet filmů, které žák viděl.
- Roční vyjádření každého žáka: Pepík – 500 + 50 x; Franta – 100 x
- Nyní se pokouší dosadit za neznámou x, aby dostal stejné číslo.
- Náhrada 5: 500 + 50 . 5 = 750; 100 . 5 = 500
- Náhrada 10: 500 + 50 . 10 = 1 000; 100 . 10 = 1 000



Graf 3 – Strategie řešení úlohy 2

3.5.3 Úloha č. 3

52 let 49 let 21 let

Kolik let je mamince, Verunce a Michálkovi?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Žáci 4. – 9. ročníku izraelské školy využívali pět řešitelských strategií (Tabach, Friedlander, 2013). Ukázky a, b prezentují numerické metody, ukázka c prezentuje pseudo-algebraickou metodu, zatímco poslední dvě ukázky d, e prezentují algebraické metody. Žáci 4. ročníku využívali pouze metody a, b. V závorce je uvedeno procento izraelských žáků, kteří takto řešili zadaný úkol.

- První numerická metoda využívá čisté, systematické metody pokusu a omylu (a1):

Žáci vědí, že je dívka o tři roky starší než chlapec. Začínají s počátečním odhadem (1 + 4 = 5) a pokračují systematicky dál, než dosáhnou součtu 21. Počítají tedy 2 + 5 = 7; 3 + 6 = 9; 4 + 7 = 11; 5 + 8 = 13; 6 + 9 = 15; 7 + 10 = 17; 8 + 11 = 19 a nakonec 9 + 12 = 21. (20 % žáků)

- První numerická metoda řízeného pokusu omylu (a2):

Žáci vědí, že je dívka o tři roky starší než chlapec. Počítají např. 3 + 6 = 9. To je málo. Zkusí tedy 7 + 10 = 17. Stále málo. Pokračují 10 + 13 = 23. To je moc. Mohou tedy správně řešit 9 + 12 = 21. (10 % žáků)

- Druhá numerická metoda (b) je založena na několika předpokladech:

Žáci získají dvojnásobek věku maminky sečtením čísel vyjadřující věk maminky s dívkou a maminky s chlapcem. Poté odečítají věk chlapce s dívkou. (70 % žáků)

$(52 + 49 – 21) : 2 = 40$

$52 – 40 = 12$

$49 – 40 = 9$

Další popisované metody používali žáci vyšších ročníků.

- Pseudo-algebraická metoda (c):

Žáci označují věky písmeny a píší tři správné rovnice podle zadaných informací. Dále ale opouští symbolické vyjádření a pokračují využíváním logického zdůvodnění (logickou dedukcí). Označují x – maminku, y – dívku, n – chlapce a řeší

$x + y = 52; n + y = 21; x + n = 49$

Všímají si, že maminka s chlapcem jsou o tři roky mladší než maminka s dívkou. Znamená to tedy, že dívka je o tři roky starší než chlapec. Dívce a chlapci je dohromady 21 let, takže chlapci je 9 let a dívce 12 let. Pokračují výpočty a zjišťují, že mamince je 40 let.

- Algebraická metoda, tři neznámé (d):

Žáci začínají podobně jako v metodě c, ale pokračují řešením v symbolickém vyjádření.

$y + n = 21, x + n = 49$

$x + y = 52 / + x + n$

$2x + y + n = 101 / – y – n$

$2x = 80$

$x = 40$

- Algebraická metoda založená na dedukci, jedna neznámá (e):

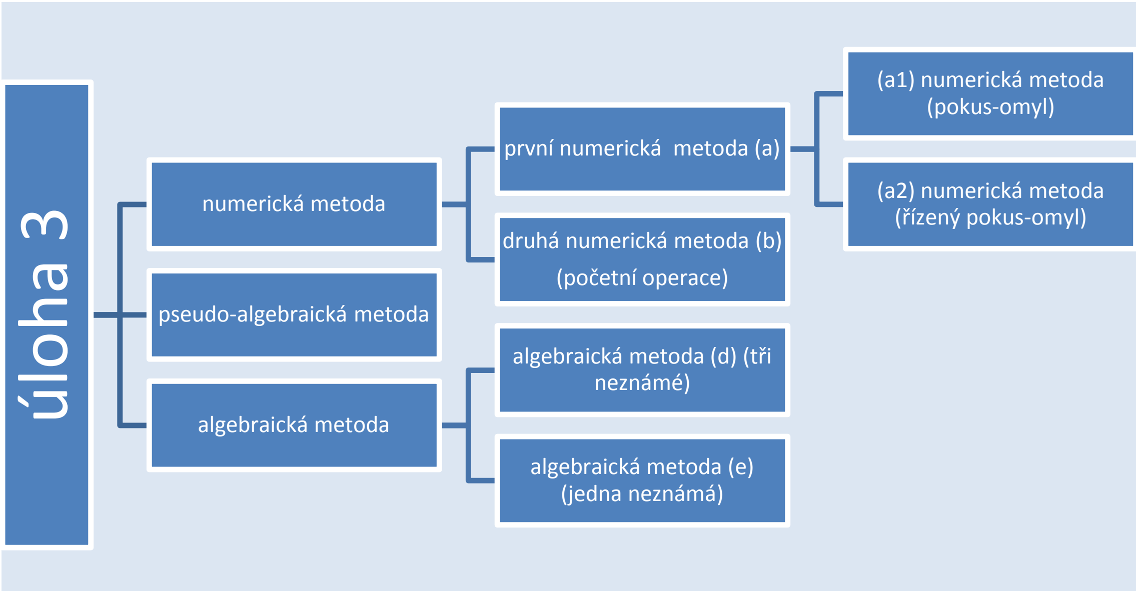
Žáci využívají logického zdůvodnění a pokračují užitím symbolů a rovnic. Protože je mamince a dívce dohromady 52 let a mamince s chlapcem 49 let, je dívka o 3 roky starší než chlapec. Věk chlapce označí – x.

$x + 3 + x = 21$

$2x + 3 = 21 \;/ - 3$

$2x = 18 \;/ : 2$

$x = 9$



Graf 4 – Strategie řešení úlohy 3

4 Předvýzkum – projekt na Sportovním gymnáziu

Protože cílem práce není sledovat pouze změny v oblasti kognitivní, ale i u dalších žákovských kompetencí, využila jsem možnosti zapojit se do týmu, který se zabýval výzkumem efektivnosti projektové metody, abych ověřila metody zjišťování rozvoje některých kompetencí, které by mohly být užity ve vlastním výzkumu.

4.1 Cíl a metodika projektu

Rámcové vzdělávací programy představují projektovou metodu jako jednu z metod podporujících rozvoj žákovských kompetencí. Problematika skutečné efektivnosti této metody nebyla doposud zkoumána z hlediska individuálního rozvoje žáka v jiných sociokulturních podmínkách, než ve kterých historicky vznikala. Na Fakultě pedagogické Západočeské univerzity v Plzni byl proto v rámci grantové soutěže ZČU realizován dvouletý výzkumný projekt (v letech 2010 a 2011), jehož cílem bylo ověřit, jaké výsledky přináší projektová výuka v oblasti poznatkové, motivační a sociální ve vyučování matematiky, fyziky a informatiky u žáků různých věkových skupin (1. a 2. stupeň základní školy, nižší ročníky víceletých gymnázií a střední škola) v podmínkách současné školy. V průběhu pedagogického výzkumu byla sledována též možnost využití projektové metody jako nástroje pozitivního ovlivňování klimatu třídy. Ve spolupráci s vedením škol byly vybrány experimentální a srovnávací skupiny (převážně paralelní školní třídy). Řešitelský tým tvořili většinou studenti doktorských studijních oborů. Ve všech třídách prováděli dlouhodobé pozorování v podmínkách běžné výuky. Ve spolupráci s pracovníky katedry psychologie bylo pomocí baterií standardizovaných testů provedeno vstupní testování žáků zaměřené na dimenzi prožívání, sebepojetí školní úspěšnosti, vybrané klíčové kompetence a na pozici žáků ve skupině. Opakovaným testováním na konci experimentu byly zjišťovány změny, nikoli normy dimenze prožívání či sebepojetí školní úspěšnosti. Žákům byl též zadán didaktický test z matematiky, který obsahoval dva typy zadání, otázky na ověření zapamatovaného učiva a otázky na ověření pochopení učiva. U žáků projektové skupiny byly navíc testovány vybrané klíčové kompetence a případná odlišná zkušenost v rámci pozice ve skupině – v prvním měření zaznamenávali žáci svoji pozici ve třídě, ve druhém měření svoji pozici v projektovém týmu, včetně popisu svojí role při řešení úkolu.

4.2 Průběh projektu

Výzkum zaměřený na sledování efektivnosti projektové metody ve vyučování matematiky na víceletém gymnáziu proběhl v únoru 2011. Pro účel projektu bylo vybráno Sportovní gymnázium v Plzni (dále SG), jmenovitě sekunda tohoto gymnázia. Protože na SG byla pouze jedna třída, byla tato třída rozdělena na dvě skupiny, experimentální (projektovou) a srovnávací, a to rovnoměrně podle dosažených známek z matematiky za poslední dva roky. Celkový počet studentů sekundy byl 32, do experimentální i srovnávací skupiny byli tedy zařazeni po 16. Průměrně obsahoval každý tým experimentální skupiny po dobu projektu 4 žáky.

První den byli studenti projektové skupiny seznámeni s obsahem projektu nazvaným „Skládání n-úhelníků v rovině.“ Úkolem dětí bylo co nejkreativněji a současně reálně zpracovat zadané téma. Po dobu 4týdenního experimentu se tak staly projektanty účastnícími se vyhlášené soutěže. Studenti si sami zvolili své tři vedoucí pracovníky podle matematických dovedností.

K motivaci práce dětí přispěla sada barevných pravidelných n-úhelníků (n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12; a = 4 cm) objednaná na zakázku pro potřeby výzkumu. V úvodní hodině tak z předložených n-úhelníků studenti nejprve tvořili libovolný obraz (obr. 1, 2, 3), poté obraz tak, aby se jednotlivé n-úhelníky nepřekrývaly.

Obrázek 1

Obrázek 2

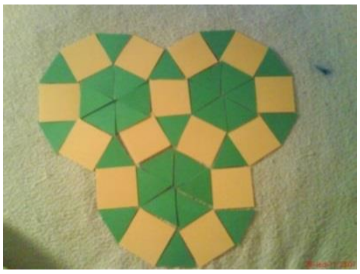
Obrázek 3

Do projektově vedených hodin byly zařazeny úkoly týkající se učiva daného období podle Školního vzdělávacího plánu (ŠVP), tj. shodnost trojúhelníků a úsečky trojúhelníku (střední příčka, těžnice, výška). Zachována byla též dotace hodin podle ŠVP – 4 hodiny týdně.

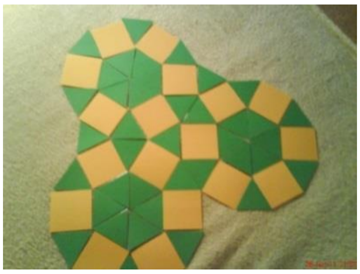
Střední příčka byla v projektově vedené třídě vyvozena následujícím badatelským způsobem, který jsem navrhla. Vedoucí skupin si vybrali jeden ze tří trojúhelníků (ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý). Poté k němu ostatní členové přidali další tři shodné trojúhelníky. Úkolem bylo složit ze čtyř malých shodných trojúhelníků jeden velký. Na základě řízeného rozhovoru studenti vyvozovali, že každý trojúhelník má tři střední příčky. Tyto střední příčky rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Pozorováním a měřením objevili, že střední příčka je rovnoběžná s příslušnou stranou (jejímž středem neprochází) a její délka se rovná polovině délky této strany.

Studentům byl též předložen notebook s programem Geogebra. Byla jim tak prezentována i jiná možnost práce v předmětu geometrie. Jedna z dalších vyučovacích hodin byla věnována práci studentů na počítači. V počítačové učebně tak utvářeli body, úsečky, trojúhelníky, střední příčky, apod., ale i obrázek sněhuláka.

Do každé projektové hodiny byly zadávány malé soutěžní úkoly, např. studenti měli určit, kolika možnými způsoby a jakými způsoby lze beze zbytku pokrýt plochu pravidelnými mnohoúhelníky nebo jim byla na 10 sekund předložena fotografie (obr. 4) s úkolem provést následně konstrukci stejného obrazce. Výsledky byly překvapivě tři (obr. 4, 5, 6).



Obrázek 4



Obrázek 5

Obrázek 6

Pozorování ukázalo, že práce na projektu probíhala v jednotlivých týmech odlišně. Hodnocení činnosti studentů bylo uskutečněno podle jednotných kritérií, což umožnilo srovnání práce skupin:

- zapojení členů týmu (a),
- organizace práce (b),
- forma předloženého výsledku (c),
- úspěšnost v malých soutěžích (d).

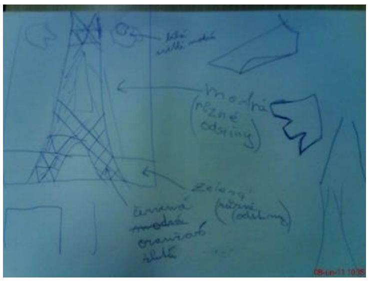
Skupina č. 1 – vedená Katkou – sestavená pouze z dívek:

a) zapojují se všechny dívky s radostí a nasazením,

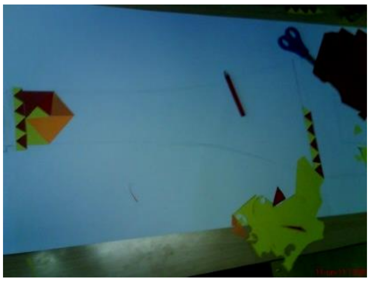
b) střídají se na jednotlivých činnostech, společně diskutují a řeší možné postupy, vládne harmonická komunikace,

c) název projektu „Eiffelova věž“, čtvrtka velikosti A2, geometrické n-úhelníky z barevného papíru nalepené na čtvrtce (obr. 9),

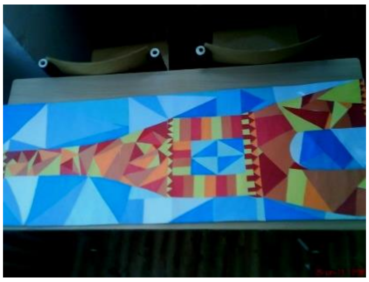
d) 1. místo.



Obrázek 7



Obrázek 8



Obrázek 9

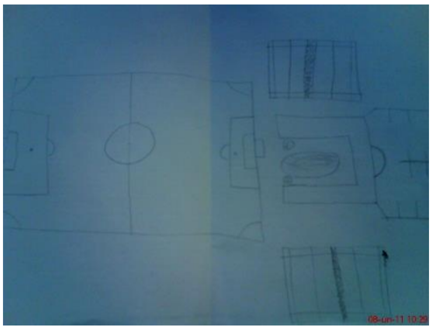
Skupina č. 2 – vedená Vaškem – chlapci a jedna dívka:

a) zapojují se především dva chlapci (jedním z nich je vedoucí týmu),

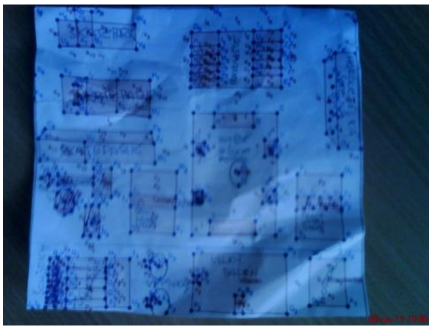
b) setkávají se i mimo projektové vyučování, kde realizují projekt, společně se též většinou podílí na plnění úkolů v hodinách,

c) název projektu „Sportovní areál“ vypracovaný v programu Geogebra na formátu A2 (obr. 11),

d) 2. – 3. místo.



Obrázek 10



Obrázek 11

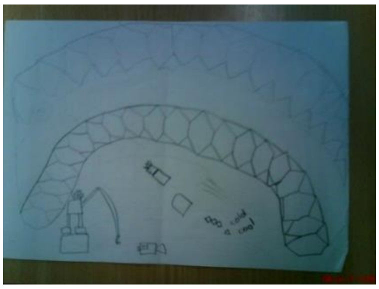
Skupina č. 3 – vedená Danem – stejný počet chlapců i dívek:

a) zapojují se všichni členové týmu,

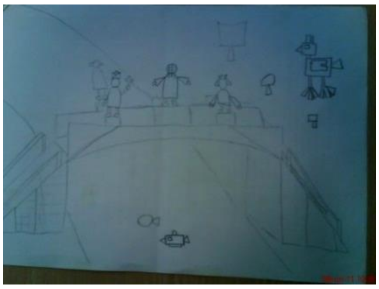
b) každý člen pracuje na konkrétní části projektu,

c) název projektu „Most“, čtvrtka velikosti A2, n-úhelníky z barevného papíru nalepené na čtvrtce (obr. 14),

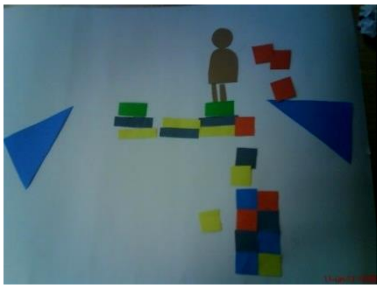
d) 2. – 3. místo.



Obrázek 12



Obrázek 13



Obrázek 14

4.3 Výsledky experimentu

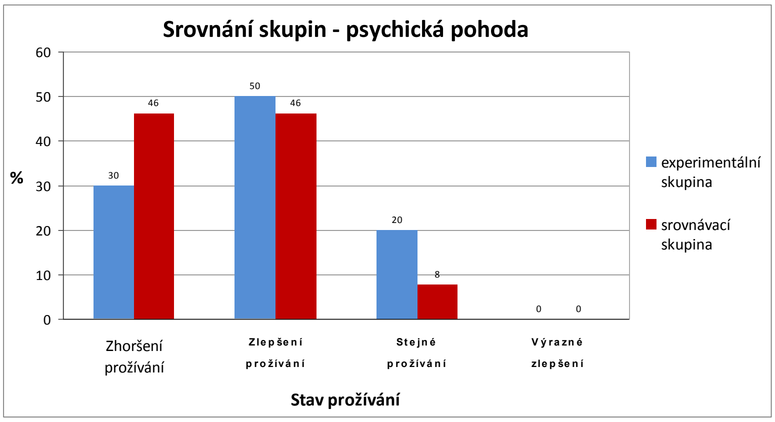
Studentům byly v průběhu projektu předkládány psychologické testy, které v následujícím textu označíme jako SUPSO 1-2, SPAS 1-2, KOMPETENCE, PROJEKCE 1-2, a didaktický test. Psycholog, který zajistil testové baterie ve spolupráci s experimentátorem, vycházel ze standardizovaných testů a ty následně doplnil některými jejich modifikacemi. Dále je uvedeno, co a jakým způsobem bylo sledováno jednotlivými testy. Číslování testů 1-2 označuje fázi experimentu (začátek – konec experimentu).

SUPSO 1-2

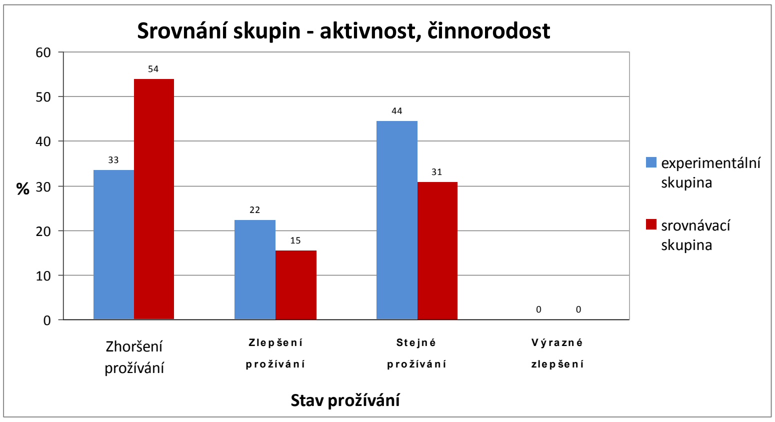
- Psychická pohoda
- Aktivnost, činorodost
- Impulzivnost, odreagování se
- Psychický nepokoj, rozladěnost
- Psychická deprese, pocit vyčerpání
- Úzkost, očekávání obav
- Sklíčenost, rezignace

Test SUPSO 1 byl předložen studentům obou skupin (experimentální a srovnávací) před začátkem projektu. Respondenti zapisovali svůj obvyklý stupeň prožívání daného stavu či pocitu v hodinách matematiky. Test SUPSO 2 byl předložen studentům obou skupin na konci projektu. Tentokrát zapisovali stupeň prožívání daného stavu či pocitu během poslední doby v hodinách matematiky.

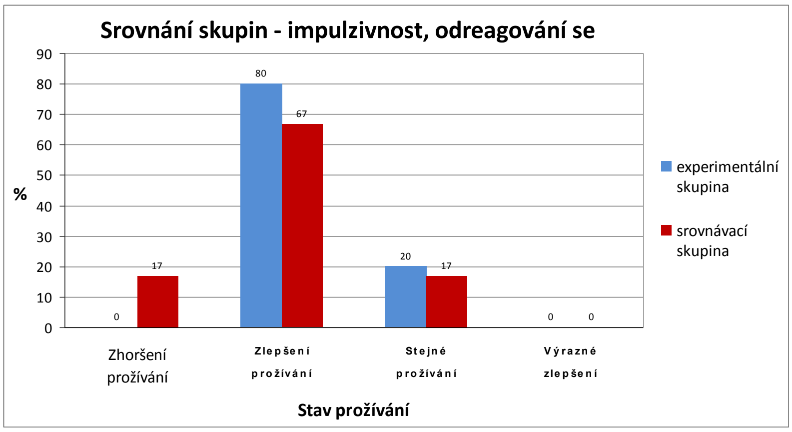
Zadání testů SUPSO 1 a SUPSO 2 bylo totožné. Na základě škály vůbec, občas, zpravidla, často a soustavně studenti zaznamenávali svůj obvyklý způsob prožívání a) v oblasti psychické pohody (spokojený, svěží, dobře naladěný, klidný), b) v oblasti aktivnosti (energický, činorodý, temperamentní, průbojný), c) v oblasti impulzivnosti (náladový, výbušný, těžko se ovládám, vzteklý), d) v oblasti psychického nepokoje (rozmrzelý, nespokojený, netrpělivý, neklidný), e) v oblasti psychické deprese (otrávený, pesimistický, zmořený, vyčerpaný), f) v oblasti úzkosti (napjatý, nejistý, úzkostně naladěný, prožívání obav) a g) v oblasti sklíčenosti (smutný, nešťastný, přecitlivělý, osamělý). Na konci experimentu bylo realizováno bodové ohodnocení pomocí škály 0-1-2-3-4 a následné porovnání obou skupin (grafy 5 – 11).



