

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

Dizertační práce

POKROČILÉ METODY A ALGORITMY PRO
ANALÝZU SDRUŽENÝCH ÚLOH V
ELEKTROMAGNETISMU

František MACH

duben 2015

ANOTACE A KLÍČOVÁ SLOVA

Předložená dizertační práce se zabývá moderní oblastí matematického modelování, kterou představuje spojení numerického řešení matematických modelů, jejich analýza a také optimalizace. Toto téma je velmi aktuální a jeho rozvoj přináší do oblasti vědy a techniky důležité metody a postupy, které mají značný dopad na způsoby návrhu a analýzy technologií, zařízení a jejich komplexních systémů. Motivace ke zpracování této práce vychází z potřeby a obrovské chuti řešit komplikované problémy s ohledem na praktické aplikace v oblasti elektromagnetismu.

Vlastní práce je rozdělena do pěti částí. První část práce je zaměřena především na vymezení řešené oblasti a zhodnocení současného stavu poznání. Druhá část práce se zabývá formulací sdružených úloh, jejich specifiky a také metodami jejich řešení pomocí numerických metod a moderních algoritmů založených na metodě konečných prvků vyšších řádů přesnosti. Třetí část práce popisuje vybrané algoritmy pro analýzu počítačových modelů a optimalizaci. Ve čtvrté části jsou pak uvedeny rozsáhlejší ilustrativní příklady řešených technických problémů a poslední část práce je pak zaměřena na shrnutí dosažených výsledků a nastínění očekávaných směrů pokračování v dané práci.

Všechny metody a algoritmy, které jsou v práci diskutovány, jsou přitom implementovány do knihovny Hermes, aplikace Agros2D a systému OptiLab, který představuje hlavní výstup práce. Tyto algoritmy jsou přitom navrženy tak, aby nebyly závislé na povaze řešeného problému a možnost jejich dalšího využití pro řešení praktických technických úloh je tak hlavním přínosem této práce.

KLÍČOVÁ SLOVA

sdružená úloha, numerická analýza, metoda konečných prvků, analýza citlivosti, optimalizace, genetické algoritmy, Agros2D, OptiLab, triboelektrický separátor, indukční ohřev, Fieldův kov, elektromagnetický aktuátor, elektromagnetický ventil

ANOTATION AND KEYWORDS

The presented dissertation thesis deals with a modern domain of mathematical modeling that is represented by the connection of numerical solution of mathematical models, their analysis and also optimization. This topic is of a very high importance and its development brings to scientific and research disciplines methods and procedures with a considerable impact on design and analyses of technologies, devices and their complex systems. My motivation to this work starts from the related needs and a high temptation to solve complicated problems with respect to practical applications in the area of electromagnetism.

The work itself consists of five parts. Its first part is aimed at the specification of the area to be processed and evaluation of state of the art of relevant knowledge. The second part deals with formulations of the coupled problems, their specific features and also with the ways of their solution by numerical methods and advanced algorithms based on the fully adaptive higher-order finite element method. The third part describes selected algorithms for the analysis of the computer models and optimization. The fourth part contains three larger illustrative examples of solved technical problems and the last part summarizes the results obtained and indication of directions of next research in the field.

All methods and algorithms discussed in the thesis are implemented in the library Hermes, application Agros2D and system OptiLab, which represents the principal output of the work. These algorithms are proposed independently of the nature of the problem to be solved, and the possibility of their further utilization for solving practical technical tasks is the main contribution of this thesis.

KEYWORDS

coupled problem, numerical analysis, finite element method, sensitivity analysis, optimization, genetic algorithms, Agros2D, OptiLab, triboelectric separator, induction heating, Field metal, electromagnetic actuator, electromagnetic valve

PODĚKOVÁNÍ

Za skvělé vedení při studiu a odborné práci zaslouží obrovské díky především doc. Ing. Pavel Karban, Ph.D. a prof. Ing. Ivo Doležel, CSc., kteří se stali mými dlouholetými kolegy a přáteli. Dále bych rád poděkoval všem kolegům se kterými jsem měl tu čest spolupracovat. V neposlední řadě bych rád poděkoval celé své rodině za její podporu, především pak svým rodičům a mé Janině za neuvěřitelnou výdrž a nikdy nekončící motivaci.

Tato dizertační práce vznikla s podporou Evropského fondu pro regionální rozvoj a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR v rámci projektu Regionální inovační centrum elektrotechniky (RICE), číslo projektu CZ.1.05/2.1.00/03.0094 a projektu Grantové agentury České republiky GAČR P102/11/0498 Nové adaptivní monolitické metody vyšších řádů pro numerické řešení evolučních multifyzikálních problémů v elektrotechnice.

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení dizertační práci, zpracovanou během mého doktorského studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně, s použitím uvedené odborné literatury, a pramenů a že veškerý software, použitý při jejím řešení a zpracování, byl využit s respektováním všech jeho licenčních podmínek.

V Plzni, dne 15.4.2015

František Mach

OBSAH

i ÚVOD DO PROBLEMATIKY	2
I.1 MOTIVACE PRÁCE	3
I.1.1 Definice základních pojmů	3
I.1.2 Vymezení řešené oblasti	4
I.1.3 Aktuální problémy a výzvy	4
I.2 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ	5
I.2.1 Moderní numerické metody pro řešení sdružených úloh	5
I.2.2 Moderní metody pro analýzy a optimalizace	7
I.3 HLAVNÍ CÍLE PRÁCE	9
I.4 METODIKA A STRUKTURA PRÁCE	10
ii POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ SDRUŽENÝCH ÚLOH	11
II.1 MATEMATICKÉ MODELY SDRUŽENÝCH ÚLOH	12
II.2 NUMERICKÉ METODY A ALGORITMY	14
II.2.1 Důležité aspekty využití numerických metod	15
II.2.2 Přehled numerických metod pro řešení fyzikálních polí	16
II.2.3 Metoda konečných prvků vyšších řádů přesnosti	17
II.2.4 Prostorová adaptivita	19
II.2.5 Časová adaptivita	23
iii METODY A ALGORITMY PRO ANALÝZU A OPTIMALIZACI POČÍTAČOVÝCH MODELŮ	25
III.1 ANALÝZA CITLIVOSTI MATEMATICKÝCH MODELŮ	26
III.2 OPTIMALIZACE	32
III.2.1 Klasifikace matematické úlohy optimalizace	32
III.2.2 Optimalizační úlohy v technické praxi	36
III.2.3 Optimalizační metody	39
III.2.4 Automatická redukce dimenze optimalizační úlohy	40
III.3 POPIS SYSTÉMU OPTILAB	44
III.3.1 Struktura a základní funkce	45
III.3.2 Akcelerace výpočetních úloh	46
iv ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY	49
IV.1 TVAROVÁ OPTIMALIZACE ELEKTROD TRIBOELEKTRICKÉHO SEPARÁTORU PLASTŮ	50
IV.1.1 Formulace technického problému	51

Obsah

IV.1.2	Matematický model a jeho numerické řešení	52
IV.1.3	Formulace úlohy optimalizace	54
IV.1.4	Průběh procesu optimalizace a diskuze výsledků	56
IV.2	ODHAD TEPLA ZÁVISLÉ CHARAKTERISTIKY MĚRNÉ TEPLOTNÍ KAPACITY FIELDOVA KOVU	61
IV.2.1	Popis použité metodiky	62
IV.2.2	Formulace technického problému	62
IV.2.3	Matematický model a jeho numerické řešení	63
IV.2.4	Mapování průběhu ohřevu a tavení kovu	65
IV.2.5	Citlivostní analýza materiálových parametrů	66
IV.2.6	Řešení inverzní úlohy	68
IV.2.7	Verifikace výsledků a jejich diskuze	70
IV.3	TVAROVÁ OPTIMALIZACE POHYBLIVÉHO JÁDRA ELEKTROMAGNETICKÉHO AKTUÁTORU	71
IV.3.1	Formulace technického problému	72
IV.3.2	Matematický model a jeho numerické řešení	73
IV.3.3	Základní analýza navrženého konceptu	74
IV.3.4	Analýza citlivosti geometrie navrženého konceptu	75
IV.3.5	Proces tvarové optimalizace	78
IV.3.6	Vyhodnocení výsledků	79
IV.3.7	Praktické využití získaných poznatků	81
V	ZHODNOCENÍ A ZÁVĚR	85
V.1	ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ A SMĚR DALŠÍHO ROZVOJE PRÁCE	86
V.1.1	Zhodnocení dosažených výsledků	86
V.1.2	Další směry pokračování práce	88

Část I

ÚVOD DO PROBLEMATIKY

i.1

MOTIVACE PRÁCE

MATEMATICKÉ MODELY a počítačové simulace představují v současné době velmi silný nástroj, který je využíván při řešení obrovské škály různorodých úloh a to nejen v přírodních vědách, ale také ve vědách společenských a humanitních. Tato kapitola si klade za cíl definovat důležité pojmy, které jsou dále v práci využívány, vymezit oblast zájmu práce a nastínit hlavní motivaci k jejímu řešení.

I.1.1 DEFINICE ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Pojem matematický model představuje abstrakci reálného systému, která pomocí matematického aparátu popisuje na definiční oblasti jeho vlastnosti a to na základě vstupních parametrů, proměnných a jejich vzájemných vazeb. Pokud není možné plně popsat zkoumanou realitu pomocí jednoho matematického modelu, je nutné řešit sdruženou úlohu, která využívá dílčích modelů a definuje jejich vzájemně provázání. V oblasti přírodních věd je často sdružená úloha nazývána jako úloha multifyzikální, protože spojuje dílčí modely popisující různé fyzikální jevy.

Řešením matematického modelu, které je často označováno jako přímá nebo také dopředná úloha, lze získat informace o stavu modelovaného systému, který závisí na jeho vstupních parametrech. Pokud je naopak známo řešení modelu a nejsou známy jeho vstupní parametry, je nutné řešit inverzní úlohu, jejímž výsledkem jsou právě vstupní parametry. Proces tvorby modelu a jeho následné řešení se často označuje jako matematické modelování.

Ve spojení s matematickým modelem představuje pojem simulace jeho využití pro analýzu chování reálného systému, a to pro konkrétní podmínky dané vstupními parametry modelu a další vnější vlivy. Nejrozšířenější metodou simulace jsou dnes bezesporu simulace počítačové, které využívají interpretace matematického modelu na počítači, především pak pomocí rychle se rozvíjejících numerických metod (počítačový model).

Při studiu reálného systému je tedy nutné opakovaně provádět simulaci a následně získané výsledky analyzovat. K analýze výsledků přitom můžeme přistoupit několika způsoby mezi které patří parametrická studie udávající změnu výsledků simulace při změně konkrétního vstupního parametru, nebo analýza citlivosti, která slouží k odhalení vlivu libovolného parametru na výsledek řešení daného modelu.

I.1.2 VYMEZENÍ ŘEŠENÉ OBLASTI

Snad ve všech oblastech soudobé vědy a techniky lze považovat matematické modely a počítačové simulace za velmi silné nástroje, které umožňují zkoumat složité a komplexní systémy, které často ani není možné studovat jinými způsoby. Komplexita matematických modelů se stále nezadržitelně zvyšuje a tím vzniká značný tlak na rozvoj oblasti numerické matematiky, výpočetní techniky a také algoritmizace.

V oblasti vědy jsou tyto požadavky dány především nutností modelovat stále složitější úlohy, které popisují extrémně komplexní systémy, jako může být například modelování geodynamických procesů, simulace činnosti lidského mozku, modelování globální cirkulace atmosféry a dynamiky vod oceánu, nebo například simulace vývoje galaxií.

Požadavky v oblasti techniky jsou do značné míry totožné, stále se zvyšující složitost úloh je však dále doplněna o požadavky na možnost následného využití výsledků simulací a to například k důsledné analýze zkoumané technologie nebo optimalizaci vyvíjeného zařízení. Proti sobě však stojí požadavek na zvýšení složitosti úlohy, který má za následek nutné zvýšení výpočetní náročnosti a zároveň požadavek na její snížení vzhledem k nutnosti opakovaného řešení modelu při analýze či optimalizaci.

Ke splnění zmíněných požadavků je tedy nutný vývoj pokročilých numerických metod, které umožní výrazně snížit výpočetní náročnost složitých matematických modelů a zároveň také vývoj pokročilých metod a algoritmů, které umožní analýzu a optimalizaci daného modelu s nejmenším možným počtem jeho opakovaného řešení. Spojení obou uvedených oblastí je právě hlavním tématem této práce.

I.1.3 AKTUÁLNÍ PROBLÉMY A VÝZVY

Přes značný rozvoj numerických metod, výpočetní techniky i algoritmů pro řešení matematických modelů stále existuje nespočetné množství problémů, které nejsou doposud vyřešeny. Mezi tyto problémy patří například úlohy s nesouměřitelnými škálami řešení (multiscale modeling), mezi které patří například rekonstrukce magnetických siločar [1] nebo modelování materiálů s rozdílnými prostorovými a časovými škálami [2]. Extrémně rozměrné úlohy (exascale computing) jsou dalším příkladem nevyřešených problémů [3]. Jedná se například o úlohy simulace granulovaných materiálů [4], mapování volných hranic povrchů [5] nebo trasování pohybu elektricky nabitých částic [6]. Mezi další problémy, které v oblasti matematického modelování budí značnou pozornost, rozhodně patří velmi rychlé přechodové děje [7] [8] [9], silně nelineární úlohy [10] [11] nebo vývoj a řešení matematických modelů respektujících metamateriály [12] [13] a materiály s komplexně definovanými vlastnostmi (hystereze a anizotropie) [14] [15] [16].

Složitost a výpočetní náročnost řešení matematických modelů je obrovskou výzvou pro vývoj algoritmů pro jejich analýzu a optimalizaci. Obzvláště pak pro případ sdružených úloh, které jsou charakteristické právě náročností jejich řešení.

i.2

SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ

MATEMATICKÉ MODELY jejich numerické řešení, analýza a optimalizace jsou velmi rozsáhlá témata, která jsou současně rozvíjena v mnoha oblastech a v mnoha různých podobách. Cílem této kapitoly je stručně poukázat na současný stav poznání. Vzhledem k šíři všech těchto oblastí bude uveden jen výběr moderních metod, algoritmů a technik relevantních k zaměření této práce.

I.2.1 MODERNÍ NUMERICKÉ METODY PRO ŘEŠENÍ SDRUŽENÝCH ÚLOH

Současný vývoj numerických metod pro řešení fyzikálních polí a sružených úloh lze rozdělit na dva základní směry, kterými jsou redukce stupňů volnosti a zároveň akcelerace algoritmů. Oba tyto směry jsou přitom evokovány již zmíněnou potřebou řešení stále komplexnějších úloh, které jsou výpočetně enormně náročné.

Redukce stupňů volnosti

Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic vždy vedou na soustavu rovnic algebraických, jejichž řešení představuje zároveň řešení formulovaných rovnic. Výpočetní náročnost těchto úloh je tedy do značné míry závislá na počtu stupňů volnosti¹ této soustavy. Jejich redukce je však možná jen při zachování nebo dokonce zvýšení přesnosti výsledného řešení. [17] [18]

- **Prostorová adaptivita** [19], [20] [21] [22] [23] [24] [17] [18]

Efektivní zvládnutí prostorové adaptivity umožňuje výrazně snížit výpočetní náročnost řešených úloh společně se zvýšením její přesnosti. Toho je docíleno automatickou úpravou diskretizační sítě s cílem snížení chyby řešení a snížení stupňů volnosti výsledné soustavy algebraických rovnic.

- **Využití rozdílných diskretizačních sítí** [25] [26] [17]

Využití rozdílných diskretizačních sítí (multi-mesh) pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic umožňuje respektovat charakteristické vlastnosti každé rovnice

¹ Počet stupňů volnosti udává počet nezávislých proměnných dané soustavy.

a zároveň také umožňuje využití již zmíněné prostorové adaptivity pro jednotlivé sítě zvlášť.

- **Dynamické sítě** [27] [28] [29] [17]

Výpočetní náročnost nestacionárních parciálních diferenciálních rovnic lze velmi výrazně snížit využitím rozdílných sítí pro každý časový krok. To je možné díky technologii dynamických sítí, kdy je diskretizační síť adaptována v každém časovém kroku. Výsledkem je velmi výrazná redukce stupňů volnosti.

- **Křivočaré elementy, visící uzly** [30] [31] [32] [33] [17]

Křivočaré elementy umožňují velmi přesně aproximovat zakřivené hrany definiční oblasti úlohy. Jejich využití pro úlohy vyznačující se geometrickou složitostí vede k velmi výraznému snížení stupňů volnosti. Stejně je tomu také při využití visících uzlů, které zamezují propagaci zjemnění po diskretizační síti.

Akcelerace výpočetních algoritmů

Přes značný rozvoj výkonnosti výpočetních techniky je velmi důležité věnovat značnou pozornost snižování výpočetní náročnosti algoritmů. Tento trend je způsoben především stále rostoucí komplexitou řešených problému a dále také zvyšujícími se požadavky na rychlost získání výsledků a nebo například enormním nárůstem energetické náročnosti řešení výkonných výpočetních systémů [34].

- **Paralelizace algoritmů** [35] [36] [37]

Velmi výrazného urychlení algoritmů lze dosáhnout jejich efektivní paralelizací na výpočetních systémech se sdílenou operační pamětí, a to jak při sestavování matic reprezentujících soustavu algebraických rovnic a jejich řešení, tak při zobrazení výsledků řešení.

- **Doménová dekompozice** [38] [39] [40] [41]

Pro využití výpočetních systémů s distribuovanou pamětí je nutná doménová dekompozice problému, která umožní rozdělení řešené úlohy na několik převážně nezávislých celků. Velkou výzvou pro tuto oblast matematického modelování představuje zapojení pokročilých technik jako je prostorová adaptivita, protože se značně zvyšuje nutnost vzájemné komunikace mezi jednotlivými doménami.

- **Časová adaptivita** [42] [43] [17]

Časová adaptivita představuje velmi efektivní techniku pro řešení nestacionárních parciálních diferenciálních rovnic. Umožňuje snížit počet nutných časových kroků a tím celkovou časovou náročnost výpočtu úlohy pomocí adaptivní změny délky každého kroku na základě změny řešení, a to při zachování jeho celkové přesnosti.

- **Efektivní algoritmy pro řešení nelineárních úloh** [44] [45]

Řešení silně nelineárních úloh je velmi komplikovaný a výpočetně náročný proces. Standardní numerické metody jako je Picardova nebo Newtonova metoda je často nutné doplnit o pokročilé techniky jako je Andersonova akcelerace nebo automatická volba faktoru tlumení. Pozornost je také věnován velmi efektivním metodám jako je například Newton–Krylova metoda.

- **Efektivní algoritmy řešení soustav algebraických rovnic** [46] [47] [48]

Při efektivním zvládnutí implementace numerických metod řešení parciálních diferenciálních rovnic je časově nejnáročnějším procesem vyčíslení koeficientů sestavené soustavy algebraických rovnic. Akcelerací metod jejich řešení lze velmi výrazně snížit výpočetní náročnost celé úlohy. Mezi moderní směry v této oblasti patří iterativní metody pro řešení extrémně rozsáhlých úloh nebo například metoda více sítí (multigrid).

- **Speciální metody řešení a jejich kombinace** [49] [50] [51]

Pro řešení různých typů parciálních diferenciálních rovnic jsou vhodné různé metody. Spojení dvou nebo více metod při řešení soustav, kde se vyskytují rovnice různého typu může vést často ke značnému urychlení nalezení jejího řešení. Stejně tak speciálně vyvíjené metody určené pro řešení konkrétních úloh.

I.2.2 MODERNÍ METODY PRO ANALÝZY A OPTIMALIZACE

Vývoj v oblasti metod analýzy počítačových modelů a optimalizace s jejich využitím lze rozdělit do dvou protichůdných oblastí. První oblastí je zvyšování komplexity využívaných metod a druhou je stejně jako v oblasti numerických metod akcelerace algoritmů.

Zvyšování komplexity metod

Cílem zvyšování komplexity používaných metod je snaha o získání maxima relevantních informací o zákonitostech analyzovaného modelu a zároveň maximum informací začlenit také do procesu optimalizace.

- **Analýza citlivosti** [52] [53] [54] [55]

V oblasti numerické matematiky je analýza citlivosti standardně používanou technikou. V oblasti modelování technických úloh je však její použití i přes nesporný přínos jen ojedinělé. Obzvláště pak analýza citlivosti charakteristických geometrických parametrů umožňuje přesné a jasné pochopení hlavních zákonitostí.

Současný vývoj v oblasti metod analýzy citlivosti je zaměřen především na kvantifikaci vzájemné interakce jednotlivých parametrů. Výpočetní náročnost však často

brání jejímu praktickému využití. Další rozvoj této oblasti je směřován především na využití nestandardních technik jako je například teorie fuzzy množin.

- **Analýza odolnosti a spolehlivosti** [56] [57] [58] [59]

Využití tvarové a především pak topologické optimalizace při návrhu zařízení umožňuje hledat nové, neotřelé a vysoce optimalizované varianty jejich provedení. Ty však velmi často vykazují sníženou odolnost vůči změnám vstupních parametrů. Z tohoto důvodu je velmi důležité výpočet a analýzu odolnosti a také spolehlivost modelu zařadit přímo do optimalizačního procesu.

- **Multikriteriální optimalizace** [56] [60] [61]

Pokrok v efektivitě numerických metod stále více otevírá možnosti řešení optimalizací podléhajících více než jednomu kritériu. Tyto úlohy jsou charakteristické obrovskou výpočetní náročností a to obzvláště pro více než dvě kritéria. V této oblasti optimalizace je v současné době kladen obrovský důraz především na vývoj sofistikovaných optimalizačních metod a algoritmů.

- **Optimalizace závislá na řešeném problému** [62] [63] [64]

Optimalizační techniky, jako je například topologická optimalizace, jsou velmi často vyvíjené pro specifické požadavky konkrétního oboru a jejich efektivní využití v jiné než zamýšlené oblasti je často velmi náročné. Z ohledem na tento problém je velká pozornost v současné době věnována právě multidisciplinárnímu pojetí optimalizačních technik.

- **Pokročilá omezení a podmínky vyrobitelnosti** [62] [65] [66]

Standardní způsoby omezení množiny všech možných řešení optimalizačních úloh jsou často nedostačující, a to především s ohledem na specifické podmínky závislé na daném problému a komplikované podmínky vyrobitelnosti. Způsob jejich začlenění a tomu odpovídající definice je jednou ze stále nedorozřešených oblastí.

Akcelerace algoritmů

Akcelerace algoritmů analýzy matematických modelů a optimalizace jsou podmíněny především vývojem pokročilých metod efektivního prohledávání množiny hodnot parametrů [67] [68], rychlé analýzy velkého množství dat [69] [70] a samozřejmě také vývojem sofistikovaných optimalizačních algoritmů [71] [72] [73] [74] [75].

Algoritmy pro analýzu a optimalizaci mohou být ve značné míře paralelizovány, a to jako pro výpočetní systémy se sdílenou tak distribuovanou pamětí [76] [77]. Velmi perspektivní oblastí jsou s ohledem na současný stav poznání především metody redukce řádu modelu [78] [79], které jsou určeny ke snížení komplexity matematického modelu při jeho numerickém řešení. Použití těchto metod umožňuje provádět extrémně rychlé analýzy a optimalizace, a to takřka v reálném čase.

i.3

HLAVNÍ CÍLE PRÁCE

HLAVNÍ CÍL práce, který jsem si stanovil, vychází z potřeby a obrovské chuti řešit komplikované technické problémy spojené s řešením matematických modelů sdružených úloh, jejich analýzy a optimalizace a to především s ohledem na praktické aplikace v oblasti elektromagnetismu. Výstupem mé práce by měl být především dostatečně komplexní nástroj určený právě pro řešení sdružených úloh, jejich analýzu a optimalizaci a v neposlední řadě také metodika jejich využití. Aby bylo dosaženo tohoto výstupu formuloval jsem následující dílčí cíle práce:

- Vývoj a implementace algoritmů pro řešení matematických modelů a sdružených úloh pomocí pokročilých numerických metod.
- Vývoj, implementace a testování algoritmů pro analýzu a optimalizaci počítačových modelů s vysokou výpočetní náročností.
- Návrh a implementace komplexního systému umožňujícího efektivní práci s velkým souborem počítačových modelů a jejich řešení s využitím mnoha výpočetních zdrojů (high-throughput computing) a následnou analýzu získaných výsledků.
- Ověření implementovaných algoritmů a jejich využití pro řešení konkrétních technických problémů.

i.4

METODIKA A STRUKTURA PRÁCE

METODIKU ŘEŠENÍ práce jsem zvolil s ohledem na stanovené cíle a především pak s ohledem na možnost plného využití výsledků práce pro řešení praktických technických úloh. Všechny vyvíjené algoritmy pro analýzu a optimalizace počítačových modelů jsem tedy implementoval do systému OptiLab, který je součástí aplikace Agros2D určené pro řešení fyzikálních polí a sdružených úloh. Vyvinutý systém plně využívá možností aplikace a zároveň je značně rozšiřuje a doplňuje.

Aplikace Agros2D¹ je vyvíjena naší skupinou na Katedře teoretické elektrotechniky Západočeské univerzity a je distribuována pod GNU GPL. Tato licence umožňuje Agros2D a OptiLab využívat bez omezení a výstupy práce tak mohou sloužit široké odborné veřejnosti. Zároveň je zde velký potenciál dalšího rozvoje implementovaných algoritmů, protože jsou plně dostupné všechny zdrojové kódy. [18]

Algoritmy implementované do systému OptiLab jsou plně využívány pro řešení konkrétních technických úloh, které vznikly v rámci dalších výzkumných nebo vývojových projektů. Výsledky dosažené v rámci vybraných projektů, na jejichž řešení jsem se podílel, jsou součástí práce a mají za cíl ilustrovat možnosti využití vyvinutých algoritmů.

Vlastní práci jsem strukturoval do pěti částí. První část práce je zaměřena především na vymezení řešené oblasti a zhodnocení současného stavu poznání. Druhá část práce se zabývá formulací sdružených úloh, jejich specifiky a také metodami jejich řešení pomocí numerických metod a moderních algoritmů založených na metodě konečných prvků vyšších řádů přesnosti. Všechny popisované algoritmy jsou přitom implementovány do aplikace Agros2D nebo do knihovny Hermes².

