FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI
STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2014

Úloha řízení kyvadla pomocí dynamického programování

Jan Škach[1]

1 Úvod

Automatické řízení systémů je nejenom v technice významnou vědní discilpínou. Obsah tohoto příspěvku je zaměřen na návrh optimálního regulátoru systému se známým matematickým modelem systému pomocí dynamického programování (DP). DP má uplatnění nejen v technických oborech, ale také např. při řešení ekonomických problémů. Aplikaci najde v úlohách přiměřeného množství diskrétních stavů a řízení, avšak použitím aproximačních metod může být využité i v následující úloze řízení kyvadla se spojitým prostorem stavů. DP je možné aplikovat na lineární i nelineární systémy. Obecný problém může být formulován na konečném nebo nekonečném horizontu, tedy problém s končeným nebo nekonečným počtem kroků řízení.

2 Návrh regulátoru pomocí DP

Nelineární spojitý model kyvadla je reprezentován rovnicí $ml^2\ddot{\varphi}(t) = -mgl\sin(\varphi(t)) - c\dot{\varphi}(t) + u(t)$, kde $\varphi(t)$ [rad] je úhel natočení kyvadla z dolní rovnovážné polohy a $u(t)$ [N m] představuje vstupní točivý moment. Šimandl et al. (2014) použitím Eulerovy metody diskretizace spojitého stavového modelu s periodou vzorkování $T_s = 0.05$ [s], hmotnosti kyvadla $m = 2$ [kg], jeho délky $l = 1$ [m] a koeficientu tlumení $c = 6$ [kg m^2 s^{-1}] získal následující diskrétní stavový popis systému v časovém okamžiku $k = 1, 2, \ldots$ s vektorem stavů $\mathbf{x}_k = [x_{k,1},\ x_{k,2}]^T$, $x_{k,1} = \varphi_k$, $x_{k,2} = \dot{\varphi}_k$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_k, u_k) + \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 0.85 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.025 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4905 \end{bmatrix} \sin(x_{k,1}) + \mathbf{w}_k, \qquad (1)$$

kde $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left([0,\ 0]^T,\ 0.01\mathbf{I}_2\right)$ představuje stavový šum. Úloha předpokládá diskrétní konečnou množinu možných řízení $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$. Spojitý prostor stavů $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^2$ je aproximován diskrétní mřížkou $\mathcal{S}^{\mathrm{g}}$. Agregační funkce $\mathbf{g} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^{\mathrm{g}}$ zajistí promítnutí stavu $\mathbf{x}_k \in \mathcal{S}$ do bodu mřížky $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathcal{S}^{\mathrm{g}}$, $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = \arg\min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}^{\mathrm{g}}} \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}\|_2$, $\boldsymbol{\xi}$ představuje bod mřížky.

Cílem úlohy je nalézt strategii řízení $\rho : \mathcal{S}^{\mathrm{g}} \mapsto \mathcal{U}$, která každému bodu mřížky přiřadí řízení z množiny přípustných řízení $\mathcal{U}$ takové, že je minimalizováno zvolené kritérium $J(\rho) = \lim_{F\to\infty} \sum_{k=0}^{F} \lambda^k L(\mathbf{x}_k, u_k)$ s diskontním faktorem $\lambda = 0.98$ a kvadratickou ztrátovou funkcí definovanou jako

$$L(\mathbf{x}_k, u_k) = [h(x_{k,1}),\ x_{k,2}]\mathbf{Q}[h(x_{k,1}),\ x_{k,2}]^T + ru_k^2, \qquad (2)$$

kde $h(x_{k,1}) = ((x_{k,1} + \pi) \mod 2\pi) - \pi$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r = 0.01$.