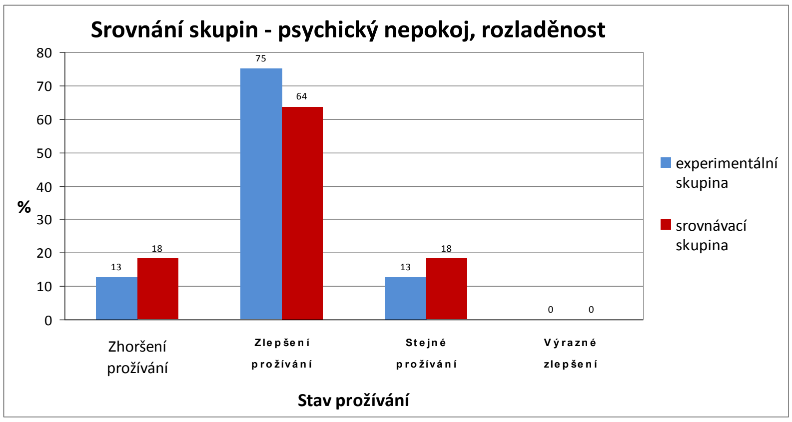
Graf 5



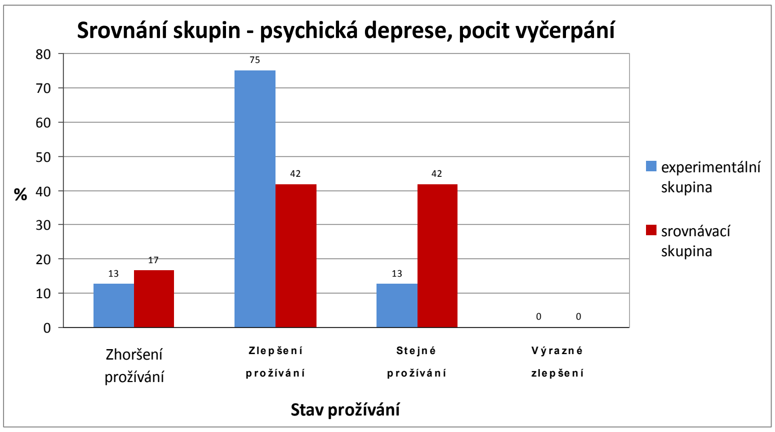
Graf 6



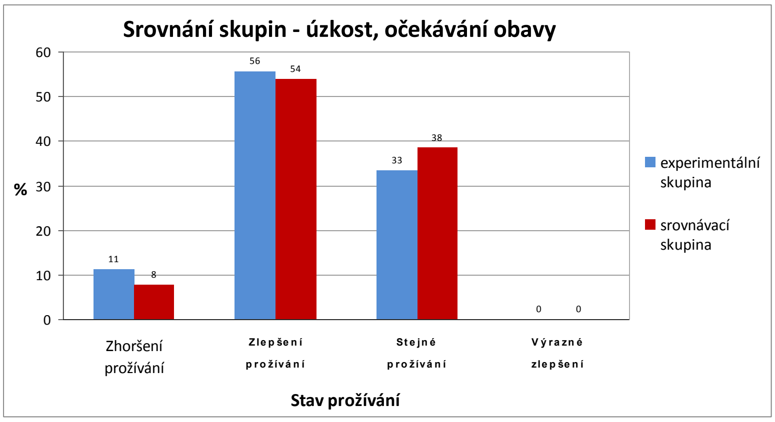
Graf 7



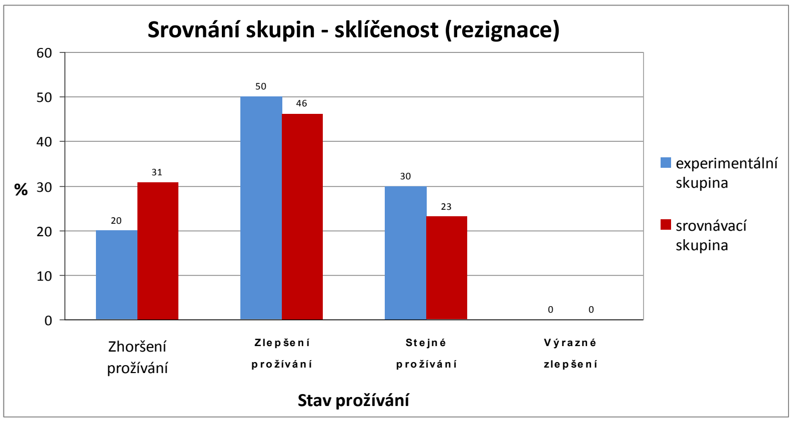
Graf 8



Graf 9



Graf 10



Graf 11

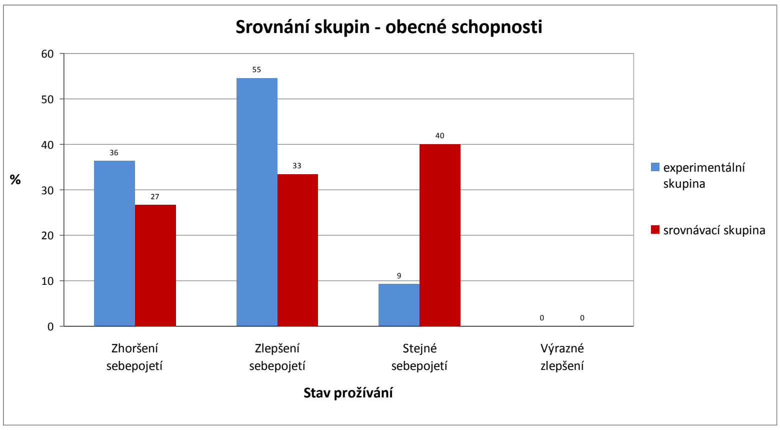
Průzkum ukázal, že u studentů experimentální skupiny nastalo výrazné zlepšení v oblasti impulzivnosti (odreagování se), psychického nepokoje (rozladěnosti) a psychické deprese (pocitu vyčerpání).

SPAS 1-2

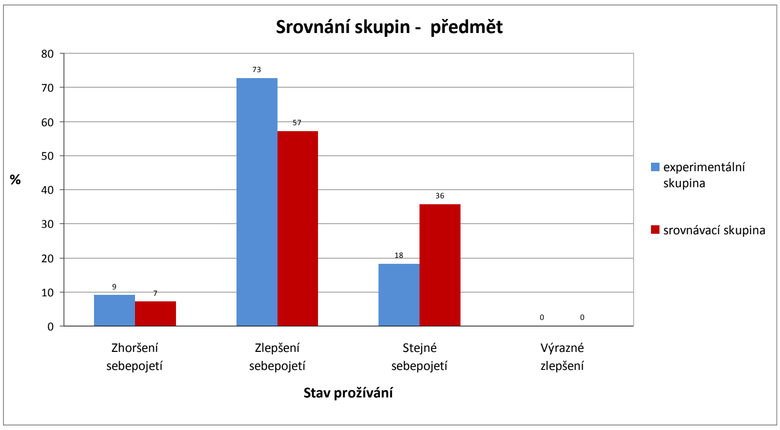
- Obecné schopnosti
- Předmět
- Sebedůvěra

Test SPAS 1 byl zadán studentům obou skupin na začátku projektu. Hodnotili zde svoji celkovou školní práci a úspěšnost (schopnost naučit se novou látku, samostatnost, intelekt, bystost, schopnost vyjádřit se), úspěšnost v předmětu (vztah k předmětu, úspěšnost v probíraném učivu – procenta, operace se zlomky, porovnávání svojí úspěšnosti v matematice se spolužáky, dosažené výsledky a posouzení svého nadání v předmětu) a vlastní sebepojetí (hodnocení svojí školní práce, pocity při zkoušení, vztah ke škole). Test SPAS 2 byl zadán studentům obou skupin na konci projektu.

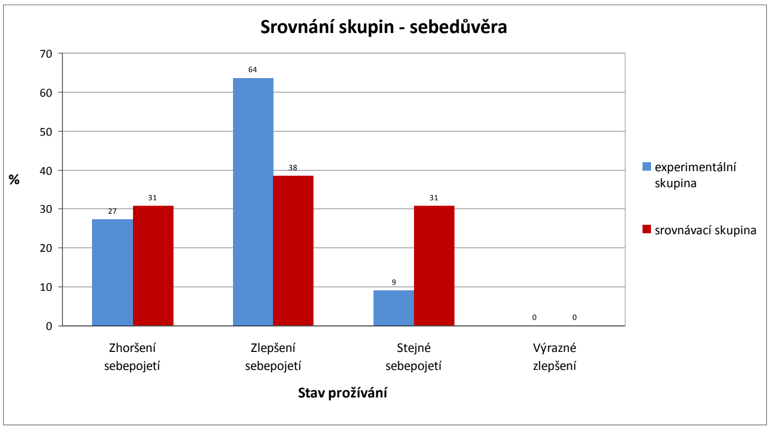
Zadání testů SPAS 1 a SPAS 2 bylo totožné. Lišilo se pouze ve dvou výpovědích týkajících se právě probíraného učiva. Na konci projektu bylo realizováno bodové ohodnocení všech odpovědí ve škále 0-1. Případné změny v sebepojetí v obecných schopnostech, v předmětu matematika a sebedůvěře ukazují grafy 12 – 14.



Graf 12



Graf 13



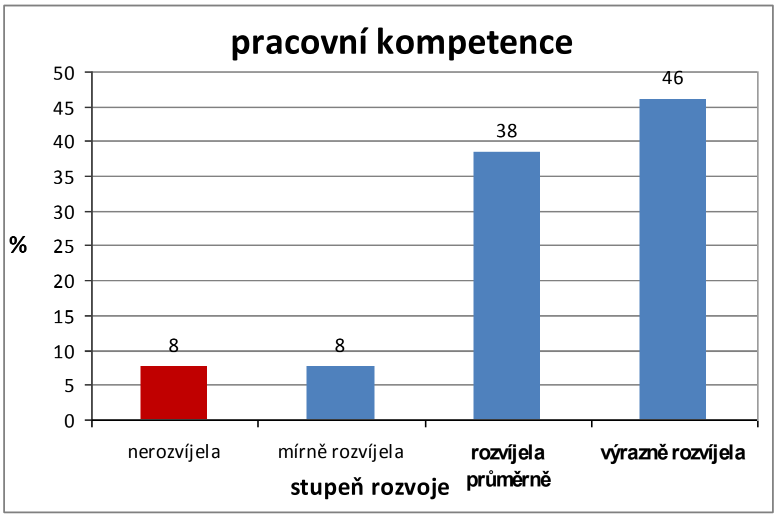
Graf 14

Testy poukázaly na fakt, že matematika nepatří mezi oblíbené předměty studentů a rovněž že z matematiky nedostávají nejlepší známky. Na druhé straně zvládnutí nového učiva nečiní studentům většinou velké potíže. Velká část z nich též vypověděla, že je zkoušení znervózňuje. Ze školy jako takové ale obecně strach nemají.

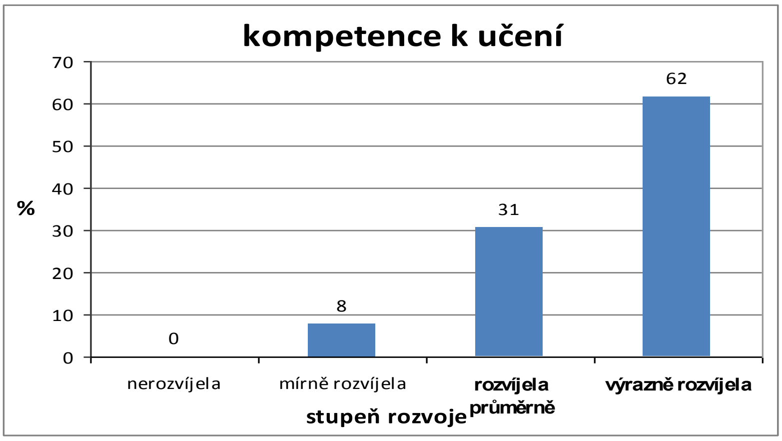
KOMPETENCE

- Pracovní kompetence
- Kompetence k učení
- Kompetence k řešení problémů
- Komunikační kompetence
- Sociální kompetence

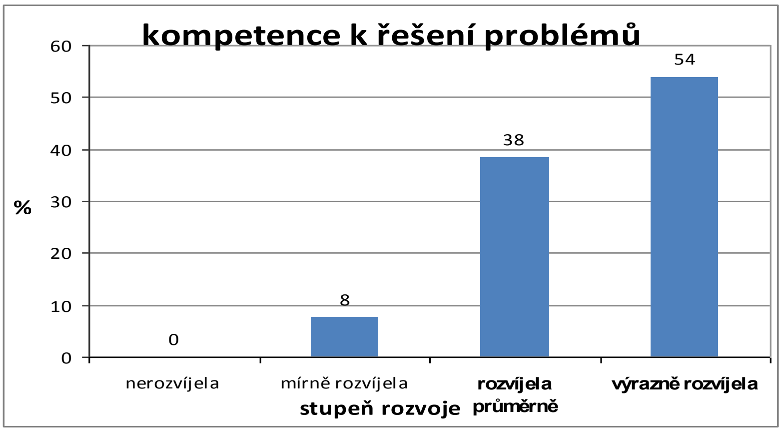
Test KOMPETENCE byl zadán pouze studentům experimentální skupiny na konci projektu. Test měl poukázat na možný rozvoj uvedených kompetencí během projektově vedeného vyučování. Každá z kompetencí obsahovala tři okruhy otázek. Studenti měli zakroužkovat jednu ze tří možných variant A, B, C, která nejvíce odpovídá skutečnosti. Udávali tedy celkem 15 odpovědí. V rámci kompetence k řešení problémů se na ukázku rozhodovali mezi variantou A – Zadání úkolu každý z nás ihned správně pochopil, B – Zadání úkolu jsme si ujasnili až při diskusi ve skupině, C – Chvíli nám trvalo, než jsme pochopili zadání úkolu. Upřesnil nám je až učitel. Každá z odpovědí byla ohodnocena bodově ve škále 0-1-2. Ve výše uvedené ukázce získali za odpověď A – 0 bodů, B – 2 body a C – 1 bod. Z grafů 15–19 lze posoudit, do jaké míry se ta či ona kompetence rozvíjela nebo nerozvíjela.



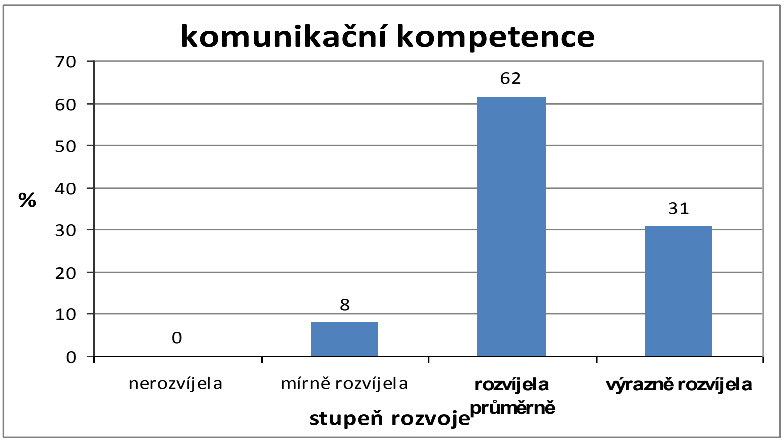
Graf 15



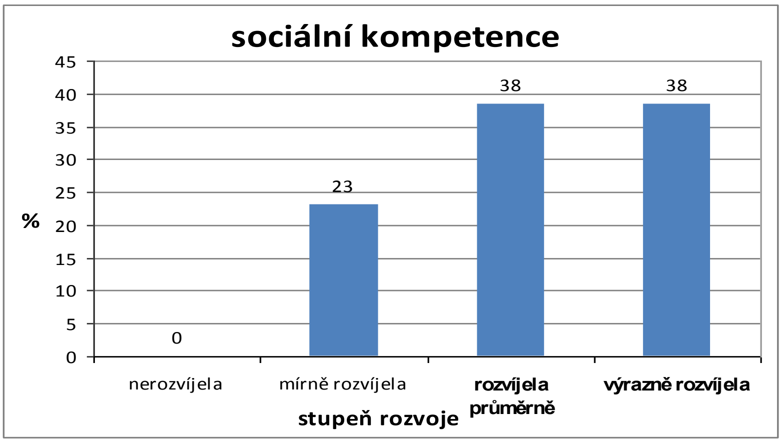
Graf 16



Graf 17



Graf 18



Graf 19

PROJEKCE 1-2

Test PROJEKCE 1 byl zadán studentům obou skupin na začátku projektu. Na papíru velikosti A4 byl nakreslený strom s postavami. Strom na obrázku zobrazoval školní třídu. Úkolem studentů bylo si důkladně prohlédnout postavy, a) najít postavu nejvíce odpovídající jejich postavení ve třídě a vybarvit ji pastelkou či fixem, b) zakroužkovat tu postavu, kterou by sami chtěli být. Test PROJEKCE 2 byl zadán pouze studentům experimentální skupiny na konci projektu. Obrázek stromu s postavami byl stejný. Tentokrát strom představoval projektový tým. Úkolem studentů bylo znovu si důkladně prohlédnout postavy, a) najít postavu, která se nejvíce podobá jejich postavení v týmu a vybarvit ji pastelkou či fixem, b) zakroužkovat své týmové pracovníky.

Na konci projektu bylo realizováno vyhodnocení testů studentů experimentální skupiny. Hodnocen byl případný posun k ideálu, posun k dominanci, resp. posun k submisivitě a posun k přátelství, resp. posun k nepřátelství. Zhruba u 75 % studentů byl zaznamenán posun k ideálu, u 42 % studentů posun k dominanci a u 25 % studentů posun k přátelskosti. U zbytku studentů nebyl zaznamenán žádný posun.

Didaktický test

Didaktický test byl předložen studentům obou skupin na konci projektu. Test vypracovala vyučující předmětu a byl zaměřen pouze na osvojení si učiva (vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, shodnost trojúhelníků, úsečky trojúhelníku). Test obsahoval teoretickou a praktickou část. V teoretické části testu dosáhli studenti experimentální skupiny průměrné známky 3,9 (studenti srovnávací skupin 3,3). V praktické části testu (rýsování) dosáhli studenti experimentální skupiny průměrné známky 2,79 (studenti srovnávací skupiny 1,87).

Didaktický test zaměřený na osvojení si učiva a rozvoj kreativity z organizačních důvodů nakonec zadán nebyl. Nebylo tedy možné provést příslušné hodnocení. Nastávající experiment a následné testování si klade za jeden z cílů tento nedostatek odstranit.

Předvýzkum ověřil, že změny v žákovských kompetencích je možné pomocí užitých testů sledovat a že mohou být metody předvýzkumu použity i ve vlastním výzkumu.

5 Vlastní výzkum a analýza získaných dat

Každá ze tří testových úloh byla žákům zadána opakovaně – v pretestu v lednu 2014 a v posttestu v červnu 2014. V dalším textu se zaměříme na řešitelské strategie užité jednotlivými žáky v každém ze zadaných testů. Strategie jsou označeny (a1), (a2), ... podle třídění v odstavci 3.5. Pokud žák neužil žádnou z uvedených strategií a nedospěl k výsledku, je postup označen (0). Žáci jsou pro lepší přehlednost označeni čísly, správně vyřešená úloha je označena zelenou barvou, nesprávně vyřešená úloha červenou barvou, úloha, kde žák zvolil jednu z výše popsaných strategií, ale úlohu správně nedořešil (naznačený postup nebo chyba v početním výkonu), je označena žlutou barvou.

5.1 Průběh experimentu

Experiment se uskutečnil v průběhu pololetí (leden 2014 – červen 2014) na 4. základní škole v Plzni. Pro účel experimentu byly vybrány dvě třídy 4. ročníku (experimentální a srovnávací). Celkový počet žáků obou tříd byl shodně po 23 žácích. Obě třídy bylo možné na základě výpovědi obou třídních učitelek a provedeného pretestu považovat za rovnocenné ve sledovaném znaku, tj. tvořivosti. Na začátku šetření byl žákům obou tříd v průběhu jednoho týdne předložen matematický test se třemi úlohami a psychologické testy SUPSO 1 a SPAS 1. Žáci byli informováni o tom, že se účastní pedagogického experimentu a že nebudou hodnoceni známkou za matematický test. Co je předmětem studie, jim sděleno nebylo. Všechny testy předkládaly žákům jejich třídní učitelky. Ty na začátku každého testu s žáky přečetly zadání. V rámci matematického testu si u úlohy 1 společně řekli, že slepice má dvě nohy a kůň čtyři nohy, u úlohy 2, že pouze jeden chlapec má klubovou kartu, proto je jeho vstupné nižší, u úlohy 3, že čísla znamenají součet dvou jedinců a že se ptáme na věk jednotlivce každého zvlášť. U psychologických testů si společně přečetli a vysvětlili neznámé pojmy. Dále žáci pracovali samostatně. Na splnění každé úlohy matematického testu měli žáci půl hodiny. Kromě vyřešení úkolu museli slovně popsat, jak zadaný úkol řešili. Po absolvování matematického testu si společně v každé z obou tříd řekli možná řešení odpovídající matematickým znalostem žáků 4. ročníku.

Před zadáním testu byla vždy provedena analýza a priori, ve které byly hledány předpokládané řešitelské strategie žáků. Po provedení testu byla detailně zkoumána práce každého žáka a zaznamenána jeho řešitelská strategie. V období mezi testováním žáci experimentální třídy řešili každý týden v jedné vyučovací hodině 4 – 6 úloh zaměřených na rozvoj kreativity a logického myšlení (viz přílohy 1 – 12). Úlohy byly vybrány a upraveny ze sborníků Matematického klokana uvedených na stránkách http://matematickyklokan.net/ a publikace Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník (Janoušková, S. & Tomášek, V., et al., 2013). Žáci prezentovali své způsoby řešení a vedli diskusi nad způsoby řešení svých spolužáků. Na konci hodiny jim byly představovány i další možné řešitelské strategie. Úlohy byly mnohdy pro některé žáky náročné. Z tohoto důvodu byly ke stávajícím úkolům následně vyhotoveny další úlohy, kde byly provedeny drobné úpravy (snížení obtížnosti), aby se úkoly staly dostupnější i pro ně. Několikrát si mohli sami žáci vybírat náročnost úkolů, většinou ze dvou stupňů obtížnosti. Když pracovali ve skupinách, nestávalo se, že by nepřišli s řešením úkolů. V každé skupině byl většinou alespoň jeden matematicky nadaný žák. Když pracovali samostatně a nějaký žák si nevěděl rady se zadanou úlohou, paní učitelka pomohla drobnou radou. Všichni přítomní žáci tedy byli seznámeni se správnými řešeními úloh na konci vyučovací hodiny. Každý týden docházelo k setkáním s vyučující experimentální třídy, ve kterých mi předávala práce žáků a hodnotila průběh vyučovací hodiny. Osobně jsem se jako pozorovatel účastnila třech vyučovacích hodin matematiky. Na konci těchto hodin za mnou přicházeli někteří žáci. Věděli, že provádím pedagogický experiment, kladně hodnotili změnu stylu výuky, které si všimli i jejich rodiče, poněvadž společně se svými dětmi řešili bonusové úkoly. Žáci též přicházeli se svými řešeními za svou třídní učitelkou i mimo vyučovací hodinu. Docházelo k tomu v mezičase, kdy pro nedostatek času nestihli vyřešit některý z úkolů během vyučovací hodiny, a předtím, než si společně ve třídě sdělovali řešení. Cestou ze třídy do šatny např. žák 18 přišel s řešením úkolu č. 3 z úloh pro 8. týden (Příloha 8) – odečetl by od 320 číslo 32, vydělil dvěma a získal váhu lehčího z chlapců.

Opakované testování proběhlo v průběhu týdne na konci června 2014. Žákům obou tříd byl předložen týž matematický test se třemi úlohami a psychologické testy SUPSO 2 a SPAS 2. Všechny testy zadaly žákům opět jejich třídní učitelky. Tentokrát zadání společně nečetli. Přestože byla původně plánovaná stejná časová dotace na každý úkol matematického testu, tj. půl hodiny, z časových a organizačních důvodů paní učitelek došlo k vzájemné domluvě snížení doby na 20 minut na každý matematický úkol. Žáci opět slovně popisovali, jak zadaný úkol řešili. Po provedení testu byla opět detailně zkoumána práce každého žáka a zaznamenána jeho řešitelská strategie. Následně bylo provedeno srovnání výsledků testů u žáků v experimentální skupině a ve skupině srovnávací, ve které výuka probíhala standardním způsobem. Provedení pretestu (leden 2014) a posttestu (červen 2014) umožnilo sledovat posun řešitelských strategií žáků ze dvou pohledů – změna řešitelské strategie a četnost použití strategií. Psychologické testy SUPSO 1-2 a SPAS 1-2 umožnily sledovat změny, nikoli normy dimenze prožívání či sebepojetí školní úspěšnosti.