Třetí část práce popisuje vybrané a používané algoritmy pro analýzu počítačových modelů a optimalizaci. Dále je v této části podrobněji popsán systém OptiLab. Ve čtvrté části jsou diskutovány ilustrativní příklady řešených technických problémů a v poslední části práce je uvedeno shrnutí dosažených výsledků a jsou nastíněny směry dalšího vývoje.

¹ <http://www.agros2d.org>

² <http://www.hpfem.org/hermes>

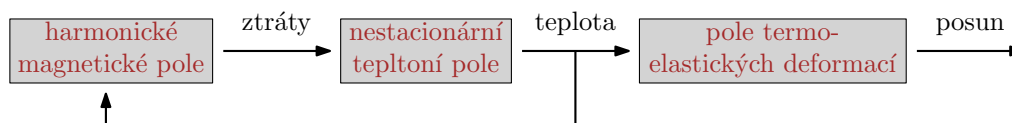
Část II

POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ SDRUŽENÝCH ÚLOH

ii.1

MATEMATICKÉ MODELY SDRUŽENÝCH ÚLOH

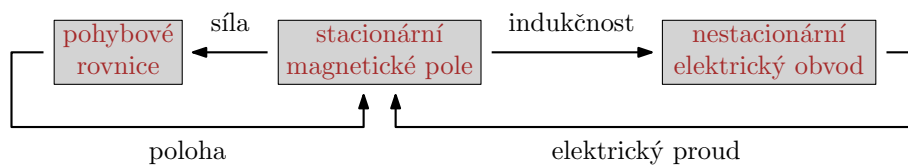
SDRUŽENÉ ÚLOHY modelují v oblasti elektromagnetismu interakci elektrického a magnetického pole s dalšími fyzikálními jevy, přičemž se velmi často jedná o další fyzikální pole. Například u problému popisujících vznik tepla vlivem působení elektromagnetického pole na látkové prostředí, mezi které lze řadit přímý odporový, indukční nebo dielektrický ohřev, se velmi často setkáváme s matematickými modely, které představují sduženou úlohu obecně elektromagnetického pole a pole teplotního. Dalšími příklady může být například interakce elektromagnetického pole a pole mechanického namáhání a deformací (elektrostrikce, magnetostrikce, piezoelektrický jev, termoelastické jevy), pole proudění tekutin (elektrohydrodynamika, magnetohydrodynamika), akustické pole a mnoho dalších. Tyto úlohy jsou typické spojením několika matematických modelů, které lze obecně popsat pomocí parciálních diferenciálních rovnic.



Obr. 1: Příklad ilustrující řešení sdužené úlohy několika fyzikálních polí popsaných pomocí parciálních diferenciálních rovnic a to pro případ termoelastického aktuátoru: harmonické magnetické pole vytvoří vířivé proudy v elektricky vodivém jádře, které mají za následek vznik tepelných ztrát, oteplení (teplota zpětně ovlivní elektrickou vodivost) a následně deformaci jádra vlivem roztažnosti daného materiálu

Mezi sdužené úlohy v elektromagnetismu se však také řadí spojení elektrického a magnetického pole s fyzikálními jevy plně charakterizovanými matematickými modely, které jsou popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi nebo dalšími typy rovnic jako jsou například lineární algebraické rovnice. Do této skupiny sdužených úloh lze pak řadit například spojení elektromagnetického pole s modely elektrických obvodů, pohybovými rovnicemi pro dynamiku těles a mnohé další.

Jednotlivé modely popisující sduženou úlohu lze přitom řešit nezávisle na sobě jen ve specifických případech. Praktické úlohy často vedou na sdužené úlohy, kde jsou jednot-



Obr. 2: Příklad ilustrující řešení sružené úlohy fyzikálního pole a dalších fyzikální dějů popsaných pomocí obyčejných diferenciálních rovnic a to pro případ elektromagnetického aktuátoru: statické magnetické pole silově působí na těleso, jehož pohyb charakterizují pohybové rovnice a dále určuje indukčnost budící cívky jejichž elektrický proud je dán řešením přechodného děje v RL obvodu

livá pole mezi sebou svázána a vzájemně se mezi sebou ovlivňují. Jako příklad takovéto sružené úlohy uvedme úlohu indukčního ohřevu feromagnetických, elektricky vodivých těles, která ve svém obecném pojetí představuje nelineární sruženou úlohu, kde je nutné uvažovat závislost relativní permeability na magnetické indukci a teplotě, teplotní závislost elektrické vodivosti a samozřejmě také teplotní závislost tepelné vodivosti, hustoty a měrné tepelné kapacity. Řešení takto formulovaných úloh je velmi komplikované a pro jejich praktické využití je tak nutné často využít velmi propracovaných algoritmů.

S ohledem na vzájemné vazby jednotlivých matematických modelů sružené úlohy a zároveň způsob jejího řešení lze zavést jejich dělení do několika kategorií. [80]

- **Lineární slabě sružená úloha**

Tento typ úlohy je s ohledem na složitost jejího řešení nejjednodušší a to především z důvodu zanedbání vzájemných vazeb jednotlivých matematických modelů. Samotné řešení lze rozdělit do několika postupných kroků, kdy v každém kroku je provedeno řešení dílčího modelu a výsledky jeho řešení jsou následně využity pro řešení modelu v kroku následujícím.

- **Nelineární slabě sružená úloha**

Úloha je stejně jako v předchozím případě řešena po jednotlivých postupných krocích. Po vyřešení všech dílčích modelů se však využijí výsledky řešení k úpravě vstupních parametrů jednotlivých modelů a celý postup se opakuje do té doby, než je splněna globální konvergenční podmínka.

- **Nelineární silně sružená úloha**

Poslední úloha je v závislosti na složitosti jejího řešení nejnáročnější ze všech uvedených. Při řešení takto formulované úlohy se řešení všech dílčích matematických modelů provádí současně.

ii.2

NUMERICKÉ METODY A ALGORITMY

NUMERICKÉ METODY a jejich propracovaná implementace jsou základem pro řešení matematických modelů fyzikálních polí a sdružených úloh, jejich analýzu a v neposlední řadě také pro jejich využití v úlohách optimalizace. Mezi další používané metody řešení lze zařadit také metody analytické, metody speciální a hybridní. Využití těchto metod se však často týká jen speciálních výpočetních úloh.

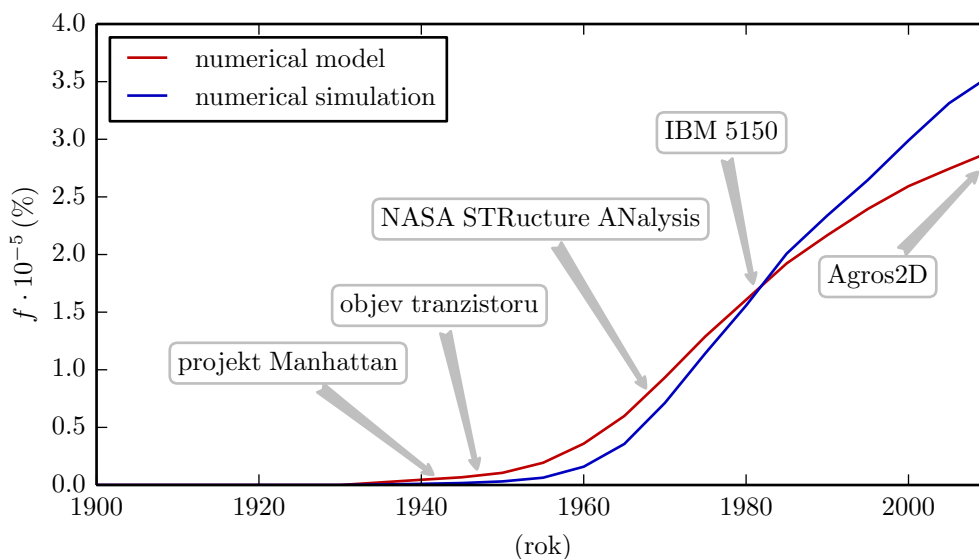
Analytické metody poskytují výsledky v uzavřeném tvaru a lze tak na jejich základě provádět velmi komplexní analýzu modelovaného systému. Jejich využití pro řešení praktických úloh je však velmi komplikované a v mnoha případech, mezi které lze bezesporu řadit komplexní sdružené úlohy s komplikovanou definiční oblastí, je nereálné. Svého vrcholu dosáhly analytické metody v polovině minulého století. Poté se již jejich vývoj velmi výrazně utlumil, protože jimi řešitelné úlohy byly prakticky vyčerpány.

Numerické metody obecně neposkytují přesné řešení matematického modelu, ale jeho přiblížení ve zvolených bodech oblasti, kterými jsou zpravidla uzly diskretizační sítě pokrývající definiční oblast úlohy. Pokud chceme znát hodnoty hledané veličiny i v jiných bodech, musíme využít vhodných interpolačních či extrapolacních metod. Hlavní výhodou jejich využití je však jejich obrovská univerzalita a možnost řešení velmi komplexních úloh.

Vzhledem k těmto výhodám se numerické metody začaly velmi prudce rozvíjet ve druhé polovině minulého století. Tento rozvoj byl samozřejmě způsoben především rozvojem výpočetní techniky, která umožnila velmi rychle a přesně řešit velké soustavy algebraických rovnic, na než vede drtivá většina numerických metod, které se v současné době využívají při řešení matematických modelů. Prudký rozvoj numerických metod je ilustrován na obr. 3 společně s některými vyznačenými milníky.

Mezi první numerické metody, které byly využívány pro řešení matematických modelů fyzikálních polí, lze řadit metodu konečných diferencí a metodu vážených reziduí. Později se pro řešení specifických problémů začaly využívat také metody založené na integrálním či stochastickém přiblížení a koncem šedesátých let se také postupně začala využívat metoda konečných prvků. Tato metoda zaznamenala velmi bouřlivý vývoj a od raných variant využívajících pevnou diskretizační síť s lineárními elementy se postupně posunula k progresivním variantám vyšších řádu přesnosti, využívajících automatickou

ii.2.1 DŮLEŽITÉ ASPEKTY VYUŽITÍ NUMERICKÝCH METOD



Obr. 3: Četnost výskytu sousloví f v anglicky psané literatuře

adaptivitou diskretizační sítě. Tyto sofistikované varianty jsou již charakteristické exponenciální konvergencí výsledků.

Základy metody konečných prvků vyšších řádů navrhl německý matematik Richarda Courant již v roce 1941, ale praktické otestování metody bylo provedeno až v roce 1960, a to na příkladu z oblasti strukturální mechaniky. Její první využití v oblasti elektromagnetického pole se datuje do let 1967–1968.

Tato kapitola bude věnována právě numerickým metodám využívaným pro řešení matematických modelů fyzikálních polí a sdružených úloh a primárně metodě konečných prvků vyšších řádů přesnosti.

II.2.1 DŮLEŽITÉ ASPEKTY VYUŽITÍ NUMERICKÝCH METOD

Jak již bylo naznačeno v úvodu kapitoly, numerické metody obecně neposkytují přesné řešení matematického modelu ale jeho aproximaci. Výsledky jsou tedy obecně zatíženy chybami, které je vždy nutné minimalizovat, přičemž je nutné vyšetřit, zda jsou tyto chyby kritické či nikoliv.

Kvalita výsledků řešení matematického modelu získaného pomocí numerických metod obecně závisí na jejich vlastnostech, které lze zobecnit do pěti kritérií:

- **Konzistence**, která určuje shodu mezi řešeným matematickým modelem a využitou numerickou metodou. Pro využití dané metody je rozhodující, aby systém výsledných algebraických rovnic byl dobrou reprezentací původní rovnice.

- **Stabilita** udávající citlivost použité numerické metody na změny parametrů modelu nebo například na zaokrouhlovací chyby vznikající v průběhu řešení matematického modelu. Pokud je metoda nestabilní, mají tyto chyby obrovský vliv na nepřesnost výsledné řešení.
- **Konvergence** numerické metody určuje, zda metoda vede ke zpřesnění výsledku řešení při zjemnění diskretizace definiční oblasti (zvětšení počtu uzlů diskretizační sítě, snížení časového kroku, atd.).
- **Přesnost** numerické metody se udává rozdílem výsledků získané příslušným приблиžným řešením od výsledků přesných, které však mohou být neznámé.
- **Efektivita** numerické metody je vyjádřena její výpočetní náročností nalezení aproximace řešení při dané definované přesnosti (efektivita se často udává pomocí potřebného výpočetního času nebo potřebných procesorových operací).

Hlavním cílem spojeným s vývojem numerických metod a algoritmů je často dosažení co nejvyšší přesnosti při nejvyšší možné efektivitě, vysoké stabilitě a rychlé konvergenci. Uvěření, testování a následné srovnání numerických metod je však velmi komplikované a to především kvůli neznámému přesnému řešení daného matematického modelu. Lze sice využít analyticky řešitelných úloh, ale získané výsledky není možno zobecnit pro jejich uplatnění v praxi.

Při rozmanitosti prakticky řešených úloh je navíc nemožné vyvinout dostatečně univerzální numerickou metodu, která by byla konzistentní s libovolným matematickým modelem. Z tohoto důvodu je velmi důležitá volba vhodné numerické metody v závislosti na daném problému.

II.2.2 PŘEHLED NUMERICKÝCH METOD PRO ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH POLÍ

Numerické metody, které je možné využít pro řešení fyzikálních polí a sdružených úloh lze obecně rozdělit na metody diferenciální a integrální. Diferenciální metody využívají diferenciálního tvaru řešených rovnic a jejich hlavní myšlenka spočívá v nalezení nejlepší aproximace řešení na diskretizované definiční oblasti modelu. Skupina těchto metod je poměrně široká a lze ji rozdělit do tří základních podskupin:

- **Diferenční metody** jsou založené na diferenčních aproximacích parciálních diferenciálních rovnic. Parciální derivace libovolného řádu se v daném uzlu diskretizační sítě aproximuje výrazem pro hodnoty hledané funkce v několika sousedních uzlech a zároveň vzdálenosti daného uzlu od oněch sousedních. Mezi tyto metody se řadí například metoda konečných diferencí.
- **Metody vážených reziduí** patrně představují nejsilnější a nejvíce univerzální nástroje pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tyto metody jsou založeny na

minimalizaci vážené chyby ve vyšetřované oblasti. Přesné řešení příslušné rovnice je nejprve nahrazeno přibližným řešením ve tvaru řady sestávající ze zvolených testovacích funkcí násobených koeficienty, jež je třeba v tomto smyslu optimalizovat. Metodami které patří do této skupiny jsou například například metoda nejmenších čtverců nebo Galerkinova metoda.

- **Variační metody** jsou založeny na variační reprezentaci parciálních diferenciálních rovnic. Problém řešení dané rovnice se transformuje na problém stanovení funkcionálu a hledání podmínek, za nichž řešení uvedené rovnice vede k extrému tohoto funkcionálu. Nejznámější variační metoda je bezesporu metoda konečných prvků a Ritzova metoda.

Do skupiny integrálních metod lze zařadit zejména metody užívané pro řešení integrálních a integrodiferenciálních rovnic a dále také technologie pro výpočty velkého množství určitých i neurčitých integrálů vyskytujících se ve výrazech pro různé veličiny lineárních a homogenních polí nebo algoritmy kombinující jak řešení integrálních rovnic, tak i určování integrálních výrazů. Mezi tyto metody tedy patří například metody hraničních prvků nebo velmi univerzální metoda momentů.

Integrální metody představují mohou za jistých okolností představovat skvělou alternativu k diferenciálním metodám a to především pro úlohy, kde je diferenciální formulace špatně podmíněná.

II.2.3 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ VYŠŠÍCH ŘÁDŮ PŘESNOSTI

Metoda konečných prvků je univerzální, robustní a flexibilní metoda pro řešení matematických modelů fyzikálních polí a sdružených úloh. Tato metoda umožňuje řešení modelu formulovaného na geometricky velmi komplikovaných definičních oblastech s různými prostředními jež mohou vykazovat nelineární i anizotropní vlastnosti. V technické praxi je velmi často využívána a proto jí bude v rámci této kapitoly věnována větší pozornost.

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, metoda konečných prvků patří mezi variační metody, které vycházejí z transformace problému diferenciálního na problém variační. Základní myšlenkou variačních metod je zavedení funkcionálu, jehož variací získáme řešenou parciální diferenciální rovnici. Cílem řešení variačního problému je přitom nalezení extrému zavedeného funkcionálu, který koresponduje s hledaným řešením původní parciální diferenciální rovnice.

Ze své obecné definice funkcionál představuje zobrazení množiny funkcí do množiny reálných čísel. Funkcionál F tedy může představovat integrál funkce f na omezené oblasti Ω a lze jej zapsat ve tvaru

$$L = \int_{\Omega} f(x, y, z, t) d\Omega, \quad (1)$$

kde funkce f je obecně časoprostorová a závisí tedy na prostorových souřadnicích (x, y, z) a čase t .

Při vyjádření funkcionálu F můžeme přitom s výhodou využít potenciální energie systému, který daná parciální diferenciální rovnice reprezentuje. Potenciální energii fyzikálního pole lze často vyjádřit ve tvaru

$$F = \int_{\Omega} f \left(u, x, y, z, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega, \quad (2)$$

kde u je funkce závislá pouze na prostorových souřadnicích a platí tedy $u = u(x, y, z)$. Obecně Eulerova-Lagrangeovu rovnici¹ pro takto formulovaný funkcionál lze pak zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_z} \right) - \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad (3)$$

a na jejím základě je již možno získat extrém a po převedení také řešení původní parciální diferenciální rovnice.

Při formulaci funkcionálu F pomocí metody konečných prvků vycházíme z předpokladu, že energie je aditivní veličina a celková energie systému a tedy také celkový funkcionál lze určit jako součet příspěvků od jednotlivých elementů zavedené diskretizační sítě. Na každém elementu můžeme přitom funkcionál vyjádřit pomocí hodnot hledané veličiny charakterizující řešení, a to ve význačných bodech daného elementu za které zpravidla považujeme uzly dané sítě.

Metoda vede na soustavu lineárních nebo nelineárních algebraických rovnic, jejichž řešením získáme právě hodnoty hledané veličiny ve význačných uzlech diskretizační sítě. Rozložení pole v místech mimo uzly diskretizační sítě lze přitom stanovit pomocí vhodných interpolačních metod. Na základě použité interpolace můžeme rozlišit mezi metodou konečných prvků využívající lineární elementy a metodou vyšších řádů. Pokud interpolujeme řešení na každém elementu pomocí lineární funkce, můžeme se dopustit značné chyby, která se ve výsledku může projevit velmi nepřesným řešením celého problému. Metoda konečných prvků vyšších řádů umožňuje snížit tuto chybu interpolační řešení na každém elementu právě využitím polynomu vyšších řádů.

Využití vyšších řádů tedy umožňuje přesnější interpolaci hledaného řešení na každém elementu, ale zároveň vede obecně ke zvýšení výpočetní náročnosti dané úlohy. To vyplývá z nutnosti vyjádřit funkcionál na každém elementu pomocí většího počtu hodnot hledané veličiny (pro vyjádření polynomu vyššího řádu je potřeba větší počet koeficientů) a to vede k nutnosti uvažovat za význačné body nejenom uzly diskretizační sítě, ale také další body, které zpravidla volíme na hranách daného elementu. Větší počet význačných bodů tedy vede na větší počet stupňů volnosti². Obecně platí, že zvýšení stupně interpolačního polynomu vede ke zvýšení výpočetní náročnosti.

¹ Eulerova-Lagrangeova rovnice je diferenciální rovnice umožňující nalezení extrému funkcionálu.

² Počet stupňů volnosti udává počet nezávislých proměnných jejichž nalezení vede na řešení dané úlohy a tím tedy určuje výpočetní náročnost samotného řešení. U metody konečných prvků s lineárními elementy

Přesnost, konvergence, stabilita a efektivita metody konečných prvků a numerických metod obecně tedy silně závisí na zvolené diskretizační síti. Vliv velikosti dílčích elementů a zároveň řád polynomu, který je interpoluje se přitom projevuje především v místech, kde je řešení singulární³, v místech kde dochází k jeho rychlým změnám⁴ nebo v případě řešení úlohy na definiční oblasti s geometricky nesouměřitelnými oblastmi.

II.2.4 PROSTOROVÁ ADAPTIVITA

Jak je patrné z kapitoly i.2, prostorová adaptivita patří mezi jednu z velmi progresivních technik, které jsou důležité při numerickém řešení rozsáhlých a komplikovaných výpočetních úloh, a to nejen pro metodu konečných prvků, ale pro numerické metody obecně. Její základní myšlenkou je automatická úprava diskretizační sítě na základě odhadu chyby řešení a jejího rozložení na definiční oblasti úlohy.

Vzhledem k použití prostorové adaptivity při řešení ilustrativních příkladů uvedených v kapitole iv.

Strategie úpravy diskretizační sítě

Základní strategie, kterou je možné využít pro úpravu diskretizační sítě, je založena na automatické změně počtu nebo rozložení jejích uzlů. Zde je nejběžnější používanou metodou h -adaptivita⁵, která je založena na automatickém zjemnění diskretizační sítě v těch místech definiční oblasti, které jsou zatíženy velkou chybou řešení. V místech, které naopak nejsou chybou řešení zatíženy, mohou být jednotlivé elementy sloučeny. Tato metoda je velmi výhodná, pokud se v řešení objevují singularity. Její použití však nutně vede ke značnému nárůstu počtu stupňů volnosti dané úlohy.

Další základní adaptivní metodou je r -adaptivita, která ve stejném smyslu jako h -adaptivita využívá namísto zjemnění diskretizační sítě automatickou změnu rozložení jejích uzlů. Poslední metodou, která využívá stejnou strategii, je vytvoření nové sítě a to samozřejmě s přihlédnutím k rozložení chyby řešení. Princip všech těchto zmíněných metod je patrný na obr. 4.

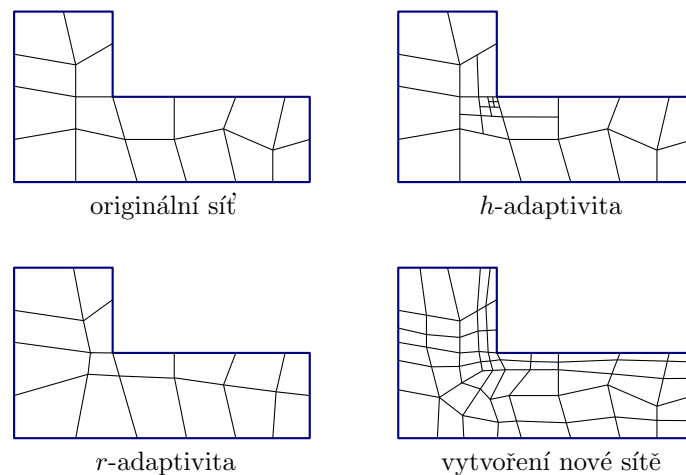
Druhou strategií úpravy diskretizační sítě charakterizuje změna řádu interpolečního polynomu jednotlivých elementů. Tato strategie se nazývá p -adaptivita, přičemž existují dva základní přístupy, jak tuto metodu využít. První z nich automaticky volí řád polynomu pro všechny elementy diskretizační sítě, a to bez ohledu na rozložení chyby

je možné ve stejném smyslu využívat počet uzlů diskretizační sítě, ale u metod vyšších řádů je tento údaj již nedostatečný.

³ Příkladem vzniku singularit mohou být například silně zakřivené plochy, ostré hrany nebo místech skokové změny relativní permitivity a to při řešení elektrostatických polí, kdy v těchto místech roste intenzita elektrického pole nad všechny meze.

⁴ Rychlé změny řešení vznikají velmi často například při řešení úloh spojených se vznikem vířivých proudů.

⁵ Název této adaptivní techniky vychází ze standardního označení diskretizačního kroku h , který se využívá u numerických metod.

Obr. 4: Základní princip h -adaptivity, r -adaptivity a vytvoření nové sítě

řešení. Druhý způsob využívá odhad rozložení chyby a v místech velkého zatížení touto chybou automaticky zvýší řád polynomu a naopak jej sníží v místech, kde je chyba nízká. Tato technika je velmi výhodná především při řešení úloh s hladkým řešením, které se vyznačuje monotonní změnou hledané veličiny na daném elementu.

Jednu z velmi perspektivních metod prostorové adaptivity představuje kombinace h -adaptivity a p -adaptivity, která se označuje jako hp -adaptivita. Základní strategie úpravy diskretizační sítě je u této metody založena na využití vyššího stupně polynomu v místech, kde nedochází k výrazným změnám řešení a naopak na snížení tohoto stupně společně se zjemněním sítě v místě singularit řešení. Použití této metody, která se často označuje jako hp -FEM vede dle mnoha provedených numerických experimentů k exponenciální konvergenci výsledků řešení.

Odhad chyby řešení

Kromě strategie je velmi důležitou součástí adaptivních metod také způsob odhadu chyby řešení. Chybou řešení přitom rozumíme obecně rozdíl mezi získanou aproximací řešení a přesným řešením. Lze ji tedy zapsat ve tvaru

$$e = \varphi - \varphi', \quad (4)$$

kde e představuje absolutní chybu dané aproximace, φ přesné řešení a φ' řešení získané danou numerickou metodou. Obdobným způsobem lze také nadefinovat chybu aproximace libovolné veličiny vycházející z daného řešení.