[1] student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika, e-mail: janskach@kky.zcu.cz

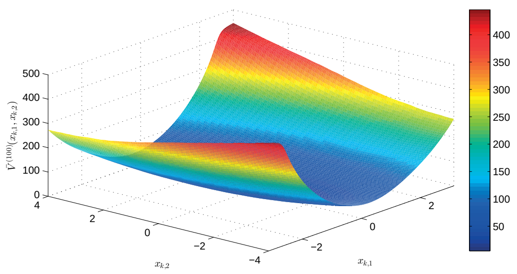
Postup nalezení optimální strategie řízení se opírá o řešení nelineární funkcionální rovnice, tzv. Bellmanovy rovnice optimality. Její obecný tvar pro úlohu nekonečného horizontu řízení je následující

$$V^*(\mathbf{x}_k) = \min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left\{L(\mathbf{x}_k, u_k) + \lambda V^*(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{x}_k, u_k\right\}, \tag{3}$$

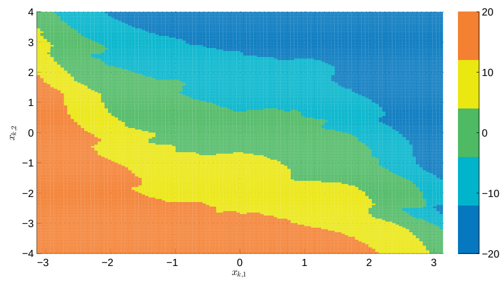
kde V^* je Bellmanova funkce, $\mathbb{E}$ označuje střední hodnotu. Po nalezení funkce V^* lze vypočítat strategie řízení $u_k^* = \rho^*(\mathbf{x}_k) = \arg\min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left\{L(\mathbf{x}_k, u_k) + \lambda V^*(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{x}_k, u_k\right\}$. Použitím jednotné mřížky a agregační funkce aproximuje optimální Bellmanovu funkci po částech konstatní funkce $\bar{V} : \mathcal{S}^{\mathrm{g}} \mapsto \mathbb{R}$. Jednu z numerických metod hledání V^* představuje metoda iterace Bellmanovy funkce, která rekurzivně zjišťuje nové hodnoty Bellmanovy funkce z funkcionální rovnice $\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) = \min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left\{L(\boldsymbol{\xi}, u_k) + \lambda \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}') | \boldsymbol{\xi}, u_k, \right\}$, $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}) \in \mathcal{S}^{\mathrm{g}}$. Lze ukázat, že $\bar{V}^{(i+1)}$ konverguje k $\bar{V}$. Zvolená zastavovací podmínka iterační metody je $\|\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty \leq \delta_{\mathrm{VI}}$, $\delta_{\mathrm{VI}} = 0.01$ a maximální počet iterací $n_{\mathrm{VI}} = 100$.

3 Zhodnocení výsledků

Simulační experiment obsahoval přípustné řízení $\mathcal{U} = \{0,\ -20,\ -10,\ 10,\ 20\}$ a mřížku definovanou $\mathcal{S}^{\mathrm{g}} = \{-\pi,\ -59\pi/60,\ \ldots,\ 59\pi/60,\ \pi\} \times \{-4,\ -3.95,\ \ldots,\ 3.95,\ 4\}$. Střední hodnota $\mathbb{E}\left\{\bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}') | \boldsymbol{\xi}, u_k\right\}$ byla vypočítána pomocí 100 Monte Carlo simulací. Metoda iterace Bellmanovy funkce byla ukončena po 100 iteracích s rozdílem $\|\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty = 0.0191$. Nalezená Bellmanova funkce a strategie řízení do dolní rovnovážné polohy kyvadla je zobrazena na obrázku 1. Algoritmus hledá strategii řízení offline. Strategie řízení je následně použita online při řízení systému. Aktuální stav systému $\mathbf{x}_k$ určí, jaké řízení bude aplikováno. Tento přístup je paměťově a výpočetně náročný, jelikož musí být ohodnoceny všechny kombinace stavů systému a možných řízení. Výhodou je jistá univerzálnost přístupu a aplikace na řízení nelineárních systémů.



(a) Bellmanova funkce $\bar{V}^{(100)}(x_{k,1}, x_{k,2})$.



(b) Strategie řízení $\rho(x_{k,1}, x_{k,2})$.

Obrázek 1: Výstupy simulačního experimentu použitím metody iterace účelové funkce.

Poděkování

Obsah práce byl diskutován s Ing. Ivem Punčochářem Ph.D., kterému tímto velmi děkuji.

Literatura

Šimandl, M., Škach, J., and Punčochář, I., 2014. Approximation Methods for Optimal Active Fault Detection. *Accepted for publication. Proceeding, 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation.*