5.2 Úloha č. 1 (Experimentální třída)

Babička má na farmě slepice a koně. Dohromady mají 10 hlav a 26 nohou. Kolik slepic a kolik koňů je na farmě?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Pretest:

Žák č. 1 vychází z počtu hlav. Má dvě kategorie, koně a slepice. Začíná odhadem počtu 4 koní, tedy celkem 16 nohou. Zvířata mají dohromady 10 hlav, kreslí tedy 6 slepic a zaznamenává 12 nohou. Součet nohou 28 nesedí se zadáním, proto správně ubírá jednoho koně. Má 3 koně s 12 nohami. Dokresluje jednu slepici. Slepice mají celkem 14 nohou. Počítá 7 . 2 = 14 a 3 . 4 = 12. Správně píše v odpovědi, že jsou na farmě 3 koně a 7 slepic. (a1)

Žákyně č. 2 počítá 10 : 2 = 5 a 26 : 4 = 6. Dále řeší 26 : 2 = 8. První dva výsledky sčítá 5 + 6 = 11. Provádí součet 8 + 4 = 12 a 11 + 12 = 23. Chybný je postup i výpočty. (0)

Žák č. 3 vychází z počtu nohou. Počítá 4 . 4 = 16, 16 + 10 = 26. 10 nohou má 5 slepic. To nevychází do počtu zvířat – 9 hlav. Snižuje tedy počet koňů o jednoho a řeší správně 3 . 4 = 12, 12 + 14 = 26. 14 nohou má 7 slepic. Zaznamenává odpověď „3 koňů" a 7 slepic. (a2)

Žák č. 4 vychází z počtu hlav. Odhaduje 5 koní a 5 slepic. Nevychází mu počet nohou. Pokračuje výpočtem noh pro 4 koně a 6 slepic. Opět nesouhlasí počet nohou, proto dále snižuje počet koní. Nakonec úspěšně řeší počet nohou pro 3 koně a 7 slepic. Zaznamenává odpověď „3 koňů a 7 slepic". (a1)

Žák č. 5 počítá 10 + 26 = 36, 26 – 10 = 13 + 13 + 5 + 5. (0)

Žák č. 6 nejdříve násobí 26 . 10 = 260. Výpočet škrtá a sčítá 14 + 7 = 21 a 12 + 3 = 15. Dále číslo 26 rozkládá na 13 + 13 = 14 + 12. (0)

Žák č. 7 vychází z počtu nohou. Symbolicky kreslí 10 hlav a 26 nohou. 26 nohou střídavě rozděluje po čtyřech a dvou. To mu vychází 4 krát a dvě nohy zbudou (4 koně a 5 slepic). Nevychází mu počet hlav 4 + 5 = 9. Rozdělí tedy jednu čtveřici na dvě dvojice a dostává správně 3 koně a 7 slepic. Písemnou odpověď nezaznamenává. (a2)

Žákyně č. 9 vychází z počtu nohou. Počítá 4 . 4 = 16 a 5 . 2 = 10. 16 + 10 = 26. Nevychází jí počet hlav. Uvědomuje si, že jí nevychází počet hlav, v početních operacích však dále nepokračuje. (a2)

Žákyně č. 10 odhaduje počet koňů na 20 a počet slepic na 22. (0)

Žákyně č. 12 vychází z počtu nohou. Odečítá 26 – 4 = 22 (1 kůň), 22 – 4 = 18 (1 kůň), 18 – 4 = 14 (1 kůň), 14 – 4 = 10 (1 kůň). Když bude počítat se 4 koňmi, zbude jí 10 nohou pro 5 slepic. Dostává pouze 9 hlav. Škrtá tedy jednoho koně, počítá se 3 koňmi a od čísla 14 postupně odečítá 2, 14 – 2 = 12 (1 slepice), 12 – 2 = 10 (1 slepice), 10 – 2 = 8 (1 slepice), 8 – 2 = 6 (1 slepice), 6 – 2 = 4 (1 slepice), 4 – 2 = 2 (1 slepice), 2 – 2 = 0 (1 slepice). Dostává 7 slepic. Odpovídá, že koní je 3 a slepic 7. (a2)

Žákyně č. 13 vychází z počtu nohou. Napsala číslo 26 a pod něj čtyři čtyřky a pět dvojek. Dohromady dostala 9 čísel. Ubírá jednu čtyřku a dostává tři čtyřky a sedm dvojek. Odpovídá, že babička má na farmě 3 koně a 7 slepic. (a2)

Žákyně č. 14 počítá 26 : 10 = 20 + 6 = 26. Zkouší i 26 . 10 = 260. (0)

Žák č. 15 násobí a sčítá čísla 10 a 26, 10 . 26 = 200 (chybně) a 10 + 26 = 36. V odpovědi uvádí, že na farmě je 60 slepic a 20 koňů (10 . 6 = 60, 10 . 2 = 20). (0)

Žák č. 16 sčítá 10 + 26 = 36 (u čísla 10 píše hlavy, u čísla 26 nohy). Dále počítá 36 : 2 = 18 a 26 : 2 = 13. (0)

Žákyně č. 17 provádí výpočty 10 : 2 = 5, 26 : 4 = 6 (zb. 2), 26 : 2 = 8 (zb. 2) – chyba ve výpočtu. Sečetla první dva výsledky 5 + 6 = 11 a 8 + 4 = 12. Číslo 4 dostává ze součtu zbytků při dělení 2 + 2. Dále sčítá 11 + 12 = 23. Nakonec počítá 23 : 3 = 7 (zb. 2), z čehož jí vychází, že je 7 koňů a 3 slepice. (0)

Žák č. 18 vychází z počtu nohou. Odhaduje 4 koně. Počítá 4 . 4 = 16. Dále ve výpočtu nepokračuje, uvědomuje si, že mu nevychází počet hlav (16 + 10 = 26). Ubírá proto jednoho koně a správně řeší 3 . 4 = 12 a 12 + 14 (v závorce nad číslem uvádí 7 . 2) = 26. Odpovídá, že babička má 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žákyně č. 19 vychází z počtu nohou. Uvažuje, že na farmě by mělo být více slepic. Odhaduje počet nohou slepic na 18. Koně by museli mít 8 nohou. To ale nesouhlasí s počtem hlav. Proto ubíhá počet nohou u slepic metodou řízeného pokusu omylu na 14. Vedle zaznamenává číslo 7 pro počet hlav. Koně tedy musí mít 12 nohou, což jsou 3 hlavy. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a2)

Žák č. 20 vychází z počtu hlav. Odhaduje počet koní na 4. Počítá 4 . 4 = 16 a 6 . 2 = 12. Nesouhlasí mu počet nohou. Ubírá tedy jednoho koně a správně řeší 3. 4 = 12 a 7 . 2 = 14. Provádí kontrolní výpočty 7 + 3 = 10 a 12 + 14 = 26. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a1)

Žákyně č. 21 provádí výpočet 26 : 4 = 6 (zb. 2). Ve své odpovědi zaznamenává, že je na farmě dohromady 6 koňů (podíl) a 2 slepice (zbytek). (0)

Žákyně č. 22 vychází z počtu hlav. Nakreslila 10 kružnic (hlav). Odhaduje počet koní na 5 a počet slepic na 5. Nevychází jí počet nohou. Metodou řízeného pokusu omylu upravuje počet koní na 3 a počet slepic na 7 a dochází k výsledku 2 . 7 = 14, 4 . 3 = 12, 14 + 12 = 26. Čarou odděluje 7 kružnic od 3 kružnic. (a1)

Posttest:

Žák č. 1 vychází z počtu hlav. Uvádí, že si řešení pamatuje z minulého testu. Řeší dva příklady 3 + 7 = 10 a 12 + 14 = 26. Zaznamenává proměnné, pro slepice 2n a pro koně 4n. (a1)

Žák č. 3 vychází z počtu nohou. Píše 10 hlav a 26 nohou. Odhaduje počet koňů na 4. Ti mají 16 nohou. Slepice tedy mají do počtu 10 nohou. Je jich 5. Počet hlav nesouhlasí. Snižuje proto počet koní o jednoho a dostává 3 koně a 7 slepic. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a2)

Žák č. 4 vychází z počtu hlav. Píše dvě slova slepice a koně. Pod slepice kreslí 8 čárek, pod koně 2 čárky. To je 24 nohou. Ubere jednu čárku u slepic a přikreslí jednu čárku u koní, dospívá tedy k sedmi čárkám u slepic a ke třem u koní. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a1)

Žák č. 5 vychází z počtu hlav. Píše slova slepice a koně. Zaznamenává číslo 7 u slepic a číslo 3 u koní. Své tvrzení vysvětluje příklady 3 . 4 = 12, 2 . 7 = 14 a 12 + 14 = 26. (a1)

Žák č. 6 vychází z počtu hlav. Odhaduje počet slepic na 6 a počet koní na 4. Dopočítává počet noh, vychází mu 28. Snižuje tedy počet koní na 3 a zvyšuje počet slepic na 7. Kontrolní výpočty ani písemnou odpověď neuvádí. (a1)

Žákyně č. 9 vychází z počtu nohou. Počítá 4 + 2 + 4 = 10 + 4 + 2 + 4 = 20 + 2 + 2 + 2 = 26. Uvědomuje si, že jí nevychází počet hlav. Ubírá tedy jednoho koně, výpočty však neprovádí. (a2)

Žákyně č. 10 vychází z počtu hlav. Kreslí 5 koňů, píše „20 nohou“ a 5 slepic, píše „10 nohou“. Škrtá jednoho koně a dokresluje dvě slepice. Dostává tak správný počet nohou. (a1)

Žákyně č. 11 vychází z počtu hlav. Metodou pokusu omylu počítá 5 . 4 = 20 a 5 . 2 = 10. Nevychází počet nohou, proto snižuje počet koní o jednoho koně a počítá dále 4 . 4 = 16 a 6 . 2 = 12 a konečně 3 . 4 = 12 a 7 . 2 = 14. Odpovídá, že na farmě jsou celkem 3 koně a 7 slepic. (a1)

Žákyně č. 12 vychází z počtu hlav. Číslo 10 rozkládá na 7 a 3 (7 pro koně a 3 pro slepice). Zjišťuje, že jí nesedí počet nohou. Snižuje tedy počet hlav u koní a zvyšuje počet hlav u slepic (6 hlav pro koně a 4 hlavy pro slepice). Vynechává početní operaci s 5 hlavami pro koně a 5 hlavami pro slepice. Počítá se 4 hlavami pro koně a 6 hlavami pro slepice. Stále jí nevychází počet nohou. Nakonec správně zapisuje 3 hlavy pro koně a 7 hlav pro slepice. U nich uvádí i počet nohou, 12 pro koně a 14 pro slepice. Odpovídá, že koně jsou 3 a slepic 7. (a1)

Žákyně č. 13 vychází z počtu nohou, ale okamžitě kontroluje i počet hlav. Graficky zaznamenává 20 čárek pro 10 hlav. Celkový počet nohou zvířat je ale 26, proto u tří dvojic čárek připisuje dvě čárky. Vytváří tak tři čtveřice a sedm dvojic. Odpovídá, že slepic je 7 a koně jsou 3. (b3)

Žák č. 15 provádí dvě početní operace, násobení a sčítání čísel 10 a 26. Dochází ke dvěma výsledkům, 260 a 36. V odpovědi udává dvě možnosti pro počet koňů a slepic dohromady. Dodává, že si myslí, že správná odpověď je ta, kde čísla 10 a 26 sčítal. Na farmě je dohromady 36 koňů a slepic. (0)

Žák č. 18 uvádí v testu, že si pamatuje zadání z pretestu. Řeší 7 + 3 = 10 a 14 + 12 = 26. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a3)

Žákyně č. 19 vychází z počtu hlav. Zkouší počítat s 8 hlavami pro slepice a 2 hlavami pro koně. Kontroluje počet nohou. To jí nevychází. Mění proto počet hlav (pro slepice 7 a pro koně 3). Správně udává počet nohou (14 pro slepice a 12 pro koně). Provádí kontrolní výpočet 12 + 14 = 26. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a1)

Žák č. 20 vychází z počtu hlav. Odhaduje počet koní na 5 a počet slepic na 5. Nevychází mu počet nohou. Snižuje počet koní na 4. Opět mu nevychází počet nohou. Snižuje počet koní na 3. Počet nohou mu vychází. Provádí kontrolní výpočet 7 + 3 = 10 a 12 + 14 = 26. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a1)

Žákyně č. 22 vychází z počtu nohou. Kreslí 26 teček, ze kterých utváří střídavě čtveřici, dvojici, čtveřici, dvojici, čtveřici, dvojici, čtveřici a dvě dvojice. Každá množina představuje hlavu zvířete. Žákyně zjišťuje, že jí nevychází počet hlav. Jednu čtveřici rozděluje na dvě dvojice a dostává se tak ke správnému výsledku. Odpovídá, že babička má tři koně a sedm slepic, které mají dohromady dvacet šest nohou a deset hlav. (a2)

Žákyně č. 23 vytváří tabulku, kde jsou v záhlaví názvy i hlavy zvířat. Pod hlavičkou koně postupně sčítá 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20. Provádí kontrolní výpočet 4 . 5 = 20. Vedle tabulky počítá 10 – 5 = 5 hlav. Pod hlavičkou slepice počítá 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 a 5 . 2 = 10. Zjišťuje, že jí nevychází počet nohou. Mění tedy počet koní správně na tři. Sčítá 4 + 4 + 4 = 12 a 4 . 3 = 12. Vedle tabulky odčítá 10 – 3 = 7 hlav. Ke slepicím přičítá dvě dvojky a násobí 7 . 2 = 14. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a1)

5.3 Úloha č. 2 (Experimentální třída)

Pepík měl loni kartu do Cinema City, za kterou zaplatil 500 Kč. Za každý film pak navíc zaplatil pouze 50 Kč. Franta neměl klubovou kartu, proto za každý film zaplatil 100 Kč. Během roku viděli Pepík i Franta stejné filmy a byli překvapeni, že každý z nich zaplatil stejnou částku. Kolik filmů každý z nich viděl tento rok?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Pokus se najít různé způsoby řešení.*

Pretest:

Žák č. 1 poznamenává, že když Pepík za kartu zaplatí 500 Kč, Franta uvidí za stejnou částku 5 filmů. Dalších 5 filmů pro Frantu odpovídá deseti filmům pro Pepíka. Provádí kontrolu výpočtem 5 . 100 = 500, 500 + 500 = 1 000 a 5 . 100 + 5 . 100 = 1 000. Odpovídá, že oba viděli 10 filmů. (e)

Žákyně č. 2 zaznamenává u Franty číslo 100 a u Pepíka číslo 550 (počet Kč, které by chlapci zaplatili za jeden film). Ve druhém kroku u Franty píše 200, ale u Pepíka chybně dvojnásobek 1 100. (0)

Žák č. 3 píše ve dvou řádcích, že Pepík viděl 8 filmů, protože 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 400 a Franta že viděl 4 filmy, protože 100 + 100 + 100 + 100 = 400. (0)

Žák č. 4 dělí 500 : 50 = 10 a 500 : 10 = 5. Pepík tedy viděl 10 filmů a Franta 5 filmů. (0)

Žák č. 5 počítá 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500 a 500 : 100 = 5. (0)

Žák č. 6 počítá 500 + 100 + 50 = 650. (0)

Žák č. 7 poznamenává 500? Ne! 50? Ne! 100? Ne! Dodává, že mu to nejde. (0)

Žák č. 8 počítá 500 + 50 + 100 = 650 a 650 + 650 = 1000100. Dodává, že nejdřív počítal, kolik zaplatí Pepík a pak kolik zaplatí Franta. (0)

Žákyně č. 9 provádí součty ve dvou řadách (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). První řada: 500 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 850. Druhá řada: 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 800. Přestože žák nedochází ke správnému výsledku, jeho postup je správný. (b1)

Žákyně č. 11 provádí součty ve dvou řadách (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). První řada: 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Druhá řada: 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 1 000. Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 12 provádí součty ve dvou řadách (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). První řada: 50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 450, 500, 600, 650, 700. Druhá řada: 100, 150, 200, 300, 350, 400, 500, 600, 700, 750, 800. Přepisuje správně druhou řadu: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700. První řada zůstává bez započtení částky 500 Kč za klubovou kartu. (0)

Žákyně č. 13 provádí součty ve dvou sloupcích (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). První sloupec: 500, pod číslem 500 je deset 50, dohromady 1 000 Kč. Druhý sloupec: pod sebou je deset 100, dohromady 1 000 Kč. Odpovídá, že Pepík s Frantou za rok viděli 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 14 provádí součet dvaceti padesátek. Dostává 1 000. Poté dělí 1 000 : 50 = 10. (0)

Žák č. 15 provádí následující výpočty 500 – 100 = 400, 400 – 50 = 350, 200 + 200 + 100 = 500, 300 + 300 – 100 = 500, 500 – 0 = 500, 100 + 400 = 500. Odpovídá, že každý z nich viděl 4 filmy za rok. (0)

Žákyně č. 17 zaznamenává u Franty číslo 100 a u Pepíka 550 (počet Kč, které chlapci zaplatili za jeden film). Ve druhém kroku u Franty píše 200, ale u Pepíka chybně dvojnásobek 1 100 (dále 300 u Franty a 1 650 u Pepíka). (0)

Žák č. 18 přiřazuje cenu karty 500 Kč k pěti vstupům Franty. Dalších pět vstupů Franty znamená dvojnásobek vstupů pro Pepu, tedy celkem 10 vstupů. Odpovídá, že každý viděl 10 filmů za rok. (e)

Žákyně č. 19 přehledně zaznamenává do dvou sloupců počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. V prvním sloupci píše číslo 500, pod ním číslo 550 (první řádka), číslo 1 000 v řádce 10. Ve druhém sloupci pod sebou píše stovky. V desátém řádku nalézá shodu, každý z nich viděl 10 filmů. Jako druhou možnost uvádí žák možnost odhadu 7 filmů. Počítá 50 . 7 = 350, 350 + 500 = 850 a 100 . 7 = 700. Dále pokračuje obdobně s odhadem 9 filmů, až konečně dojde ke správnému počtu 10. Odpovídá, že každý viděl 10 filmů. (b1)

Žák č. 20 provádí součty ve dvou řadách (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). V prvním řádku píše 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Ve druhém řádku 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpočítává shodu na desáté pozici (počet filmů, které viděly obě děti). Odpovídá, že oba viděli 10 filmů za rok. (b1)

Žákyně č. 21 zaznamenává do dvou sloupců počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do prvního sloupce píše číslo 500 a pod něj osm padesátek, celkem 900. Do druhého sloupce píše pod sebe stovky. Přiřazuje jednu stovku k jedné padesátce. Přiřadí takto osm stovek k osmi padesátkám. Jedna stovka zůstává nepřiřazena. Devět stovek dává dohromady 900. Odpovídá, že Pepík s Frantou viděli 8 filmů a za všechny filmy zaplatili 900 Kč. (b1)

Žákyně č. 22 zaznamenává do dvou sloupců počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do prvního sloupce píše číslo 550 (součet čísla 500 a 50), dále 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Do druhého sloupce píše pod sebe 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpovídá, že oba viděli 10 filmů. (b1)

Posttest:

Žák č. 1 poznamenává, že Pepík má kartu za 500 Kč a Franta má za 500 Kč 5 vstupů. 5 vstupů pro Pepíka znamená 250 Kč, 250 . 2 = 500. Každý z nich má tedy 10 vstupů. Odpovídá, že oba dva uvidí 10 filmů. (e)

Žák č. 3 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady označené P píše za sebou 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Do druhé řady označené F píše za sebou 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpovídá, že oba dva viděli 10 filmů. (b1)

Žák č. 4 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady píše 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Do druhé řady píše 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Vytváří i třetí řadu, kde píše 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žák č. 5 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady píše číslo 500, za ním následuje deset padesátek. Do druhé řady píše deset stovek. Odpovídá, že oba viděli 10 filmů. (b1)

Žák č. 6 sčítá čísla uvedená v úloze. 500 + 100 + 50 = 650. Odpovídá, že dohromady platili 650 Kč. (0)

Žák č. 7 provádí dvakrát operaci dělení 500 : 50 = 10 a 500 : 100 = 5. Odpovídá, že každý z nich viděl 5 filmů. (0)

Žák č. 8 bez výpočtu odpovídá, že každý viděl 50 filmů. (0)

Žákyně č. 9 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady píše za sebou 500, za 500 deset 50, dohromady 1 000. Do druhé řady píše deset stovek, dohromady 1 000. Žák provádí výpočet, píše 9 . 50 = 450, 450 + 500 = 950, 950 + 50 = 1 000; 9 . 100 = 900, 900 + 100 = 1 000. (Žák nejprve odhaduje počet filmů na devět. Poté přidává další film a dochází ke správnému výsledku.) Odpovídá, že Pepík i Franta viděli 10 stejných filmů. (b1, b)

Žákyně č. 10 sčítá 500 + 50 + 100 = 650. Odpovídá, že každý z nich viděl 650 videí. (0)

Žákyně č. 11 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady označené P píše za sebou 500 (tu odděluje) a dále 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Do druhé řady označené F píše za sebou 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpovídá, že každý z nich viděl za tento rok 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 12 zaznamenává do dvou sloupců počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do prvního sloupce označeného P píše počet filmů postupně od 1 – 10, k číslu 500 postupně přičítá 50. Do druhého sloupce označeného F píše pod sebe stovky a vedle též počet filmů od 1 – 10. Odpovídá, že Franta a Pepík viděli za rok 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 13 zaznamenává do dvou sloupců počty Kč, které zaplatili Franta s Pepíkem. Do prvního sloupce označeného f píše pod sebe deset 100, dohromady 1 000. Do druhého sloupce píše číslo 500 a pod něj deset 50, dohromady 1 000. Odpovídá, že každý viděl 10 filmů a zaplatili 1 000 Kč. (b1)

Žák č. 15 píše, že Pepík viděl 2 filmy a Franta 1 film za rok. Proto byli překvapeni, že každý zaplatil stejně. Provádí výpočty 5 . 100 = 500, 100 . 1 = 100 a 40 + 10 = 50. (0)

Žákyně č. 17 píše, že Pepík viděl 20 filmů a Franta viděl 10 filmů. Postupně přičítá dvacet 50 (Pepík) a deset 100 (Franta). Zapomíná na cenu klubové karty v hodnotě 500 Kč. (0)

Žák č. 18 pamatuje si zadání z předešlého testu. Provádí výpočet 10 . 50 = 500, 500 + 500 = 1 000 a 10 . 100 = 1 000. Odpovídá, že každý viděl 10 filmů. (e)

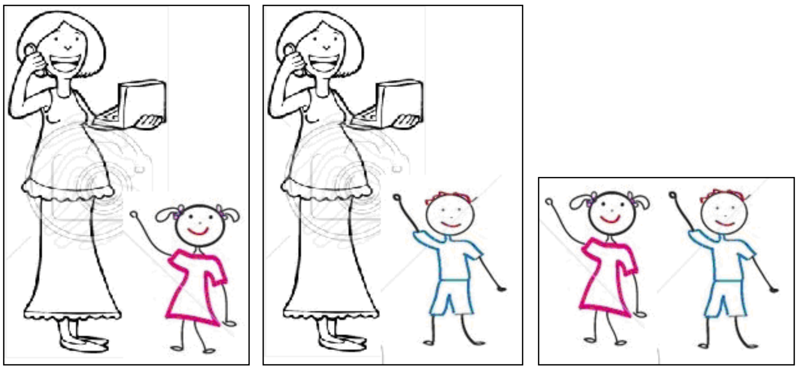
Žák č. 20 provádí součty ve dvou řadách (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). V prvním řádku označeném P píše 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Ve druhém řádku označeném F 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpočítává shodu na desáté pozici (počet filmů, které viděly obě děti). Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 21 provádí součty ve dvou sloupcích (počet Kč, které zaplatí Pepík a Franta). V prvním sloupci označeném P píše pod číslo 500 (cena za klubovou kartu) 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950 a 1 000. Ve druhém sloupci označeném F píše pod sebou 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 a 1 000. Spojuje číslo 550 s číslem 100, číslo 600 s číslem 200, atd. a jednotlivé spoje označuje čísly 1 – 10 (počet filmů). Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 22 zaznamenává do dvou řad počty Kč, které zaplatili Pepík s Frantou. Do první řady píše číslo 550 (součet čísla 500 a 50), dále 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000. Do druhé řady píše pod sebe 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Odpovídá, že Pepa i Franta viděli 10 filmů. (b1)

Žákyně č. 23 odhaduje počet návštěv na deset a provádí výpočet 10 . 50 = 500, 500 + 500 = 1 000 a 10 . 100 = 1 000. Odpovídá, že za rok každý z nich viděl 10 filmů. (b)

5.4 Úloha č. 3 (Experimentální třída)



52 let 49 let 21 let

Kolik let je mamince, Verunce a Michálkovi?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Pretest:

Žák č. 1 zjistil, že Verunka je o 3 roky starší než Michálek. Bez pokusu omylu rozkládá číslo 21 na 12 a 9 a udává tak věk Verunky 12 a Michálka 9. Zapisuje rovnice M + V = 52 a M + M = 49 (první M pro maminku je zvýrazněné). Žák dále bez neznámých dopočítává 52 – 40 = 12, 49 – 40 = 9. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Michálkovi 9 let a mamince 40 let. (c)