Pro ilustraci uvažujme parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$L\varphi = 0,$$

kde L je příslušný diferenciální operátor a φ neznámé řešení. Velmi často používané kritérium pro odhad chyby řešení je některá z energetických norem. Absolutní hodnotu obecné energetické normy lze přitom nadefinovat ve tvaru

$$\|e\| = \left| \int_{\Omega} e^T L e \, d\Omega \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \int_{\Omega} (\varphi - \varphi')^T L (\varphi - \varphi') \, d\Omega \right|^{\frac{1}{2}},$$

Mezi další často používané normy patří L^2 norma a norma H^1 , které lze obdobně vyjádřit ve tvaru

$$\|e\|_{L^2} = \left| \int_{\Omega} e^T e \, d\Omega \right|^{\frac{1}{2}}; \quad \|e\|_{H^1} = \left| \int_{\Omega} (e^T e + \nabla e^T \nabla e) \, d\Omega \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Efektivní hodnotu chyby aproximace řešení lze na základě jedné z uvedených norem definovat vztahem

$$e_{\text{ef}} = \left(\frac{\|e\|^2}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A konečně relativní chybu ve tvaru

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|\varphi\|} \cdot 100.$$

Přesné řešení známe jen pro velmi speciální případy a proto je není možné prakticky nikdy pro odhad chyby využít. A posteriori⁶ odhad chyby řešení, který je často založen na analýze chování vyšších derivací je velmi komplikovaný, a takřka vždy je závislý na povaze řešené úlohy a je tedy závislý na typu řešené úlohy. Univerzální, ale také výpočetně značně náročný odhad chyby představuje využití referenčního řešení. Vzhledem k jeho univerzalitě je však často používanou technikou.

Odhad chyby na základě referenčního řešení je založen na vzájemném porovnání řešení dané úlohy na hrubé diskretizační síti se základním stupněm interpolačního polynomu s řešením na síti zjemněné s vyšším než základním stupněm polynomu, a to pro každý dílčí element. Chybu řešení lze tedy přepsat do tvaru

$$e = \varphi_{\text{ref}} - \varphi',$$

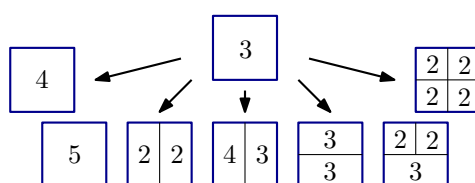
kde φ_{ref} je řešení referenční a φ' je řešení na hrubé síti se základním řádem polynomu.

⁶ Latinské spojení a posteriori označuje poznání ze zkušenosti. Toto označení se zažilo v oblasti odhadu řešení diferenciálních rovnic a naznačuje, že odhad chyby je prováděn pro již existující řešení dané rovnice. Opakem je odhad chyby stanovená a priori, tedy ještě před samotným řešením.

Volba vhodné úpravy jednotlivých elementů

Získané rozložení chyby pro celou definiční oblast úlohy lze následně využít pro volbu vhodné úpravy dle dané adaptivní metody. To lze přitom provést mnoha způsoby, uvedme tedy alespoň jeden z možných, který je určen pro *hp*-adaptivní metodu a vychází z její konkrétní implementace v knihovně Hermes.

Pokud je tedy chyba získaná aplikací vybrané normy na řešení φ' a zároveň φ_{ref} na určitém elementu vyšší, než předem stanovený práh, je nutné provést jeho úpravu, která povede ke zpřesnění řešení. Prvním krokem je tedy vytvoření množiny možných kandidátů, kteří představují všechny možné úpravy daného elementu. Generování těchto kandidátů je ilustrováno na obr. 5.



Obr. 5: Ilustrativní příklad generování všech možných kandidátů na úpravu vyšetřovaného elementu pro případ *hp*-adaptivity

Pro všechny získané kandidáty je následně vyčísleno skóre s , na jehož základě je následně vybrán vhodný způsob strategie. Skóre je přitom dáno vztahem

$$s = \frac{\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{(d - d_0)}, \quad (5)$$

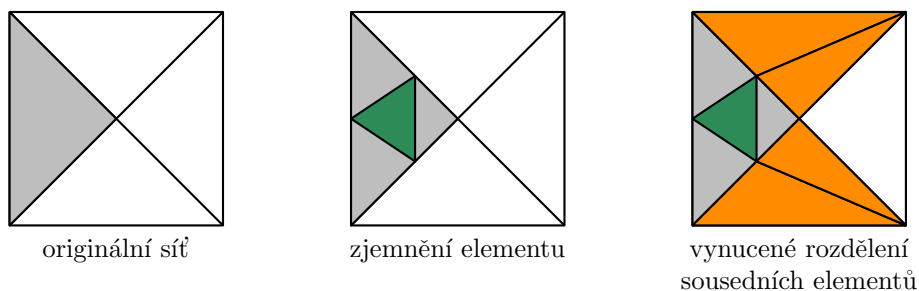
kde ε značí chybu řešení pro případ daného kandidáta, d počet jeho stupňů volnosti, ε_0 a d_0 značí po řadě opět chybu a počet stupňů volnosti pro vyšetřovaný element bez úpravy.

Visící uzly

Technika využití visících uzlů (hanging nodes) umožňuje výrazně snížit výpočetní náročnost úlohy. Visící uzly představují uzly diskretizační sítě, které leží na hranách elementů a nejsou přitom propojeny na žádný další uzel sousedního elementu. Hlavní výhodou využití této techniky je zamezení propagace lokálního zjemnění dílčích elementů do celé diskretizační sítě. Tato výhoda se projevuje jak v kombinaci visících uzlů a prostorové adaptivity, tak v případě použití ručního zjemnění sítě v některé z oblastí nebo hran definiční oblasti úlohy.

Uvedme příklad využití visících uzlů pro případ jednoduché regulární sítě uvedené na obr. 6. Jedním z nejefektivnějších algoritmů pro zjemnění dílčího elementu této sítě je strategie red-green. V rámci této strategie je element nejprve rozdělen a následně jsou

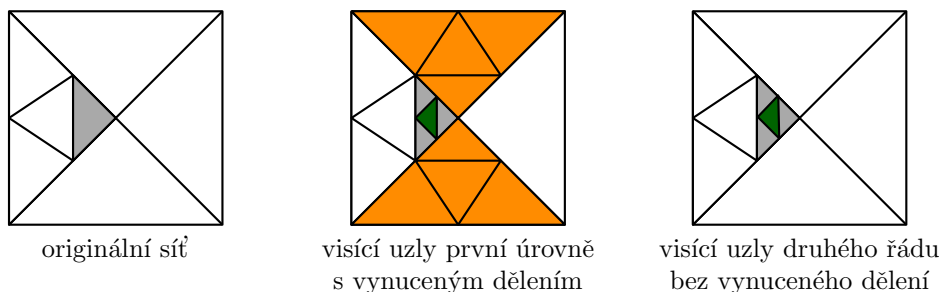
visící uzly, které v síti vznikly, odstraněny pomocí vynuceného rozdělení sousedních elementů.



Obr. 6: Zjemnění sítě strategií red-green

Takto vytvořená síť je opět regulární, ale elementy vzniklé vynuceným dělením mají velmi často velmi ostré úhly, které jsou pro metodu konečných prvků nežádoucí. Tato situace se samozřejmě ještě zhorší, pokud provedeme další dělení vybraného elementu.

Vynucenému dělení elementů se lze vyhnout právě využitím visících uzlů. V případě, že diskretizační síť obsahuje visící uzly prvního řádu, je vždy nutné použít první pravidlo iregularity. Řád visících uzlů dané sítě přitom udává maximální počet dělení vzniklých visících uzlů ležících na jedné hraně libovolného elementu. Pro visící uzly obecného řádu k je nutné použít k -té pravidlo iregularity, a v takovém případě mluvíme o visících uzlech libovolného řádu (arbitrary-level hanging nodes). Vícenásobné dělení a použití iregulárních pravidel demonstruje obr. 7.



Obr. 7: Zjemnění sítě s použitím visících uzlů první a vyšší úrovně

II.2.5 ČASOVÁ ADAPTIVITA

Časová adaptivita představuje velmi efektivní nástroj pro řešení nestacionárních úloh, kde umožňuje minimalizovat počet nutných časových kroků při zachování přesnosti celkového řešení, a tím vede ke snížení celkové výpočetní náročnosti. Využití časové adaptivity je velmi důležité pro úlohy, které jsou charakteristické značnými změnami vstupních

parametrů modelu⁷. Tyto jevy nelze standardními metodami, jako je například implicitní a explicitní Eulerova metoda, takřka vůbec zachytit nebo jen za cenu řešení úlohy s velmi malým časovým krokem.

Nejčastějším postup při řešení nestacionárních parciálních diferenciálních rovnic je jejich rozdělení na část závislou na čase a část závislou na prostoru, následná prostorová diskretizace a řešení vzniklé obyčejné diferenciální rovnice v čase, které již může být řešeno standardními metodami. Pokud se však se může prostorová diskretizační síť v jednotlivých časových krocích lišit a je tedy použita technika dynamických sítí, musí být nejprve provedena diskretizace v čase a až následně v prostoru. V takovém případě může být využita Rotheho metoda, přičemž jednou z možných metod diskretizace časové derivace je zpětná diferenční formule (BDF - Backward Differential Formula). Pro obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(y, t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

lze časový krok n vyjádřit pomocí BDF na základě vztahu

$$\sum_{l=0}^i \alpha_{i,l} y_{j-l} = \tau_j F(y_j), \quad (7)$$

kde t_j značí časový krok j , $y_j = y(t_j)$ tomuto kroku odpovídající řešení, $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ je délka tohoto časového kroku a koeficient $\alpha_{i,l}$ závisí na délce předchozího časového kroku. Tento přístup tedy umožňuje postupnou změnu časového kroku pro každý následující krok.

⁷ Mezi tyto úlohy se řadí skoková změny materiálových parametrů modelu (například fázová změna skupenství materiálu při jeho tavení nebo skoková změna relativní permeability feromagnetických materiálů při překročení Curieovy teploty) a dále také změna zdrojových veličin (změna napájecích proudů, tepelného výkonu dodávaného do systému nebo například silového zatížení).

Část III

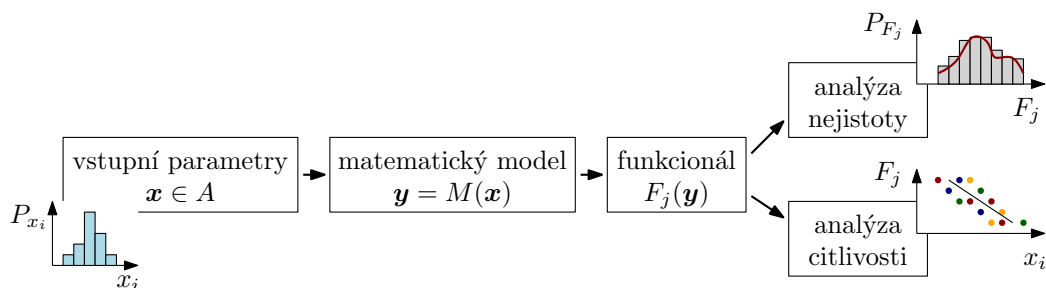
METODY A ALGORITMY PRO ANALÝZU A OPTIMALIZACI
POČÍTAČOVÝCH MODELŮ

iii.1

ANALÝZA CITLIVOSTI MATEMATICKÝCH MODELŮ

MATEMATICKÝ MODEL představuje abstrakci reálného systému, která pomocí matematického aparátu popisuje jeho vlastnosti na základě vstupních parametrů (nezávislé proměnné) a jejich vzájemných vazeb s výstupy modelu (závislé proměnné), které představují jeho řešení. Vstupní parametry jsou pak vždy zatíženy nejistotou, která má za následek nejistotu řešení daného modelu. Vliv této nejistoty je v praktických výpočtech velmi důležitý a lze jej studovat pomocí analýzy citlivosti nebo analýzy nejistoty modelu.

Citlivostní analýza umožňuje studovat, jak je rozdělena nejistota řešení zkoumaného modelu mezi jeho jednotlivé vstupní parametry. Umožňuje tedy určit, jak se změní výsledek řešení daného modelu při změně jeho jednotlivých vstupních parametrů. Analýza nejistoty se pak snaží kvantifikovat nejistota výsledků řešení modelu a udává tedy rozložení pravděpodobnosti řešení modelu při respektování nejistoty jeho vstupů a zároveň jeho samotné formulaci. Základní princip analýzy citlivosti a neurčitosti je patrný na obr. 8.



Obr. 8: Analýza citlivosti a nejistoty matematického modelu

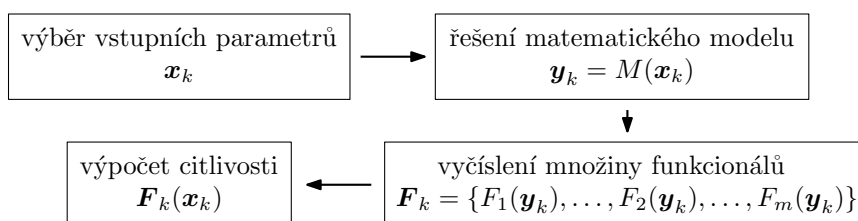
V oblasti modelování fyzikálních systémů je možné analýzu citlivosti využít nejen ke studiu jednotlivých vstupních parametrů matematického modelu, které nejčastěji představují materiálové parametry nebo jejich nelineární charakteristiky, ale také ke studiu dílčích tvarů definiční oblasti, tedy konkrétní geometrie řešeného problému. Analýza citlivosti souhrnně představuje velmi silný nástroj, který je možné využít nejen při analýze matematických modelů, ale například také při vyhodnocování výsledků měření a

experimentů a samozřejmě také plně v teorii systémů. Způsob analýzy nejistoty a dalších charakteristik, mezi které patří například odolnost a spolehlivost, je velmi podobný způsobům používaným u analýzy citlivosti, proto se na omezeném prostoru této práce budeme věnovat právě analýze citlivosti.

Základní postup analýzy citlivosti

Analýza citlivosti konkrétního matematického modelu představuje studii, kterou je možné vždy rozdělit do několika po sobě následujících kroků (viz. obr. 9):

1. Specifikace nejistoty jednotlivých vstupních parametrů $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ zkoumaného modelu (stanovení mezí, určení rozložení pravděpodobnosti).
2. Formulace množiny funkcionalů $\{F_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ jako kriteria pro hodnocení výsledků řešení matematického modelu¹.
3. Řešení dostatečného množství variant daného modelu s vhodně zvolenými vstupními parametry. Označíme-li celkový počet variant d , budou vstupní parametry k -té varianty $\mathbf{x}_k = \{x_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, d\}$.
4. Výpočet citlivosti řešeného modelu zahrnující vliv každého dílčího parametru x_i na zvolené funkcionaly F_j .



Obr. 9: Základní postup při analýze citlivosti matematického modelu

Standardní metody analýzy citlivosti

Mezi standardní metody výpočtu citlivosti řešení matematického modelu na změny jeho vstupních parametrů bezesporu patří Morrisova metoda. Tato metoda je založena na analýze různých variant modelu, kde je vždy měněna hodnota pouze jednoho zkoumaného parametru při zachování nominální hodnoty všech ostatních.

¹ U jednoduchých matematických modelů, může být funkcionalém jeho samotné řešení. Pro většinu praktických problémů je však často nutné formulovat funkcional tak, aby jasně kvantifikoval získané řešení, kterým může být například rozložení určité veličiny v prostoru. Příkladem takového funkcionalu může být hodnota řešení v určitém bodě prostoru nebo povrchové a objemové integrály.

Morrisova metoda vychází z velmi jednoduché metody nazývané OAT (One At a Time) nebo také OFAT (One Factor At a Time). Pro zkoumaný matematický model se pomocí této metody určuje vliv dílčích parametrů x_i na každý formulovaný funkcionál F_j pomocí postupné změny parametru o poměrově stejný krok δ se zachováním nominální hodnoty všech ostatních parametrů. Elementární vliv EE_i^j (Elementary Effect) parametru x_i na funkcionál F_j je pak určen pomocí jednoduchého vztahu

$$EE_i^j = \frac{F_j(x_1, \dots, x_i + \delta, \dots, x_n) - F_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\delta}. \quad (8)$$

Metoda Maxe D. Morrise rozšiřuje OAT o diskretizaci prostoru hodnot parametrů P na p hladin, z nichž je vždy náhodně zvoleno r hodnot daného parametru². Citlivost každého z parametrů může být následně vyhodnocena pomocí několika metrik. Základní metrikou pro každý parametr x_i může být střední hodnota μ_i a směrodatná odchylka σ_i pro každý funkcionál F_j . Vysoká hodnota střední hodnoty μ_i pak naznačuje velký vliv daného parametru x_i na výsledek řešení modelu, vysoká hodnota směrodatné odchylky σ_i pak interakci s jinými parametry nebo nelineární závislost přímého vlivu daného parametru na výsledek řešení. Další z použitelných metrik může být také například parciální derivace funkcionálu F_j podle zkoumaného parametru x_i , a to ve zvoleném bodě prostoru parametrů P nebo také lineární regrese závislosti funkcionálu F_j na daném parametru x_i .

Velkou výhodou Morrisovy metody je její jednoduchost a poměrně nízká výpočetní náročnost. Značnou nevýhodou je pak fakt, že standardní Morrisova metoda neumožňuje vyčíslit vliv interakce několika parametrů na výsledek řešení zkoumaného modelu.

Mezi další standardní metody analýzy citlivosti rozhodně patří také korelace mezi vstupními parametry modelu x_i a formulovaným funkcionálem F_j , a to pro soubor výsledků získaných řešením různých variant modelů s náhodně vybranými parametry dle jejich specifikované nejistoty. Tyto metody jsou založeny na předpokladu, že vstupní parametry x_i , které mají výrazný vliv na výsledek řešení, budou mít vysoký stupeň korelace s formulovaným funkcionálem F_j . Při této analýze se také s výhodou často používá zobrazení výsledků pomocí korelačního diagramu (scatter plot), tedy zobrazení závislosti funkcionálu F_j na jednotlivých parametrech x_i , a to pomocí bodového grafu v kartézských souřadnicích.

Pro kvantitativní posouzení vzájemné vazby vstupních parametrů a funkcionálů je možné využít několik odlišných korelačních koeficientů. Mezi nejčastěji používané patří Pearsonův korelační koeficient ρ_P (Pearson product-moment correlation coefficient), který je definován jako kovariance funkcionálu a vstupní proměnné dělená jejich směrodatnou odchylkou. Koeficient je tedy možné formulovat pomocí vztahu

$$\rho_P(F_j, x_i) = \frac{E[(F_j - \mu_{F_j})(x_i - \mu_{x_i})]}{\sigma_{F_j}\sigma_{x_i}}, \quad (9)$$

² Náhodná volba každého parametru je nejčastěji prováděna s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti.

kde E značí operátor střední hodnoty, μ_{x_i} střední hodnotu vstupního parametru x_i , σ_{x_i} jeho směrodatnou odchylku, μ_{F_j} střední hodnotu funkcionálu F_j a konečně σ_{F_j} jeho směrodatnou odchylku. Koeficient nabývá hodnot v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. V případě, že je koeficient roven nule, neexistuje lineární korelace mezi vstupním parametrem x_i a formulovaným funkcionálem F_j . Čím více se blíží hodnota koeficientu hodnotě -1 nebo 1 , tím lépe lze vliv parametru x_i na funkcionál F_j aproximovat lineární funkcí a platí, že hodnota koeficientu $\rho_S(F_j, x_i) > 0$ značí přímou závislost, tedy při zvyšující se hodnotě parametru x_i roste funkcionál F_j a naopak, při hodnotě koeficientu $\rho_S(F_j, x_i) < 0$ se jedná o nepřímou závislost.

Velmi často používaným koeficientem je také Spearmanův koeficient pořadové korelace ρ_S (Spearman rank correlation coefficient). Tento koeficient je možné definovat jako Pearsonův korelační koeficient pro podle velikosti uspořádané proměnné. Seřadíme-li tedy nezávisle na sobě všechny hodnoty vstupního parametru x_i a zároveň všechny hodnoty funkcionálu F_j dle jejich velikosti a přiřadíme jim pořadová čísla p_{x_i} a p_{F_j} , můžeme vyjádřit Spearmanův koeficient podle vztahu

$$\rho_S(F_j, x_i) = 1 - \frac{6 \sum_k (p_{x_i,k} - p_{F_j,k})^2}{d(d^2 - 1)}, \quad (10)$$

kde d opět značí počet hodnot vstupního parametru x_i a tím samozřejmě také počet hodnot funkcionálu F_j . Koeficient opět nabývá hodnot v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Pokud je hodnota koeficientu $\rho_S(F_j, x_i) > 0$, pak hodnota funkcionálu F_j roste s rostoucí hodnotou vstupního parametru x_i . Naopak, pokud je hodnota koeficientu $\rho_S(F_j, x_i) < 0$, pak s rostoucí hodnotou vstupního parametru x_i hodnota funkcionálu F_j klesá. Spearmanův koeficient tedy udává, jak dobře lze vliv vstupního parametru na formulovaný funkcionál vyjádřit pomocí monotonní funkce.

Variační metody analýzy citlivosti

Pokročilé metody analýzy citlivosti matematických modelů jsou velmi často založené na analýze rozptylu náhodně vybraných vstupních parametrů modelu (variance-based methods). Tyto metody umožňují stanovit nejenom vliv dílčích vstupních parametrů modelu na formulované funkcionály, ale také vliv jejich vzájemných kombinací (interakce vyšších řádů). Tyto metody tedy přinášejí komplexní informace o citlivosti modelu, to však ale za cenu vysoké výpočetní náročnosti, která je způsobená nutností velkého počtu řešení matematického modelu.

Variační metody jsou obecně založeny na dekompozici formulovaného funkcionálu $F_j(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, kde jednotlivé parametry x_i jsou rovnoměrně rozprostřeny na jednotkové hyperkrychli a platí tedy $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dekompozice funkcionálu (ANOVA, analysis of variance) pak může být rozepsána do tvaru

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d f_{ij}(x_i, x_j) + \cdots + f_{12\dots d}(\dots), \quad (11)$$

kde f_0 je konstanta, f_i funkce závislé na jednotlivých parametrech x_i a zbylé funkce jsou závislé na interagujících parametrech x_i, x_j až x_n . Pro funkci $f(\mathbf{x})$ musí platit, že je integrovatelná na svém definičním oboru a tím je tedy také stejně integrovatelná každá dílčí funkce vzniklá dekompozicí. Musí tedy platit podmínka

$$\int_0^1 f_{i1,\dots,id}(x_i, \dots, x_{id}) dx_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad x_{ij} = (x_i, x_j), \quad (12)$$

ze které vyplývá, že všechny členy vzniklé dekompozicí jsou ortogonální a na základě toho je lze rozepsat pomocí podmíněné střední hodnoty funkcionálu F_j a jednotlivé vstupních parametrů x_i . Jednotlivé členy pak lze tedy vyjádřit ze vztahů

$$f_0 = E(F_j), \quad (13)$$

$$f_i = E(F_j|x_i) - f_0, \quad (14)$$

$$f_{ij} = E(F_j|x_i, x_j) - f_0 - f_i - f_j. \quad (15)$$

Dekompozici funkcionálu je tedy možné plně vyjádřit jako analýzu změn řešení modelu charakterizovaného funkcionálem F_j na základě změny jeho vstupních parametrů x_i a lze tak studovat model pouze na základě jeho vstupů a výstupů. Změnu funkcionálu F_j je přitom možné charakterizovat rozptylem $V(F_j)$, který lze, vzhledem ke statistické nezávislosti všech členů vzniklých dekompozicí, vyjádřit superpozicí

$$V(F_j) = V(f) = \sum_{i=1}^d V(f_i(x_i)) + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V(f_{ij}(x_i, x_j)) + \cdots + V(f_{12\dots d}(\dots)), \quad (16)$$

tedy součtem variací všech nekonstantních členů vzniklých dekompozicí. Celkový rozptyl funkcionálu lze dále rozepsat pomocí vztahu (14) a (15) do tvaru

$$V(F_j) = \sum_{i=1}^d V_{x_i}(E_{x \sim i}(F_j|x_i)) + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{x_{ij}}(E_{x \sim ij}(x_i, x_j)) + \cdots + V_{x_{12\dots d}}(E_{x \sim 12\dots d}(x_1, x_2, \dots, x_d)), \quad (17)$$

ze kterého již můžeme vyjádřit podíl jednotlivých členů rozkladu na celkovém rozptylu funkcionálu $V(F_j)$ pomocí vztahů

$$S_i = \frac{V_{x_i}(E_{x \sim i}(F_j|x_i))}{V(F_j)}, \quad (18)$$

$$S_{ij} = \frac{V_{x_{ij}}(E_{x \sim ij}(x_i, x_j))}{V(F_j)}, \quad (19)$$

kde symboly S_i označují koeficienty citlivosti prvního řádu a symboly S_{ij} koeficienty citlivosti druhého řádu, atd.. Obdobně lze vyjádřit i vyšší řády koeficientů a uvedenou dekompozici lze pak přepsat do tvaru

$$\sum_{i=1}^d S_i + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d S_{ij} + \dots + S_{12\dots d} = 1. \quad (20)$$

Uvedená dekompozice tedy vede na konečný počet koeficientů citlivosti, který je roven $2^n - 1$ a zahrnuje jak koeficienty prvního, tak vyšších řádu. Pro matematický model s $n = 5$ vstupními parametry x_i tedy existuje 31 koeficientů citlivosti. Velký počet koeficientů citlivosti je tudíž pro modely s velkým počtem vstupních parametrů nepraktický a zpravidla se tak u reálných výpočtů zaměřujeme na výpočet především koeficientů citlivosti prvního řádu a tzv. úplného koeficientu (total effect), který lze vyjádřit pomocí vztahu

$$S_T = 1 - \frac{V_{x_i}(E_{x \sim i}(F_j|x_i))}{V(F_j)} = \frac{E_{x \sim i}(V_{x_i}(F_j|x_i))}{V(F_j)}. \quad (21)$$

Vzhledem ke způsobu jejich výpočtu je však vždy nutné provést řešení velkého množství variant analyzovaného modelu, což vede v případě matematických modelů založených na řešení parciálních diferenciálních rovnic k obrovské výpočetní náročnosti.

iii.2

OPTIMALIZACE

OPTIMALIZACE návrhu zařízení představuje v soudobé technice časově velmi náročnou úlohu nejčastěji založenou na inženýrském odhadu a intuici (expert-based optimization), který je doplněn řadou experimentů a měření na prototypu vyvíjeného zařízení (experiment-based optimization). Ty je navíc možné doplnit o statistický návrh experimentu. Tento přístup je však nutné při návrhu pokročilých zařízení a jejich komplexních systémů doplnit o pokročilé metody návrhu založené na využití matematických modelů a jejich optimalizaci (algorithm-based optimization). Hlavním důvodem využití těchto metod je především možnost identifikovat optimální parametry navrhovaného zařízení při respektování jejich vzájemných interakcí, a to pro širokou škálu lineárních i nelineárních úloh. [81] [82]

Tato kapitola je věnována právě uvedené oblasti, tedy matematické úloze optimalizace založené na využití matematických modelů a jejímu využití při návrhu.

