Studentská Vědecká Konference 2012

Řešitelnost nelokálních okrajových úloh

Yulia Tigay[1], Gabriela Holubová[2]

1 Úvod

Naše diplomová práce se zabývá otázkou existence netriviálního řešení nelokálních neboli vícebodových okrajových úloh. Konkrétně v tomto příspěvku jsme se zaměřili na čtyřbodovou okrajovou úlohu. V příspěvku jsou charakterizovány systémy vlastních čísel a jim odpovídající systémy vlastních funkcí čtyřbodové úlohy.

2 Čtyřbodová okrajová úloha

Výchozí čtyřbodová okrajová úloha s okrajovými čtyřbodovými podmínkami má tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\xi), & \\ u'(\pi) = u'(\eta), & \end{cases} \tag{1}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0,\pi)$, $\eta \in (0,\pi)$. Trojici $(\xi,\eta,\lambda) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \times \in \mathbb{R}$ nazveme *vlastní trojicí*, jestliže úloha (1) má netriviální řešení $u(t)$, pro které je diferenciální rovnice v (1) splněna pro každé $t \in (0,\pi)$ a která vyhovuje okrajovým podmínkám v (1). Hodnotu $\lambda = \lambda(\xi,\eta)$ pak budeme standardně nazývat *vlastním číslem*. Příslušné nenulové násobky $u(t)$ nazýváme *vlastními funkcemi* okrajové úlohy.

Podrobnější struktura vlastních trojic a vlastních funkcí

Uvažujeme vlastní trojic $(\eta,\xi,\lambda) \in \langle 0,\pi) \times \langle 0,\pi) \times \mathbb{R}$. Množinu všech vlastních trojic značíme σ.

$$\sigma = C_{2n} \cup C_{2k-1} \cup C_{2l}, \quad n,k,l \in \mathbb{N},$$

$$C_{2n} = \left\{ (\xi,\eta,\lambda) : \lambda = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2k-1} = \left\{ (\xi,\eta,\lambda) : \lambda = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2l} = \left\{ (\xi,\eta,\lambda) : \lambda = \left(\frac{2l\pi}{\xi} \right)^2 \right\}.$$

3 Výsledky zkoumání

Hlubším zkoumáním se nám podařilo nalézt analytické předpisy pro systémy vlastních čísel a vlastních funkcí a to nasledující:

1. $\lambda_0 = 0 \Longrightarrow u_0(t) = 1$,

2. $\lambda_{2n} = \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2 \Longrightarrow u_{2n}(t) = \cos(\sqrt{\lambda_{2n}}) \left(t - \frac{\xi}{2} \right)$,

[1] studentka navazujícího studijního programu Matematika, obor Matematika, specializace Matematická analýza, e-mail: yulia@students.zcu.cz

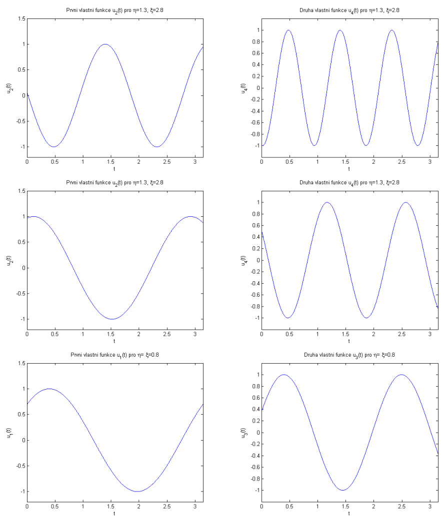
[2] doc. Ing. Gabriela Holubová Ph.D., katedry matematiky, Západočeská univerzita v Plzni, univerzitní 22, 306 14, Plzeň, e-mail: gabriela@kma.zcu.cz

3. $\lambda_{2l} = \left(\frac{2\pi l}{\xi}\right)^2 \Longrightarrow u_{2l}(t) = \sin(\sqrt{\lambda_{2l}})\left(t - \frac{\pi + \eta}{2}\right),$

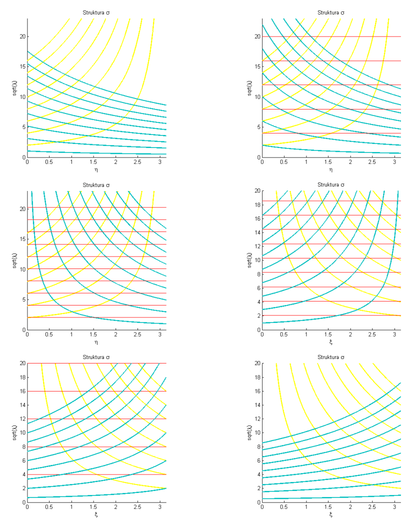
4. $\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi}\right)^2 \Longrightarrow u_{2k-1}(t) = \cos(\sqrt{\lambda_{2k-1}})\left(t - \frac{\xi}{2}\right).$

Pro případ 2., 3., 4., budeme uvažovat vybrané hodnoty parametrů a to následující:

$$\eta = 1.3 \, < \, \xi = 2.8, \quad \xi = 1.3 \, < \, \eta = 2.8, \quad \eta \, = \, \xi \, = \, 0.8.$$



Obrázek 1: První dvě vlastní funkce u_1, u_2 pro různá nastavení parametrů ξ, η.



Obrázek 2: Struktura množiny σ pro různá nastavení parametrů ξ, η.

Limitní případy čtyřbodové úlohy

Pokud oba parametry se budou nabývat hraničních hodnot, potom obdržíme známé okrajové úlohy:

1. $\xi \to 0, \, \eta \to 0 \quad \Longrightarrow$ Neumannova úloha.
2. $\xi \to \pi, \, \eta \to 0 \quad \Longrightarrow$ periodická úloha.
3. $\xi \to \pi, \, \eta \to \pi \quad \Longrightarrow$ Dirichletova úloha.
4. $\xi \to 0, \, \eta \to \pi \quad \Longrightarrow$ Dirichletova-Neumannova úloha.

4 Závěr

V práci jsme prozkoumali otázku existence netriviálního řešení čtyřbodové okrajové úlohy. Nalezli jsme tedy všechna vlastní čísla a všechny jim odpovídající vlastní funkce. Dále jsme prozkoumali příslušné systémy vlastních čísel podrobněji pomocí množiny σ. Všechny obdržené výsledky byly graficky znázorněny.

Literatura

G. Holubová, P. Nečesal: *Nonlinear Four-Point Problem: Non-Resonance with Respect to the Fučík Spectrum*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 71 (2009), 4559-4567.