Žákyně č. 2 zjistila, že je Verunce více let než Michálkovi, neuvádí ale o kolik. Provádí početní operaci 11 + 10 = 21, dosazuje věk maminky 39 (druhý obrázek), číslo 39 napíše též k věku maminky (první obrázek). Potom provádí opravu věků dětí správně na 12 a 9, věk maminky ale nechává 39. Počítá 12 + 9 = 21, 39 + 9 = 49, 39 + 12 = 52 – chybně poslední dva výpočty, postup je správný. Odpovídá, že mamince je 39 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 3 rozkládá metodou pokusu omylu číslo 21 na 13 + 8 = 21. Dosazuje do prvních dvou rovnic. Nevychází věk maminky, proto mění věk dětí na 10 + 11 = 21. Opět nedostává stejný věk pro maminku. Nakonec dosazuje správně 12 + 9 = 21. Počítá

49 – 9 = 40, chybně nechává 52 – 13 = 40. Chybně má poslední výpočet, postup správně. Odpovídá, že mamince je 40 let. (a3)

Žák č. 4 uvádí, že je dívka o 3 roky starší než chlapec. Metodou pokusu omylu provádí rozklad čísla 21 na 10 a 11. Nevychází mu stejný věk pro maminku, proto mění věk dětí na 12 a 9. Výpočet pro zjištění věku matky chybí, správně uvádí v odpovědi věk 40. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Míšovi 9 let a mamince 40 let. (a3)

Žák č. 5 vychází z faktu, že Michálek je o 3 roky mladší než Verunka. Řeší rovnici 52 – 49 = 3. Dále uvádí rovnice Ma + Ve = 52, My + Ma = 49. Řeší 21 – 3 = 18 : 2 = 9 + 3 = 12. Uvedené příklady jsou sice bez neznámých, odpovídají ale algebraické metodě (x + 3 + x = 21). Žák dopočítává 52 – 12 = 40, 49 – 9 = 40. Odpovídá, že Michálkovi je 9 let, Verunce je 12 let a mamince je 40 let. (e)

Žák č. 6 porovnává číselné údaje u prvních dvou obrázků. Zjišťuje, že Michálek je o tři roky mladší. Rozkládá číslo 21 na 10 a 11. Nevychází mu věk pro maminku, proto mění věk dětí na 12 a 9. U jednotlivých obrázků rozděluje čísla 52, 49 a 21 na 40/12, 40/9 a 12/9. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 8 vychází z faktu, že je Verunka o tři roky starší než Michálek. Rozkládá číslo 21 na 14 a 7. Nevychází mu věk maminky. Rozkládá tedy číslo 21 na 11 a 10. Opět mu nevychází věk maminky. Mění věk dětí na 12 a 9. Dopočítává věk maminky 30 + 12 = 52 (chybně) a 40 + 9 = 49 a v odpovědi nepochopitelně sčítá věk maminky 30 + 40 = 70. (a3)

Žákyně č. 9 vychází z předpokladu, že je mamince 40 let. Dopočítává věk Verunky 12 let a Michálka 9 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a4)

Žákyně č. 10 nepochopila, že se jedná o jednu maminku. Rozkládá číslo 21 na 13 a 8 (věk Verunky a Michálka). Dále dopočítává věk maminky Michálka 41 a věk maminky Verunky 40 (navíc chybný výpočet 52 – 13 = 40). Odpovídá, že Michálkovi je 8 let, Verunce 13 let, mamince Verči 40 let a mamince Michálka 41 let. (0)

Žákyně č. 12 rozkládá číslo 21 na 11 a 10. Počítá 11 + 10 = 21. Nevychází jí věk maminky, proto zkouší další početní operace 8 + 13 = 21. Nakonec dochází správně k rovnici

9 + 12 = 21. Dále provádí výpočty pro zjištění věku maminky 49 – 9 = 40 a 52 – 12 = 40. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Michálkovi 9 let a mamince 40 let. (a3)

Žákyně č. 13 odhaduje, že je mamince 40 let. Z číselného údaje na druhém obrázku dopočítává věk Michálka 9 let a z údaje na třetím obrázku věk Verunky 12 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a4)

Žákyně č. 14 provádí tyto početní operace 52 – 21 = 31, 49 – 21 = 28. Nedochází k žádnému závěru. (0)

Žák č. 15 se domnívá, že by mamince mělo být 49 let, Verunku a Michálka poměřoval. Přišlo mu, že je Verunka větší, proto jí přiřadil 9 let, Michálkovi 5 let. Neplatí ani jedna rovnost. (0)

Žák č. 16 provádí výpočet 21:2 (třetí obrázek). Dostává 10,5. Verunce a Michálkovi je tedy 10,5 let. Věk dětí upravuje na 10 let, jak vyplývá z následujícího výpočtu. Pod první obrázek píše 42 (odečítá 52 – 10 = 42) a pod druhý obrázek 39 (49 – 10 = 39). Obě čísla sčítá 42 + 39 = 81 a dostává věk pro maminku. Odpovídá, že mamince je 81 let, Verunce 10,5 let a Michálkovi 10,5 let. (0)

Žákyně č. 17 vychází porovnáním dvou prvních obrázků z toho, že je Verunka starší než Michálek. Neuvádí o kolik. Odhaduje, že je Verunce 11 let a Michálkovi 10 let, aby součet věku dětí dával dohromady 21. Provádí výpočet 49 – 10 (druhý obrázek) a dostává 39. Mamince je tedy 39 let. Údaje na prvním obrázku nechává bez povšimnutí. (a3)

Žák č. 18 vychází z předpokladu, že Verunka je o tři roky starší než Michálek. Dále provádí výpočet 21 – 3 = 18 : 2 = 9 + 3 = 12. Verunce je 12 let, Michálkovi 9 let. Mamince je tedy 40 let. Žák sice nepoužívá neznámé pro věk maminky a dětí, ale rovnice řeší. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (e)

Žákyně č. 19 se pokouší o dvě různé metody řešení úkolu. V první metodě stanovuje věk maminky odhadem na 40 let. Dopočítává správně věk Verunky 12 let a věk Michálka 9 let. Kontroluje s číselným údajem 21 (třetí obrázek). (a4)

Ve druhé metodě žákyně odhaduje, že by Verunce mohlo být 10 let a Michálkovi 11 let (třetí obrázek). Kontroluje věk s věkem maminky (první dva obrázky) a přepočítává věk dětí. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 20 odhaduje věk Verunky na 11 let a věk Michálka na 10 let (třetí obrázek). To mu ale nevychází s výpočty pro stanovení věku maminky (první dva obrázky). Uvědomuje si, že Verunce je o tři roky více než Michálkovi. Přičítá tedy jeden rok Verunce a odečítá jeden rok Michálkovi. Stanovuje správně věk pro Verunku 12 let a pro Michálka 9 let. Nakonec dopočítá věk pro maminku 40 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Veronice 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žákyně č. 21 porovnává čísla 52 a 49. Zjišťuje, že je Verunka starší. Číslo 21 rozkládá na 11 a 10 pro věk dětí. Nevychází jí věk maminky. Mění věk dětí na 12 a 9. Dopočítává věk maminky. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žákyně č. 22 odhaduje věk Verunky na 11 let, Michálka na 10 let. Protože nevychází věk maminky, mění věk dětí na 13 a 8 let. Řeší rovnice 52 – 11 = 41 a 52 – 13 = 39. Nakonec dochází k věku děti 12 a 9 a provádí výpočty 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Posttest:

Žák č. 1 vychází z faktu, že Verunka je o tři roky starší než Michálek (první dva obrázky). Správně doplňuje rovnici 9 + 12 = 21. Výpočet ověřuje z obou prvních rovnic, tedy 40 + 12 = 52 a 40 + 9 = 49. Označuje neznámými M – maminka, m – Michálek, v – Verunka a první rovnici jako o1, druhou rovnici o2 a třetí rovnici o3. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (c)

Žák č. 3 rozkládá číslo 21 na 11 a 10. Nevychází věk maminky, proto mění věk dětí na 12 a 9 a řeší 12 + 9 = 21 (třetí obrázek). Po zjištění věku Verunky a Michálka dopočítává věk maminky 49 – 9 = 40 a 52 – 12 = 40. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 4 poznamenává, že je Verunka o tři roky starší než Michálek. Rozkládá číslo 21 na 11 a 10. Nevychází věk maminky. Mění věk dětí na 12 a 9. Počítá 12 + 9 = 21. Věk maminky pak správně dopočítá na 40 let bez výpočtu. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 5 uvádí, že si zadání pamatuje z posledního testu. Pod jednotlivé obrázky dopisuje příklady 40 + 12, 40 + 9 a 12 + 9. Pod slova v zadání úlohy udává věk maminky 40, Verunky 12 a Michálkovo 9 let. (e)

Žák č. 6 uvádí rozdíl mezi věkem Verunky a Michálka 3 roky. Rozkládá číslo 21 na 11 a 10. Nevychází věk maminky, mění proto věk dětí na 12 a 9. Ke třetímu obrázku doplňuje čísla 12 a 9 (věk Verunky a Michálka). Poté dopisuje číslo 40 jako věk maminky pod oba první obrázky. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a3)

Žák č. 7 metodou pokusu a omylu rozděluje číslo 21 na sčítance 10 a 11. To mu následně nevychází při dosazení do prvních dvou rovnic. Zkouší tedy dále. Číslo 21 rozděluje na sčítance 12 a 9. Řeší 12 + 9 =21 a dále 40 + 9 = 49 a 40 + 12 = 52. (a3)

Žák č. 8 nejdříve stanovuje věk Verunky a Michálka. Metodou pokusu a omylu zkouší rozklad čísla 21 na čísla 11 a 10 (věk Verunky a Michálka). Nakonec správně dochází k číslům 12 a 9. Do obrázku dopisuje číslo 40 jako věk maminky. (a3)

Žákyně č. 9 metodou pokus omyl zkouší dosadit číslo 11 (věk Verunky) do rovnice (první obrázek). Stanovuje tak věk pro maminku 41 let. V další rovnici (druhý obrázek) zjišťuje, že by číslo 8 (věk Michálka) neodpovídal třetí rovnici. Zvyšuje tedy věk Verunky o jeden rok 12 let a dopočítává věk maminky 40 let. Dosazuje do rovnice (druhý obrázek). Dostává číslo 9 (věk Michálka). Nakonec uvádí tři rovnice 52 – 12 = 40, 49 – 9 = 40 a 12 + 9 = 21. (a5)

Žákyně č. 10 uvádí dva různé věky pro maminku, 48 a 39 let, pro Verunku 10 let a Michálka též 10 let. Výpočty nejsou v záznamu. Ani jedna (pomyslná) rovnice nemá řešení. (0)

Žákyně č. 11 zkouší metodou pokus omyl dosadit věk Verunky 11 let a Michálka 10 let. Uvedená čísla věku dětí nepřivádí k jednomu číslu věku maminky. Žákyně se dostává k věku 12 let pro Verunku a 9 let pro Michálka. Snadno pak přichází k věku maminky

40 let. Výsledky ověřuje v rovnicích. 12 + 9 = 21, 40 + 12 = 52 a 40 + 9 = 49. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a3)

Žákyně č. 12 rozkládá metodou pokusu omylu číslo 21 na 11 a 10. Po dosazení do dvou rovnic (první dva obrázky) jí nevychází shodný věk pro maminku. Pokračuje tedy čísly 12 let pro Verunku a 9 let pro Michálka. Nakonec už snadno dopočítává věk maminky 40 let pomocí rovnic 49 – 9 = 40 a 52 – 12 = 40. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žákyně č. 13 odhaduje věk maminky 40 let. Snadno pak dopočítává věk Verunky 12 let a Michálka 9 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a4)

Žák č. 15 rozkládá metodou pokusu omylu číslo 21 na dva sčítance 13 a 8. Dostává věk maminky 41 (druhý obrázek) a 39 (první obrázek). Mění tedy věk pro Verunku 12 let a Michálka 9 let. Dopočítává správně věk maminky 40 let. Ověřuje své výsledky v rovnicích 40 + 9 = 49, 40 + 12 = 52 a 12 + 9 = 21. Odpovídá, že mamince je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a3)

Žákyně č. 17 rozkládá metodou pokusu omylu číslo 21 na dva sčítance 10 (věk Verunky) a 11 (věk Michálka). Nevychází jí stejný věk pro maminku, proto mění věk dětí 12 let (věk Verunky) a 9 let (věk Michálka). Správně dopočítává věk maminky 40 let. Výpočet kontroluje ve dvou rovnicích 52 – 12 = 40 let a 49 – 9 = 40 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák č. 18 uvádí v testu, že si pamatuje zadání úkolu. Číslo 21 rozkládá na 9 a 12 (věk Michálka a Verunky). Uvědomuje si rozdíl 3 let porovnáním prvních dvou čísel na obrázcích. Poté dopočítává věk maminky 40 let. Používá proměnné ma – maminka, v – Verunka a m – Michálek. (e)

Žák č. 20 uvádí rozdíl věku dětí o tři roky. Přesto zkouší metodou pokusu omylu rozdělit číslo 21 nejprve na 11 a 10. Poté co mu nevychází stejné číslo pro věk maminky, mění věk Verunky na 12 let a Michálka 9 let. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žákyně č. 21 rozkládá číslo 21 na 11 a 10. Nevychází věk maminky. Mění proto věk dětí na 12 a 9. Snadno pak dopočítává věk maminky 40 let. Výsledky ověřuje v rovnicích 40 + 12 = 52, 40 + 9 = 49 a 12 + 9 = 21. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žákyně č. 22 rozkládá číslo 21 na 9 a 12 (věk Michálka a Verunky). Počítá rovnici 9 + 12 = 21. Nakonec dopočítává věk maminky 40 let. Své výsledky ověřuje v rovnicích 40 + 12 = 52, 40 + 9 = 49 a 12 + 9 = 21. (c)

Žákyně č. 23 pokusem omylem dosazuje číslo 42 (věk maminky) do rovnic. Sčítáním pod sebe počítá 42 + 10 = 52 a 42 + 7 = 49. Uvědomuje si, že 10 + 7 nedává dohromady 21 (třetí obrázek). Mění proto věk maminky na 40. Výpočty jsou tedy poté v pořádku. 40 + 12 = 52 a 40 + 9 = 49 a 12 + 9 = 21. Odpovídá, že Michálkovi je 9 let, Verunce 12 let a mamince 40 let. (a5)

5.5 Řešitelské strategie v experimentální třídě

Vyhodnocení úloh experimentální třídy						
žák/žákyně	Úloha č. 1		Úloha č. 2		Úloha č. 3	
	I	II	I	II	I	II
žák 1	a1	a1	e	e	c	c
žákyně 2	0	x	0	x	a3	x
žák 3	a2	a2	0	b1	a3	a3
žák 4	a1	a1	0	b1	a3	a3
žák 5	0	a1	0	b1	e	e
žák 6	0	a1	0	0	a3	a3
žák 7	a2	x	0	0	x	a3
žák 8	x	x	0	0	a3	a3
žákyně 9	a2	a2	b1	b1, b	a4	a5
žákyně 10	0	a1	x	0	0	0
žákyně 11	x	a1	b1	b1	x	a3
žákyně 12	a2	a1	0	b1	a3	a3
žákyně 13	a2	b3	b1	b1	a4	a4
žákyně 14	0	x	0	x	0	x
žák 15	0	0	0	0	0	a3
žák 16	0	x	x	x	0	x
žákyně 17	0	x	0	0	a3	a3
žák 18	a3	a3	e	e	e	e
žákyně 19	a2	a1	b1	x	a3, a4	x
žák 20	a1	a1	b1	b1	a3	a3
žákyně 21	0	x	b1	b1	a3	a3
žákyně 22	a1	a2	b1	b1	a3	c
žákyně 23	x	a1	x	b	x	a5

Tabulka 1 – Srovnání použitých metod řešení tří úloh v pretestu a posttestu v experimentální třídě

Vysvětlivky:

- I, II – první a druhá fáze, pretest a posttest
- x – nepřítomnost žáka/žákyně
- 0 – absence metody
- barevně odlišené jsou změny v použité metodě

Úloha č. 2 – u českých žáků (experimentální třída) byly zaznamenány dvě odlišné metody řešení, proto jsou uvedeny zde jako numerická metoda (b1) a deduktivní metoda (e).

- Numerická metoda (b1):

Tato metoda je založena na postupných výpočtech žáka od první návštěvy kina do poslední. Žák zakresluje dva sloupce nebo řádky s označením pro Pepíka a Frantu a počítá v prvním řádku či sloupci 50 + 500 = 550 a 100, ve druhém řádku či sloupci 100 + 500 = 600 a 200, dokud mu v desátém řádku nevyjde Pepík 50 . 10 = 500; 500 + 500 = 1 000 a Franta 100 . 10 = 1 000. (žáci/žákyně 3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22)

- Deduktivní metoda (e):

V této metodě žák přiřazuje cenu karty 500 Kč k pěti vstupům Franty. Dalších pět vstupů Franty znamená dvojnásobek vstupů pro Pepu, tedy celkem 10 vstupů. (žáci 1 a 18)

Úkol č. 3 – u českých žáků (experimentální třída) byly zaznamenány tři odlišné metody řešení, proto jsou zde uvedeny jako numerická metoda (a3), (a4) a (a5).

- Numerická metoda (a3):

U této metody žák uvádí, že rozdíl věků dětí jsou tři roky. Číslo 21 ale rozkládá na dvě čísla, jejichž součet není 21 (většinou na 11 a 10). Nevychází věk maminky. Metodou pokusu-omylu dochází k věku dětí 9 a 12, mamince je tedy 40 let. (většina žáků)

- Numerická metoda (a4):

U této metody žák vychází přímo ze správného předpokladu, že je mamince 40 let. Dopočítává věk Verunky 12 let a Michálka 9 let. (žákyně 9, 13 a 19)

- Numerická metoda (a5):

V této metodě žák odhaduje věk maminky. Řeší první dvě rovnice a zjišťuje, že mu nevychází správný věk pro děti. Metodou pokusu omylu tedy mění věk maminky, než dojde ke správnému výsledku. (žákyně 9 a 23)

U dvou žáků dochází k tomu, že si zadání úloh pamatují z pretestu. Úlohy řeší většinou krátce pomocí výpočtů bez dalšího vysvětlování. Metody řešení úloh jsou jim přiřazeny stejně v první i druhé fázi.

5.6 Úloha č. 1 (Srovnávací třída)

Babička má na farmě slepice a koně. Dohromady mají 10 hlav a 26 nohou. Kolik slepic a kolik koňů je na farmě?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Pretest:

Žák/žákyně č. 2 kreslí obrázky slepic a koňů. Nad hlavou každého zvířete píše 1, u nohou zvířete píše dvě jedničky (slepice) a čtyři jedničky (kůň). Nerozlišuje, zda jde o hlavy či nohy a sčítá 3 + 5 = 8 + 3 = 11 + 3 = 14 + 5 = 19 + 3 = 22 + 3 = 25. (pozn. 3 je součet dvou noh a jedné hlavy slepice, 5 je součet čtyř noh a jedné hlavy koně). (0)

Žák/žákyně č. 3 kreslí obrázky 5 koňů s 20 nohami. Zjišťuje, že počet koňů je příliš velký. Dále správně kreslí obrázky 7 slepic a 3 koní se zápisem 3 + 7 = 10 (počet hlav) a 12 + 14 = 26 (počet nohou). (a1)

Žák/žákyně č. 4 kreslí nejprve obrázky deseti zvířat, 6 slepic a 4 koní. U hlavy slepice zaznamenává 1 a u nohou 2, u hlavy koně 1 a nohou 4. Počet nohou nevychází, proto gumuje obrázek koně a překresluje jej na slepici. Odpovídá, že babička má 7 slepic a 3 koně. (a1)

Žák/žákyně č. 5 neprovádí žádný výpočet ani nekreslí žádný obrázek. V odpovědi uvádí, že si spočítal, že koně mají čtyři nohy a čtyři nohy mají jednu hlavu. (0)

Žák/žákyně č. 6 kreslí v jedné řadě slepice a v druhé řadě koně. Nad hlavou každé slepice a koně píše 1, u nohou každé slepice 2 a koně 4. Postupně odečítá počet slepic i jejich nohou (10 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 = 3, 26 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 = 12). Dochází tak ke správnému výsledku. Provádí kontrolu výpočtem (7 . 2) + (3 . 4) = 14 + 12 = 26. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žák/žákyně č. 7 kreslí 5 koní a 5 slepic. U hlavy každého zvířete zaznamenává 1, u nohou koně 1, 2, 3, 4 a slepic 1, 2. Zjišťuje, že je počet nohou vyšší než požadovaných 26. Škrtá jednoho koně. Práci nedokončuje. (a1)

Žák/žákyně č. 8 provádí výpočet 26 : 4 = 6 (zbytek 2) a 2 : 2 = 1, dále pokračuje výpočty 26 : 2 = 13 a 13 : 4 = (nedokončuje výpočet). Na další řádce kreslí 10 hlav, u devíti zaznamenává číslo 2 a u jedné hlavy číslo 4. Na třetí řádce se vrací k výpočtům pomocí nohou 4 . 5 = 20 a 3 . 2 = 6, 20 + 6 = 26. (0)

Žák/žákyně č. 9 na řádce zaznamenává postupně 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Uvědomuje si, že je to moc velké číslo pro počet koní. Přepisuje čísla čtyři na čísla dvě, až se dostává k řadě 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 26. V druhé řádce pro kontrolu sčítá počet hlav 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10. Odpovídá, že babička má ve stodole 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žák/žákyně č. 10 odhaduje počet slepic na 5 a počet koní též na 5. Dále vypočítává počet nohou 2 . 5 = 10 a 5 . 4 = 20. Nesedí počet nohou. Do řádky tedy znovu zaznamenává 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Přepisuje jednu dvojku na čtyřku a provádí výpočet 28. Přepisuje další dvojku na čtyřku a dostává se ke správnému počtu nohou 26. (a1)

Žák/žákyně č. 12 kreslí 16 nohou pro koně a 10 nohou pro slepice. Nevychází počet hlav. Gumuje 4 nohy jednoho koně a kreslí 4 nohy pro dvě slepice. Provádí kontrolní výpočty 14 + 12 = 26 a 7 + 3 = 10. Odpovídá, že babička má na farmě 3 koně a 7 slepic. (a2)

Žák/žákyně č. 13 provádí výpočty 26 : 2 = 13, 26 : 4 = 6 (2) a 26 : 10 bez řešení. Zapisuje si podle pokynu učitelky, že 1 slepice má dvě nohy a jednu hlavu, 1 kůň má čtyři nohy a jednu hlavu. (0)

Žák/žákyně č. 14 provádí výpočty 26 : 2 = 13 a 26 : 4 = 6 (2). (0)

Žák/žákyně č. 15 vychází z počtu hlav 10. Do políček pro deset čísel zaznamenává 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 30. Počet nohou je více, proto ubírá počet jednoho koně a nahrazuje ho jednou slepicí. Řeší 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 28. Pro svůj další výpočet obdobně snižuje počet jednoho koně a nahrazuje ho jednou slepicí a dochází ke správnému výsledku 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 26. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a1)

Žák/žákyně č. 16 kreslí pět hlav pro slepice a pět hlav pro koně. Pod obrázky provádí výpočet pro počet nohou 2 . 5 = 10 a 4 . 5 = 20. Škrtá jednoho koně. Úkol nedokončuje. (a1)

Žák/žákyně č. 17 píše do řady počet hlav 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Do další řádky sčítá počet nohou zvířat. 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Porovnává výpočet s počtem hlav. Nahrazuje postupně počet nohou jednoho koně za počet nohou slepice, až dochází ke správnému součtu 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 26. Odpovídá, že babička má na farmě 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žák/žákyně č. 18 kreslí postupně za sebou obrázky slepice, kůň, slepice, kůň, slepice, kůň, slepice, kůň, slepice. Počet nohou je 26, ale počet zvířat je 9. Překresluje tedy jednoho koně na dvě slepice a dostává se ke správnému výsledku. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a2)