III.2.1 KLASIFIKACE MATEMATICKÉ ÚLOHY OPTIMALIZACE

Matematická úloha optimalizace, někdy také označovaná jako matematické programování, je úloha jejímž cílem je nalezení minima nebo maxima pro množinu cílových funkcí $\{F_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Každý funkcional¹ představuje kritérium optimalizace ale ze něj formulovat jako zobrazení

$$F_j : A \mapsto \mathbb{R}, \quad (22)$$

kde A je množina všech možných řešení úlohy, tedy množinu variant vektoru optimalizovaných parametrů $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Pro úlohu minimalizace je cílem optimalizace nalézt takové $\mathbf{x}_0 \in A$ pro které platí

$$F_j(\mathbf{x}_0) \leq F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (23)$$

pro úlohu maximalizace pak musí naopak platit

$$F_j(\mathbf{x}_0) \geq F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (24)$$

¹ V literatuře se často funkcional, který je předmětem optimalizace, označuje jako účelový, cílový nebo pro úlohu minimalizace také cenový a fitness pro úlohu maximalizace.

Pokud pro (23) a (24) platí $x \in A$ je x_0 globální řešení optimalizační úlohy (optimum) a jedná se tedy o globální optimalizaci. Naopak pokud platí $x \in A \cap U$, kde $U \subset A$ je x_0 pouze lokální řešení dané úlohy, která se označuje jako lokální optimalizace.

Optimalizované parametry a jejich omezení

Počet optimalizovaných parametrů n , tedy počet prvků vektoru x udává dimenzi úlohy. Pokud je $n = 1$ jedná se tedy o jednodimenzionální optimalizační úlohu, pokud je $n \geq 2$ jedná se úlohu multidimenzionální. Pro praktické optimalizační úlohy je často nutné extrém hledat pro množinu parametrů $B \in A$, která je pouze podmnožinou množiny A a nazýváme ji pak přípustnou množinou řešení (feasible region). Standardním způsobem formulace přípustné množiny je nastavení intervalu hodnot jednotlivých optimalizovaných parametrů $x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}$.

Pro možná řešení optimalizační úlohy také často existují omezení, která určují zda optimalizované parametry vyhovují specifikovaným kritériím. Takto formulovaná úloha se označuje jako optimalizace s omezením. Obecně existují dva základní typy omezení a to omezení rovností a omezení nerovností. Obecně lze optimalizační úlohu s omezení formulovat ve tvaru²

$$\min(F(x)) \quad F = \{[F_j(x)] : x \in A\}, j = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

$$g_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

$$h_j(x) \leq d_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

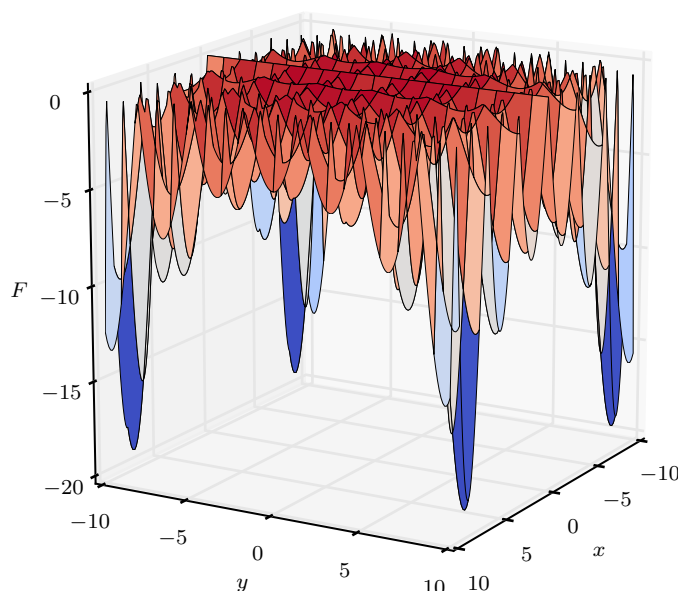
kde F představuje množinu řešení pro všechny cílové funkcionály F_j , g_i a h_j pak omezení, která musejí být splněna a nazývají se často jako tvrdá omezení. Při formulaci měkkých omezení nelze formulovat rovnici nebo nerovnici přesně určující dané omezení, ale využívá se například penalizace varianty překračující dané omezení. Penalizace pak může být prováděna přičtením konstanty nebo obecně lineární či nelineární funkce k formulovanému funkcionálu F_j .

Cílové funkcionály

Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly, optimalizační úloha je obecně formulována na základě množiny cílových funkcionálů $\{F_j\}$, $j = 1, \dots, m$, přičemž platí, že jednotlivé funkcionály nejsou obecně spojité. Pokud je formulován pouze jeden funkcionál ($m = 1$) jedná se o jednokriteriální optimalizační úlohu (single-objective optimization), jež je charakterizována jedním globálním řešením x_0 . Libovolná optimalizační úloha však může obsahovat vícenásobná lokální i globální optima (multimodal optimization) v takovém případě však musí platit vždy platit $F_j(x_{01}) = F_j(x_{02}) = \dots = F_j(x_{0k})$, $j = 1, 2, \dots, m$.

² Obecná formulace matematické úlohy optimalizace jako minimalizace množiny funkcionálů je možná, protože pro libovolný funkcionál F_j musí platit $\min(F_j(x)) = \max(-F_j(x))$.

Příkladem funkce obsahující vícenásobná lokální i globální minima je Hölderovy funkce (Hölder table function) uvedená na obr 10.



Obr. 10: Ukázka Hölderovy funkce, která obsahuje vícenásobná globální i globální minima

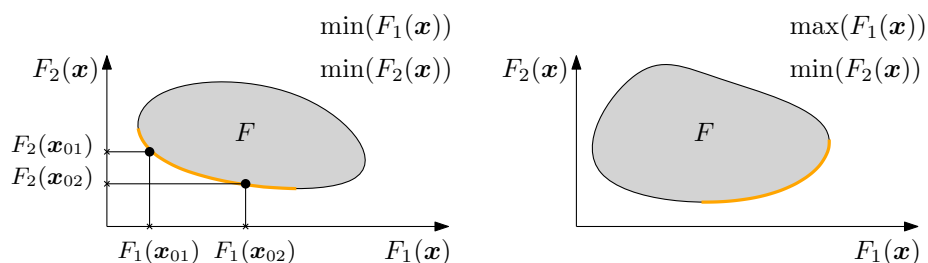
Pokud je úloha formulována pro více cílových funkcionalů F_j a tedy $m \geq 1$, jedná se o optimalizační úlohu multikriteriální (multi-objective optimization³). Jejím výsledkem již není jediné řešení x_0 , ale jejich množina $\{x_{0k}\}$, $k = 1, 2, \dots, k$ pro kterou platí $F_j(x_{01}) \neq F_j(x_{02}) \neq \dots \neq F_j(x_{0k})$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Pro multikriteriální optimalizaci je tedy řešením Pareto optimum (Pareto optimal, Pareto efficient), které pro $m = 2$ představuje křivku (Pareto front), pro $m = 3$ plochu, pro $m = 4$ objem a pro $m > 4$ vícerozměrné prostory, přičemž platí, že Pareto optimum nemusí být stejně jako jednotlivé funkcionaly F_j obecně spojitě.

Základní vysvětlení pojmu Pareto optimum je uvedeno na obr.11. Jedná se o zobrazení výsledků řešení multikriteriální optimalizace na základě dvou funkcionalů F_1 a F_2 . Zobrazená množina $F = [F_1(x), F_2(x)] : x \in A$ představuje všechna možná řešení, které je možné získat na základě kombinace všech optimalizovaných parametrů x_1, x_2, \dots, x_n .

³ V literatuře je možné se setkat s dalšími možnostmi pojmenování, mezi která patří multicriteria optimization, vector optimization nebo Pareto optimization.

Pareto optimum pak leží na části hranice množiny F , přičemž závisí na formulaci dané úlohy, kde přesně optimum leží. Na obr. 11 jsou uvedeny dva rozdílné případy, kdy u prvního z nich je cílem optimalizace minimalizovat hodnotu obou funkcionálů a u druhého maximalizovat funkcionál F_1 a minimalizovat funkcionál F_2 .



Obr. 11: Ilustrativní ukázka Paretova optima pro dvě rozdílné optimalizační úlohy

Úlohu multikriteriální optimalizace je často také možné převést na jednokriteriální a tím celou úlohu značně zjednodušit. Jednoduchý způsob je vytvoření superponovaného funkcionálu se zavedením vah pomocí vztahu

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m w_j F_j(\mathbf{x}), \quad (28)$$

kde G je převedený funkcionál a w_j značí váhy jednotlivých funkcionálů F_j , přičemž platí

$$\sum_{j=1}^m w_j = 1, \quad w_j \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (29)$$

Optimalizací funkcionálu G získáme pouze jedno řešení ležící na Pareto optimu, pro vyšetření dalších řešení je tedy nutné postupně měnit jednotlivé váhy w_j . To však může vést ke zvýšení celkové výpočetní náročnosti úlohy.

Ve speciálním případě, kdy jsou všechny cílové funkcionály F_j a funkce omezení g_i a h_i lineární, nazýváme optimalizační úlohu jako lineární programování. Libovolný cílový funkcionál a zároveň také funkce omezení však mohou být obecně nelineární. V takovém případě se používá označení úlohy optimalizace jako nelineární programování a můžeme jej formulovat v obecném tvaru

$$\min(F(\mathbf{x})) \quad F = \{[F_j(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in A\}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

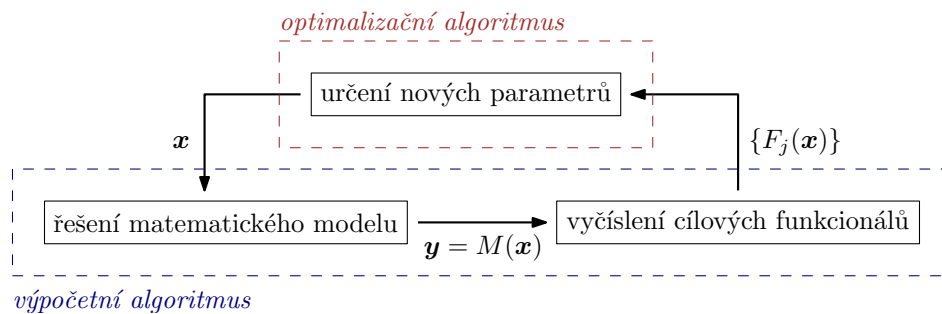
$$h_j(\mathbf{x}) \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}. \quad (33)$$

III.2.2 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY V TECHNICKÉ PRAXI

S ohledem na formulaci matematických modelů, které jsou běžně v technické praxi využívány, se při návrhu či analýze různorodých zařízení nejčastěji setkáváme s modely, které popisují soustavy obecně nelineárních algebraických rovnic, obyčejných diferenciálních rovnic, nebo parciálních diferenciálních rovnic a jejich vzájemných kombinací v případě sdružených úloh. Veličiny, které v těchto rovnicích vystupují (vstupní parametry modelu), nelze ale obecně považovat za optimalizované parametry, ale jako veličiny, které lze z optimalizovaných parametrů určit.

Na základě této úvahy lze optimalizační úlohy v technické praxi rozdělit dvě základní kategorie. První kategorií je optimalizace zdrojových veličin a materiálových parametrů, druhou kategorií pak optimalizace geometrie daného zařízení a zvláštní kapitolou pak může být také řešení inverzních úloh s využitím optimalizačních technik. Obecně lze však optimalizační úlohu vždy rozložit do tří nezávislých kroků, které jsou patrné z blokového diagramu uvedeného na obr. 12.



Obr. 12: Základní princip využití úlohy optimalizace pro matematický model

Drtivá většina úloh řešená v technické praxi vede na optimalizace s omezením, je tedy takřka vždy nutné definovat přípustnou množinou řešení B . Pro úlohy s nízkou dimenzí často stačí využít definice intervalu hodnot, kterých může daný parametr nabývat, pro úlohy s vysokou dimenzí je však situace často mnohem komplikovanější, protože nesprávná definice přípustné množiny řešení úlohy může vést k nesmyslným a nereálným variantám nebo dokonce k neřešitelnosti dané varianty pomocí formulovaného matematického modelu.

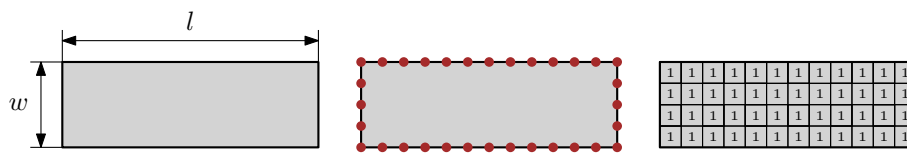
Definice přípustné množiny řešení je obzvláště komplikovaná pro optimalizační úlohy s cílem nalezení optimální geometrie řešeného problému. Komplikované geometrické útvary, přirozené vazby mezi jednotlivými parametry, technologická omezení a omezení na technologii následné výroby tak často vede k nutnosti využít velmi silného omezení množiny A všech možných řešení a tím také značnému omezení možností optimalizace.

Tento problém je navíc velmi často umocněn nutností řešit nelineární matematický model. Z relevantních oblastí práce uveďme například tvarovou optimalizaci magnetických obvodů. U těchto optimalizačních úloh je takřka vždy nutné uvažovat silně neli-

neární závislost permeability μ feromagnetických částí na magnetické indukci B . Při nesprávné definici přípustné množiny řešení mohou některé varianty vést ke značnému přesycení určitých oblastí. Tyto varianty jsou samozřejmě často nepřijatelné z hlediska funkce optimalizovaného zařízení, ale zároveň také vedou k extrémnímu nárůstu výpočetní náročnosti matematického modelu a tím také celé úlohy.

Optimalizace geometrie

Při optimalizaci geometrie zařízení, můžeme obecně využít tři rozdílné optimalizační techniky. Jedná se o optimalizaci rozměrů, tvarovou optimalizaci a optimalizaci topologickou. Základní rozdíl mezi těmito technikami je patrný na obr. 13.



Obr. 13: Rozdíly v definici geometrie podle rozdílných optimalizačních technik (z levé strany: optimalizace rozměrů, tvarová optimalizace, topologická optimalizace)

Optimalizace rozměrů je nejjednodušší z uváděných technologií. Při popisu zařízení se využívá rozměrů, které zároveň představují optimalizované parametry x . Výhodou této techniky její jednoduchost a zároveň nízká výpočetní náročnost. Její hlavní nevýhodou je však velmi silné omezení množiny A všech možných řešení, které vyplývá z nutnosti zavedení optimalizovaných parametrů vycházejících z počátečního návrhu dané geometrie. Praktickým výsledkem optimalizace je pak tedy pouze optimální kombinace optimalizovaných rozměrů.

Tvarová optimalizace využívá jako optimalizované parametry pozice soustavy řídicích bodů, které popisují danou geometrii. Řídicí body které mají určený stupeň volnosti a jsou během optimalizace posouvány vůči počáteční geometrii. Výhodou tvarové optimalizace je nižší omezení množiny A možných řešení a tím také možnost nalezení lepšího řešení než v případě optimalizace rozměrů. Nevýhodou je pak vyšší dimenze optimalizační úlohy, již odpovídá vyšší výpočetní náročnost a také komplikovaná formulace úlohy, především s ohledem na nutnost nastavení mezí pro jednotlivé řídicí body.

Topologická optimalizace je nejpokročilejší ze zde uváděných technologií. Je založena na diskretizaci optimalizované oblasti Ω (design space) na konečný počet podoblastí a následné optimalizaci rozložení materiálu, kterým je definovaná oblast vyplněna a to při

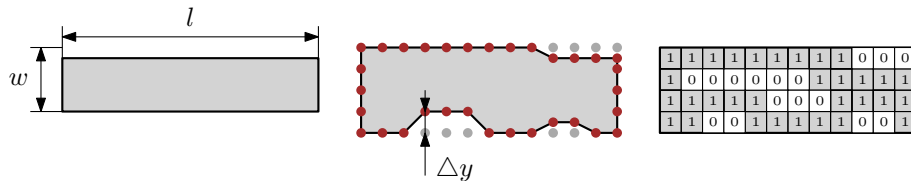
splnění předepsané funkce omezení. Topologickou optimalizační úlohu lze tedy formulovat ve tvaru

$$\min(F) \quad F = \int_{\Omega} \zeta(\rho) \, d\Omega \quad (34)$$

$$\rho \in \{0, 1\}, \quad (35)$$

$$g_i(\rho) \leq 0, \quad (36)$$

kde F značí cílový funkcionál, ζ funkce určující celkovou hustotu, ρ tzv. pseudohustotu určující zda daný element je, nebo není vyplněn daným materiálem a konečně g_i značí funkci respektující omezení kladená na řešení dané úlohy. Výsledky jsou ilustrovány na obr. 14.



Obr. 14: Ilustrace geometrie vycházející z obr. 13 pomysleného optima nalezená na základě rozdílných optimalizačních technik (z levé strany: optimalizace rozměrů, tvarová optimalizace, topologická optimalizace)

Algoritmy topologické optimalizace jsou často kombinovány s metodou konečných prvků, která slouží k řešení samotného matematického modelu, přičemž se využívá stejné diskretizační sítě. Další používanou možností reprezentace optimalizované oblasti je využití Level set metod.

Nespornou výhodou topologické optimalizace je variabilita možných řešení, která je dána velmi nízkým omezením množiny možných řešení B a zároveň možnosti vzniku dutin uvnitř optimalizované oblasti. Nevýhodou je však její vysoká výpočetní náročnost.

Řešení inverzních úloh

Jak již bylo uvedeno úvodu práce, inverzní úloha představuje nalezení vhodných parametrů matematického modelu v případě, že je známo jeho řešení. Obecně lze zapsat inverzní úlohu ve tvaru

$$\mathbf{y} = M(\mathbf{x}), \quad (37)$$

kde \mathbf{y} značí vektor známých dat (řešení matematického modelu), \mathbf{x} vektor parametrů a M operátor (matematický model), který popisuje jejich vzájemný vztah. Cílem řešení inverzní úlohy je přitom nalezení vektoru \mathbf{x} nebo operátoru M tak aby byla uvedená rovnice splněna.

V případě, že je inverzní úloha lineární, můžeme rovnici (37) převést do tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{M} \times \mathbf{x}, \quad (38)$$

kde \mathbf{M} značí matici vzniklou separací \mathbf{x} . Řešení takto formulované úlohy lze nalézt pomocí inverze matice \mathbf{M} , tedy

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}. \quad (39)$$

Inverze matice \mathbf{M} je však takřka vždy velmi komplikovaná, protože ve většině případů neexistuje pouze jedno řešení. Pokud tedy inverzi matice \mathbf{M} nelze provést, je nutné využít matematickou úlohu optimalizace k nalezení jednotlivých elementů vektoru \mathbf{x} . K tomu zavedeme funkcionál F formulovaný ve tvaru

$$F = |\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}|. \quad (40)$$

Nalezením minima takto formulovaného funkcionálu pak již získáme hledané řešení, přičemž můžeme obecně využít metody přímé (nejčastěji metodu nejmenších čtverců) nebo metody nepřímé, které jsou založeny na postupném hledání řešení pomocí optimalizačních metod.

Inverzní úloha však může být obecně nelineární a nelze tak převést na úlohu formulovanou podle (38). Řešení tohoto typu úlohy je pak obzvláště komplikované. Při praktickém řešení inverzních problémů se tak velmi často využívá nepřímé metody, kterou lze formulovat ve tvaru

$$\min(F) \quad F = y - M(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in A. \quad (41)$$

III.2.3 OPTIMALIZAČNÍ METODY

Obrovský potenciál matematických úloh optimalizace a jejich praktické využití v mnoha různorodých oblastech vedl k vývoji nepřeborného množství optimalizačních metod. Tyto metody lze obecně rozdělit na metody deterministické a metody heuristické.

Deterministické metody jsou vhodné pro úlohy, kde existuje přímá závislost mezi charakteristikou možného řešení, definovanou vektorem optimalizovaných parametrů \mathbf{x} a charakteristikou tohoto řešení, která je určena množinou funkcionálů $\{F_j\}$. Pokud tato závislost není přímá, vedou tyto metody k velkému množství potřebných variant, které je nutné ověřit k nalezení řešení úlohy.

Mezi deterministické metody patří metody například velmi často používaná simplexová metoda (Dantzigova metoda pro úlohy lineárního programování, Nelder–Meadova metoda pro úlohy nelineárního programování) [83] [84], dále také metoda sdružených gradientů [85], Newtonova metoda, Rosenbrockova metoda [86] nebo metoda nejmenších čtverců. [82]

Heuristické optimalizační metody lze výhodou využít na úlohy, kde deterministické metody selhávají, tedy na úlohy s nepřímou závislostí optimalizovaných parametrů na

množinu cílových funkcionalů⁴. Tyto metody jsou často založeny na zavedení náhodnosti do řešení optimalizační úlohy (stochastické optimalizační algoritmy). Ve většině případů to však neznamená, že je metoda náhodně prohledává množinu možných řešení, naopak využívá náhodných procesů pro efektivní nalezení řešení.

Mezi metody heuristické patří například metoda simulovaného žihání [87], stochastický horolezecký algoritmus [88] velmi známá metoda Monte Carlo [89], genetické algoritmy [90] nebo například metoda optimalizace hejnem částic [91] a metoda optimalizace mravenčí kolonií [92]. [82]

III.2.4 AUTOMATICKÁ REDUKCE DIMENZE OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

Praktické využití optimalizačních úloh při návrhu zařízení je často spojeno s nutností uvažovat velké množství optimalizovaných parametrů. Jak vyplývá z kapitoly iii.2.1 s rostoucím počtem parametrů roste dimenze řešené úlohy a tím také náročnost jejího řešení.

Bez předem provedené analýzy často není možné rozhodnout, které z parametrů mají na výsledek řešení úlohy výrazný vliv a tak není možné dimenzi úlohy předem omezit zanedbáním nepodstatných parametrů. V takových případech může být velmi užitečná analýza citlivosti cílových funkcionalů $\{F_j\}$ na vstupní parametry x . V případě výpočetně náročných matematických modelů je to však vždy spojeno s vysokou časovou náročností analýzy a to bez možnosti dalšího využití provedených řešení.

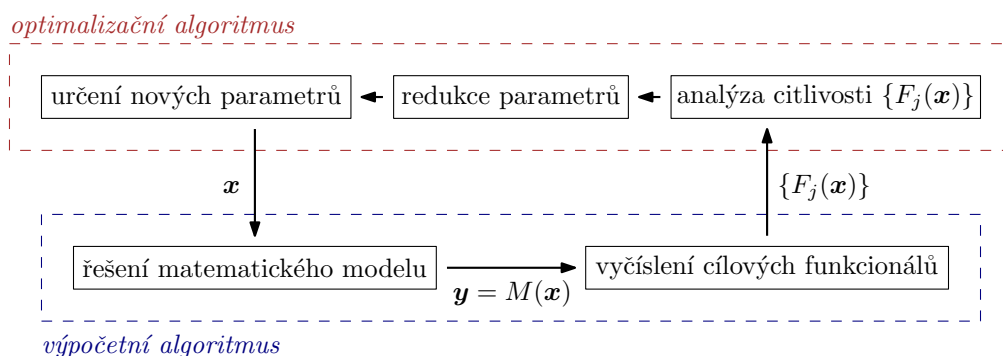
Velmi efektivní proto může být začlenění analýzy citlivosti přímo do optimalizačního algoritmu a to především v případě využití heuristických metod optimalizace, které se často vyznačují využitím stochastických procesů. Základní myšlenkou této modifikace optimalizačního algoritmu je redukce stupňů volnosti optimalizační úlohy na základě analýzy citlivosti jednotlivých optimalizovaných parametrů, a to pro soubor modelů jejichž řešení bylo provedeno již v rámci optimalizace.

Popis algoritmu

Základní princip automatické redukce dimenze optimalizační úlohy je uvedený na obr. 15 a podrobněji bude vysvětlen na úloze optimalizace s využitím genetických algoritmů.

Proces optimalizace začíná stejně jako u standardní implementace GA, nejprve je tedy vytvořena počáteční populace jedinců, které lze charakterizovat vektorem optimalizovaných parametrů x . Pro všechny jedince počáteční populace je provedeno řešení matematického modelu, na jehož základě jsou postupně vyčísleny všechny formulované funkcionaly F_j . Pro všechny získané hodnoty funkcionalů je následně provedena analýza jejich citlivosti vzhledem k optimalizovaným parametrům a na jejím základě je každému parametru x_i přiřazena váha w_i . Následně algoritmus pokračuje selekcí jedinců pro novou

⁴ Heuristické metody jsou obecně využitelné také pro úlohy s přímou závislostí optimalizovaných parametrů na množinu funkcionalů. U těchto úloh však často tyto metody vykazují vyšší výpočetní náročnost, než metody deterministické.



Obr. 15: Základní princip automatické redukce dimenze optimalizační úlohy

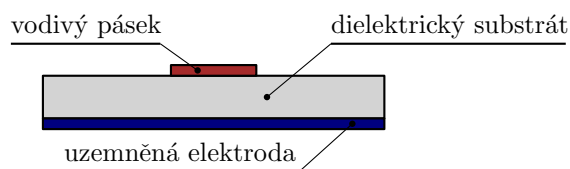
populaci a aplikací genetických operátorů. Pro nově vzniklou populaci je opět provedeno řešení matematických modelů, vyčíslení funkcí a následná analýza citlivosti.

Postupně se zvyšujícím se počtem jedinců dochází ke zpřesňování výsledků analýzy citlivosti a tím také ke konvergenci přiřazené váhy w_i dílčího parametru x_i . Pokud v průběhu optimalizace dojde k poklesu váhy libovolného parametru pod nastavený práh w_{\min} , dojde k jeho vyřazení a při vytváření nové populace již tento parametr není uvažován a je vždy nastaven na definovanou implicitní hodnotu.