Žák/žákyně č. 19 kreslí obrázky šesti slepic a čtyř koní. U nich píše počet hlav 1 a počet nohou (2 pro slepice a 4 pro koně), celkem tedy číslo 3 u slepice (1 + 2) a číslo 5 u koně (1 + 4). Počet hlav i nohou zvířat je 10 + 26 = 36. 6 . 3 = 18 a 4 . 5 = 20. 18 + 20 = 38. Gumuje jednoho koně a kreslí jednu slepici. Provádí výpočet 3 . 7 = 21 a 3 . 5 = 15. 21 + 15 = 36. Odpovídá, že koně byli 3 a slepic bylo 7. (a1)

Žák/žákyně č. 20 uvádí, že si vypočítá, kolik má jedna slepice a jeden kůň nohou. Dále píše, že musí zjistit, kolik má jeden kůň a jedna slepice hlav. Provádí výpočet 10 : 6 = 1 (zb. 4). (0)

Žák/žákyně č. 21 provádí výpočty 4 + 2 = 6, 26 : 6 bez řešení, 26 + 10 = 36, 36 : 6 = 6, 6 : 2 = 3. (0)

Žák/žákyně č. 22 provádí výpočty 26 : 2 = 13 a 26 – 10 = 16. (0)

Posttest:

Žák/žákyně č. 1 píše, že na farmě bylo 5 koní a 6 slepic, celkem tedy 11 zvířat. 0

Žák/žákyně č. 2 kreslí obrázky čtyř slepic a čtyř koní. Odpovídá, že na farmě byly 4 slepice a 4 koně, které mají 8 hlav a 26 nohou. (0)

Žák/žákyně č. 3 nejdřív provádí výpočet 26 : 2 = 14 a 14 : 2 = 7. Číslo sedm znamená počet slepic. Pod výpočtem jsou zaznamenány obrázky zvířat, sedm slepic, nad hlavami 1 až 7, u nohou 1, 2 až 13, 14 a tři koně u hlav 8 až 10, u nohou 15, 16, 17, 18 až 23, 24, 25, 26. Odpovídá, že babička má 7 slepic a 3 koně. (a1)

Žák/žákyně č. 5 píše, že kreslil slepice, dokud mu nevyšlo sedm a pak přidal tři koně. Řešení je bez výpočtů, bez jakýchkoli úprav obrázků. (0)

Žákyně č. 7 uvádí, že namalovala 7 slepic a spočítala jim nohy. Dále píše, že zbývá 12 nohou pro tři koně. Z obrázků ale vyplývá, že namalovala nejdříve 4 koně, jednoho později vygumovala. Provádí kontrolní výpočet pro počet slepic 7 . 2 = 14, pro koně 3 . 4 = 12 a počet jejich nohou 14 +12 = 26. (a1)

Žák/žákyně č. 8 vychází z počtu nohou 26, pět slepic a čtyři koně. Nevychází mu počet hlav, zkouší proto jinou kombinaci, až dochází ke správnému počtu. (a2)

Žák/žákyně č. 9 označuje deset polí s nápisem hlava a dvacet šest polí s nápisem noha. Dále propojuje nápisy s názvem noha po dvou a po čtyřech. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žák/žákyně č. 10 kreslí nohy pro slepice a koně. U slepic vytváří pět dvojic, u koní čtyři čtveřice 10 + 16 = 26. Kontroluje počet hlav, je jich 9. Z jedné čtveřice utváří dvě dvojice a dostává se ke správnému výsledku. Odpovídá, že na farmě má babička 3 koně a 7 slepic. (a2)

Žák/žákyně č. 11 odhaduje počet slepic na 6 a počet koní na 4. Zjišťuje, že mý vyšší počet nohou, proto snižuje počet o jednoho koně a dochází ke správnému výsledku. (a1)

Žák/žákyně č. 12 kreslí šest čtveřic nohou pro koně. Další čtveřicí by převýšila počet požadovaných nohou a nezískala potřebný počet hlav, proto snižuje postupně počet koní, až dochází ke správnému počtu 3. U koní píše 3 hlavy a 12 nohou, u slepic 7 hlav a 14 nohou. Odpovídá, že babička má 3 koně a 7 slepic. (a2)

Žák/žákyně č. 13 provádí výpočty 26 : 10, 26 : 4 a 26 : 2, které gumuje. Pokouší se o grafické znázornění deseti hlav a dvaceti šesti nohou, ze kterého nevyplývá žádný postup. (0)

Žák/žákyně č. 14 kreslí deset hlav a dvacet šest nohou. Z grafického znázornění nevyplývá žádný postup. (0)

Žák/žákyně č. 15 6 x postupně odečítá číslo 4 od čísla 26. Zbyde mu číslo 2. Proto postupně nahrazuje čtyřky dvěma dvojkami, celkem tedy tři čtyřky, až dojde ke správnému počtu hlav. Odpovídá, že na farmě jsou 3 koně a 7 slepic. (a3)

Žák/žákyně č. 16 kreslí 16 nohou pro koně a 10 nohou pro slepice. Nevychází počet hlav. Gumuje čtyři nohy pro koně a dokresluje čtyři nohy pro slepice. Odpovídá, že na farmě je 7 slepic a 3 koně. (a2)

Žák/žákyně č. 17 sčítá 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 26. Provádí kontrolní výpočet 3 . 4 + 7 . 2 = 26. Odpovídá, že na farmě je 5 slepic a 4 koně (zřejmě přehlédnutí). (a3)

Žák/žákyně č. 18 vychází z počtu nohou. Počítá 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 a 4 + 4 + 4 + 4 = 16. Nevychází počet hlav, proto ubírá jednoho koně a řeší 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 a 4 + 4 + 4 = 12. 14 + 12 = 26. Odpovídá, že babička má na farmě sedm slepic a tři koně. (a2)

Žák/žákyně č. 19 provádí výpočet 26 : 4 = 6 (3) a 26 : 2 = 12. (0)

Žák/žákyně č. 20 provádí výpočet 10 : 2 = 5 a 26 : 2 = 13. Odpovídá, že na farmě je 10 slepic a koní a mají dohromady 26 nohou. (0)

Žák/žákyně č. 22 kreslí obrázky čtyř koní a čtyř slepic. Žádný početní výkon nezaznamenává. (0)

Žák/žákyně č. 23 symbolicky kreslí 26 nohou. Tvoří nejprve čtyři čtveřice a pět dvojic. Nevychází počet hlav, proto rozkládá jednu čtveřici na dvě dvojice. (a2)

5.7 Úloha č. 2 (Srovnávací třída)

Pepík měl loni kartu do Cinema City, za kterou zaplatil 500 Kč. Za každý film pak navíc zaplatil pouze 50 Kč. Franta neměl klubovou kartu, proto za každý film zaplatil 100 Kč. Během roku viděli Pepík i Franta stejné filmy a byli překvapeni, že každý z nich zaplatil stejnou částku. Kolik filmů každý z nich viděl tento rok?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Pokus se najít různé způsoby řešení.*

Pretest:

Žák/žákyně č. 2 provádí výpočty 100 . 50 = 500, 500 + 50 = 550 a 500 : 100 = 5. Odpovídá, že Pepík za film zaplatil navíc pouze 5 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 3 provádí výpočty 500 + 50 = 550, 550 : 100 = 6 (50) – chybný výpočet. Odpovídá, že každý zaplatil 500 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 4 vytváří dva sloupce a pojmenovává je Pepík a Franta. U Pepíka v deseti řádcích sčítá 50 + 50 = 100, u Franty píše v deseti řádcích 100. Po sečtení deseti stovek dostává 1 000 Kč. Odpovídá, že každý zaplatil 1 000 Kč za jeden rok, Pepík i Franta šli do kina 10 x. (b2)

Žák/žákyně č. 5 provádí výpočty 100 . 50 = 5 000 (Pepík) a 50 . 100 = 5 000 (Franta). Dále řeší 5 000 : 10 = 50. Odpovídá, že oba chlapci viděli 50 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 6 Vytváří dva sloupce nazvané Pepík a Franta. Pod Pepíkem píše číslo 500 a postupně deset padesátek. Pod Frantou píše deset stovek. Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 7 provádí výpočty 100 + 10 = 110, 110 + 110 + 110 + 110 + 110 = 550 a 1 000 + 110 + 110 + 110 + 110 + 110 = 1 550. Slovní odpověď nezaznamenává. (0)

Žák/žákyně č. 8 vytváří dva sloupce. Do prvního sloupce zaznamenává postupně 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 a v desátém řádku 500 + 500 = 1 000. Do druhého sloupce zaznamenává postupně 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 a 1 000. V řádce 6 provádí výpočet 300 + 500 = 800 (ještě se nerovná číslu 1 000). Odpovídá, že oba viděli 10 filmů a platili 1 000 Kč. (b1)

Žák/žákyně č. 9 vytváří dva řádky. Do prvního řádku zaznamenává postupně 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 1 000. Do druhého řádku zaznamenává postupně 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 500 + 500 = 1 000 (jedna pětistovka navíc). Odpovídá, že Pepík s Frantou dohromady viděli 10 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 10 provádí odhad počtu filmů na šest a počítá 50 . 6 = 300, 6 . 100 = 600. Zvyšuje svůj odhad na deset filmů a počítá chybně 10 . 50 = 500 a 10 . 100 = 100. Dále postupně snižuje počet filmů z devíti (9 . 50 = 450 a 9 . 100 = 900) na jeden (1 . 50 = 5 a 1 . 100 = 100). Dále se pokouší o dvě řady P a F, kde postupně sčítá v první řadě 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 a ve druhé řadě 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100. Odpovídá, že Pepík a Franta viděli 8 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 12 vytváří dvě řady, které pojmenovává Pepík a Franta. Do první řady píše 500 a sčítá je s dvanácti padesátkami. Jako výsledek poznamenává 1 100. Ve druhé řadě sčítá dvanáct stovek. Zapisuje výsledek 1 200. Gumuje dvě padesátky z první řady a dvě stovky z druhé řady. Odpovídá, že Pepík a Franta viděli 10 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 13 provádí výpočty 500 : 50 = 10 a 500 : 100 = 5. Odpovídá, že Pepík viděl za 1 rok 10 filmů a Franta viděl za 1 rok 5 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 14 zaznamenává pouze slova Franta a Pepa a u nich čísla 100 a 50. (0)

Žák/žákyně č. 15 vytváří dvě řady. V první řadě sčítá deset padesátek a dostává tak součet 500. Ve druhé řadě sčítá pět stovek a dostává součet 500. Odpovídá, že Pepík viděl 10 filmů a Franta viděl 5 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 16 násobí 100 . 50 = 5 000. Odpovídá, že oba společně zaplatili 5 000 Kč a viděli 50 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 17 vytváří dvě řady. V jedné postupně sčítá 500 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 1 000, ve druhé řadě sčítá 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 +

100 + 100 + 100 + 100 = 1 000. Odpovídá, že Pepík i Franta viděli 10 filmů a zaplatili 1 000 Kč. (b1)

Žák/žákyně č. 18 vytváří dva sloupce. V prvním sloupci sčítá deset stovek, ve druhém sloupci sčítá deset padesátek. Součet v prvním sloupci je 1 000, součet ve druhém sloupci je 500. Odpovídá, že Franta viděl 10 filmů, Pepa viděl 10 filmů, Franta zaplatil 1 000 Kč a Pepa zaplatil 500 Kč plus 500 Kč za kartu. (a)

Žák/žákyně č. 19 provádí dva výpočty 500 : 50 = 10 (Pepík) a 500 : 100 = 5 (Franta). Odpovídá, že Pepík viděl 10 filmů a Franta 5 filmů a každý z nich zaplatil během roku 500 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 21 provádí dva výpočty 500 : 50 = 10 (Pepík) a 500 : 100 = 5 (Franta). Odpovídá, že Pepík viděl 10 filmů a Franta 5 filmů a každý z nich zaplatil během roku 500 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 22 provádí výpočty 500 : 100 = 5 a 500 : 50 = 10. Odpovídá, že Pepík viděl 10 filmů a Franta viděl 5 filmů. (0)

Posttest:

Žák/žákyně č. 1 neuvádí žádné výpočty, pouze odpovídá, že Pepík měl slevu 50 Kč, Franta platil o 50 Kč více a společně viděli 50 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 2 provádí výpočty 100 . 5 = 500 (Pepík) a 50 . 50 = 100 (chybný výpočet), 100 . 5 = 500 (Franta). (0)

Žák/žákyně č. 3 provádí výpočty 500 : 50 = 10, 500 : 100 = 5, 10 + 5 = 15, 15 + 50 = 65, 65 : 5 = 13, 13 + 65 = 78, 78 : 5 = 15 (3). Odpovídá, že chlapci viděli 15 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 4 vytváří dva sloupce a pojmenovává je Pepík a Franta. U Pepíka v deseti řádcích sčítá 50 + 50 = 100, u Franty píše v deseti řádcích 100. Po sečtení deseti stovek dostává 1 000 Kč. Odpovídá, že každý viděl 10 filmů. (b2)

Žák/žákyně č. 5 provádí výpočty 100 . 50 = 5 000 a 5 000 : 10 = 50. Odpovídá, že oba zaplatili 5 000 Kč a viděli 50 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 7 provádí výpočty 10 . 10 = 100, 100 . 10 = 1 000, 2 . 1 000 = 2 000. (0)

Žák/žákyně č. 8 zaznamenává dva sloupce pojmenované Pepík a Franta. Ve sloupci u Pepíka píše 500 a pod ní deset padesátek. Ve sloupci Franta píše pod sebe deset stovek. Provádí kontrolní výpočty 50 . 10 = 500, 500 + 500 = 1 000 a 100 . 10 = 1 000. (b1)

Žák/žákyně č. 9 uvádí pouze, že Pepík platí 50 Kč a Franta platí 100 Kč. Slovní odpověď chybí. (0)

Žák/žákyně č. 10 vytváří dvě řady, které pojmenovává Pepík a Franta. Do první řady píše 500 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 1 000 a do druhé řady píše 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 = 1 000. Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 12 vytváří dvě řady, které pojmenovává Pepa a Franta. V první řadě sčítá 500 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 1 000. Ve druhé řadě sčítá 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 1 000. Nad každou padesátkou i stovkou provádí číslování jedna až deset. Odpovídá, že každý z nich viděl ten rok 10 filmů. (b1)

Žák/žákyně č. 13 provádí výpočet 500 : 50 = 10 a 500 : 100 = 5. Odpovídá, že Pepík i Franta viděli 15 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 14 provádí výpočty 500 : 50 = 10, 500 : 100 = 5 a 5 . 100 = 500. Odpovídá, že Pepík s Frantou viděli 5 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 15 provádí výpočty 100 . 5 = 500, 50 . 5 = 250 a 50 . 10 = 500. Odpovídá, že Pepík viděl 10 filmů a Franta 5 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 16 neprovádí žádný výpočet, pouze znovu písemně konstatuje, že Pepík má Cinema City kartu za 500 Kč a platí za 1 film 50 Kč a Franta klubovou kartu nemá a platí za 1 film 100 Kč. Odpovídá, že za 1 rok Franta viděl 1 film a Pepík viděl 8 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 17 provádí výpočty 500 : 100 = 5, 500 : 50 = 10, 5 . 10 = 50 a 100 . 50 = 5 000. Odpovídá, že Franta viděl 5 filmů a Pepík 10 filmů. Tuto odpověď škrtá a přepisuje na to, že chlapci viděli 50 filmů. Společně pak zaplatili 5 000 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 18 vytváří dva sloupce pojmenované Pepík a Franta. V prvním sloupci píše 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1 000, ve druhém sloupci 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000. Provádí kontrolní výpočty 50 . 10 = 500 a 100 . 10 = 1 000. Odpovídá, že každý z nich viděl 10 filmů. (b1)

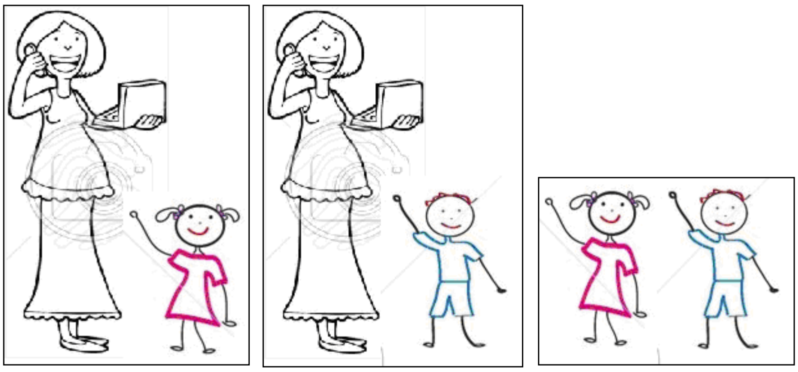
Žák/žákyně č. 19 provádí výpočty 500 : 50 = 10 a 500 : 100 = 5. Odpovídá, že Franta šel na 5 filmů, Pepík na 10 filmů a že každý z nich zaplatil 500 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 20 provádí výpočty 500 : 100 = 5, 500 : 50 = 10 a 10 + 5 = 15. Odpovídá, že Pepík a Franta šli na 15 filmů. (0)

Žák/žákyně č. 22 provádí výpočet 500 : 50 = 5. Odpovídá, že každý z nich viděl 5 filmů a zaplatil 500 Kč. (0)

Žák/žákyně č. 23 zaznamenává pouze dvě věty, že Pepík platí 50 Kč a Franta platí 100 Kč. (0)

5.8 Úloha č. 3 (Srovnávací třída)



52 let 49 let 21 let

Kolik let je mamince, Verunce a Michálkovi?

- *Vysvětli své řešení.*
- *Snaž se najít různé způsoby řešení problému.*

Pretest:

Žák/žákyně č. 2 sčítá čísla 52 + 49 + 21 = 122. Neuvádí žádnou písemnou odpověď. (0)

Žák/žákyně č. 3 sčítá dohromady 52 + 49 + 21 = 124 (chybný výpočet). Dále provádí výpočty 21 : 2 = 10 (zb 1), 52 : 2 = 26 a 49 : 2 = 25 (zb 1). 25 + 1 = 26. Mamince je 26 + 26 = 52, Michálkovi 25 + 10 = 35 a Verunce 26 + 11 = 37. (0)

Žák/žákyně č. 4 vychází z faktu, že je Verunka o tři roky starší než Michálek. Bez ohledu na součet let u čísla třetího obrázku stanoví věk dětí na 10 pro Verunku a 7 pro Michálka. To vychází prouze pro výsledky čísel u prvních dvou obrázků. Provádí výpočty 21 : 3 = 7 a 7 + 3 = 10. (0)

Žák/žákyně č. 5 odčítá 21 – 7 = 14. Dostává věk Verunky 14 a Michálka 7. Pro získání věku maminky provádí výpočet 52 – 21 = 31. Odpovídá, že Verunce je 14 let, Michálkovi 7 let a mamince 31 let. (0)

Žák/žákyně č. 6 vychází z faktu, že je Verunka o tři roky starší než Michálek. Provádí výpočty 21 – 3= 18, 18 : 2 = 9 a 9 + 3 = 12. Michálkovi je tedy 9 a Verunce 12. Výpočty 49 – 9 = 40 a 52 – 12 = 40 získává věk maminky. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Michálkovi 9 let a mamince 40 let. (e)

Žák/žákyně č. 7 vychází ze součtu věků dětí (třetí obrázek). Píše, že Verunce je 11 let a Michálkovi 10 let. Po dosazení do druhých dvou součtů věků získává věk pro maminku 41 let a 39 let. (0)

Žák/žákyně č. 8 provádí výpočty 21 – 3 = 18, 18 : 2 = 9, 9 + 3 = 12, 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Michálkovi 9 let a mamince 40 let. (e)

Žák/žákyně č. 9 odhaduje věk dětí na 10 pro Verunku a 11 pro Michálka. Provádí výpočty 52 – 10 = 42 a 49 – 11 = 38. Věk pro maminku jí nevychází, proto mění věk dětí na 11 let pro Verunku a 10 let pro Michálka. Počítá 52 – 11 = 41 a 49 – 10 = 39. Stále ještě nevychází věk pro maminku, proto mění věk dětí na 12 let pro Verunku a 9 let pro Michálka. Po dvou odečtech 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40 získává správný věk maminky. (a3)

Žák/žákyně č. 10 sice uvádí, že je Verunka starší 49 + 3 = 52, kde je zřejmé, že rozdíl věků dětí jsou tři roky. Dále však provádí odhad věku Verunky na 13 a Michálka na 8. Při dopočítání věku maminky zjišťuje rozdílná čísla, 52 – 13 = 39 a 49 – 8 = 41. Upravuje tedy postupně věk Verunky 14, 11 a 12 let a Michálka 7, 10 a 9 let. Správný věk maminky ověřuje výpočtem 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák/žákyně č. 12 uvádí, že je Verunka o tři roky starší. Metodou pokusu omylu však odhaduje věk dětí na 11 a 10 let, kde jejich součet je 21, ale nikoli rozdíl 3. Nedostává správný věk maminky. Mění proto věk dětí na 12 a 9. Dopočítává věk maminky na 40. Provádí kontrolní výpočty 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá, že Verunce je 12 let, Míšovi je 9 let a mamince je 40 let. (a3)

Žák/žákyně č. 13 provádí pouze jeden výpočet 21 : 7 = 3. (0)

Žák/žákyně č. 14 počítá 52 – 21 = 31, 49 – 18 = 31. Odpovídá, že mamince je 31 let, Verunce 21 let a Michálkovi 18 let. Svoje výpočty i slovní odpověď gumuje. Přepisuje je novým výpočtem 52 – 49 = 3 a odpovědí, že Verunka je starší o tři roky než Michálek. (0)

Žák/žákyně č. 15 provádí výpočty 52 – 49 = 3, 21 – 3 = 18, 18 : 2 = 9, 9 + 3 = 12, 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá ve třech větách, Michálkovi je 9 let, Verunce je 12 let a Mamince je 40 let. (e)

Žák/žákyně č. 16 provádí výpočty 52 – 21 = 31, 21 – 14 = 7. Odpovídá, že mamince je 31 let, Verunce 14 let a Michálkovi 7 let. (0)

Žák/žákyně č. 17 provádí výpočty 52 : 2 = 26, 49 : 2 = 24 (1) a 21 : 2 = 10 (1). (0)

Žák/žákyně č. 18 provádí mnoho výpočtů, které škrtá, nechává 49 – 8 = 41, 41 + 11 = 52 a 52 – 11 = 41. Slovně neodpovídá, z výpočtů jsou však zřejmé zamýšlené roky pro maminku, Verunku i Michálka, 41 let, 11 let a 8 let. (0)

Žák/žákyně č. 19 se pokouší rozložit číslo 21 na dva sčítance. 11 + 10 = 21. Nevychází jí správně věk maminky. Mění tedy věk dětí a počítá 12 + 9 = 21, 40 + 12 = 52 a 40 + 9 = 49. V odpovědi udává, že mámě je 40 let, Michálkovi 9 let a Verunce 12 let. (a3)

Žák/žákyně č. 21 provádí výpočty 21 : 2 = 10 (1), 49 : 10 = 4 (9), 52 – 21 = 31, 49 – 21 = 28, 52 – 31 = 21 a 52 + 49 = 101. (0)

Žák/žákyně č. 22 provádí výpočty 21 : 2 = 10 (1), 49 : 10 = 4 (9), 52 – 21 = 31, 49 – 21 = 28, 52 – 31 = 21 a 52 + 49 = 101. (0)

Posttest:

Žák/žákyně č. 1 vypočítává věk maminky 52 + 49 + 21 + 21 = 144 let. (0)

Žák/žákyně č. 2 provádí výpočty 11 + 11 = 22, 22 – 1 = 21, 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 21, 10 + 10 + 10 + 10 = 40, 40 + 9 = 49, 20 + 20 = 40, 40 + 10 = 50 + 2 = 52. (0)

Žák/žákyně č. 3 provádí výpočty 21 : 2 = 10 (1), 11 : 2 = 5 (1), 5 + 1 = 6, 49 : 2 = 24 (1), 24 + 1 = 25, 25 : 2 = 12 = 12 (1), 12 + 1 = 13, 52 : 2 = 26, 26 : 2 = 13. Mamince je tedy

13 + 13 = 26 let, Verunce 6 + 13 = 19, 19 – 1 = 18, 18 – 2 = 16 let, Michálkovi 5 + 12 = 17, 17 – 1 = 16 let. (0)

Žák/žákyně č. 4 provádí výpočty 52 – 49 = 3, 21 : 3 = 7, 7 + 3 = 10, 52 – 10 = 42, 21 – 17 = 4. (0)

Žák/žákyně č. 5 provádí výpočet 51 – 21 = 31, 21 – 7 = 14 a 21 – 14 = 7. (0)

Žák/žákyně č. 7 provádí výpočty 21 : 2 = 10 (1), 10 + 1 = 11, 52 – 11 = 41, 49 – 11 = 38, 21 : 3 = 7, 7 + 3 = 10. Odpovídá, že mamince je 42 let, Verunce 11 let a Michálkovi 10 let. (0)

Žák/žákyně č. 8 provádí výpočty 52 – 49 = 3, 21 – 3 = 18, 18 : 2 = 9, 9 + 3 = 12. Výpočty provází i slovním popisem. Odpovídá, že Michálkovi je 9 let, Verunce 12 let a mamince 40 let. (e)

Žák/žákyně č. 9 odhaduje věk dětí na 11 pro Verunku a 10 pro Michálka. Provádí výpočty. Počítá 52 – 11 = 41 a 49 – 10 = 39. Nevychází věk pro maminku, proto mění věk dětí na 12 let pro Verunku a 9 let pro Michálka. Po dvou odečtech 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40 získává správný věk maminky. Odpovídá, že Michálkovi je 9 let, Verunce je 12 let a mamince je 40 let. (a3)

Žák/žákyně č. 10 provádí výpočty 21 : 2 = 10 (1), 52 – 11 = 41, 49 – 10 = 39 (rozkládá číslo 21 na 11 a 10). Zjišťuje, že jí nevychází věk maminky. Mění tedy věk dětí a odčítá 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák/žákyně č. 12 vychází z faktu, že Verunka je starší o tři roky než Michálek. Zkouší rozkládat číslo 21 na různé sčítance, přitom nezachovává rozdíl tří. Po několika pokusech dostává sčítance 12 a 9. Dosazuje do rovnic 52 – 12 = 40 a 49 – 9 = 40. Dostává tak věk maminky. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce 12 let a Michálkovi 9 let. (a3)

Žák/žákyně č. 13 provádí výpočty 52 : 2 = 26, 49 : 2 = 24 (1), 21 : 2 = 10 (1), 52 – 49 = 3, a 49 – 21 = 28. (0)

Žák/žákyně č. 14 provádí výpočty 52 – 21 = 31 a 49 – 21 = 28. (0)

Žák/žákyně č. 15 sčítá 52 + 49 = 101. Dostává tak dvojnásobný věk maminky, věk Verunky a Michálka. Dále odčítá 101 – 21 = 80. Odčítá věk obou dětí, získává tedy dvojnásobný věk maminky, který dále dělí dvěma. 80 : 2 = 40. Mamince je 40 let. Nakonec vypočítává věk dětí 49 – 40 = 9 a 52 – 40 = 12. Odpovídá, že mamince je 40 let, Verunce je 12 let a Michálkovi 9 let. (b)

Žák/žákyně č. 16 provádí výpočty 52 – 21 = 31 a 41 – 21 = 28. Druhý výpočet škrtá. Odpovídá, že mamince je 31 let. (0)

Žák/žákyně č. 17 provádí výpočty 52 : 2 = 26, 49 : 2 = 24 (1) a 21 : 2 = 10 (1). (0)

Žák/žákyně č. 18 provádí řadu výpočtů 21 : 2 = 10 (1), 10 + 1 = 11, 52 : 2 = 26, 21 : 3 = 7 a 7 + 3 = 10. (0)

Žák/žákyně č. 19 provádí výpočty 52 + 49 + 21 = 122, 21 : 2 = 10 (1). (0)

Žák/žákyně č. 20 provádí výpočty 52 + 49 + 21 = 122, 52 : 2 = 26, 49 : 2 = 24 (1) a 21 : 2 = 10 (1). (0)

Žák/žákyně č. 22 píše, že dětem je dohromady 21 let, Verunce s maminkou 52 let a Michálkovi s maminkou 49 let. (0)

Žák/žákyně č. 23 provádí výpočty 52 + 49 + 21 = 122, 52 : 2 = 26, 49 : 2 = 24 (1), 24 + 1 = 25 a 21 : 2 = 10 (1), 10 + 1 = 11. (0)

5.9 Řešitelské strategie ve srovnávací třídě

Vyhodnocení úloh srovnávací třídy						
žák/žákyně	Úloha č. 1		Úloha č. 2		Úloha č. 3	
	I	II	I	II	I	II
žák/žákyně 1	x	0	x	0	x	0
žák/žákyně 2	0	0	0	0	0	0
žák/žákyně 3	a1	a1	0	0	0	0
žák/žákyně 4	a1	x	b2	b2	0	0
žák/žákyně 5	0	0	0	0	0	0
žák/žákyně 6	a3	x	b1	x	e	x
žák/žákyně 7	a1	a1	0	0	0	0
žák/žákyně 8	0	a2	b1	b1	e	e
žák/žákyně 9	a3	a3	b1	0	a3	a3
žák/žákyně 10	a1	a2	b1	b1	a3	a3
žák/žákyně 11	x	a1	x	x	x	x
žák/žákyně 12	a2	a2	b1	b1	a3	a3
žák/žákyně 13	0	0	0	0	0	0
žák/žákyně 14	0	0	0	0	0	0
žák/žákyně 15	a1	a3	0	0	e	b
žák/žákyně 16	a1	a2	0	0	0	0
žák/žákyně 17	a3	a3	b1	0	0	0
žák/žákyně 18	a2	a2	a	b1	0	0
žák/žákyně 19	a1	0	0	0	a3	0
žák/žákyně 20	0	0	x	0	x	0
žák/žákyně 21	0	x	0	x	0	x
žák/žákyně 22	0	0	0	0	0	0
žák/žákyně 23	x	a2	x	0	x	0

Tabulka 2 – Srovnání použitých metod řešení tří úloh v pretestu a posttestu ve srovnávací třídě

Vysvětlivky:

- I, II – první a druhá fáze, pretest a posttest
- x – nepřítomnost žáka/žákyně
- 0 – absence metody
- barevně odlišené jsou změny v použité metodě

Úloha č. 2 – u českých žáků (srovnávací třída) byly zaznamenány dvě odlišné metody řešení, proto jsou uvedeny zde jako numerická metoda (b1) a numerická metoda (b2).

- Numerická metoda (b1):

Tato metoda je založena na postupných výpočtech žáka od první návštěvy kina do poslední. Žák zakresluje dva sloupce nebo řádky s označením pro Pepíka a Frantu a počítá v prvním řádku či sloupci 50 + 500 = 550 a 100, ve druhém řádku či sloupci 100 + 500 = 600 a 200, dokud mu v desátém řádku nevyjde Pepík 50 . 10 = 500; 500 + 500 = 1 000 a Franta 100 . 10 = 1 000. (žáci 6, 8, 9, 10, 12, 17, 18)

- Numerická metoda (b2):

V této metodě žák vytváří dva sloupce (pro Pepíka a Frantu). U Pepíka v deseti řádcích sčítá 50 + 50 = 100, u Franty píše v deseti řádcích 100. Po sečtení deseti stovek dostává 1 000 Kč. (žák/žákyně 4)

Úkol č. 3 – u českých žáků (srovnávací třída) byla zaznamenána jedna odlišná metoda řešení, proto je zde uvedena jako numerická metoda (a3).

- Numerická metoda (a3):

U této metody žák uvádí, že rozdíl věků dětí jsou tři roky. Číslo 21 ale rozkládá na dvě čísla, jejichž součet není 21 (většinou na 11 a 10). Nevychází věk maminky. Metodou pokusu-omylu dochází k věku dětí 9 a 12, mamince je tedy 40 let. (žáci 9, 10, 12, 19)

5.10 Změny strategií řešení v experimentální a srovnávací třídě

V této kapitole jsou uvedeny změny strategií řešení jednotlivých žáků experimentální i srovnávací třídy a následné srovnání těchto změn u obou tříd.

5.10.1 Změny strategií řešení v experimentální třídě

Úlohu č. 1 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 14 žáků experimentální třídy. V první fázi žáci použili pouze numerické metody (a), ve druhé fázi použili též numerické metody (a), žákyně 13 použila dokonce numerickou metodu (b3).

Pretest								
použitá metoda	**žáci**							
numerická metoda (a1)	1	4	20	22				
numerická metoda (a2)	3	9	12	13	19			
numerická metoda (a3)	18							
nulová metoda (0)	5	6	10	15				

Posttest								
použitá metoda	**žáci**							
numerická metoda (a1)	1	4	5	6	10	12	19	20
numerická metoda (a2)	3	9	22					
numerická metoda (a3)	18							
numerická metoda (b3)	13							
nulová metoda (0)	15							

Tabulka 3 – Změny řešitelských strategií – experimentální třída – úloha 1

Jak je patrné z tabulky č. 3, u 7 žáků došlo ke změně strategie řešení. Tři žáci (žák 5, žák 6, žákyně 10), kteří v pretestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií zadaného úkolu, přichází v posttestu s řešitelskou strategií, a to s numerickou metodou (a1) (metoda pokusu-omylu, kde žáci vycházejí z počtu hlav jako konstanty). Žákyně 13, která zadaný úkol v pretestu řešila numerickou metodou (a2) (metoda pokusu-omylu, kde žáci vycházejí z počtu nohou jako konstanty), mění svoji strategii řešení na numerickou metodu (b3), která na rozdíl od prvně zvolené metody není založena na pokusu-omylu, ale na logickém úsudku. Dvě žákyně (žákyně 12, žákyně 19) mění svoji strategii řešení z numerické metody (a2) v pretestu na numerickou metodu (a1) v posttestu a žákyně 22 mění svoji strategii řešení z numerické metody (a1) v pretestu na numerickou metodu (a2) v posttestu.

Úlohu č. 2 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 17 žáků experimentální třídy. Žáci používali numerické metody (b), (b1) a deduktivní metodu (e). Metody (b1) a (e) jsou popsány v odstavci 5.5.

Pretest										
použitá metoda	**žáci**									
numerická metoda (b1)	9	11	13	20	21	22				
deduktivní metoda (e)	1	18								
nulová metoda (0)	3	4	5	6	7	8	12	15	17	

Posttest										
použitá metoda	**žáci**									
numerická metoda (b)	9									
numerická metoda (b1)	9	3	4	5	11	12	13	20	21	22
deduktivní metoda (e)	1	18								
nulová metoda (0)	6	7	8	15	17					

Tabulka 4 – Změny řešitelských strategií – experimentální třída – úloha 2

Jak je patrné z tabulky č. 4, ke změně řešitelských strategií došlo celkem u 5 žáků. Čtyři žáci (3, 4, 5, 12), kteří v pretestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií zadaného úkolu, přicházejí v posttestu s řešitelskou strategií, a to s numerickou metodou (b1). Co se počtu řešitelských strategií týče, žákyně 9 řešila v pretestu zadaný úkol jednou metodou (b1), v posttestu řešila úkol dvěma metodami (b) a (b1).

Úlohu č. 3 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 16 žáků experimentální třídy. Žáci používali numerické metody (a3), (a4), (a5), pseudo-algebraickou metodu (c) a algebraickou metodu (e). Metody (a3), (a4) a (a5) jsou popsány v odstavci 5.5.

Pretest									
použitá metoda	**žáci**								
numerická metoda (a3)	3	4	6	8	12	17	20	21	22
numerická metoda (a4)	9	13							
pseudo-algebraická metoda (c)	1								
algebraická metoda (e)	5	18							
nulová metoda (0)	10	15							

Posttest									
použitá metoda	**žáci**								
numerická metoda (a3)	3	4	6	8	12	15	17	20	21
numerická metoda (a4)	13								
numerická metoda (a5)	9								
pseudo-algebraická metoda (c)	1	22							
algebraická metoda (e)	5	18							
nulová metoda (0)	10								

Tabulka 5 – Změny řešitelských strategií – experimentální třída – úloha 3

Jak vyplývá z tabulky č. 5, změna řešitelských strategií nastala u 3 žáků experimentální třídy. Žák 15, který v pretestu nepřišel s žádnou řešitelskou strategií zadaného úkolu, přichází v posttestu s řešitelskou strategií, a to numerickou metodou (a3). Žákyně 9, která zadaný úkol v pretestu řešila numerickou metodou (a4), mění svoji strategii řešení na numerickou metodu (a5). Žákyně 22, která zadaný úkol v pretestu řešila numerickou metodou (a3), mění svoji strategii řešení na pseudo-algebraickou metodu (c).

5.10.2 Změny strategií řešení ve srovnávací třídě

Úlohu č. 1 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 17 žáků srovnávací třídy. Žáci používali pouze numerické metody (a).

Pretest							
použitá metoda	**žáci**						
numerická metoda (a1)	3	7	10	15	16	19	
numerická metoda (a2)	12	18					
numerická metoda (a3)	9	17					
nulová metoda (0)	2	5	8	13	14	20	22

Posttest							
použitá metoda	**žáci**						
numerická metoda (a1)	3	7					
numerická metoda (a2)	8	10	12	16	18		
numerická metoda (a3)	9	15	17				
nulová metoda (0)	2	5	13	14	19	20	22

Tabulka 6 – Změny řešitelských strategií – srovnávací třída – úloha 1

Jak je patrné z tabulky č. 6, změny řešitelských strategií nastaly celkem u 5 žáků srovnávací třídy. Žák/žákyně 8, který v pretestu nepřišel s žádnou řešitelskou strategií zadaného úkolu, přichází v posttestu s řešitelskou strategií, a to numerickou metodou (a2) (metoda pokusu-omylu, kde žáci vycházejí z počtu nohou jako konstanty). Naproti tomu žák/žákyně 19, který v pretestu řešil zadaný úkol numerickou metodou (a1) (metoda pokusu-omylu, kde žáci vycházejí z počtu hlav jako konstanty), v posttestu nepřichází s žádnou řešitelskou strategií. Žáci/žákyně 10 a 16, kteří v pretestu řešili zadnaný úkol numerickou metodou (a1), mění svoji strategii na numerickou metodu (a2) a žák/žákyně 15, který v pretestu řešil zadanou úlohu numerickou metodou (a1), mění svoji strategii na numerickou metodu (a3) (metoda pokusu omylu, kde žáci střídají metody (a1) a (a2)).

Úlohu č. 2 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 17 žáků srovnávací třídy. Žáci používali numerické metody (b). Žák 18 použila v pretestu numerickou metodu (a). Metody (b1) a (b2) jsou popsány v odstavci 5.9.

Pretest												
použitá metoda	**žáci**											
numerická metoda (a)	18											
numerická metoda (b1)	8	9	10	12	17							
numerická metoda (b2)	4											
nulová metoda (0)	2	3	5	7	13	14	15	16	19	22		

Posttest												
použitá metoda	**žáci**											
numerická metoda (b1)	8	10	12	18								
numerická metoda (b2)	4											
nulová metoda (0)	2	3	5	7	9	13	14	15	16	17	19	22

Tabulka 7 – Změny řešitelských strategií – srovnávací třída – úloha 2

Jak vyplývá z tabulky č. 7, změny řešitelských strategií nastaly celkem u 3 žáků. Žáci 9 a 17, kteří v pretestu řešili zadanou úlohu numerickou metodou (b1), v posttestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií. Žák 18, který v pretestu řešil zadanou úlohu numerickou metodou (a), mění svoji strategii řešení na numerickou metodu (b1).

Úlohu č. 3 řešilo v obou fázích experimentu (pretestu i posttestu) celkem 17 žáků srovávací třídy. Žáci používali numerickou metodu (a3) a algebraickou metodu (e). Jeden žák použil v posttestu numerickou metodu (b). Metoda (a3) je popsána v odstavci 5.9.

Pretest												
použitá metoda	**žáci**											
numerická metoda (a3)	9	10	12	19								
algebraická metoda (e)	8	15										
nulová metoda (0)	2	3	4	5	7	13	14	16	17	18	22	

Posttest												
použitá metoda	**žáci**											
numerická metoda (a3)	9	10	12									
numerická metoda (b)	15											
algebraická metoda (e)	8											
nulová metoda (0)	2	3	4	5	7	13	14	16	17	18	19	22

Tabulka 8 – Změny řešitelských strategií – srovnávací třída – úloha 3

Jak vyplývá z tabulky č. 8, změny řešitelských strategií nastaly u 2 žáků. Žák 19, který zadaný úkol v pretestu řešil numerickou metodou (a3), v posttestu nepřichází s žádnou řešitelskou strategií. Žák 15, který zadaný úkol v pretestu řešil algebraickou metodou (e), v posttestu mění svoji strategii řešení na numerickou metodu (b).

5.10.3 Srovnání změn strategií řešení v experimentální a srovnávací třídě

Porovnáním obou tříd (experimentální a srovnávací) vyplývají následující fakta. U všech tří úloh bylo vyšší procento žáků experimentální třídy, u kterých došlo ke změně řešitelských strategií (úloha 1 – 50 % žáků experimentální třídy, 29,4 % žáků srovnávací třídy; úloha 2 – 29,4 % žáků experimentální třídy, 17,6 % srovnávací třídy; úloha 3 – 18,9 % žáků experimentální třídy, 11,8 % žáků srovnávací třídy). U žáků experimentální třídy došlo k vyššímu procentuálnímu zastoupení těch, kteří v pretestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií a v posttestu úlohu řešili numerickou metodou (úloha 1 – 21,5 % žáků experimentální třídy, 5,9 % žáků srovnávací třídy; úloha 2 – 23,5 % žáků experimentální třídy, 0 % žáků srovnávací třídy, úloha 3 – 6,3 % žáků experimentální třídy, 0 % žáků srovnávací třídy). U žáků srovnávací třídy (na rozdíl od žáků experimentální třídy) došlo k tomu, že v pretestu řešili zadaný úkol numerickou metodou a v posttestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií (úkol 1 – 5,9 % žáků, úkol 2 – 11,7 % žáků, úkol 3 – 5,9 % žáků). K nárůstu počtu řešitelských strategií v posttestu došlo pouze v experimentální třídě (úloha 2 – 5,9 % žáků). Ke změně řešitelských strategií na podobné úrovni (např. z numerické metody, ve které jsou konstantou hlavy za numerickou metodu, ve které jsou konstantou nohy) došlo (úloha 1 – 21,4 % žáků experimentální třídy, 17,6 % žáků srovnávací třídy; úloha 2 – 0 % žáků experimentální třídy, 5,9 % žáků srovnávací třídy; úloha 3 – 6,3 % žáků experimentální třídy, 5,9 % žáků srovnávací třídy). Ke změně řešitelských strategií ze strategií na nižší úrovni na strategie na vyšší úrovni došlo pouze v experimentální třídě (úloha 1 – z numerické metody (a2) na metodu založenou na dedukci (b3) – 7,1 % žáků; úloha 3 – z numerické metody (a3) na pseudo-algebraickou metodu (c) – 6,3 % žáků).

Úloha 1				
experimentální třída	**změny řešitelských strategií**			
(14 žáků)	7 žáků (50 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	5, 6, 10	(0)	(a1)	21,50%
	12, 19	(a2)	(a1)	14,30%
	22	(a1)	(a2)	7,10%
	13	(a2)	(b3)	7,10%
srovnávací třída	**změny řešitelských strategií**			
(17 žáků)	5 žáků (29,4 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	8	(0)	(a2)	5,90%
	19	(a1)	(0)	5,90%
	10, 16	(a1)	(a2)	11,70%
	15	(a1)	(a3)	5,90%

Tabulka 9 – Srovnání změn strategií řešení v obou třídách – Úloha 1

Úloha 2				
experimentální třída	**změny řešitelských strategií**			
(17 žáků)	5 žáků (29,4 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	3, 4, 5, 12	(0)	(b1)	23,50%
	9	(b1)	(b),	5,90%
srovnávací třída	**změny řešitelských strategií**			
(17 žáků)	3 žáci (17,6 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	9, 17	(b1)	(0)	11,70%
	18	(a)	(b1)	5,90%

Tabulka 10 – Srovnání změn strategií řešení v obou třídách – Úloha 2

Úloha 3				
experimentální třída	**změny řešitelských strategií**			
(16 žáků)	3 žáci (18,9 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	15	(0)	(a3)	6,30%
	22	(a3)	(c)	6,30%
	9	(a4)	(a5)	6,30%
srovnávací třída	**změny řešitelských strategií**			
(17 žáků)	2 žáci (11,8 %)			
	žáci	**I**	**II**	
	19	(a3)	(0)	5,90%
	15	(e)	(b)	5,90%

Tabulka 11 – Srovnání změn strategií řešení v obou třídách – Úloha 3

5.11 Psychologické testy SUPSO a SPAS

Žákům byly na začátku a na konci pedagogického experimentu předkládány psychologické testy SUPSO 1-2 a SPAS 1-2. Testy vycházejí z baterie standardizovaných testů a byly již pro potřeby předvýzkumu na Sportovním gymnáziu doplněny některými jejich modifikacemi (viz odstavec 4.3) a opětovně použity pro potřeby vlastního výzkumu. Opakovaným testováním na konci experimentu byly sledovány změny, nikoli normy dimenze prožívání či sebepojetí školní úspěšnosti. Číslování testů 1-2 označuje fázi experimentu (začátek (I) – konec (II) experimentu).

5.11.1 SUPSO 1-2

Test SUPSO 1 byl předložen žákům obou tříd (experimentální a srovnávací) před začátkem experimentu. Respondenti zapisovali svůj obvyklý stupeň prožívání daného stavu či pocitu. Test SUPSO 2 byl předložen žákům obou tříd na konci projektu.

Obdobně jako v předvýzkumu bylo sledováno:

- Psychická pohoda
- Aktivnost, činorodost
- Impulzivnost, odreagování se

- Psychický nepokoj, rozladěnost
- Psychická deprese, pocit vyčerpání
- Úzkost, očekávání obav
- Sklíčenost, rezignace

Zadání testů SUPSO 1 a SUPSO 2 bylo totožné (viz příloha 13). Na základě škály vůbec, občas, zpravidla, často a soustavně studenti zaznamenávali svůj obvyklý způsob prožívání a) v oblasti psychické pohody (spokojený, svěží, dobře naladěný, klidný), b) v oblasti aktivnosti (energický, činorodý, temperamentní, průbojný), c) v oblasti impulzivnosti (náladový, výbušný, těžko se ovládám, vzteklý), d) v oblasti psychického nepokoje (rozmrzelý, nespokojený, netrpělivý, neklidný), e) v oblasti psychické deprese (otrávený, pesimistický, zmořený, vyčerpaný), f) v oblasti úzkosti (napjatý, nejistý, úzkostně naladěný, prožívání obav) a g) v oblasti sklíčenosti (smutný, nešťastný, přecitlivělý, osamělý). Na konci experimentu bylo realizováno bodové ohodnocení pomocí škály 0-1-2-3-4 a následné porovnání obou tříd (tabulky 12, 13). Tentokrát byly změny zaznamenávány u jednotlivých žáků (na rozdíl od předvýzkumu, kde byl proveden celkový součet všech žáků). Podobně je tomu v případě následujícího testu SPAS.

MODIFIKACE SUPSO - experimentální třída														
	I							II						
žák/žákyně	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
žák 1	9	14	9	5	15	13	13	8	13	3	6	12	12	13
žákyně 2	12	8	13	14	16	14	14							
žák 3	8	12	0	2	4	11	10	6	13	5	9	14	13	14
žák 4	12	8	14	12	15	14	12	10	9	14	13	13	14	13
žák 5	8	12	11	11	15	11	6	15	16	5	16	16	13	11
žák 6	13	16	14	16	16	15	12	15	16	15	12	16	12	16
žák 7	9	6	12	14	14	12	12	12	10	14	12	12	13	14
žák 8	16	10	14	12	14	13	15	13	10	11	9	12	11	12
žákyně 9	9	7	12	14	12	11	11	12	8	15	14	13	12	13
žákyně 10														
žákyně 11								9	9	6	10	10	6	11
žákyně 12	7	6	14	12	14	13	13	7	7	13	14	15	14	15
žákyně 13	6	5	11	13	9	6	11	6	10	10	8	4	5	11
žákyně 14	11	15	9	5	10	7	9							
žák 15	11	6	14	15	16	11	10	10	10	13	12	12	12	8
žák 16	12	7	9	13	12	9	7							
žákyně 17														
žák 18	9	8	14	12	11	10	12	11	14	13	12	13	13	14
žákyně 19	10	11	10	11	10	2	2	9	12	10	8	9	3	7
žák 20	13	8	14	9	14	13	15	13	9	11	8	12	9	11
žákyně 21	8	9	11	15	15	14	15							
žákyně 22	12	8	10	13	13	12	7	8	5	11	11	15	12	9
žákyně 23								11	5	4	8	10	6	5
celkem	**152**	**137**	**173**	**171**	**192**	**167**	**161**	**155**	**162**	**163**	**164**	**188**	**168**	**181**

	AI - AII	**BI - BII**	**CI - CII**	**DI - DII**	**EI - EII**	**FI - FII**	**GI - GII**
rozdíl I - II	**-3**	**-25**	**10**	**7**	**4**	**-1**	**-20**

Tabulka 12 – SUPSO – experimentální třída

Obou fází testování SUPSO se účastnilo celkem 15 žáků experimentální třídy. O změně v prožívání daného stavu či pocitu za celou třídu lze hovořit při rozdílu vyšším než 15. Experiment ukázal, že u žáků experimentální třídy nastalo mírné zlepšení ve dvou oblastech, a to v oblasti b) aktivnosti, činorodosti (energický, činorodý, temperamentní, průbojný) a v oblasti g) sklíčenosti, rezignace (smutný, nešťastný, přecitlivělý, osamělý). U jednotlivých žáků k výrazným změnám (rozdíl vyšší než 10) v žádné z oblastí nedošlo.