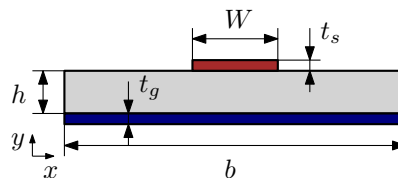
Ilustrativní příklad

Pro ilustraci uvedené algoritmu uveďme jednoduchý modelový příklad. Jedná se o parametrickou optimalizaci otevřeného mikropáskového vedení (open microstrip line), které představuje základní typ planárního vedení určeného pro přenos mikrovlnných signálů. Uvažované vedení je určeno pro vzájemné propojení komponent určitého systému s požadavkem dosažení specifikované hodnoty charakteristické impedance Z_0 , která závisí na použitých materiálech a především pak geometrii vedení.

Optimalizované vedení sestává z vodivého pásku umístěného na dielektrickém substrátu na jehož spodní straně je umístěna uzemněná elektroda. Uspořádání řešeného vedení je uvedeno na obr.16 a na obr. 17 jsou uvedeny optimalizované parametry určující geometrii celého systému.



Obr. 16: Základní uspořádání optimalizovaného mikropáskového vedení



Obr. 17: Optimalizované parametry určující geometrii vedení

Pro návrh mikropáskového vedení a jeho začlenění do mikrovlnného systému je nejdůležitější veličinou jeho charakteristická impedance Z_0 , která je dána vztahem

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (42)$$

kde L značí indukčnost vedení a C jeho kapacitu. Indukčnost i kapacitu lze snadno určit z energie systému, přičemž pro indukčnost platí vztah

$$L = \frac{2W_m}{I^2}, \quad (43)$$

kde W_m je energie magnetického pole a I celkový elektrický proud protékající vedením. Pro kapacitu pak platí analogický vztah

$$C = \frac{2W_e}{U^2}, \quad (44)$$

kde W_e je energie elektrického pole a U elektrické napětí mezi vodivým páskem a uzemněnou elektrodou.

Energie magnetického pole lze určit na základě znalosti rozložení magnetického pole vytvořeného v oblasti vedení, které popisuje rovnice

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A \right) = J_{\text{ext}}, \quad (45)$$

kde μ značí permeabilitu, A magnetický vektorový potenciál a J_{ext} externí proudovou hustotu. energii elektrického pole lze pak určit z rozložení elektrostatického pole, které popisuje rovnice

$$\operatorname{div} (\varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad (46)$$

kde ε je permitivita a φ značí skalární elektrický potenciál.

Energie magnetického a elektrického pole lze pak již následně určit na základě vztahů

$$W_m = \int_V \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} dV; \quad W_e = \int_V \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} d\mathbf{D} dV, \quad (47)$$

kde $\mathbf{B} = \operatorname{rot} A$ značí magnetickou indukci, $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ intenzitu magnetického pole, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ elektrickou indukci a $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ intenzitu elektrického pole.

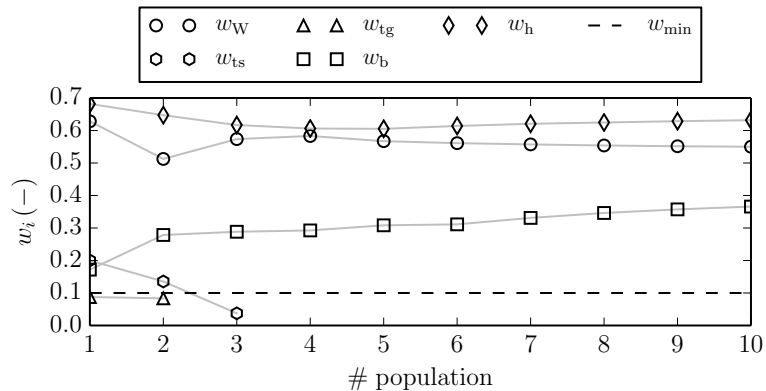
Optimalizační úloha je formulována pro funkcionál F , který představuje absolutní hodnotu rozdílu požadované charakteristické impedance Z_0 a impedance Z_{0m} určené na základě numerického řešení formulovaného matematického modelu a platí tedy $F = |Z_0 - Z_{0m}|$. Cílem optimalizace je tedy nalézt vektor parametrů \mathbf{x} , takový aby nabýval funkcionál F svého minima. Optimalizační úlohu lze formulovat jako

$$\min(F(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} = (W, h, b, t_s, t_g) \quad (48)$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}. \quad (49)$$

Pro výpočet citlivosti funkcionálu F na jednotlivé optimalizované parametry x_i byl použit Pearsonův korelační koeficient $\rho_{P,i} = w_i$. Podmínkou vyřazení libovolného parametru bylo dosažení prahové hodnoty $w_{\min} = 0.1$ a to pro soubor s více než 100 modely.

Pro optimalizaci byla zvolena hodnota požadované charakteristické impedance $Z_0 = 75 \Omega$. Použitý genetický algoritmus⁵ našel řešení pro 10 požadovaných populací (zvolená velikost populace byla 50 jedinců) hodnotou funkcionálu $F = 74,986 \Omega$.



Obr. 18: Vývoj vah jednotlivých parametrů v průběhu optimalizace

Postupný vývoj hodnoty váhy w_i pro dílčí optimalizované parametry x_i je patrný na obr. 18. Je patrné, že s rostoucím počtem jedinců dochází k postupnému zpřesňování korelačního koeficientu w_i . Váhy parametrů t_s a t_g reprezentující šířku vodivého pásu a zemnicí elektrody v průběhu optimalizace překročí práh $w_{\min} = 0,1$ a jsou tak po třetí populaci vyřazeny.

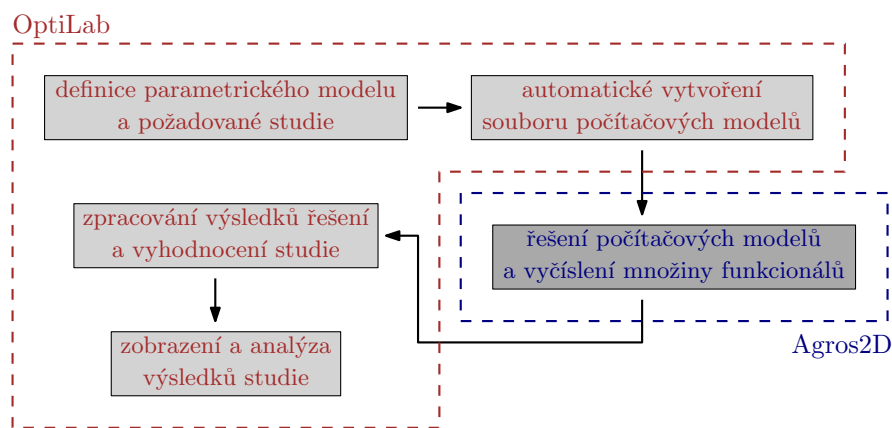
⁵ Pro optimalizaci byl využit genetický algoritmus implementovaný v systému OptiLab popisovaném v kapitole iii.3.

iii.3

POPIS SYSTÉMU OPTILAB

OPTILAB je nový systém určený pro pokročilou analýzu matematických modelů a optimalizaci, jehož základy byly položeny v rámci této práce. Systém je jednou ze součástí projektu Agros2D a nazývá se OptiLab (Optimization Laboratory). Jeho hlavní výhodou je právě provázání s aplikací Agros2D, která je určena pro řešení fyzikálních polí a sdružených úloh a OptiLab tak umožňuje řešit pokročilé úlohy z oblasti matematického modelování, mezi které lze řadit parametrické studie, analýzy citlivosti a nejistoty matematických modelů a zároveň optimalizace pomocí deterministických a heuristických metod. OptiLab je však samostatnou součástí Agros2D a je tak možné jej využít pro analýzu matematických modelů, které jsou řešeny jinou aplikací nebo přímo vlastním řešičem.

Systém se primárně zaměřuje na analýzu a optimalizaci matematických modelů, které se vyznačují velmi vysokou výpočetní náročností. Při návrhu systému byl tedy kladen velký důraz na možnosti využití již vyřešených počítačových modelů zpětně pro jejich.

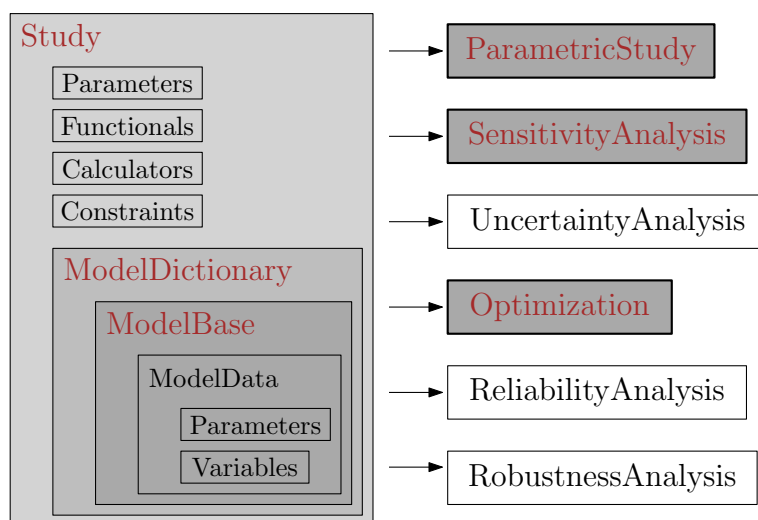


Obr. 19: Základní princip použití systému OptiLab

III.3.1 STRUKTURA A ZÁKLADNÍ FUNKCE

OptiLab sestává z balíku *variant* napsaných ve skriptovacím jazyce Python¹ a grafického uživatelského rozhraní napsaném v programovacím jazyce C++, které je určeno pro snadnou analýzu výsledků. Uživatelské rozhraní také integruje interpret jazyka Python a umožňuje tak velmi efektivní práci se souborem modelů a výsledky jejich řešení.

Balík *variant* je napsán objektově a tvoří hlavní součást systému OptiLab. Ta je určena k efektivní správě velkého souboru počítačových modelů, jejich přímého řešení na lokálním výpočetním stroji nebo na jejich clusteru a obsahuje také všechny algoritmy pro analýzu modelů a optimalizaci. Základní struktura knihovny je zobrazena na obr. 20.

Obr. 20: Základní struktura modulu *variant*

Třída *ModelBase* je určena k popisu řešeného modelu. Odděluje samotný počítačový model od ostatních částí systému a definuje jeho vstupní parametry a výstupní proměnné. Objekt třídy umožňuje na základě požadovaných vstupních parametrů vytvořit konkrétní variantu počítačového modelu (zdrojové a materiálové parametry modelu, geometrie definiční oblasti), provést jeho řešení a následně vyčíslit výstupní proměnné, které řešení dané varianty charakterizují.

Pro správu souboru počítačových modelů ve formě instancí třídy *ModelBase* je určena třída *ModelDictionary*. Objekt této třídy umožňuje provádět operace nad celým souborem modelů, tedy jejich řešení, uložení² do souboru a jejich opětovné načtení, filtrování

¹ Python je oblíbeným jazykem využívaným velmi často také v oblasti vědecko-technických výpočtů. Především pak volně dostupné knihovny (SciPy, NumPy, PyLab, SymPy, atd.) jsou velmi silným nástrojem pro vývoj vlastních algoritmů

² Pro uložení jednotlivých modelů ve formě binárního souboru se používá serializace objektu *ModelData*, který popisuje pouze vstupní parametry a výstupní proměnné. Při načítání dojde k deserializaci tohoto objektu a následně automatického vytvoření instance třídy *ModelBase* s načtenými parametry a proměnnými.

modelů podle specifikovaných kritérií a extrakci parametrů a proměnných napříč všemi modely. Třída zároveň umožňuje zaznamenat všechny výsledky získané analýzou prováděnou na souboru přiřazených počítačových modelů. Pro řešení analyzovaných modelů pomocí jiných aplikací či programů je určená třída *ModelDictionaryExternal*.

Třída *Study* definuje strukturu objektů, které jsou potřebné jak pro úlohy analýzy počítačových modelů tak zároveň optimalizace. Všechny konkrétní třídy jako je například *ParameterStudy*, *SensitivityAnalysis* a *Optimization*, jsou tedy od třídy *Study* zděděny a dále ji doplňují o algoritmus samotné analýzy. V současné době jsou do systému implementovány všechny metody analýzy citlivosti uvedené v kapitole iii.1. Z optimalizačních algoritmů pak metoda sdružených gradientů [93], genetické algoritmy NSGA-II [94], metoda simulovaného žhání [94], horolezecký algoritmus a nakonec vlastní implementace genetických algoritmů [95] [96], která je vyvíjena speciálně pro optimalizaci sdružených úloh.

Pro definici vektorů vstupních parametrů modelu a zároveň množiny cílových funkcí onálů které jsou předmětem analýzy, využívá třída instance tříd *Parameters* a *Variables*, které představují kolekce instance tříd *Parameter* a *Variable*. Analyzovaný počítačový model může být popsán více vstupními parametry i výstupními veličinami, které nejsou využité pro danou analýzu. V takovém případě musí být pro dané parametry a výstupní veličiny modelu definovány implicitní hodnoty, které se využijí v případě, kdy dané hodnota není definována analýzou. Tento přístup sice vede na mírně komplikovanější definici dané úlohy, ale umožňuje plně využít soubor již vyřešených matematických modelů pro další odlišnou analýzu nebo optimalizaci.

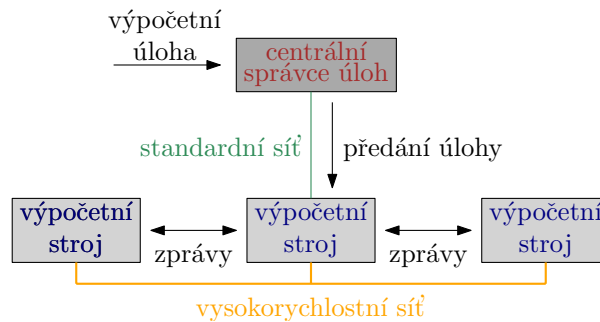
Pro různé druhy analýzy a také pro optimalizaci je velmi důležitá instance třídy *Calculators*, která slouží jako kolekce pro instance tříd zděděných od třídy *Calculator*. Ty slouží k zařazení libovolného výpočetního algoritmu do výpočtu a zároveň definici jeho vstupů s ohledem na formulované vstupní parametry modelu a výstupní veličiny. Tímto způsobem je možné začlenit do již existující analýzy i optimalizace další výpočetní algoritmus. Lze tak například během optimalizace sledovat, jak se mění průměrná hodnota libovolné výstupní proměnné specifikovaných modelů, nebo lze například snadno provádět analýzu citlivosti podle různých kritérií.

Analogicky je zvolena struktura omezení definovaných pomocí kolekce, kterou představuje instance třídy *Constraints*. Lze tedy k úloze přidávat libovolná omezení nebo vzájemné vazby mezi vstupními parametry počítačového modelu.

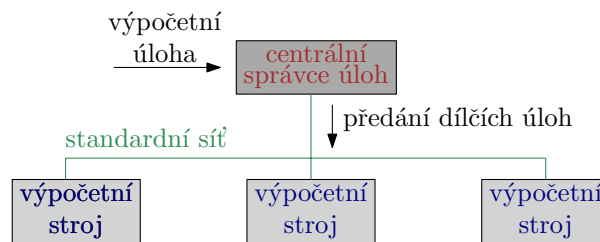
III.3.2 AKCELERACE VÝPOČETNÍCH ÚLOH

Jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly, systém OptiLab se specializuje na analýzu a optimalizaci počítačových modelů s velkou výpočetní náročností. Z toho důvodu byl systém rozšířen o možnosti jejich řešení s využitím mnoha výpočetních zdrojů (počítačový cluster).

Při analýze počítačových modelů a zároveň při optimalizaci je takřka vždy nutné řešit velké množství vzájemně nezávislých modelů, které jsou výpočetně velmi náročné a zpracování úlohy tak vyžaduje zpravidla značnou dobu. S ohledem na to je možné s výhodou využít paralelního výpočtu jednotlivých počítačových modelů k akceleraci řešení celé úlohy. Takto formulovaná úloha spadá do oblasti tzv. HTC³ (high-throughput computing), tedy do problematiky řešení časově velmi náročných úloh na systémech mnoha vzájemně provázaných výpočetních strojů. Základní principy a zároveň rozdíly mezi HPC a HTC jsou patrné z obr. 21 a obr. 22.



Obr. 21: Základní princip HPC (high-performance computing)

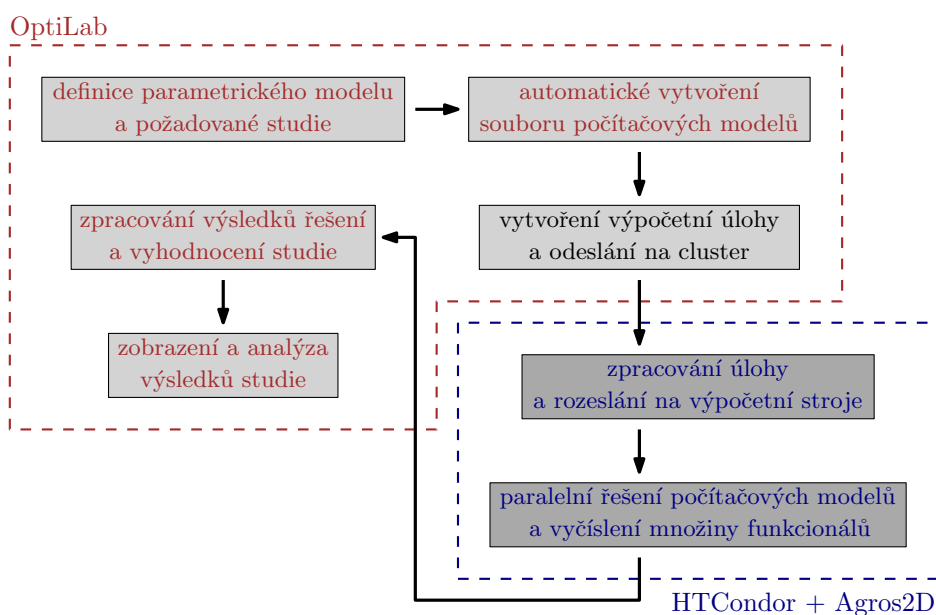


Obr. 22: Základní princip HTC (high-throughput computing)

Systém OptiLab byl tedy doplněn o modul *htcondor* napsaný v jazyce Python, který zajišťuje propojení s aplikačním rámcem HTCondor a umožňuje tedy připojení na výpočetní cluster pomocí SSH, automatické vytvoření úlohy, přenos potřebných souborů a samozřejmě spuštění samotné výpočetní úlohy a její řízení. Pro výpočet s využitím více výpočetních strojů tedy stačí pouze využít třídu *ModelDictionaryCondor*, která je zděděna od třídy *ModelDictionary* a doplňuje její funkcionalitu při zachování stejného rozhraní. Pro ostatní části systému se tedy nic nemění.

³ Důvodem k využití HTC (high-throughput computing) oproti HPC (high-performance computing) je poměr výpočetní náročnosti daného počítačového modelu vzhledem k výpočetnímu výkonu systémů pro HPC. Počítačové modely používané v technické praxi jsou řešitelné v rámci výkonu jednotlivých výkonných výpočetních strojů a není nutné tedy používat výkon jejich kombinace pro řešení dílčí úlohy, naproti tomu je však velmi výhodné využít paralelní zpracování relevantních algoritmů.

Vzhledem k různorodému charakteru využití systému OptiLab byly implementovány dva základní způsoby komunikace s aplikačním rámcem HTCondor. První způsob komunikace je určen pro případy kdy je nutné řešit najednou pouze málo početný soubor počítačových modelů. V takovém případě se vytvoří pro každý dílčí model jedna samostatná úloha, která se odešle a systém po jejím zpracování danou úlohu vyzvedne, přičemž nečeká na zpracování ostatních úloh. Praktické využití tohoto způsobu komunikace je především při analýze citlivosti modelu s využitím standardních metod (OAT, Morisova metoda) nebo řešení optimalizačních úloh pomocí deterministických optimalizačních algoritmů (simplexová metoda, metoda sdružených gradientů).



Obr. 23: Základní princip použití systému OptiLab společně s HTCondor

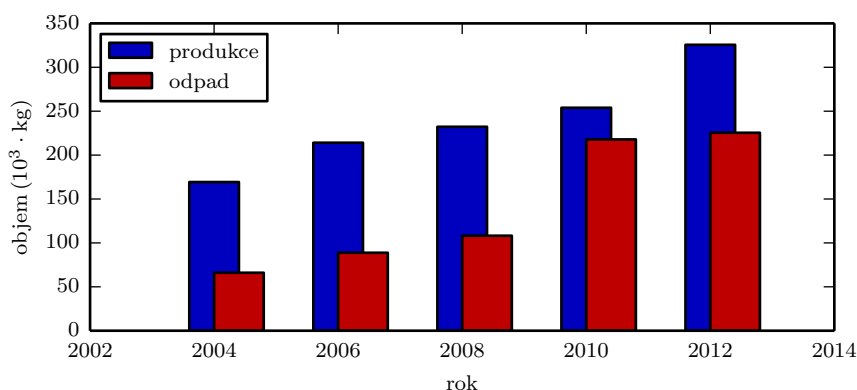
Druhý způsob komunikace je určen naopak pro velké, početné soubory modelů, které je možné řešit najednou. V takovém případě je pro všechny modely vytvořena jediná úloha rozdělená na dílčí procesy, které jsou zpracovávány paralelně. Tato úloha je odeslána na server a po jejím zpracování, které zahrnuje vyřešení všech dílčích procesů, je vyzvednuta a modely jsou načteny k dalšímu zpracování. Při tomto způsobu se při přenosu souborů na cluster využívá jejich archivace, a to především z důvodu snížení vysoké náročnosti přenosu velkého množství malých souborů. Praktické využití tohoto způsobu komunikace je především pro analýzu citlivosti pomocí variačních metod nebo úlohy optimalizace s využitím heuristických metod (genetické algoritmy, metoda Monte Carlo).

Část IV

ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY

TVAROVÁ OPTIMALIZACE ELEKTROD TRIBOELEKTRICKÉHO SEPARÁTORU PLASTŮ

SEPARACE a následná recyklace plastových materiálů je v současné době jednou z nejdůležitějších oblastí odpadového hospodářství. Intenzivní výzkum a vývoj technologií umožňujících opětovné a především pak účelné využití plastového odpadu je způsoben extrémním nárůstem produkce plastů v posledních šedesáti letech a zároveň také velmi frustrujícím poměrem mezi objemem plastového odpadu a celkovým objemem vyprodukovaných plastů (viz. obr. 24). [97] [98]



Obr. 24: Vývoj objemu produkce a objemu odpadu plastů v ČR [98]

Mezi technologické postupy umožňující snížení množství plastového odpadu patří dnes především spalování, skladování a recyklace. Recyklace je přitom asi nejlepším způsobem nakládání s plastovým odpadem. K jejímu využití je však nezbytně nutná vysoká čistota recyklovaného materiálu, kterou může zajistit pouze velmi dobrá účinnost separačních procesů zajišťujících třídění odpadních materiálů na jeho jednotlivé druhy. V současné době existuje řada technologií využívající nejrůznější vlastnosti materiálů (hustota, zrnitost, barva, atd.). Účinnost separace i čistota výsledných produktů však vždy silně závisí na provozních podmínkách a separovaných materiálech. Znalost

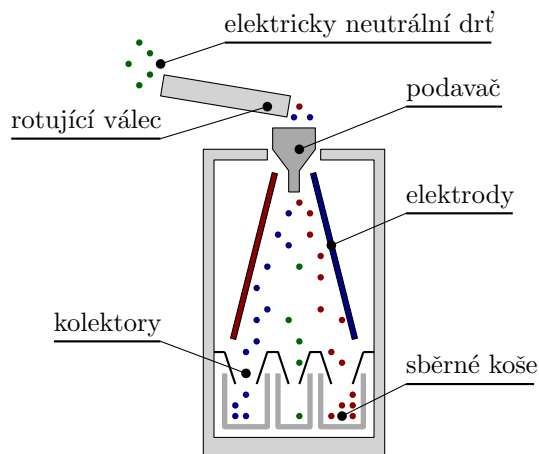
těchto podmínek pro konkrétní materiály a jejich kombinace je tedy pro využití dané technologie vždy kritická. [99] [100]

Cílem optimalizace, která je uvedena v této kapitole, je identifikovat klíčové provozní parametry prototypu triboelektrického separátoru, který byl vyvinut a následně testován za účelem separace drtě průmyslového plastového odpadu. [93] [94]

IV.1.1 FORMULACE TECHNICKÉHO PROBLÉMU

Základní myšlenkou technologie elektrostatické separace je využití silového působení elektrostatického pole na volně se pohybující elektricky nabitě částice¹ separované drtě, složené z různých druhů materiálů. Jednotlivé částice jsou při volném pohybu vychylovány ze své přirozené trajektorie pohybu a tím jsou tříděny na základě polarit a velikosti jejich elektrického náboje. V případě triboelektrické separace plastů je drť elektrována pomocí tření (triboelektrický jev), přičemž polarita a velikost získaného náboje závisí především na druhu materiálu a velikost získaného náboje lze odhadovat z triboelektrické řady [101]. [102] [103]

Základní princip a hlavní konstrukční části prototypu řešeného triboelektrického separátoru typu free-fall jsou patrné z obr. 25. Elektricky neutrální částice plastů nejprve vstupují do rotujícího válce, kde při pomalém průchodu dochází k jejich intenzivnímu tření a to jak o stěny rotujícího válce, tak zároveň mezi jednotlivými částicemi, které tím získávají různý elektrický náboj. Velikost získaného náboje přitom závisí na druhu materiálů, její zrnitosti a vlhkosti, době jejího průchodu skrze rotující válec, jeho rychlosti otáčení a v neposlední řadě pak na vlhkosti okolního prostředí, teplotě a mnoha dalších vlivech [104].



Obr. 25: Základní princip funkce triboelektrického separátoru

¹ V rámci této kapitoly je pojem částice vnímán jako pevné těleso o rozměrech v řádu jednotek milimetrů, které bylo získáno rozmělněním materiálu.

Elektricky nabitá drť následně prochází skrze podavač, který její tok usměrní a jednotlivé částice tak volně padají mezi systém elektrod s rozdílným elektrickým potenciálem. Vlivem silového působení elektrického pole dochází k vychýlení částic z přímé trajektorie a tím k jejich třídění dle elektrického náboje. Separovaná drť je v dolní části systému elektrod zavedena pomocí kolektorů do sběrných košů.

Proces nabíjení je značně stochastický, proto je vždy nutné uvažovat určité pravděpodobnostní rozdělení elektrického náboje jednotlivých částic a stejně tak rozdělení jejich rychlosti a pozice na vstupu do mezielektrodového prostoru [105]. To znamená, že vždy bude při separaci existovat určitá nejistota správného roztrídění drtě a je tak nutné sledovat čistotu výsledných produktů ve sběrných koších, která udává poměr mezi správně a nesprávně separovanými materiály v jednom sběrném koši.

Nejistotu správného roztrídění je možné značně eliminovat využitím většího počtu kolektorů a tomu odpovídajícího počtu sběrných košů. Minimálně je však nutné uvažovat vždy tři sběrné koše (viz. obr. 25), kdy materiál v prostředním koši je nutné vždy separovat znovu. Další možností snížení nejistoty a tomu odpovídajícího zvýšení čistoty výsledných produktů může být také využití vícenásobné separace, kdy jsou již roztríděné částice rovnou přivedeny pomocí kolektorů do mezielektrodového prostoru dalšího separátoru.

Na základě mnohých experimentů, které byly provedeny při jeho vývoji, bylo zjištěno, že tvar elektrod má enormní vliv na celý proces separace. Jejich vhodným tvarem je tak možné značně zvýšit čistotu roztríděné drtě a přitom snížit napětí elektrod. Tím dojde nejenom ke snížení energetické náročnosti celého systému, ale také ke snížení nároků na izolaci aktivních částí a tím ke zvýšení bezpečnosti a snížení rizika možných defektů. Cílem optimalizace prototypu bylo tedy nalézt jejich optimální tvar.

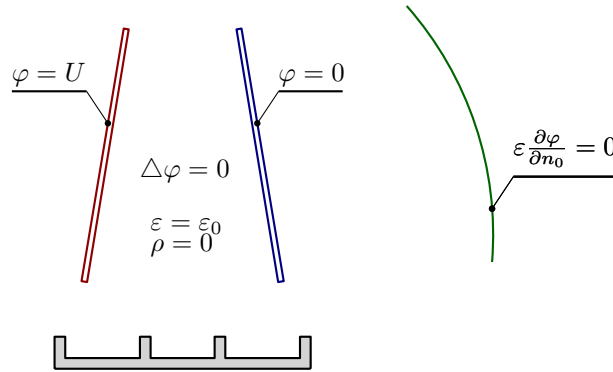
IV.1.2 MATEMATICKÝ MODEL A JEHO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Rozložení elektrostatického pole vytvořeného elektrodami separátoru popisuje parciální diferenciální rovnice formulovaná pro elektrický potenciál φ , kterou lze zapsat ve tvaru

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = \rho, \quad (50)$$

kde ε značí permitivitu prostředí a ρ je objemová hustota elektrického náboje. Vzhledem k velikosti elektrického náboje jednotlivých částic, který se může pohybovat v řádu jednotek až stovek pC, lze usoudit, že částice nebudou výrazně ovlivňovat elektrostatické pole vytvořené elektrodami. Tato úvaha byla podpořena provedenými simulacemi a následně také mnoha experimenty na prototypu zařízení. [94] [106]

Schématické znázornění definiční oblasti elektrostatického pole v kartézském souřadnicovém systému (x, y) je zobrazeno společně se zvolenými okrajovými podmínkami je patrné z obr. 26.



Obr. 26: Schématické znázornění definiční oblasti pro řešení elektrostatičkého pole

Pohyb jednotlivých částic separované drtě v elektrostatičkého poli popisují pohybové rovnice

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (51)$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (52)$$

kde m je hmotnost dané částice, v rychlost jejího pohybu, F celková síla, která na ni působí a s její dráha. Celková síla působící na každou částici je dána superpozicí všech dílčích sil a lze jí rozepsat do tvaru

$$F = \sum_i F_i = F_g + F_a + F_e + F_{p2p}, \quad (53)$$

kde F_g je síla gravitační, F_a je odporová síla, která brzdí pohyb částice v daném prostředí, F_e je síla elektrostatičkého pole vychylující částici z dráhy přirozeného pohybu a konečně F_{p2p} je síla respektující vzájemnou interakci jednotlivých částic. Uvedené síly lze pak vyjádřit pomocí vztahů

$$F_g = m \cdot g, \quad (54)$$

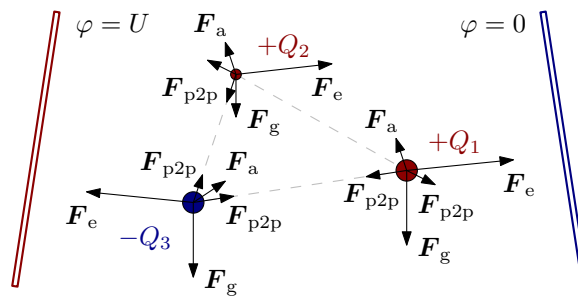
$$F_a = -v \frac{1}{2} \rho c S v, \quad (55)$$

$$F_e = Q_i E = -Q_i \cdot \text{grad } \varphi, \quad (56)$$

$$F_{p2p} = \sum_j \left(\frac{Q \cdot Q_j}{4\pi\epsilon \cdot r^2} + \mu \frac{Q \cdot Q_j}{4\pi \cdot r^2} \right), \quad (57)$$

kde g představuje gravitační konstantu, ρ hustotu prostředí, c je součinitel odporu částice, S její referenční plocha, Q elektrický náboj a Q_j elektrický náboj další interagující částice. Schématické znázornění všech uvažovaných sil působících na částice při jejich pohybu je uvedeno na obr. 27. [94]

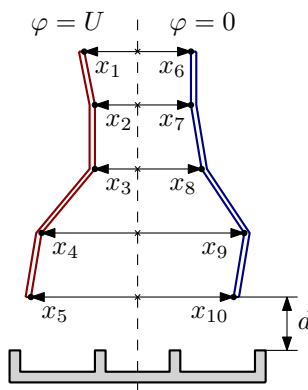
iv.1.3 FORMULACE ÚLOHY OPTIMALIZACE



Obr. 27: Schematické znázornění silového působení na jednotlivé částice separované drti

IV.1.3 FORMULACE ÚLOHY OPTIMALIZACE

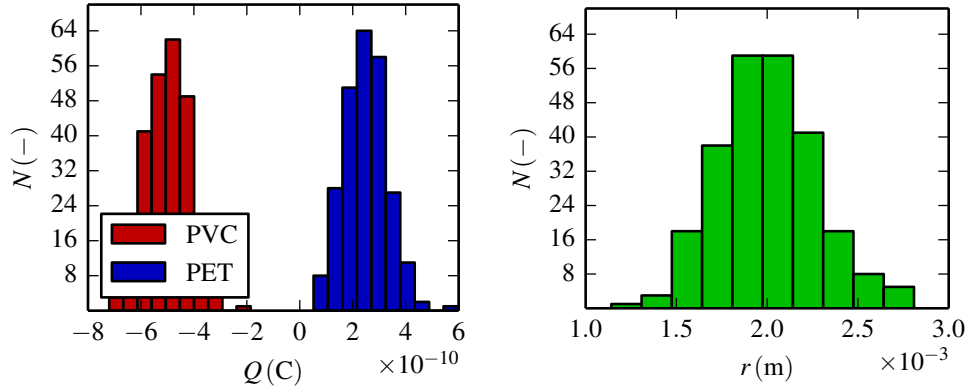
Vzhledem k povaze úlohy byla vybrána tvarová optimalizace s využitím evolučních algoritmů. Každá z elektrod byla diskretizována pěti nezávislými řídicími body, jejichž lineární aproximace představuje čtyři segmenty každé elektrody. Vertikální vzdálenost řídicích bodů byla zvolena jako ekvidistantní a jako optimalizované parametry byly zvoleny vzdálenosti bodů $x_1 - x_{10}$ od osy separátoru umístěné v jeho středu. Úloha byla dále doplněna o další dva parametry určující vzdálenost kolektorů od spodní hrany elektrod d a velikost napětí U napájené elektrody. Dělení elektrod a zároveň zavedení všech dvanácti optimalizovaných parametrů je patrné z obr. 28.



Obr. 28: Dělení elektrod pro jejich tvarovou optimalizaci

Každá z variant provedení separátoru definovaná pomocí stanovených parametrů byla v rámci optimalizace hodnocena na základě numerického řešení formulovaného modelu, tedy řešení rozložení elektrostatického pole následované výpočtem trajektorie vždy stej-

ného souboru 500 částic² reprezentující drť průmyslového odpadu složenou z 50% PVC (polyvinylchlorid) a 50% PET (polyethylentereftalát).



Obr. 29: Rozdělení pravděpodobnosti elektrického náboje částic a jejich poloměru

Pro testovací soubor částic bylo uvažováno normální rozdělení pravděpodobnosti náboje obou druhů materiálu, jejich poloměru a rovnoměrné rozložení pravděpodobnosti jejich počáteční pozice při vstupu do mezielektrodového systému (viz. obr. 29)³. Další použité parametry a parametry rozdělení pravděpodobností jsou uvedeny v tab. 1, kde μ značí střední hodnotu a σ střední kvadratickou odchylku.

Tab. 1: Parametry jednotlivých částic reprezentující separovanou drť

materiál	hustota ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	poloměr		náboj	
		μ (mm)	σ (mm)	μ (C)	σ (C)
PET	1330	2	0.25	$+0.25 \cdot 10^{-9}$	$0.8 \cdot 10^{-10}$
PVC	1370	2	0.25	$-0.5 \cdot 10^{-9}$	$0.8 \cdot 10^{-10}$

Pro hodnocení dílčích variant byly zavedeny dva nezávislé funkcionály. První funkcionál, který je dále značený jako F , představuje penalizaci dopadu každé částice mimo určený sběrný koš, přičemž se tato penalizace zvyšuje při zvětšující se vzdálenosti dopadu od středu učeného koše a zároveň se zvláště penalizuje dopad částice na libovolnou elektrodu⁴. Jako druhý funkcionál bylo zvoleno napětí napájené elektrody U , které je zároveň také jedním z optimalizovaných parametrů.

- 2 Reálný tvar částic není možné vzhledem k jejich složitosti způsobené drcením respektovat, proto byly všechny částice testovacího souboru uvažovány jako kulové s proměnným poloměrem daným pravděpodobnostním rozložením.
- 3 Pro provedenou optimalizaci byl uvažován vždy naprosto stejný soubor testovacích částic. Byla tím zajištěna možnost vzájemného porovnání výsledků pro libovolný tvar elektrod a jejich napětí.
- 4 Při dopadu částice na elektrodu dochází k přenosu náboje a tím nutně k velmi rychlému odražení částice směrem od elektrody a tím také ke značnému zanášení chyb do procesu separace.

Jedná se tedy o multikriteriální optimalizaci s cílem minimalizovat oba formulované funkcionály. Problém lze tedy formulovat jako

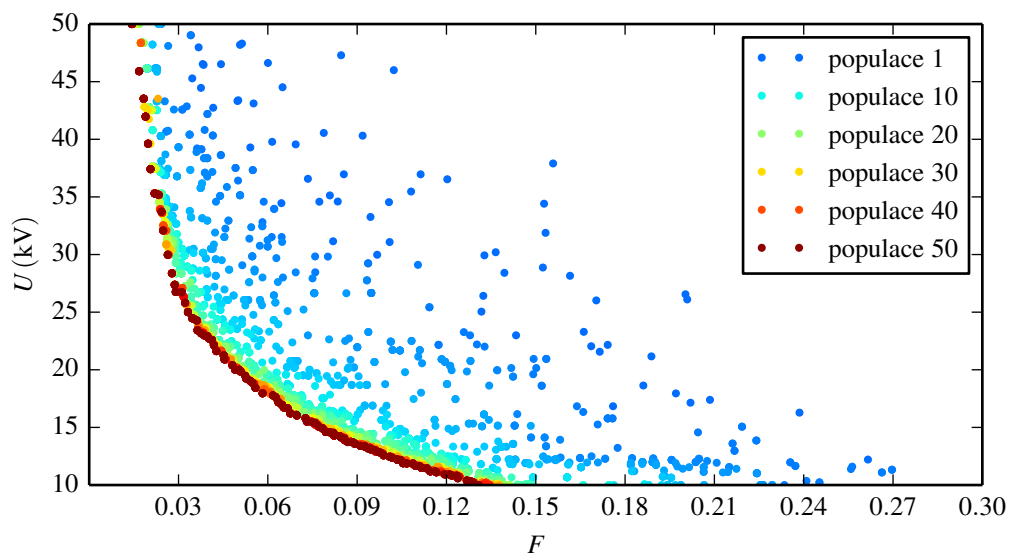
$$\min(F(\mathbf{p}), U(\mathbf{p})), \quad \mathbf{p} = [x_1, x_2, \dots, x_{10}, d, U], \quad \mathbf{p} \in P \quad (58)$$

kde \mathbf{p} představuje vektor optimalizovaných parametrů a P prostor možných řešení optimalizační úlohy omezené nastavením intervalu pro každý dílčí parametr.

IV.1.4 PRŮBĚH PROCESU OPTIMALIZACE A DISKUZE VÝSLEDKŮ

Formulovaná úloha je velmi specifická nespojitostí funkcionálu F , kdy jen velmi malá změna parametrů může způsobit velké změny funkcionálu při nárazu částice do elektrody. Proto byly otestovány dva algoritmy řešení. Prvním byla vlastní implementace genetického algoritmu NSGA-II [90] a pro ověření výsledků také vlastní implementace optimalizačního algoritmu založeného na metodě simulovaného žihání (SA).

Využitý genetický algoritmus NSGA-II byl vzhledem k povaze řešené úlohy dále rozšířen o možnost mutace předků. Tato modifikace se uplatňuje ve specifických případech, kdy pro danou variantu dochází k početně nadměrným dopadům pohybujících se částic na elektrody (vzdálenost elektrody od osy separátoru je v takových případech zvětšena), nebo naopak v případech, kdy dochází k nedostatečnému vychýlení částic, a ty pak ve velkém množství dopadají mimo určený sběrný koš (vzdálenost elektrody je zmenšena). Hlavní myšlenka této modifikace spočívá v úmyslném vylepšení nově vznikající populace za účelem dosažení rychlejší konvergence metody.

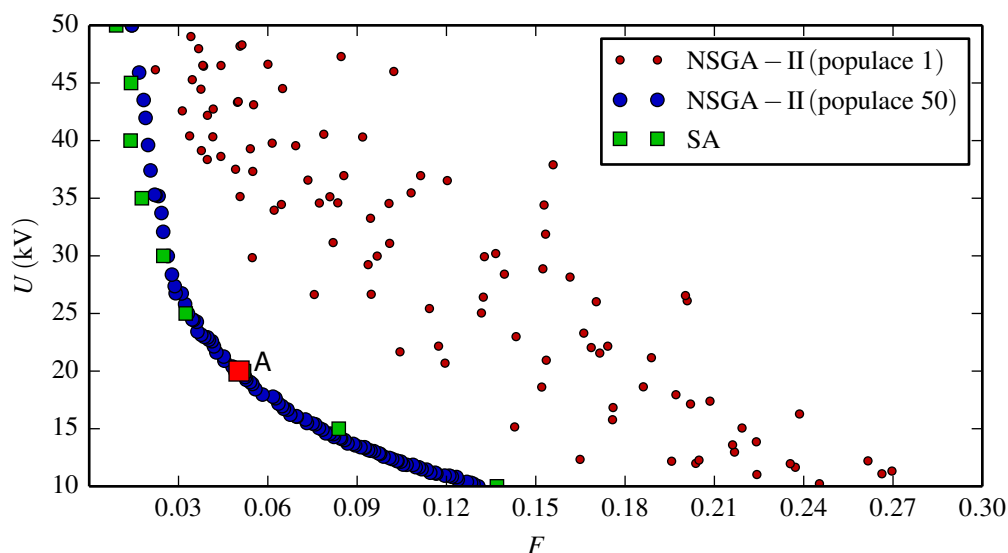


Obr. 30: Zobrazení závislosti $U(F)$ pro všechny jedince ve vybraných populacích

Průběh řešení optimalizační úlohy pomocí genetických algoritmů je patrný na obr. 30, kde jsou zobrazeny vždy všichni jedinci pro vybranou populaci. Z průběhu je jasné patrné formování Pareto fronty a to již pro desátou populaci. Celkem bylo spočteno 50 populací a optimalizační proces trval přibližně 50 minut.

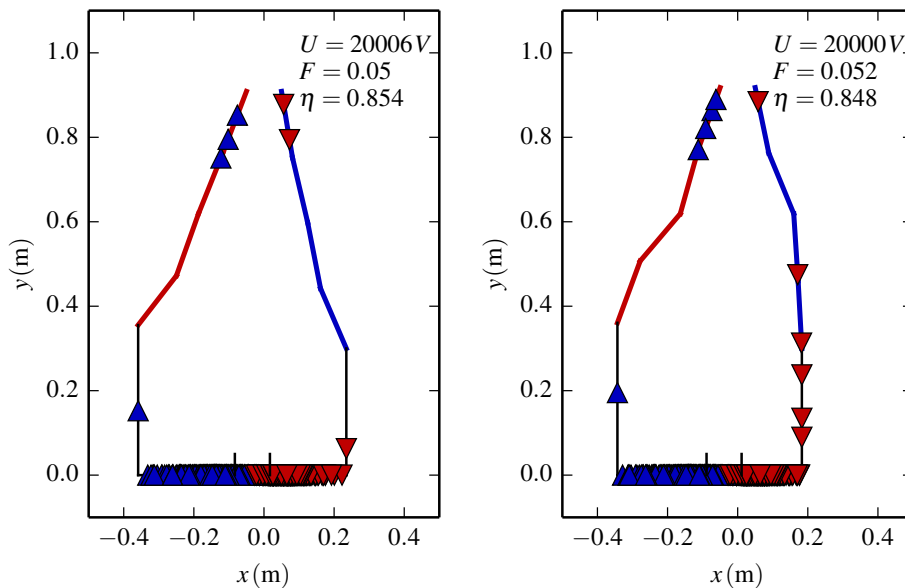
Pro ověření získaných výsledků byla následně provedena optimalizace pomocí algoritmu založeného na metodě simulovaného žíhání. V průběhu řešení bylo vždy zafixováno napětí U napájené elektrody a následně byl minimalizován funkcionál F . Byla tedy řešena jednokriteriální optimalizační úloha s redukovaným počtem parametrů $\mathbf{p} = [x_1, x_2, \dots, d]$. Opakovaným řešením takto formulované úlohy, vždy s rozdílnou hodnotou pevného napětí U , byly tedy nalezena rozdílná minima funkcionálu F , která leží na Pareto frontě.

Pro ukončení úlohy jednokriteriální optimalizace byl algoritmus doplněn o zastavovací kritéria, určující maximální počet kroků metody a zároveň kritéria kontrolující zlepšení funkcionálu F v několika po sobě následujících iteracích. Takřka ve všech případech byl algoritmus ukončen právě druhým zmíněným kritériem.



Obr. 31: Porovnání výsledků využitých optimalizačních algoritmů

Porovnání výsledků získaných pomocí genetického algoritmu NSGA-II a simulovaného žíhání je uvedeno na obr. 31. Je jasné patrné, že výsledky dosažené oběma použitými algoritmy jsou si velmi blízké. Pro přímé porovnání výsledků byly dále vybrány dvě rozdílné varianty, které leží v blízkosti bodu A zobrazeného na Pareto frontě v obr. 36. Tvar elektrod pro obě varianty je uveden na obr. 36, a to společně s místy dopadu všech



Obr. 32: Porovnání výsledků použitých optimalizačních algoritmů, levá varianta byla získána pomocí NSGA-II, pravá pomocí simulovaného žhání (vyznačené body značí místa dopadu každé z jednotlivých částic)

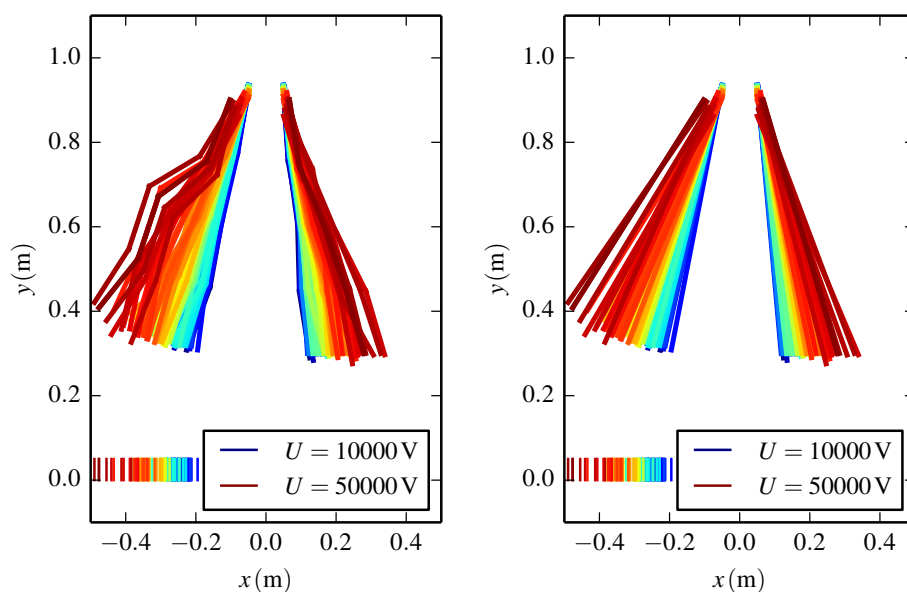
částic separované drtě. Bližší analýzou několika výsledků bylo zjištěno, že výrazný vliv na výsledek řešení má především první třetina elektrod, což odpovídá předpokladům⁵.

Na obr. 33 jsou dále zobrazeny všechny varianty, které se nacházejí na Pareto frontě v poslední populaci získané pomocí NSGA-II. Z výsledků je možné si povšimnout, že s rostoucím napětím se zvyšuje úhel, který svírají elektrody s osou separátoru a zároveň také vzdálenost mezi elektrodami v jejich vrchní části. Tento úhel se přitom mění pro každou elektrodu rozdílně. To je způsobeno rozdílnou střední hodnotou μ elektrického náboje Q pro jednotlivé částice separované drtě⁶.

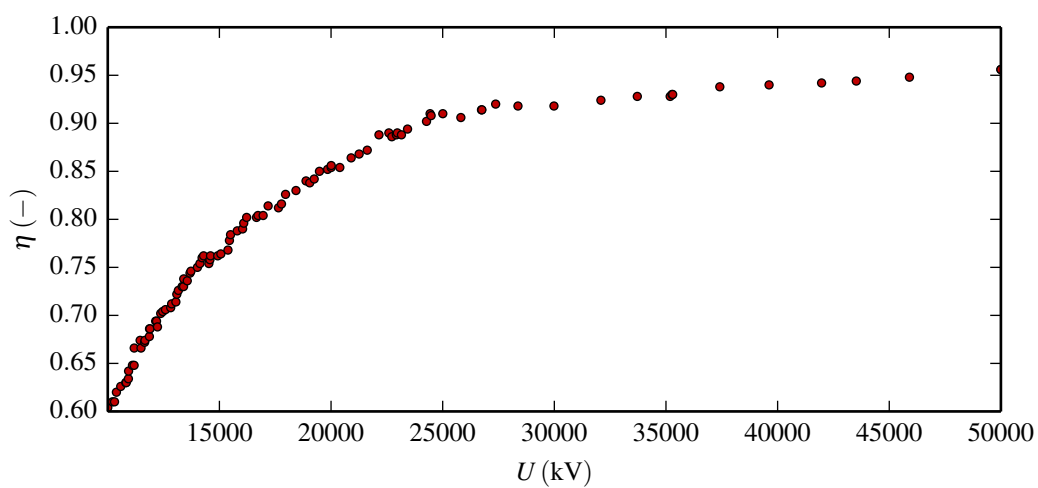
Pro úplnost byla na základě výsledků optimalizace stanovena teoretická účinnost separačního procesu η , která udává poměr počtu správně umístěných částic do jim určeného sběrného koše a počtu částic, které dopadly mimo tento koš. Závislost účinnosti η na napětí je uvedena na obr. 34, a to pro všechny varianty ležící na Pareto frontě nalezené v poslední populaci jež byla získána pomocí NSGA-II.

5 Nejvyšší síla F_e , způsobující vychýlení letících částic separované drtě by se měla nacházet v nejužším místě elektrodového systému.

6 Střední hodnota náboje částic PET je $\mu = +0.25 \cdot 10^{-9}$ a částic PVC $\mu = -0.5 \cdot 10^{-9}$. Vzhledem ke stejné kvadratické odchylce $\sigma = 0.8 \cdot 10^{-10}$ je jasné, že absolutní hodnota elektrického náboje $|Q|$ částic PET je celkově nižší, než u částic PVC. Částice PET jsou vychylovány do pravého koše a proto musí pravá elektroda svírat s osou separátoru menší úhel, aby v průběhu letu částice došlo k jejímu dostatečnému vychýlení.