MODIFIKACE SUPSO - srovnávací třída														
	I							II						
žák/žákyně	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
žák 1								9	4	15	14	12	13	16
žákyně 2	9	6	11	12	12	15	14	15	7	11	12	14	14	15
žák 3	9	9	13	13	14	12	14	8	6	13	12	13	8	13
žák 4	7	11	13	11	12	11	15	8	4	8	8	12	11	14
žák 5	11	6	11	11	10	10	13	11	5	10	11	11	11	12
žák 6	11	7	11	11	9	10	12							
žák 7	7	5	10	12	9	8	8	4	7	9	4	8	8	7
žák 8	11	7	11	10	13	11	14	12	7	10	10	14	11	12
žákyně 9	6	7	11	10	11	12	12	12	8	8	7	10	11	10
žákyně 10	12	13	11	11	13	13	14	8	12	14	12	15	13	13
žákyně 11														
žákyně 12	9	9	10	7	12	11	8	10	6	11	8	13	10	11
žákyně 13	10	11	11	10	13	9	14							
žákyně 14	11	8	13	11	12	12	14	8	6	12	10	10	12	14
žák 15	9	5	13	15	15	12	16	10	3	14	11	15	8	16
žák 16	9	9	10	11	13	10	15	12	6	10	8	12	9	13
žákyně 17	14	8	13	12	14	10	13	9	4	13	9	13	8	13
žák 18	8	8	8	9	9	6	7	7	6	8	9	8	10	10
žákyně 19	11	1	14	14	15	10	15	11	8	12	9	14	6	7
žák 20	5	6	11	12	11	9	11	6	5	12	12	11	11	10
žákyně 21	7	10	4	8	8	2	7							
žákyně 22	5	6	7	8	10	10	11	10	5	10	11	9	10	9
žákyně 23								7	11	8	8	15	12	13
celkem	**153**	**124**	**190**	**189**	**205**	**182**	**214**	**161**	**105**	**185**	**163**	**202**	**171**	**199**

	AI - AII	**BI - BII**	**CI - CII**	**DI - DII**	**EI - EII**	**FI - FII**	**GI - GII**
rozdíl I - II	**-8**	**19**	**5**	**26**	**3**	**11**	**15**

Tabulka 13 – SUPSO – srovnávací třída

Obou fází testování SUPSO se účastnilo celkem 17 žáků srovnávací třídy. O změně v prožívání daného stavu či pocitu za celou třídu lze hovořit při rozdílu vyšším než 17. Experiment ukázal, že u žáků srovnávací třídy nastalo mírné zhoršení ve dvou oblastech, a to oblasti b) aktivnosti, činorodosti (energický, činorodý, temperamentní, průbojný) a v oblasti d) psychického nepokoje, rozladěnosti (rozmrzelý, nespokojený, netrpělivý, neklidný). U jednotlivých žáků k výrazným změnám (rozdíl vyšší než 10) v žádné z oblastí nedošlo.

5.11.2 SPAS 1-2

Test SPAS 1 byl zadán žákům obou tříd na začátku projektu. Hodnotili zde svoji celkovou školní práci a úspěšnost (schopnost naučit se novou látku, samostatnost, intelekt, bystrost, schopnost vyjádřit se), úspěšnost v předmětu (vztah k předmětu, úspěšnost v probíraném učivu – kolmice a rovnoběžky a písemné násobení dvouciferným činitelem, porovnávání své úspěšnosti v matematice se spolužáky, dosažené výsledky a posouzení svého nadání v předmětu) a vlastní sebepojetí (hodnocení svojí školní práce, pocity při zkoušení, vztah ke škole). Test SPAS 2 byl zadán žákům obou tříd na konci projektu.

Obdobně jako v předvýzkumu bylo sledováno:

- Obecné schopnosti
- Předmět
- Sebedůvěra

Zadání testů SPAS 1 a SPAS 2 bylo totožné (viz příloha 14). Lišilo se pouze ve dvou výpovědích týkajících se právě probíraného učiva – obvod a obsah čtverce a písemné dělení. Na konci experimentu bylo realizováno bodové ohodnocení všech výpovědí ve škále 0-1. Případné změny v sebepojetí v obecných schopnostech, v předmětu matematiku a sebedůvěře ukazují tabulky 14 a 15.

MODIFIKACE SPAS - experimentální třída									
	I			II			změna	změna	změna
žák/žákyně	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
žák 1	7	4	4	4	5	5	3	-1	-1
žákyně 2	5	4	4	x	x	x	x	x	x
žák 3	2	6	3	2	3	3	0	3	0
žák 4	6	6	4	6	6	6	0	0	-2
žák 5	6	8	5	6	5	3	0	3	2
žák 6	x	x	x	4	4	3	x	x	x
žák 7	7	7	6	5	8	7	2	-1	-1
žák 8	1	3	4	1	2	4	0	1	0
žákyně 9	x	x	x	3	7	3	x	x	x
žákyně 10	x	x	x	1	2	2	x	x	x
žákyně 11	5	4	7	x	x	x	x	x	x
žákyně 12	3	6	3	1	6	4	2	0	-1
žákyně 13	4	3	3	6	5	7	-2	-2	-4
žákyně 14	x	x	x	4	8	4	x	x	x
žák 15	5	7	3	5	5	3	0	2	0
žák 16	2	5	1	0	3	0	2	2	1
žákyně 17	x	x	x	4	5	7	x	x	x
žák 18	5	6	5	7	7	6	-2	-1	-1
žákyně 19	8	7	7	6	6	8	2	1	-1
žák 20	2	3	3	1	5	2	1	-2	1
žákyně 21	2	5	3	6	8	7	-4	-3	-4
žákyně 22	4	8	3	1	7	5	3	1	-2
žákyně 23	x	x	x	1	6	3	x	x	x
celkem	**64**	**84**	**57**	**57**	**81**	**70**	**7**	**3**	**-13**

Tabulka 14 – SPAS – experimenální třída

Obou fází testování SPAS se účastnilo celkem 15 žáků experimentální třídy. O změně jejich hodnocení své celkové školní práce, úspěšnosti v předmětu a vlastního sebepojetí lze hovořit při rozdílu vyšším než 9. Experiment ukázal, že u žáků experimentální třídy nastalo mírné zlepšení v jedné oblasti, a to oblasti sebedůvěry (hodnocení své školní práce a vztahu ke škole). U jednotlivých žáků k výrazným změnám (rozdíl vyšší než 6) v žádné z oblastí nedošlo.

MODIFIKACE SPAS - srovnávací třída									
	I			II			změna	změna	změna
žák/žákyně	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
žák/žákyně 1	x	x	x	2	6	2	x	x	x
žák/žákyně 2	3	4	8	5	4	5	-2	0	3
žák/žákyně 3	4	5	6	4	8	6	0	-3	0
žák/žákyně 4	2	3	6	4	5	4	-2	-2	2
žák/žákyně 5	3	4	7	3	4	6	0	0	1
žák/žákyně 6	5	4	4	x	x	x	x	x	x
žák/žákyně 7	0	2	2	0	2	2	0	0	0
žák/žákyně 8	5	7	7	7	5	7	-2	2	0
žák/žákyně 9	8	6	8	7	7	8	1	-1	0
žák/žákyně 10	6	5	6	6	5	7	0	0	-1
žák/žákyně 11	x	x	x	x	x	x	x	x	x
žák/žákyně 12	6	5	4	8	6	8	-2	-1	-4
žák/žákyně 13	7	5	7	7	5	8	0	0	-1
žák/žákyně 14	3	4	6	1	2	7	2	2	-1
žák/žákyně 15	7	8	8	7	8	7	0	0	1
žák/žákyně 16	7	6	8	1	6	5	6	0	3
žák/žákyně 17	8	8	7	7	7	7	1	1	0
žák/žákyně 18	4	3	6	2	2	3	2	1	3
žák/žákyně 19	4	3	6	3	3	5	1	0	1
žák/žákyně 20	4	3	4	5	6	5	-1	-3	-1
žák/žákyně 21	3	5	5	x	x	x	x	x	x
žák/žákyně 22	3	2	4	1	3	2	2	-1	2
žák/žákyně 23	x	x	x	6	8	7	x	x	x
celkem	**84**	**83**	**110**	**78**	**88**	**102**	**6**	**-5**	**8**

Tabulka 15 – SPAS – srovnávací třída

Obou fází testování SPAS se účastnilo celkem 18 žáků srovnávací třídy. O změně jejich hodnocení své celkové školní práce, úspěšnosti v předmětu a vlastního sebepojetí lze hovořit při rozdílu vyšším než 11. Experiment ukázal, že u žáků srovnávací třídy nedošlo k žádné takové změně ze tří sledovaných oblastí. U jednotlivých žáků k výrazným změnám (rozdíl vyšší než 6) v žádné z oblastí nedošlo.

6 Výsledky a závěry z experimentů

V závěrečné kapitole dizertační práce jsou shrnuty výsledky a závěry experimentu. Je zde popsáno možné praktické použití a doporučení pro další případný pedagogický výzkum. Je třeba upozornit, že tento výzkum byl povahy spíše kvalitativní, směřoval více do hloubky než šířky. Při zobecňování závěrů je tedy patřičné brát zřetel na tuto skutečnost.

6.1 Závěry z hlediska rozvoje tvořivosti v matematice

Cílem práce bylo ověřit možnosti rozvoje tvořivosti u žáků ve věku 10-11 let prostřednictvím řešení vhodně zvolených matematických úloh. Uvedený věk odpovídá žákům 4. ročníku a byl zvolen s ohledem na zjištění zahraničního výzkumu jako období zvýšené tvořivosti (blíže odstavec 2.2.2.1).

Při srovnání pretestu a posttestu žáků experimentální a srovnávací třídy vyplývají následující fakta. U všech tří úloh didaktického testu bylo vyšší procento žáků experimentální třídy, u kterých došlo ke změně řešitelských strategií (viz odstavec 5.10.3). U žáků experimentální třídy došlo k výrazně vyššímu procentuálnímu zastoupení těch, kteří v pretestu nepřišli s žádnou řešitelskou strategií a v posttestu úlohu řešili numerickou metodou. Naopak pouze u žáků srovnávací třídy došlo k tomu, že v pretestu řešili úlohu numerickou metodou a v posttestu nevymysleli žádnou řešitelskou strategii. Tato skutečnost může být částečně způsobena snížením o deset minut (z třiceti minut na dvacet minut) na každý úkol testu. K nárůstu počtu řešitelských strategií v posttestu došlo pouze v experimentální třídě. Ke změně řešitelských strategií ze strategií na nižší úrovni na strategie na vyšší úrovni došlo pouze v experimentální třídě, a to z numerické metody (a2) na metodu založenou na dedukci (b3) a z numerické metody (a3) na pseudo-algebraickou metodu (c).

Na druhé straně tento průzkum prokázal malou kreativitu ohledně počtu řešitelských strategií. Žáci volili většinou pouze jednu strategii řešení úkolu. To je zapříčiněno především nedostatkem matematických znalostí, zejména v oblasti algebry (probírané až na druhém stupni základní školy) a do jisté míry i jejich nechutí přicházet s dalšími možnostmi řešení, když daný úkol jednou vyřešili, což souvisí s jejich nízkým věkem. Proto ani nebyli v posttestu vybízeni k dalším možným řešením.

Opakované testování na konci experimentu a následné srovnání psychologického testu SUPSO v experimentální a srovnávací třídě ukázalo, že pouze u žáků experimentální třídy nastalo mírné zlepšení ve dvou sledovaných oblastech, a to v oblasti b) aktivnosti, činorodosti a v oblasti g) sklíčenosti, rezignace. U žáků srovnávací třídy došlo naopak k mírnému zhoršení ve dvou oblastech, a to v oblasti b) aktivnosti, činorodosti a v oblasti d) psychického nepokoje, rozladěnosti. V rámci testu SPAS došlo rovněž k mírnému zlepšení pouze v experimentální třídě v jedné ze tří sledovaných oblastí, a to v oblasti sebedůvěry (hodnocení své školní práce a vztahu ke škole). U žáků srovnávací třídy nedošlo k žádné takové změně (viz odstavec 5.11).

Výchova k tvořivosti je možná a důležitá v každém věku. Využití možnosti rozvoje tvořivosti mladších dětí, zejména žáků prvního stupně základní školy, odstraňuje bariéry v jejich tvořivém vývoji v pozdějším období. Lze předpokládat, že pokud by žáci byli vedeni tvořivým způsobem i v jiných předmětech než je matematika, jejich úspěšnost by v tomto předmětu byla vyšší.

6.2 Metodologické závěry

Výzkumná práce se zabývá rozvojem tvořivosti žáků v hodinách matematiky. Byl proto zvolen konstruktivistický přístup k výuce matematiky. Pro analýzu celého procesu byly použity techniky participačního pozorování, rozhovory se žáky na konci hodin a přítomnost externího pozorovatele. Klíčovou technikou, metodou sběru dat, byly didaktický test a dva psychologické testy. Právě atomární analýza žákovských strategií, následná srovnávací analýza tří úloh didaktického testu a vyhodnocení psychologických testů umožnily najít odpovědi na tři výzkumné otázky (viz odstavec 6.1).

Za velmi užitečný lze považovat fakt, že při atomární analýze bylo možné srovnávat řešení více žáků, což v konečném důsledku přispělo k ucelenému pochopení myšlení třídy jako celku. Atomární analýza může být ovlivněna subjektivním pohledem experimentátora, záleží především na jeho zkušenostech. Podstatné bylo nesoustředit se na pouhé odpovědi žáků, ale zvažovat celou jejich řešitelskou strategii.

Z metodologického hlediska je práce přínosná pro podrobné zpracování analýzy jednotlivých žákovských strategií a následnou srovnávací analýzu použitých metod tří úloh v pretestu a posttestu u experimentální a srovnávací třídy. Cenná jsou i uvedená data v rámci změn strategií řešení v obou třídách a následné srovnání změn strategií řešení obou tříd a v neposlední řadě získaná data v oblasti změn dimenze prožívání a sebepojetí školní úspěšnosti porovnáním psychologických testů SUPSO 1-2 a SPAS 1-2.

6.3 Možné aplikace pedagogického experimentu do dalšího výzkumu

Z pedagogického experimentu vyplynula určitá fakta, doporučení týkající se výuky matematiky.

Důležitým aspektem konstruktivisticky vedeného vyučování je vytvoření podnětného prostředí pro rozvoj tvořivosti žáků, předkládání vhodně zvolených úloh podporujících jejich tvořivost a logické myšlení, umožnění spolupráce (práce ve skupinách), získávání poznatků od jejich spolužáků, podpora vzájemné diskuse a hledání řešitelských strategií.

Žáci obvykle začínají své řešitelské strategie pomocí metody pokusu-omylu, dále se snaží si řešení úloh usnadnit, sami přicházejí na další různé řešitelské strategie a v konečném důsledku na matematická pravidla. Tím vším si smysluplně budují své systémy matematického poznání.

I když tato práce poskytla další vhled do procesu rozvoje tvořivosti žáka v hodinách matematiky, nelze tuto problematiku považovat za ukončenou. Další možnost se objevuje v předkládání odlišně zvolených matematických úkolů, které nevedou pouze k jednomu řešení, jak tomu bylo v případě tří algebraických úloh, ale i úloh zaměřených spíše na geometrii, které často skýtají různá řešení a které by tak žáky lépe motivovaly pro větší počet řešení. Závěry poukazují na jiné řešitelské strategie českých a izraelských žáků i na odlišné procentuální zastoupení jednotlivě zvolených řešitelských strategií v těchto dvou skupinách. Přínosem pro teorii vyučování matematiky by tedy byl i výzkum, ve kterém by se srovnávaly řešitelské strategie v různých zemích.

7 Přehled použité literatury

Bertrand, Y. *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha: Portál, 1998.

Breen, Ch. *Mathematics Teachers as Researchers*. In Bishop, A. J. et al. (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publisheres, 2003, pp. 523-544.

Bond, P., Otterson P. *Creativity enhancement software: a systemic approach*. International Journal of Technology Management, 15, 1998, 1 – 2, s. 173 – 191.

Cobb, P. *Theories of Mathematical Learning.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

Coufalová, J. *Projektové vyučování pro první stupeň základní školy*. Praha: Fortuna, 2006.

Coufalová, J., Hrabětová, R. Efektivnost projektové metody v matematice z hlediska rozvoje žákovských kompetencí. In *Matematika 5, Specifika matematické edukace v prostředí primární školy : sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012, s. 56-60.

Coufalová, J., Hrabětová R. Efektivnost projektové metody ve vyučování matematiky. In *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2011, s. 65-69.

Ervynck, G. Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (42–53). Dordrecht: Kluwer, 1991.

Gavora, P. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000.

Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha: Portál, 2009.

Hejný, M. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990.

Hejný, M. a kol. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011.

Hlavsa, J. a kol. *Psychologické problémy výchovy k tvořivosti*. Praha: SPN, 1981.

Hlavsa, J. a kol. *Psychologické metody výchovy k tvořivosti*. Praha: SPN, 1986.

Hrabětová, R. Rozvoj tvořivého myšlení žáků v hodinách matematiky. In *Matematika, informační technologie a aplikované vědy*. Brno: Univerzita obrany, 2015, s. 25-26.

Janoušková, S. & Tomášek, V., et al. *Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník.* Praha: Česká školní inspekce, 2013.

Jirotková, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: PedF UK, 2010.

Jurčová, M. *Rozvíjanie tvorivého myslenia žiakov vo vyučovaní na základnej škole*. Bratislava: PUmB, 1989.

Kuroš, A. G. *Kapitoly z obecné algebry*. Praha: Akademia, 1968.

Kuřina, F. *Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí.* Praha: JČMF, 2006.

Kuřina, F. *Didaktická transformace obsahu a školská praxe.* Praha: Pedagogika, 2009.

Lokšová, I., Lokša, J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, s.r.o., 1999.

Maňák J. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků.* Brno: PdF MU, 1998.

Maňák, J., Švec, V. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003.

Musil, M. *Cesty k nadaniu.* Bratislava: Smena, 1985.

Novotná, J. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: PedF UK, 2010.

Nuslová, V. *Atomární analýza jako nástroj pochopení myšlenkových operací žáků*. Diplomová práce, 2010.

Petrová, A. *Tvořivost v teorii a praxi*. Praha: Vodnář, 1999.

Rendl, M. & Vondrová, N. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMMS 2007. *Pedagogická orientace*, 24 (1), 22–57, 2014.

Robbins, T. L. *Social Loafing on Cognitive Tasks*: An Examintaton of the „Sucker Effect“. Jorunal of Business nad Psychology, 1995, 3, s. 337 – 342.

Sternberg, R., Ohara, L. A., Lubart, T. *Creativity as investment*. California Mangement Review, 40, 1997, 1, s. 8 – 18.

Švaříček, R. a kol. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007.

Vopěnka, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.* Praha: Práh, 2003.

Vopěnka, P. *Úvod do klasické teorie množin*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2011.

Wagner, C. *Creative behavior through basic inferences*: Evidence from person-computer interactions. Journal of Creative Behavior, 30, 1996, 2, s. 105 – 125.

Zelina, M., Zelinová, M. *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže*. Bratislava: SPN, 1990.

Tabach, M. & Friedlander A. School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related? *Springer–Verlag,* 45(2), 227–238, 2013.

Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinge, K. R., & Ogbuehi, P. Improving Mathematical Problem Solving in Grades 4 Through 8: A practice guide. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, 2012.

Www stránky:

[A] http://www.csicr.cz/Stredni-cast/Tiskove-zpravy/PISA-a-TIMSS-2015-Cesti-zaci-projdou-mezinarodnim

(aktualizováno k datu 4. 3. 2015)

[B] http://study.com/academy/lesson/types-of-problems-problem-solving-strategies.html

[C] http://nzmaths.co.nz/problem-solving-strategies

[D] http://matematickyklokan.net/

Přílohy

Příloha 1 – Úlohy pro 1. týden

Úlohy pro 1. týden (17. – 21. 2. 2014)

1.
Na fotbalovém turnaji družstva dostávají:
3 body za vítězství
1 bod za remízu
0 bodů za prohru
Družstvo Radost získalo 11 bodů.

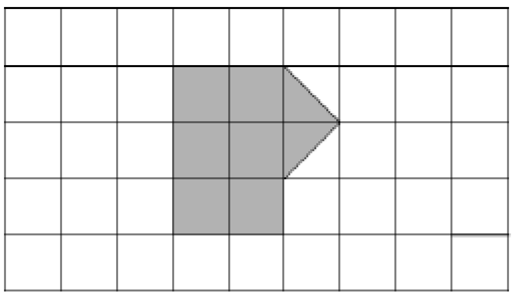
Jaký **nejmenší** počet zápasů muselo toto družstvo sehrát?

2.
Vlak odjel z Prahy v 8:45 ráno. Do Brna přijel za 2 hodiny a 18 minut. V kolik hodin přijel do Brna?
a) 11:15
b) 11:13
c) 11:03
d) 10:53

3.
Barva se prodává v plechovkách po 5 litrech. Slávek potřebuje 37 litrů barvy. Kolik plechovek musí koupit?

a) 5 plechovek
b) 6 plechovek
c) 7 plechovek
d) 8 plechovek

4.



Čtverečky v síti mají rozměr 1 cm x 1 cm. Jaký obsah má šedý obrazec? (kolik čtverečných centimetrů)

5.
Zakroužkuj každé číslo, kterým je dělitelné číslo 12.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Příloha 2 – Úlohy pro 2. týden

Úlohy pro 2. týden (10. – 14. 3. 2014)

1.
Tři tisíce vstupenek na zápas v košíkové je očíslováno od 1 do 3 000. Lidé se vstupenkami, jejichž číslo končí na 112, vyhrávají cenu. Zapiš všechna čísla, která vyhrávají.

2.
Jiřina chce poslat dopisy svým 12 kamarádům. Polovina dopisů je jednostránkových a druhá polovina dvoustránkových. Kolik stránek bude potřeba?

3.
Maruška vyjela na kole z Adamova a jela 2 hodiny stále stejnou rychlostí. Dojela k tomuto ukazateli.

Beranov 45 km →
← Adamov 30 km

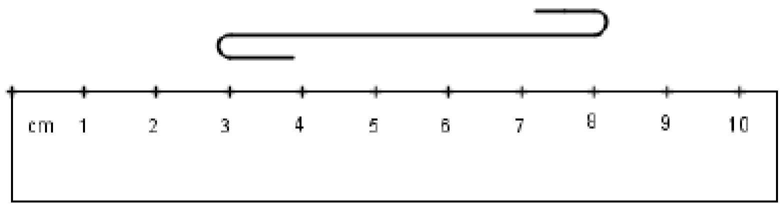
Maruška pokračuje v jízdě tou samou rychlostí do Beranova. Jak dlouho jí bude trvat cesta od ukazatele do Beranova?

a) 1,5 h
b) 2 h
c) 3 h
d) 3,5 h

4.
Jaké pravidlo použiji k tomu, abych z čísla vlevo získala číslo vpravo?
3 → 8
4 → 10
5 → 12

a) Vynásob číslem 1 a potom přičti 5.
b) Vynásob číslem 2 a potom přičti 2.
c) Vynásob číslem 3 a potom odečti 1.
d) Vynásob číslem 4 a potom odečti 4.