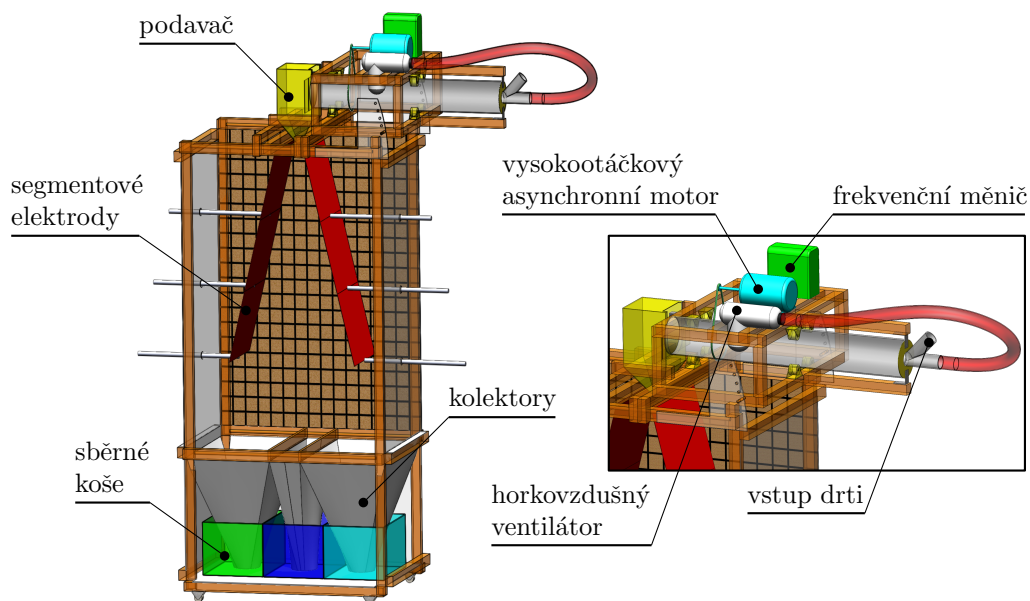


Obr. 33: Zobrazení tvaru elektrod pro všechny varianty ležící na Pareto frontě v poslední populaci získané pomocí NSGA-II a jejich aproximace lineární funkcí

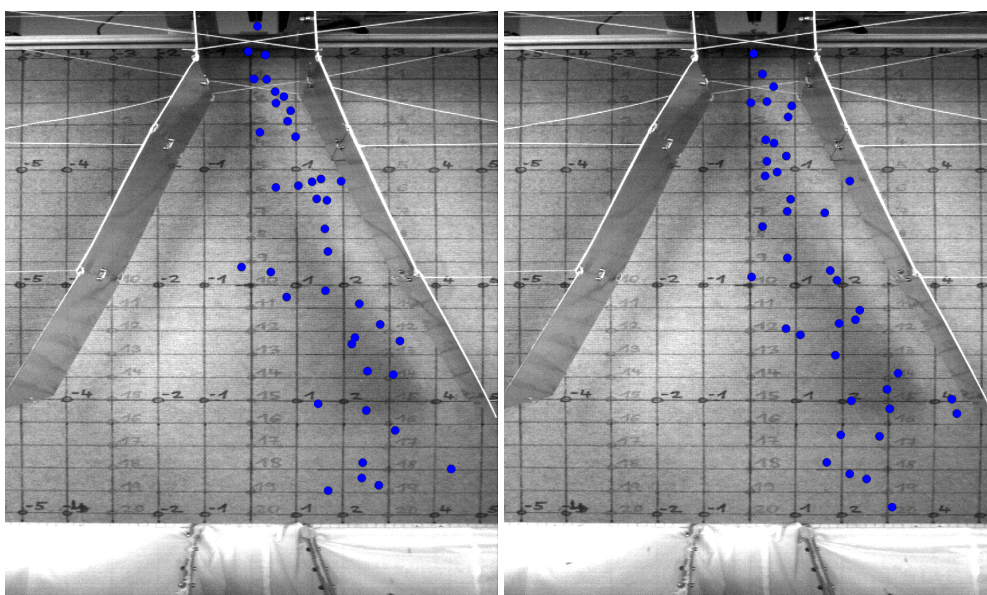


Obr. 34: Závislost účinnosti separačního procesu na napětí elektrod pro všechny varianty ležící na Pareto frontě v poslední populaci získané pomocí NSGA-II

IV.1.4 PRŮBĚH PROCESU OPTIMALIZACE A DISKUZE VÝSLEDKŮ



Obr. 35: Konstrukce postaveného prototypu triboelektrického separátoru



Obr. 36: Snímky z vysokorychlostní kamery zachycující vychylování testovací směsi PET při jednom z prvních experimentů provedených v laboratoři KTE ZČU v Plzni

iv.2

ODHAD TEPLOTNĚ ZÁVISLÉ CHARAKTERISTIKY MĚRNÉ TEPELNÉ KAPACITY FIELDOVA KOVU

MATERIÁLOVÉ PARAMETRY jsou velmi důležitými vstupními daty každého matematického modelu, protože výsledek jeho řešení na nich vždy silně závisí. V případech, kdy jsou parametry navíc nelineární, je jejich přesná znalost kritická a každá nejistota může způsobit nepřijatelné chyby.

V oblasti elektrotechniky lze nalézt velkou řadu silně nelineárních fyzikálních jevů, které je často nutné řešit jako sdružené úlohy. Mezi jedny z nejčastějších rozhodně patří sdružená úloha elektrického proudového, magnetického a teplotního pole, kterou je nutné řešit v mnoha odvětvích slaboproudé i silnoproudé elektrotechniky. Lze se s ní setkat jak při analýze vzniku nežádoucích tepelných ztrát, tak při syntéze zařízení a strojů, u kterých je vznikající teplo základem pro správnou funkci. V obou uvedených případech je však nutné pro korektní řešení matematického modelu velmi přesně definovat elektrickou vodivost, permeabilitu, tepelnou vodivost, hustotu a měrnou tepelnou kapacitu, a to takřka vždy jako charakteristiku závislou na teplotě.

V dnešní době existuje velká řada materiálových databází zahrnující mnoho materiálů. Například pro čisté kovy je tak velmi snadné nalézt takřka všechny materiálové parametry, a to dokonce společně se závislostmi na teplotě, nebo dalších fyzikálních veličinách. Problém však často nastává v případech, kdy je nutné nalézt konkrétní materiálové charakteristiky pro slitiny kovů a další specifické materiály, u kterých dané charakteristiky velmi silně závisí na jejich přesném chemickém složení, které navíc není často ani známé. Typickým příkladem může být například teplotní závislost měrné tepelné kapacity kovů, která je pro vyšší teploty často velmi silně nelineární.

V takových případech je takřka jediným možným řešením měření potřebných charakteristik, které však často bývá velmi náročné, a to jak z pohledu potřebného technologického vybavení a zkušeností, tak z pohledu finanční i časové náročnosti. Jedním z možných řešení však také může být spojení jednoduchého experimentu společně s řešením inverzní úlohy, na jejímž základě lze velmi dobře odhadnout dané materiálové parametry a dokonce také jejich nelineární charakteristiky.

Tato kapitola je zaměřena na ilustraci právě uvedené možnosti odhadu materiálových charakteristik. Cílem analýzy je zjištění teplotně závislé charakteristiky měrné tepelné kapacity Fieldova kovu, který může být vzhledem ke svým unikátním vlastnostem využit

IV.2.1 POPIS POUŽITÉ METODIKY

v mnoha aplikacích, mezi které patří například pro technologie rychlého prototypování (rapid prototyping) a tlakové lití (die casting). [107]

IV.2.1 POPIS POUŽITÉ METODIKY

Fieldův kov je eutektickou slitinou bismutu (32.5 %), cínu (16.5 %), a india (51.0 %) a patří mezi kovy s velmi nízkou teplotou tavení (62 °C). Kov neobsahuje olovo ani kadmium a v porovnání s Woodovým kovem tak není toxický. Materiálové parametry Fieldova kovu takřka nejsou známe a v současné odborné literatuře lze nalézt jen velmi strohé informace, které jsou navíc často uváděny pouze pro pokojové teploty (viz. tab. 2). Teplotní vodivost λ byla odhadnuta z Wiedemann–Franz–Lorenzova zákona a měrná teplota tání c_p na základě Neumann–Koppova pravidla a hustota ρ byla změřena. [108] [109]

Tab. 2: Základní materiálové parametry Fieldova kovu

parametr	hodnota
elektrická vodivost	$\gamma = 1,923 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
relativní permeabilita	$\mu_r = 1$
tepelná vodivost	$\lambda = 13,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
hustota	$\rho = 7991,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
měrná tepelná kapacita	$c_p = 200,72 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

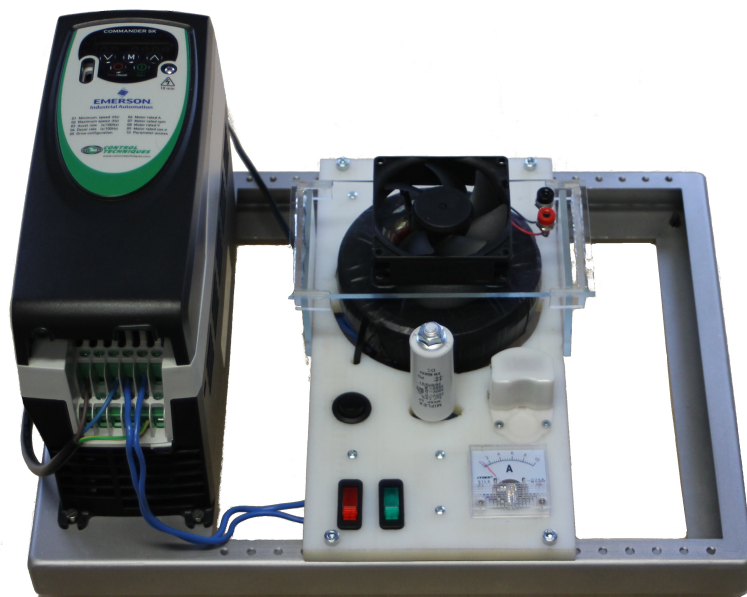
Aby bylo možné odhadnout teplotní závislost měrné tepelné kapacity Fieldova kovu, byla využita malá laboratorní indukční pec, která umožňuje měřit teplotu menšího množství materiálu při jeho tavení. Změřená časová závislost teploty taveniny byla následně využita při řešení inverzní úlohy pro matematický model popisující proces tavení. Vzhledem k tomu, že tento proces popisuje nelineární sdružená úloha, bylo při hledání odpovídající závislosti měrné tepelné kapacity využito optimalizace s cílem nalézt co nejlepší shodu řešení daného modelu s měřením. Vzhledem k tomu, že řešení sdružené úlohy nezávisí pouze na měrné tepelné kapacitě, byla provedena analýza citlivosti za účelem zjištění vlivu všech materiálových parametrů na výsledek řešení.

IV.2.2 FORMULACE TECHNICKÉHO PROBLÉMU

Pro tavení zkoumaného vzorku Fieldova kovu byl využit prototyp malé kelímkové indukční pece zkonstruované v rámci této analýzy v laboratoři Katedry teoretické elektrotechniky (viz. 37). Pec sestává z frekvenčního měniče ($f_{\max} = 1500 \text{ Hz}$, $I_{\max} = 5 \text{ A}$), napájecího obvodu s kompenzací a válcové cívky s 500 závity, v jejímž středu je umístěn silikonový kelímek, který je schopen pojmout vzorek o celkové váze 410 g.

Měření teploty vzorku v průběhu jeho tavení bylo provedeno pomocí teplotní sondy. Použitá sonda využívá pro měření teploty křemíkovou diodu, která je umístěna v ko-

IV.2.3 MATEMATICKÝ MODEL A JEHO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ



Obr. 37: Využitá laboratorní pec

vovém pouzdře z nerezové oceli¹. Měřený vzorek byl nejprve plně roztaven a následně do něj bylo vložena teplotní sonda. Po opětovném zchladnutí bylo provedeno samotné měření teploty v průběhu ohřevu a tavení vzorku.

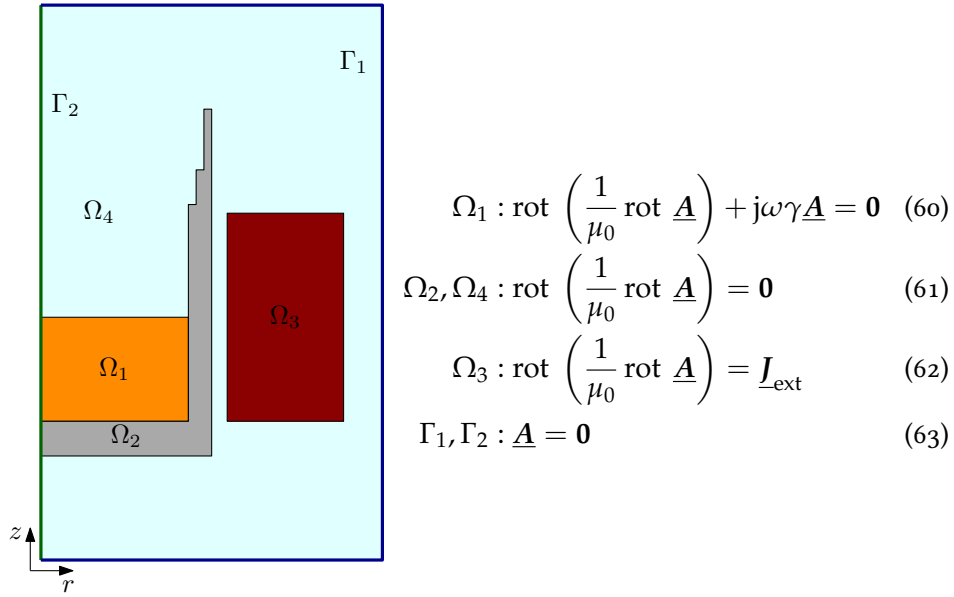
IV.2.3 MATEMATICKÝ MODEL A JEHO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly, indukční ohřev popisuje sdružená úloha obecně časově proměnného magnetického a teplotního pole. Vzhledem k harmonickému napájecímu proudu využité laboratorní pece lze rozložení magnetického pole v okolí induktoru a kelímku s taveným kovem využít Helmholtzovu rovnici

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{A} \right) + j\omega\gamma\underline{A} = \underline{J}_{\text{ext}}, \quad (59)$$

kde μ značí permeabilitu prostředí, \underline{A} fázor vektorového magnetického potenciálu A , $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence, γ elektrická vodivost a $\underline{J}_{\text{ext}}$ fázor externí proudové hustoty. Model magnetického pole je dále nutné doplnit o Dirichletovu okrajovou podmínku $\underline{A} = \mathbf{0}$ definovanou na hranici řešené oblasti modelu v osově symetrickém souřadnicovém systému (r, z) , jak je patrné z obr. 38.

¹ Použitá sonda umožňuje měřit teploty v rozsahu $-17 - 110^\circ\text{C}$ a to s přesností $\pm 0,22^\circ\text{C}$. Pro záznam teploty byla použit DAQ LabJack U3 HV s rychlostí záznamu 0,05 s.



Obr. 38: Definiční oblast modelu magnetického pole

Rozložení teplotního pole je možné s výhodou formulovat jen na části řešené oblasti. Přestup tepla v oblasti taveniny a kelímku indukční pece pak popisuje rovnice přestupu tepla ve tvaru

$$\text{div} (\lambda \text{grad} T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - p_J, \quad (64)$$

kde T je teplota, $\lambda(T)$ teplotní vodivost daného materiálu, $\rho(T)$ hustota, $c_p(T)$ měrná tepelná kapacita, t čas a p_J představuje měrné tepelné ztráty generovány pomocí Jouleových ztrát, které je možné určit z řešení magnetického pole pomocí

$$p_J = \frac{\|\underline{J}_{\text{ind}}\|^2}{2\gamma}, \quad (65)$$

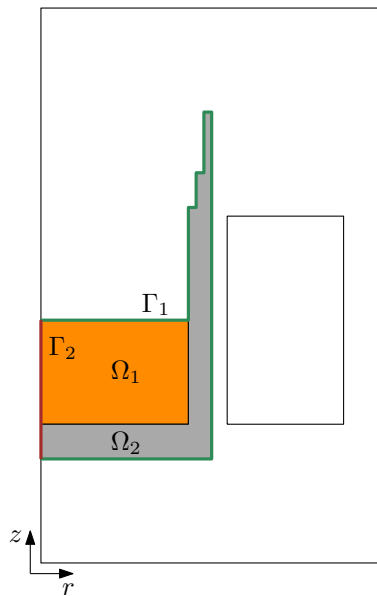
kde $\underline{J}_{\text{ind}}$ je fázor indukované proudové hustoty, která vychází z druhého členu rovnice (59), tedy $\underline{J}_{\text{ind}} = -j\omega\gamma\underline{A}$.

Model teplotního pole je dále nutné doplnit o okrajovou podmínku respektující přestup tepla z hranice řešené oblasti, tu lze formulovat ve tvaru

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{\text{ext}} - T), \quad (70)$$

kde n značí vnější normálu dané hranice, α koeficient přestupu tepla a T_{ext} okolní teplotu. Dále na hranici symetrie definiční oblasti teplotního pole (obr. 39) pak musí nutně platit okrajová podmínka nulového teplotního toku, kterou lze definovat pomocí rovnice

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (71)$$



$$\Omega_1 : \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - p_J \quad (66)$$

$$\Omega_2 : \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (67)$$

$$\Gamma_1 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha (T_{\text{ext}} - T) \quad (68)$$

$$\Gamma_2 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (69)$$

Obr. 39: Definiční oblast modelu teplotního pole

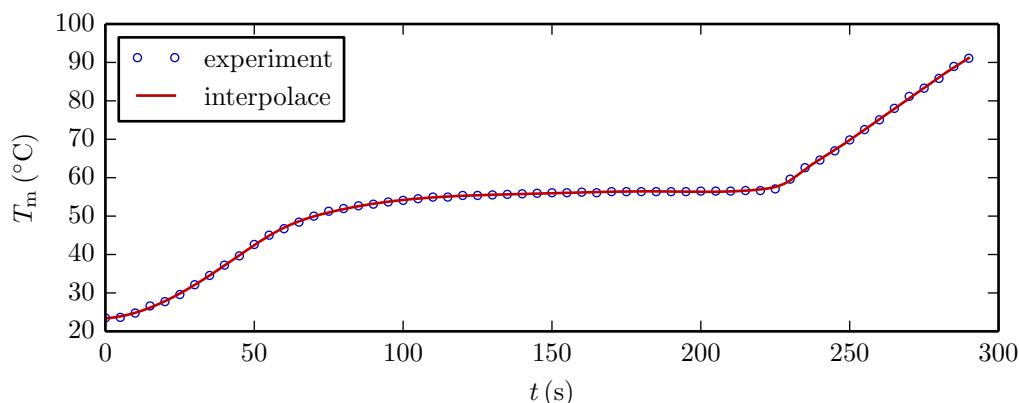
IV.2.4 MAPOVÁNÍ PRŮBĚHU OHŘEVU A TAVENÍ KOVU

Pro podrobnější posouzení teplotních procesů bylo provedeno opakované měření teploty. Z výsledků měření, které jsou uvedeny na obr. 40, je zřetelná oblast fázové změny vzorku při jeho tavení, která představuje část křivky, kde se teplota takřka nemění. Vzhledem k pomalu se měnící teplotě je však velmi těžké odhadnout kdy přesně k fázové změně dochází.

Na základě formulovaného matematického modelu bylo provedeno jeho numerické řešení, a to pro materiálové parametry uvedené v tab. 2. Model teplotního pole byl tedy uvažovaný jako lineární. Na obr. 41 je uvedeno rozložení magnetické indukce a rozložení teploty v čase $t = 200$ s. Z výsledku je patrné, že teplota v oblasti Fieldova kovu je takřka konstantní a dosahuje hodnoty $T(200 \text{ s}) \doteq 100$ °C. Porovnání tohoto výsledku s výsledky měření jasně potvrzuje, že lineární model nerespektuje spolehlivě proces tavení kovu.

Aby bylo možné lépe posoudit, v jakém časovém okamžiku dochází k tavení Fieldova kovu a zároveň kdy je kov plně roztaven, byl proveden výpočet derivace mezi jednotlivými hodnotami naměřených dat a to jak přímo z naměřených hodnot (diference), tak z derivace interpolační křivky vytvořené pomocí kubického splinu, která je zobrazena na obr. 42. Tato derivace představuje rychlost ohřevu a je z jejího průběhu lépe patrné, kdy přesně k fázové změně dochází. Pro stanovení konkrétního časového údaje byl definován práh $0,06$ °C · s⁻¹.

Z určeného času tavení ($107 \text{ s} < t_{\text{melt}} < 217 \text{ s}$) a ze znalosti výkonu P_J dodávaného do taveného materiálu, který byl stanoven na základě modelu magnetického pole, byla



Obr. 40: Časový vývoj teploty vzorku měřený v jeho středu (měření teploty bylo provedeno s vysokou četností a opakovaně, zde je pro jednoduchost vybrána průměrná hodnota pro vybrané časové okamžiky)

následně vypočtena přibližná hodnota měrné tepelné kapacity $c_p \approx 9000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, která je úměrná množství dodaného tepla po dobu fázové změny materiálu.

Za povšimnutí také stojí, že teplota tavení měřeného vzorku je dle změřených dat rovna 58°C a je tedy mírně odlišná od teploty tavení 62°C , která je uváděna v literatuře. Důvodem tohoto rozdílu může být mírný rozdíl v chemickém složení vzorku.

IV.2.5 CITLIVOSTNÍ ANALÝZA MATERIÁLOVÝCH PARAMETRŮ

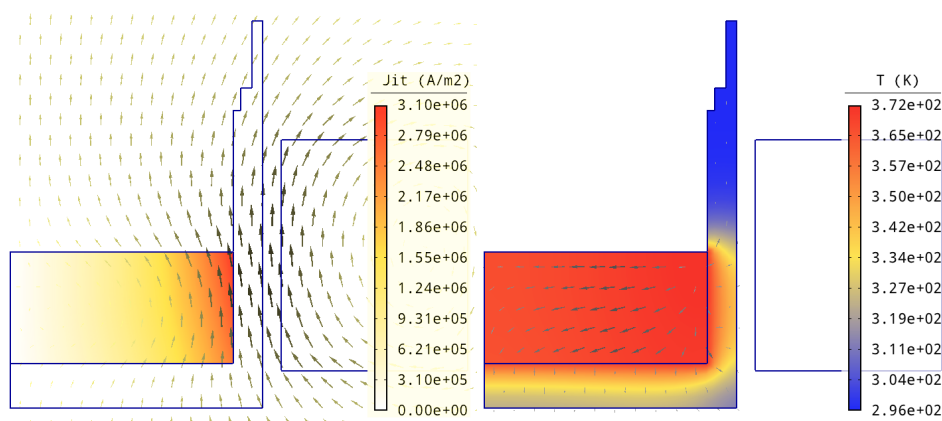
Vzhledem k tomu, že teplotní závislosti materiálových parametrů Fieldova kovu nejsou známy, byla provedena citlivostní analýza, která měla za cíl ukázat vliv dílčích parametrů na výsledek řešení formulovaného matematického modelu.

Za účelem analýzy byl formulován funkcionál, který představuje rozdíl mezi změřenou časovou závislostí teploty taveného vzorku T_m a závislostí získanou na základě numerického řešení T . Tento funkcionál lze tedy formulovat pomocí vztahu

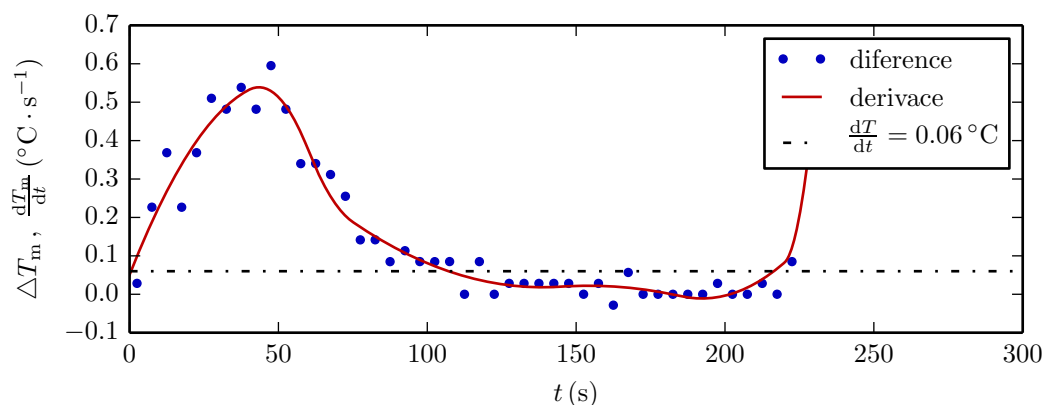
$$D = \sum_{t=0}^{t=210} |T_m(t) - T(t)|. \quad (72)$$

Samotná analýza byla provedena pro soubor 1000 modelů s náhodně vybranými materiálovými parametry, které byly voleny s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti v rozsahu $\pm 20\%$ od referenční hodnoty, přičemž jako referenční hodnota pro každý parametr byla zvolena příslušná hodnota dle tab. 2.

Pro vyhodnocení výsledků analýzy bylo zvoleno zobrazení pomocí korelačních diagramů. Diagramy jsou zobrazeny na obr. 43 a zobrazují závislost formulovaného funkcionálu D na dílčích materiálových parametrech. Vzhledem k tomu, že nelze od sebe



Obr. 41: Výsledky numerického řešení lineárního matematického modelu



Obr. 42: Rychlost ohřevu měřeného vzorku

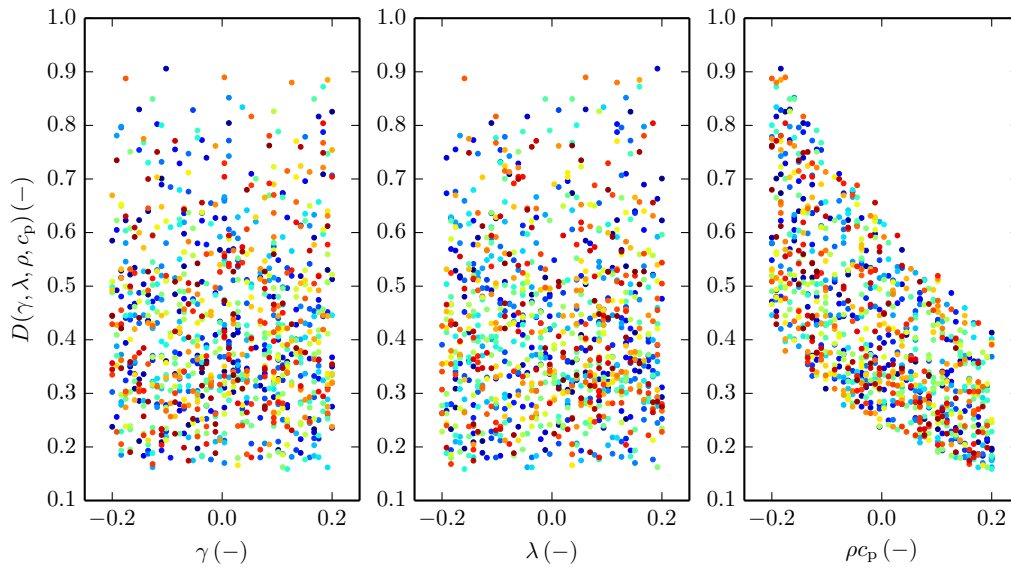
oddělit hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c_p , je příslušný korelační diagram zobrazen pro jejich součin.