5.



Který údaj se nejvíce blíží délce provázku na obrázku, když ho narovnáme?
a) 5 cm
b) 7 cm
c) 8 cm
d) 9 cm

Příloha 3 – Úlohy pro 3. týden

Úlohy pro 3. týden (17. – 21. 3. 2014)

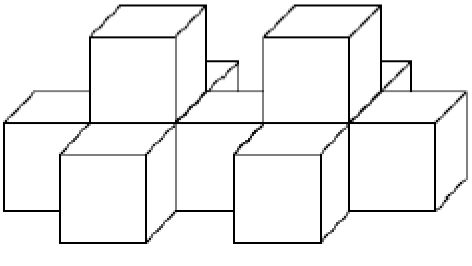
1.
Ve škole je 32 studentů. Každá dívka dostane 6 tužek, každý chlapec 4 tužky. Přihlásí se pouze třetina dívek a polovina chlapců. Kolik tužek musíme vydat?

2.
Když vynásobíš počet dní v týdnu, počtem měsíců v roce, nejhorší možnou známkou ve škole se dnem, ve kterém se narodila vaše paní učitelka, dostaneš číslo 8820. Paní učitelka se narodila v měsíci, který odpovídá počtu dní v týdnu. Kdy slaví paní učitelka narozeniny?

3.
Noira maluje autíčka v tomto pořadí, červené, stříbrné, černé, modré a zlaté. Jakou barvou namaluje 21 autíčko?

4.
Pepíček si stěžuje doma mamince: „Kdybych ve cvrnkání kuliček vyhrál dvojnásobek kuliček, než kolik jsem ve skutečnosti vyhrál, měl bych jich o 26 více. Kolik kuliček Pepíček vyhrál?
52, 26, 39, 13, 78

5.
Stavba z krychlí váží 209 dkg. Kolik váží jedna krychle? (Jak by sis poznamenal/a tuto strukturu, abys ji příště postavil/a?)



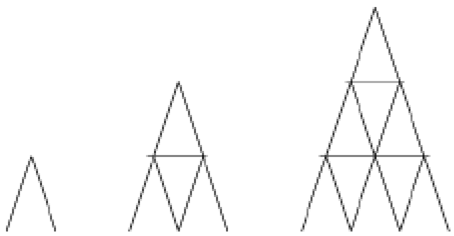
Příloha 4 – Úlohy pro 4. týden

Úlohy pro 4. týden (1. – 5. 4. 2014)

1.
Eliška napsala na papír 1002 □ 1003 □ 1004 □ 1005 □ 1006. Každý čtvereček nahradila buď znaménkem +, nebo – . Počítala správně. Které z uvedených čísel nemohla dostat?
a) 998 b) 1001 c) 1002 d) 1004 e) 1006

2.
Farmářka má na svém statku 30 krav a několik slepic. Počet nohou krav se rovná počtu nohou slepic. Kolik zvířat má farmářka?
a) 60 b) 90 c) 120 d) 180 e) 240

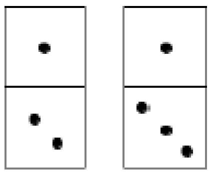
3.
Lucka s Tondou staví domečky z karet. Na první domeček potřebují 2 karty, na druhý domeček 7 karet a na třetí domeček 15 karet. Kolik karet budou potřebovat na další domeček?

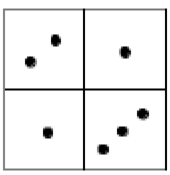
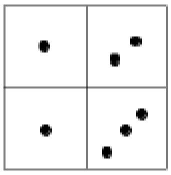
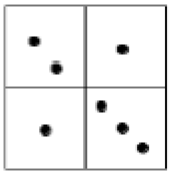
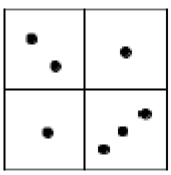


a) 23 b) 24 c) 25 d) 26 e) 27

4.
V jednom měsíci, který má 31 dní, je 5 x pondělí. Znamená to, že v tomto měsíci nemůže být:
a) 5 x sobota b) 5 x neděle c) 5 x úterý d) 5 x středa e) 5 x čtvrtek

5.
Který z obrázků nelze vytvořit z těchto dílů domina?



a)  b)  c)  d) 

Příloha 5 – Úlohy pro 5. týden

Úlohy pro 5. týden (22. – 25. 4. 2014)

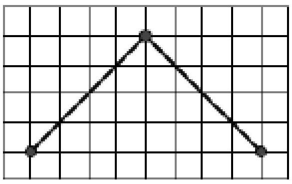
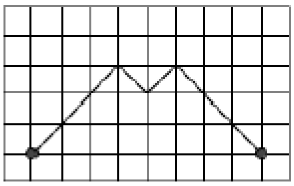
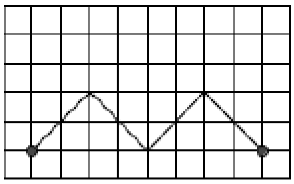
1.
Jana hrála šipky. Na začátku hry měla 10 hodů. Když zasáhla střed terče, získala 2 hody navíc. Házela celkem dvacetkrát. Kolikrát zasáhla střed terče?

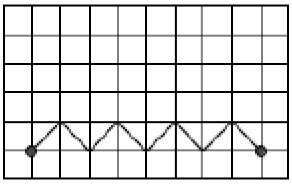
a) 6 b) 8 c) 10 d) 5 e) 4

2.
Jirka má v peněžence jednu minci v hodnotě 1 euro, jednu minci v hodnotě 2 eura a bankovku v hodnotě 5 euro. Kolik peněz nemůže půjčit tátovi?

a) 3 euro b) 4 euro c) 6 euro d) 7 euro e) 8 euro

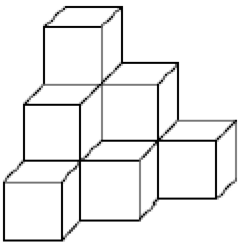
3.
Na obrázcích vidíš čtyři různé cesty mezi dvěma body. Která cesta je nejkratší?

a)  b)  c) 

d)  e) všechny jsou stejně dlouhé

4.
Zkus najít další cesty stejné délky mezi dvěma body (viz úkol č. 3).

5.
Stavba na obrázku je sestavěna z 10 kostek. Míša celou stavbu namočila do červené barvy. Kolik stěn všech 10 kostek je červených?



a) 18 b) 24 c) 30 d) 36 e) 42

Příloha 6 – Úlohy pro 6. týden

Úlohy pro 6. týden (28. – 30. 4. 2014)

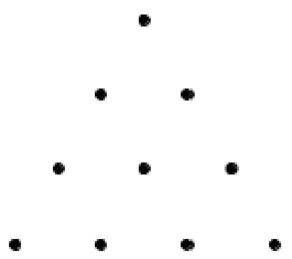
1.
Kolik trojciferných čísel má součet číslic 3?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

2.
Ve třídě si potřásli rukama každý chlapec s každým děvčetem. Dohromady si potřásli 77 krát. Kolik dětí je ve třídě?

a)17 b) 18 c) 21 d) 27 e) 37

3.
Jaký nejmenší počet teček musíš odebrat, aby nebylo možné sestrojit ze zbylých teček rovnostranný trojúhelník?



a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Bonusový úkol na doma:
Do každé tabulky s devíti poli doplň jedno z čísel 1, 2, 3. Číslo 1 napiš do levého horního čtverce. Do každého sloupce a každého řádku tabulky můžeš napsat každé z čísel právě jednou. Kolik takových různých tabulek můžeš vytvořit?

1		

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 8

Příloha 7 – Úlohy pro 7. týden

Úlohy pro 7. týden (5. – 7. 5. 2014)

1.
Urči vzájemnou polohu dvou kružnic
a) se stejným poloměrem
b) s různým poloměrem.

2.
a) Narýsuj tři kružnice k, l, m se stejným středem S o poloměrech 2 cm, 3 cm a 3 cm 5 mm.
b) Co ti narýsovaný obraz připomíná?

3.
a) Uveď příklady z reálného života pro kružnici a kruh.

kružnice	kruh
- náušnice	- dopravní značka

b) Najdeš skutečný předmět, kde se vyskytuje současně kružnice a kruh?
např. hrnek

Bonusový úkol:
Petra napsala dvě čísla. Použila číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6. Obě čísla jsou trojciferná. Každou číslici použila právě jednou. Obě čísla nakonec sečetla. Jaký největší možný součet mohla dostat?

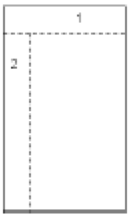
a) 975 b) 999 c) 1083 d) 1173 e) 1221

Příloha 8 – Úlohy pro 8. týden

Úlohy pro 8. týden (12. – 16. 5. 2014)

1.
Tomáš skočí z místa do vzdálenosti 1 m, Ondřej 3 m. Když dostane Tomáš náskok 10 m, po kolika skocích budou stát chlapci na stejném místě (ve stejné vzdálenosti)?

2.
Katka stříhala do obdélníku na čtverečkovaném papíru. Ustřihla jednu řadu 5 čtverečků (1), poté ještě jednu řadu 7 čtverečků (2). Kolik čtverečků měl obdélník původně?

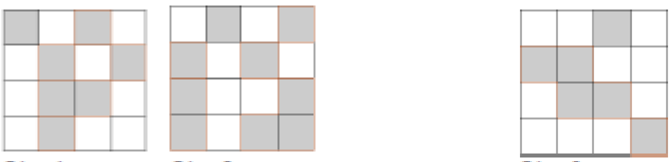


a) 28, b) 32, c) 35, d) 40, e) 54

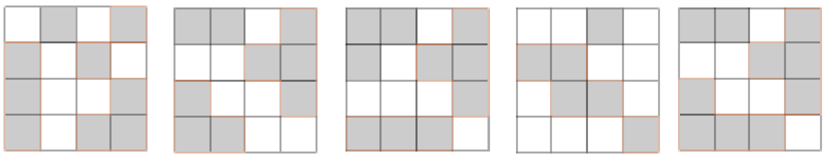
3.
Dva tlouštíci, Pepa a Franta, váží dohromady 320 kg. Pepa váží o 32 kg více než Franta. Kolik váží Franta?

a) 128 kg, b) 144 kg, c) 160 kg, d) 176 kg, e) 192

4.
Obrázek 1 patří k obrázku 2. Který z obrázků patří k obrázku 3?



Obr. 1 Obr. 2 Obr. 3



A B C D E

5.
Anička sbírá obrázky hradů a zámků. Každý rok nasbírala stejně obrázků jako za předchozí dva roky dohromady. V roce 2007 měla 60 obrázků a v roce 2008 měla 96 obrázků. Kolik obrázků měla v roce 2005?

a) 20, b) 24, c) 36, d) 40, e) 48

Příloha 9 – Úlohy pro 9. týden

Úlohy pro 9. týden (19. – 22. 5. 2014)

1.
Hermiona zapisuje do tabulky čísla 1, 2, 3. V každém řádku a každém sloupci se každé z čísel 1, 2, 3 vyskytuje právě jednou. Jaké číslo napíše místo otazníku?

1	?	
2	1	

a) pouze 1, b) pouze 2, c) pouze 3, d) 2 nebo 3, e) 1, 2 nebo 3

2.
Ron našel nejmenší číslo větší než 2006 takové, že součet jeho cifer byl stejný jako součet cifer čísla 2006. Jaké číslo to bylo?

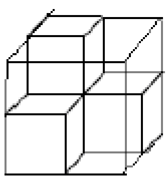
a) 2015, b) 2114, c) 2007, d) 7001, e) 2060

3.
Ze třech dominových kostek se ztratily puntíky. Místo nich se objevily znaky ♥, ☺, ♯, které označují počet ztracených puntíků. Čísla pod každou dominovou kostkou udávají součet. Doplň puntíky do prázdných dominových kostek

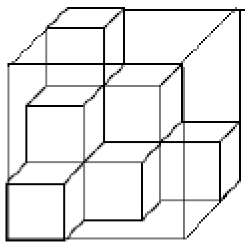
♥	☺	♥	♯	☺	♯

7 6 3

4.
Katka má malé krychle o hraně 1 cm. Některé poskládala do velké krychle o hraně 2 cm (obrázek č. 1), o hraně 3 cm (obrázek č. 2). Kolik malých krychlí musí přidat, aby zaplnila zcela velkou krychli?



Obr. 1



Obr. 2

a) 1, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6

a) 9, b) 13, c) 17, d) 21, e) 27

Příloha 10 – Úlohy pro 10. týden

Úlohy pro 10. týden (26. – 30. 5. 2014)

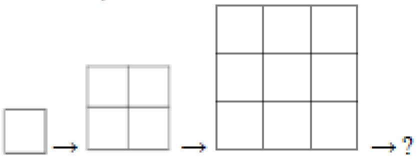
1.
varianta a)
Na kolotoči jsou sedadla označená čísly 1, 2, 3, 4, atd. Na sedadle s číslem 6 sedí Aleš. Přesně naproti sedí Kristýna na sedadle s číslem 2. Kolik sedadel má kolotoč?

varianta b)
Na kolotoči jsou sedadla označená čísly 1, 2, 3, 4, atd. Na sedadle s číslem 11 sedí Aleš. Přesně naproti sedí Kristýna na sedadle s číslem 4. Kolik sedadel má kolotoč?

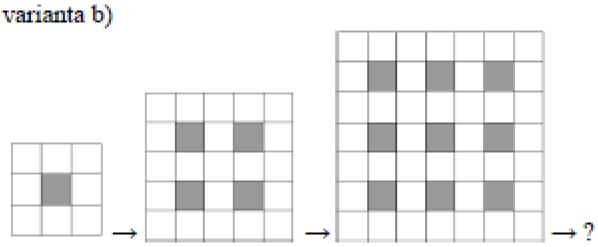
2.
Digitální hodiny ukazují čas 20:07. Jaký nejkratší čas musí uběhnout, aby se na hodinách objevily tyto čtyři číslice v jiném pořadí?

3.
Kolik bílých čtverečků bude mít následující čtverec? (U třech čtverců ve variantě b je uveden počet bílých čtverečků.)

varianta a)

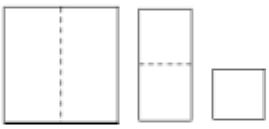


varianta b)

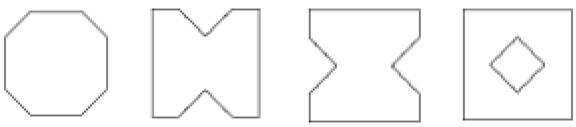


8 21 40

4.



Papír ve tvaru čtverce dvakrát přeložíme. Dostaneme opět čtverec. Ustřihneme jeden roh. Jaký obrázek neuvidíme?



Můžeme vidět všechny.

a) b) c) d) e)

Příloha 11 – Úlohy pro 11. týden

Úlohy pro 11. týden (2. – 6. 6. 2014)

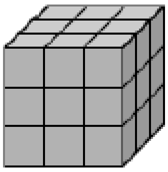
1.
Palindrom je číslo (i slovo, apod.), které čteme stejně zleva i zprava. Tachometr v autě ukazuje číslo 73937. Jaký nejmenší počet km musí auto najet, aby číslo na tachometru bylo opět palindrom?

2.
Radka, Franta, Lenka, Jarmila a Albert stojí za sebou v řadě. Radka stojí za Lenkou. Franta stojí před Radkou a hned za Jarmilou. Jarmila stojí před Lenkou, ale nestojí první. Kolikátý v řadě stojí Albert?

a) první, b) druhý, c) třetí, d) čtvrtý, e) pátý

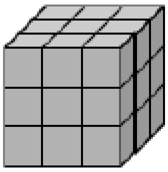
3.
Krychle o hraně 3 cm je natřená šedou barvou. Šárka ji rozřezala na malé krychle o hraně 1 cm. Kolik malých krychlí má natřené právě

A) tři stěny,



a) 4, b) 6, c) 8, d) 10, e) 12

B) dvě stěny?



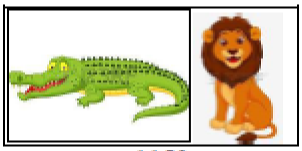
a) 4, b) 6, c) 8, d) 10, e) 12

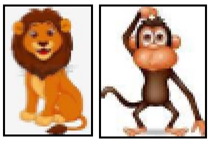
4.
Obdélník má délky stran 15 cm a 9 cm. Odstřihneme čtyři čtverce (každý čtverec má obvod 8 cm) z rohů obdélníku. Urči

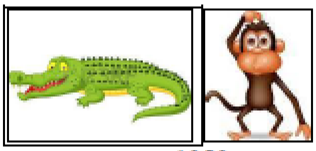
A) obsah tohoto útvaru
a) 131 cm^2, b) 127 cm^2, c) 119 cm^2, d)123 cm^2

B) obvod tohoto útvaru
a) 48 cm, b) 40 cm, c) 32 cm, d) 24 cm

5.
Čísla udávají hmotnost dvou afrických zvířat v kg. Kolik kg váží krokodýl, lev a opice?


1150


200


1050

Příloha 12 – Úlohy pro 12. týden

Úlohy pro 12. týden (9. – 13. 6. 2014)

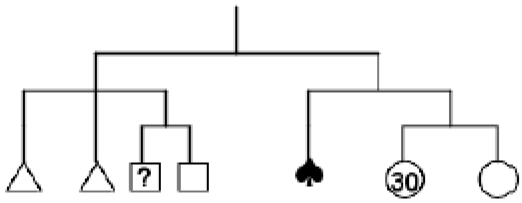
1.
Dva měsíce v roce, které jdou po sobě, nikdy nemají celkem

a) 62 dnů, b) 61 dnů, c) 60 dnů, d) 59 dnů, e) 58 dnů.

2.
Farmářka prodává 66 vajec. Má plata na 6 vajec a na 12 vajec. Jaký je nejmenší počet plat, do kterých všechny vajíčka zabalí?

a) 5, b) 6, c) 9, d) 11, e) 13

3.
Hmotnost malého kruhu na rovnoramenných vahách je 30 g. Jaká je hmotnost čtverce označeného otazníkem?

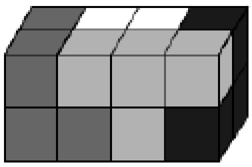


a) 10 g, b) 20 g, c) 30 g, d) 40 g, e) 50 g

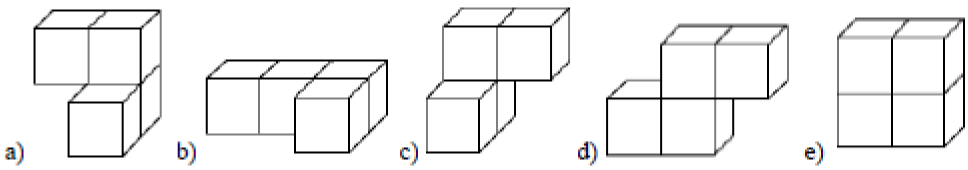
4.
Michael hodil čtyřikrát kostkou ze hry „Člověče, nezlob se“. Součet hozených bodů byl 23. Kolikrát mu padla šestka?

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4

5.



Kvádr je sestaven ze 4 x 4 krychlí - po čtyřech stejné barvy. Určete tvar bílých krychlí.



Příloha 13 – Psychologický test SUPSO

Test SUPSO 1

SUPSO – 1

Pohlaví : M – Ž
Číslo : ....

ZAZNAMENEJ V KAŽDÉ KOLONCE TVŮJ **OBVYKLÝ** STUPEŇ PROŽÍVÁNÍ DANÉHO POCITU ČI STAVU.

	VŮBEC	OBČAS	ZPRAVIDLA	ČASTO	SOUSTAVNĚ
SPOKOJENÝ					
ENERGICKÝ					
NÁLADOVÝ					
ROZMRZELÝ					
OTRÁVENÝ					
NAPJATÝ					
SMUTNÝ					
SVĚŽÍ					
ČINORODÝ					
VÝBUŠNÝ					
NESPOKOJENÝ					
PESIMISTICKÝ					
NEJISTÝ					
NEŠŤASTNÝ					
DOBŘE NALADĚNÝ					
TEMPERAMENTNÍ					
TĚŽKO SE OVLÁDÁM					
NETRPĚLIVÝ					
ZMOŘENÝ					
ÚZKOSTNĚ NALADĚNÝ					
PŘECITLIVĚLÝ					
KLIDNÝ					
PRŮBOJNÝ					
VZTEKLÝ					
NEKLIDNÝ					
VYČERPANÝ					
PROŽÍVÁNÍ OBAV					
OSAMĚLÝ					

Příloha 14 – Psychologický test SPAS

Test SPAS 1

MODIFIKACE SPAS – 1

Pohlaví : M -- Ž
Číslo : ……………

1	Naučím se dost lehce a rychle i těžkou látku	ANO	NE
2	Myslím, že matematiku umím velmi dobře.	ANO	NE
3	Osobně si myslím, že moje školní práce je dost slabá.	ANO	NE
4	Učení mi připadá dost těžké. Jsem rád/a, když mi někdo pomůže.	ANO	NE
5	Při prověrce z matematiky vždycky vypočítám všechny příklady. …..vyřeším všechny úkoly.	ANO	NE
6	Mezi spolužáky ve třídě bývám často jeden/jedna z prvních.	ANO	NE
7	Je únavné, když musím nad úkolem moc myslet.	ANO	NE
8	Kolmice a rovnoběžky jsem se naučil/a lehce, nedělají mi potíže.	ANO	NE
9	Písemky zvládám celkem lehce.	ANO	NE
10	Často mi dělá potíže vyjádřit se, jak bych chtěl/a.	ANO	NE
11	Nejlepší známky dostávám z matematiky.	ANO	NE
12	Škola mi kazí náladu. Jde mi často na nervy.	ANO	NE
13	Při prověrkách a zkoušení mi všechno trvá déle než ostatním. Potřeboval/a bych trochu víc času.	ANO	NE
14	Matematika je můj nejmilejší předmět.	ANO	NE
15	Ve škole mi jde všechno lehce, bez potíží. Cítím se tam dobře.	ANO	NE
16	Většina spolužáků se učí lépe než já.	ANO	NE
17	Učitel/učitelka si myslí, že jsem na matematiku hloupý/á.	ANO	NE
18	Sám/sama si myslím, že moje nadání je docela slabé.	ANO	NE
19	Mám rád/a úkoly, nad kterými se musí myslet.	ANO	NE
20	Jsem špatný/á na matematiku, moc mi nejde.	ANO	NE
21	Zkoušení mě hrozně znervózňuje.	ANO	NE
22	Patřím asi mezi nejbystřejší ve třídě.	ANO	NE
23	Písemné násobení dvouciferným činitelem je pro mě hračka.	ANO	NE
24	Ze školy mívám strach, nejraději bych tam nechodil/a.	ANO	NE

Příloha 15 – Ukázka řešení žáka z pretestu

Ukázka řešení žáka 3 – úloha 2 z pretestu (1. fáze)

I.

3.

2.

Pepík měl loni kartu do Cinema City, za kterou zaplatil 500 Kč. Za každý film pak navíc zaplatil pouze 50 Kč. Franta neměl klubovou kartu, proto za každý film zaplatil 100 Kč.
Během roku viděli Pepík i Franta stejné filmy a byli překvapeni, že každý z nich zaplatil stejnou částku.
Kolik filmů každý z nich viděl ten rok?

- Vysvětli své řešení.
- Pokus se najít různé způsoby řešení.

Pepík viděl 8 filmu protože 50+50+50+50+50+50+50+50=400

Franta viděl 4 filmu protože 100+100+100+100=400

Pepík: 8
Franta 4

Příloha 16 – Ukázka řešení žáka z posttestu

Ukázka řešení žáka 3 – úloha 2 z posttestu (2. fáze)

II.

3

2.

Pepík měl loni kartu do Cinema City, za kterou zaplatil 500 Kč. Za každý film pak navíc zaplatil pouze 50 Kč. Franta neměl klubovou kartu, proto za každý film zaplatil 100 Kč.
Během roku viděli Pepík i Franta stejné filmy a byli překvapeni, že každý z nich zaplatil stejnou částku.
Kolik filmů každý z nich viděl ten rok?

- Vysvětli své řešení.
- Pokus se najít různé způsoby řešení.

P 500 50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,
50,

F 0 100,100,100,100,100,100,100,100,100,100,100,100,100,
100,100

P 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000

F 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

Oba dva viděli 10 filmů