Z uvedených korelačních diagramů je jasně patrné, že změna elektrické vodivosti γ a tepelné vodivosti λ nemají výrazný vliv na funkcionál D (rozložení jednotlivých výsledků se se změnou parametru nemění). Naproti tomu, změna součin ρc_p má na funkcionál D vliv mnohem výraznější a výsledek řešení formulovaného modelu na něm tedy silně závisí.

Aby bylo možné od sebe oddělit hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c_p , bylo provedeno jednoduché doplňující měření změny jeho hustoty pro několik rozdílných teplot, které ukázalo, že změna teploty má jen velmi nepatrný vliv na změnu hustoty². Je tedy jasné, že dominantní vliv má pouze měrná tepelná kapacita.

² Při teplotě 20 °C byla změřena hustota vzorku Fieldova kovu $\rho = 7972,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, při teplotě 45 °C pak $\rho = 7991,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Změna hustoty při tomto rozdílu teplot je tedy 0,02%.

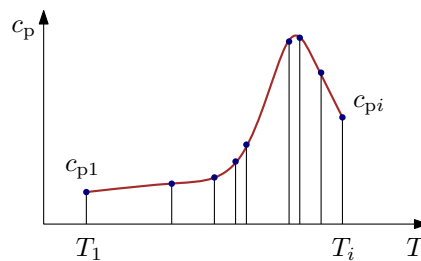
iv.2.6 ŘEŠENÍ INVERZNÍ ÚLOHY



Obr. 43: Zobrazení výsledků citlivostní analýzy materiálových parametrů

IV.2.6 ŘEŠENÍ INVERZNÍ ÚLOHY

Na základě výsledků získaných citlivostní analýzou byla následně řešena inverzní úloha s cílem odhadnout nelineární charakteristiku měrné tepelné kapacity c_p Fieldova kovu, přičemž vliv ostatních materiálových parametrů byl zanedbán. Vzhledem ke značné složitosti inverzní úlohy pro nelineární sdruženou úlohu, byla zvolena metoda řešení pomocí optimalizace tvaru hledané charakteristiky s cílem dosáhnout co nejlepší shodu řešení formulovaného matematického modelu s výsledky měření, a to do časového okamžiku plného roztavení měřeného vzorku.



Obr. 44: Definice optimalizovaných parametrů

Jako optimalizované parametry úlohy byly zvoleny hodnoty, které popisují tvar hledané charakteristiky c_p . Na základě analýzy tepelné kapacity kovu nutné k akumulaci latentního tepla v průběhu fázové změny byla křivka $c_p(T)$ diskretizována nelineárně.

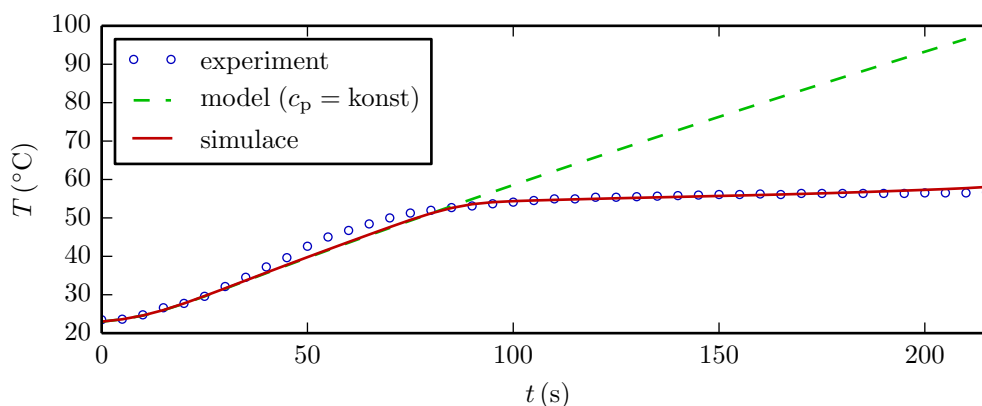
Tedy část charakteristiky, kde je možné očekávat jen mírnou změnu měrné tepelné kapacity na teplotě, je diskretizována menším množstvím bodů než část, kde musí vzhledem k latentnímu teplu docházet k velkým změnám. Celkem bylo tedy zvoleno třináct optimalizovaných parametrů, jejichž definice je patrná z ilustrativního obrázku 44.

Jako funkcionál pro optimalizaci byl využit opět rozdíl mezi výsledkem řešení matematického modelu a provedeného měření formulovaný pomocí vztahu (72). Jedná se tedy o jednokriteriální optimalizaci, problém lze tedy formulovat jako

$$\min(D(\mathbf{p})), \quad \mathbf{p} = [c_{p,1}, c_{p,2}, \dots, c_{p,13}], \quad \mathbf{p} \in P$$

kde \mathbf{p} představuje vektor optimalizovaných parametrů a P jejich prostor.

Pro řešení optimalizační úlohy byla vybrána vlastní implementace speciálního genetického algoritmu, který je vyvíjen v rámci systému OptiLab. Optimalizační algoritmus pracoval s 260 jedinci v každé populaci. Prvních 15 populací přitom využívalo diskrétní prostor přípustných parametrů a dalších 50 populací prostor spojitý, aby bylo možné co nejpřesněji dohledat tvar charakteristiky měrné tepelné kapacity. Tento přechod umožňuje systém OptiLab díky koncepci diskrétních a spojitých optimalizačních parametrů.



Obr. 45: Porovnání časového vývoje teploty vzorku získaný měřením, lineárním výpočtem matematického modelu (materiálové parametry viz. 2) a nelineárního výpočtu s charakteristikou $c_p(T)$ získanou řešením inverzní úlohy

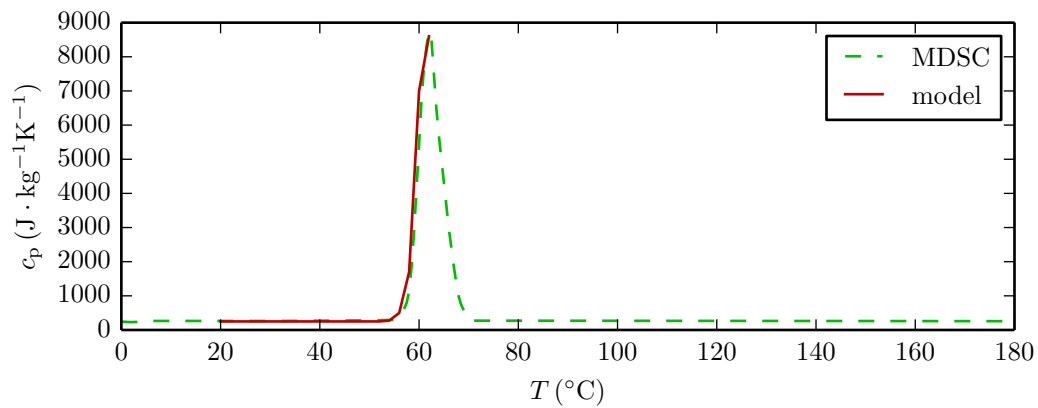
Po ukončení optimalizačního procesu bylo dosaženo minimální hodnoty funkcionálu $D = 26,6$ °C. Porovnání časového vývoje teploty vzorku získaného měřením a řešením matematického modelu s nalezenou charakteristikou $c_p(T)$ je uvedeno na obr. 45. Pro úplnost je uveden také průběh teploty pro lineární model, který využívá materiálové parametry formulované v tab. 2.

Z porovnání je patrná velmi dobrá shoda výsledků. Do teploty fázové změny, která odpovídá 58 °C, jsou výsledky lineárního řešení matematického modelu takřka totožné s řešením nelineárním. V této části charakteristiky také dochází k největší odchylce mezi

vypočtenými a naměřenými výsledky. To je způsobeno především volbou rozložení diskretizačních bodů křivky $c_p(T)$. Předpoklad, že měrná tepelná kapacita se v této části nemění, není evidentně plně korektní a k mírné změně zde tedy musí docházet.

IV.2.7 VERIFIKACE VÝSLEDKŮ A JEJICH DISKUZE

Aby bylo možné verifikovat výsledky řešení inverzní úlohy, bylo v laboratoři strukturální analýzy Katedry technologií a měření ZČU v Plzni provedeno měření tepelné kapacity vzorku Fieldova kovu pomocí diferenční kompenzační kalorimetrie³. Tato technologie termické analýzy materiálů je založena na měření tepelné energie zkoumaného vzorku a zároveň vzorku referenčního, a to při řízené změně teploty. Pro měření byl využit měřicí přístroj TA Instruments DSC Q2000, umožňující využití modifikované metody MDSC (Modulated DSC), která přináší především vyšší přesnost měření oproti standardní metodě DSC. [110] [111]



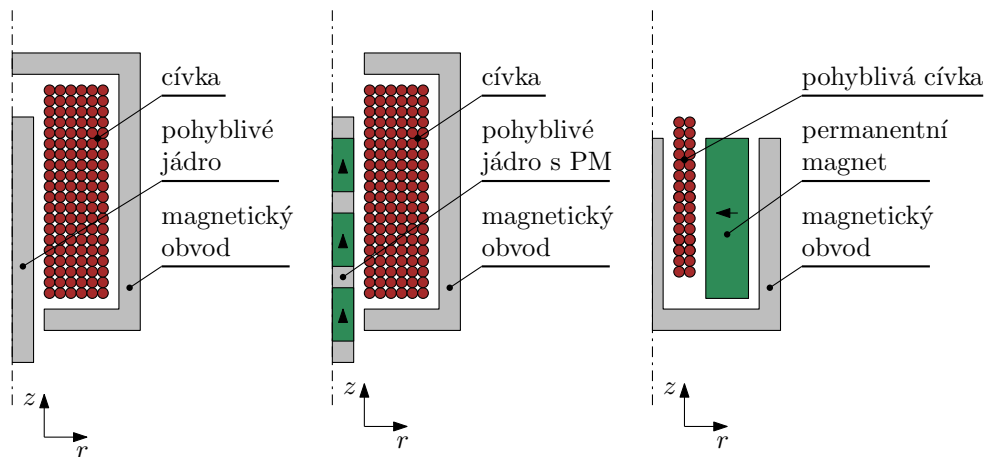
Obr. 46: Porovnání teplotní závislosti měrné tepelné kapacity získané měřením metodou MDSC a stejné závislosti získané řešením inverzní úlohy

Porovnání změřené charakteristiky c_p a charakteristiky získané řešením inverzní úlohy je uvedeno na obr. 46. Z výsledků je patrná velmi dobrá shoda.

³ Differential Scanning Calorimetry (DSC)

TVAROVÁ OPTIMALIZACE POHYBLIVÉHO JÁDRA ELEKTROMAGNETICKÉHO AKTUÁTORU

Lineární elektromagnetické aktuátory jsou nedílnou součástí mnoha komplexních mechatronických systémů, kde jsou používány ve funkci akčních členů. Mezi jejich hlavní výhody patří vysoká dynamika a rychlost reakce, široký rozsah dosahovaného silového působení, jednoduchost, robustnost, snadné řízení a v neposlední řadě také nízké riziko nepříznivého dopadu na životní prostředí. Základní typy lineárních elektromagnetických aktuátorů jsou uvedeny na obr. 47. [112]



Obr. 47: Základní typy lineárních elektromagnetických aktuátorů

Jedním ze základních problémů, které se vyskytují u standardních konceptů elektromagnetických aktuátorů, je jejich silně nelineární statická charakteristika¹. Návrh elektromagnetických aktuátorů je tedy vždy závislý na jejich aplikaci a univerzalita jejich využití je tak značně omezena.

Standardní způsob návrhu tedy vždy začíná definicí požadovaných vlastností elektromagnetického aktuátoru a následným hledáním jednoho z mnoha konkrétních kon-

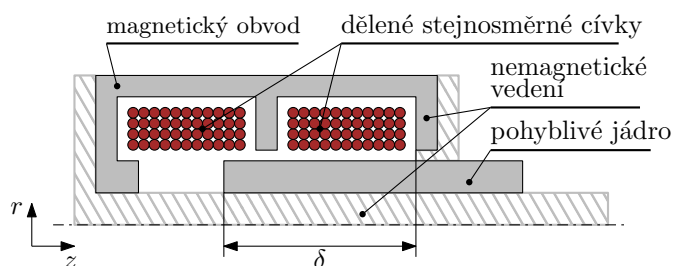
¹ Statická charakteristika představuje závislost silového působení na poloze pohyblivého jádra aktuátoru.

strukčních provedení, které specifikovaným požadavkům odpovídá. Značnou obtíž přitom představuje nelinearita magnetického obvodu aktuátoru, která celý proces návrhu velmi komplikuje a při návrhu založeném na expertním přístupu takřka nedovoluje nalézt optimální řešení. V tomto případě může být velmi užitečným nástrojem právě tvarová nebo topologická optimalizace.

Na základě mnohých návrhů a realizací elektromagnetických aktuátorů pro širokou škálu technických aplikací byl v rámci této práce vytvořen koncept aktuátoru, který může být pro řadu aplikací univerzálním řešením. Cílem zde provedené analýzy a následné optimalizace je ukázat hlavní výhody tohoto konceptu a demonstrovat jeho praktické použití na konkrétních aplikacích.

IV.3.1 FORMULACE TECHNICKÉHO PROBLÉMU

Základní konstrukční provedení nového konceptu aktuátoru bylo vyvinuto s ohledem na možnost dosažení širokého pracovního rozsahu, který představuje možnou délku dráhy pohybu jádra aktuátoru. Tento koncept je patrný z obr. 48.



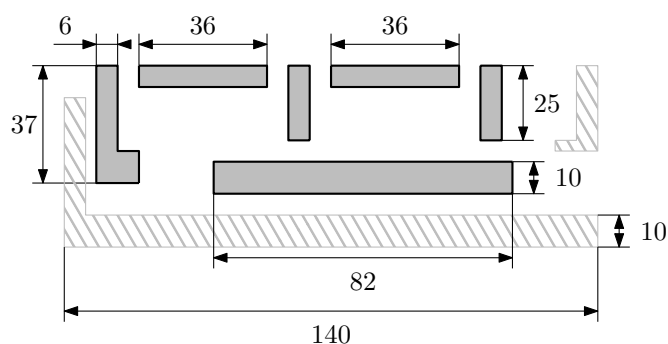
Obr. 48: Základní uspořádání řešeného aktuátoru (aktuální polohu jádra charakterizuje posunutí δ od ústí aktuátoru)

Aktuátor sestává z dělené stejnosměrné cívky, která je umístěna uvnitř magnetického obvodu, v jehož středu se může volně pohybovat duté feromagnetické jádro. Dělení do dvou sekcí a zároveň provedení magnetického obvodu (obvod je složen ze soustavy prstenců) vytváří dvě základní cesty pro magnetický indukční tok.

Jádro aktuátoru se může volně pohybovat v axiálním směru. Vychýlení jádra ve směru radiálním brání nemagnetické vedení umístěné v jeho středu a zároveň v ústí aktuátoru. Konstrukční provedení společně se základními rozměry je patrné z obr. 49.

Cívky aktuátoru jsou zapojeny sériově tak, aby se magnetické indukční toky ve středním prstenci vzájemně odečetly. Každý segment cívky je navinut na silonovou kostru a je tvořen 260 závity měděného lakovaného drátu o průměru 1 mm. Vedení jádra je vyrobeno z mosazných dílů. Magnetický obvod a pohyblivé jádro jsou vyrobeny z běžné konstrukční oceli ČSN 12040.

IV.3.2 MATEMATICKÝ MODEL A JEHO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ



Obr. 49: Konstrukční provedení řešeného aktuátoru společně se základními rozměry (jednotlivé díly aktuátoru jsou zakresleny rozložené, všechny rozměry jsou uvedeny v milimetrech)

IV.3.2 MATEMATICKÝ MODEL A JEHO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

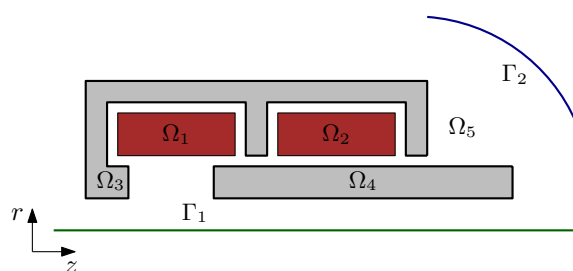
Rozložení magnetického pole lze pro případ řešeného elektromagnetického aktuátoru popsat parciální diferenciální rovnicí, která vychází z první Maxwellovy rovnice (Ampérův zákon celkového proudu) formulovanou pro vektorový magnetický potenciál A . Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(B)} (\operatorname{rot} A - \mathbf{B}_r) \right) - \gamma \mathbf{v} \times \operatorname{rot} A + \gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{ext}}, \quad (73)$$

kde $\mu(B)$ značí permeabilitu nelineárně závislou na velikosti magnetické indukce \mathbf{B} (teplotní závislost relativní permeability lze vzhledem k předpokládané provozní teplotě zanedbat), \mathbf{B}_r remanentní indukci permanentních magnetů, γ elektrickou vodivost, t čas a konečně \mathbf{J}_{ext} externí proudovou hustotu. Vznik vířivých proudů vlivem časové změny magnetického pole a zároveň při nízkých rychlostech také vznik vířivých proudů vlivem pohybu elektricky vodivých těles lze ve většině případů zanedbat.

Definiční oblast modelu magnetického pole, která je definována v osově symetrickém souřadnicovém systému (r, z) , je pro případ řešeného aktuátoru uvedena na obr. 50. Vedení aktuátoru a zároveň kostry cívky jsou vyrobeny z nemagnetických materiálů a není tedy nutné je jednotlivě v modelu respektovat. Definiční oblast je ohraničena osou symetrie $r = 0$ a zároveň kruhovou fiktivní hranicí.

Kompletně sestavený matematický model magnetického pole je pro dílčí oblasti a okrajové podmínky definiční oblasti definován v následujícím tvaru:



Obr. 50: Definiční oblast matematického modelu magnetického pole

$$\Omega_1, \Omega_2 : \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_{\text{ext}}, \quad (74)$$

$$\Omega_3, \Omega_4 : \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu(B)} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{0}, \quad (75)$$

$$\Omega_5 : \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{0}, \quad (76)$$

$$\Gamma_1, \Gamma_2 : \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (77)$$

Silové působení magnetického pole na pohyblivé jádro je možné z rozložení magnetického pole stanovit pomocí Maxwellova tenzorů pnutí σ_M , který vyjadřuje tok hybnosti elektromagnetického pole plochou a může být zapsán ve tvaru

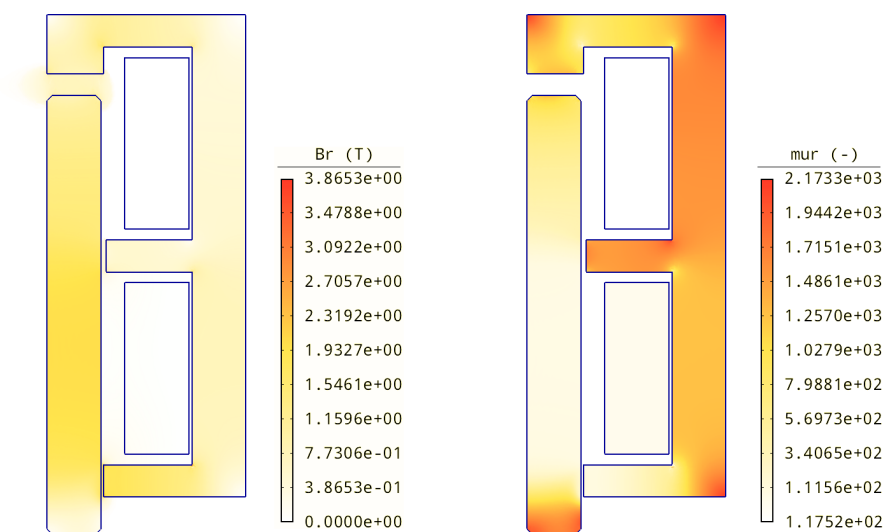
$$\sigma_M = -\frac{1}{2\mu}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{I} + \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}, \quad (78)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice a znak \otimes představuje dyadický součin. Síla, která působí na těleso ohraničené hranicí S je pak dána vztahem

$$\mathbf{F}_T = \int_S \sigma_M dS. \quad (79)$$

IV.3.3 ZÁKLADNÍ ANALÝZA NAVRŽENÉHO KONCEPTU

Model magnetického pole byl pro základní analýzu navrženého konceptu řešen pro zatížení budícím proudem 3, 6 a 8 A. Analýza byla provedena pro plný rozsah pohybu jádra uvnitř magnetického obvodu, tedy 75 mm. Cílem analýzy je stanovit charakteristiky řešeného aktuátoru a poukázat na jeho základní funkčnost. Na obr. 51 jsou zobrazeny výsledky výpočtu magnetického pole pro jednu konkrétní pozici pohyblivého jádra. Z uvedeného rozložení magnetické indukce \mathbf{B} a relativní permeability μ_r je patrná velmi silná nelinearita $\mathbf{B}(\mu_r)$, která se projevuje především v oblasti přesyceného jádra.



Obr. 51: Výsledky numerického řešení magnetického pole (z levé strany: magnetická indukce B , relativní permeabilita μ_r)

Na základě numerického řešení formulovaného matematického modelu byla vypočtena statická charakteristika řešeného aktuátoru a to s využitím metody Eggshell. Vzhledem k netradičnímu provedení aktuátoru byl také sestaven prototyp, který byl následně experimentálně ověřen a to především s ohledem na ověření případných omezení funkčnosti vzhledem ke vznikajícímu tření dutého jádra o nemagnetické vedení. Výsledky výpočtů a jejich porovnání s výsledky měření síly působící na jádro aktuátoru jsou znázorněny na obr. 52. Z výsledků je patrná velmi dobrá shoda.

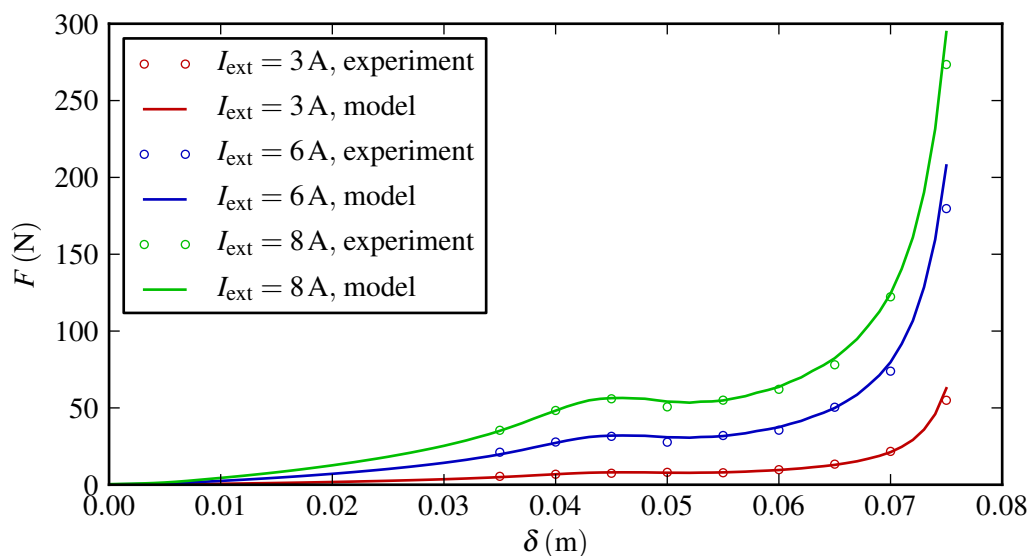
IV.3.4 ANALÝZA CITLIVOSTI GEOMETRIE NAVRŽENÉHO KONCEPTU

Pro základní návrh vyvíjené aktuátoru byla provedena analýza citlivosti vybraných geometrických rozměrů, mezi které byla zařazena vzduchová mezera mezi pohyblivým jádrem g a středním prstencem magnetického obvodu, vzduchová mezera mezi jádrem a prstencem vytvářejícím ústí aktuátoru m a také délka trnu l , který je umístěn ve středu aktuátoru proti pohyblivému jádru. Vybrané parametry jsou patrné z obr. 53.

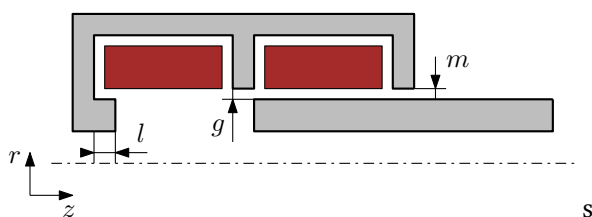
Analýza byla provedena pro náhodně zvolené parametry v rozsahu změny $\pm 40\%$ od základního zvoleného rozměru ($g_0 = 1$ mm, $m_0 = 0.5$ mm, $t_0 = 5$ mm). Celkově bylo provedeno 500 výpočtů.

Aby bylo možné jednotlivé varianty mezi sebou vzájemně porovnávat, byly zavedeny dva funkcionály, které umožňují posoudit tvar statické charakteristiky. Jedná se o funkcionál vyjadřující průměrnou hodnotu síly

$$M = \frac{1}{n} \sum_i^n F_i, \quad (80)$$



Obr. 52: Statická charakteristika elektromagnetického aktuátoru získaná numerickým řešením matematického modelu a zároveň měření na sestaveném prototypu



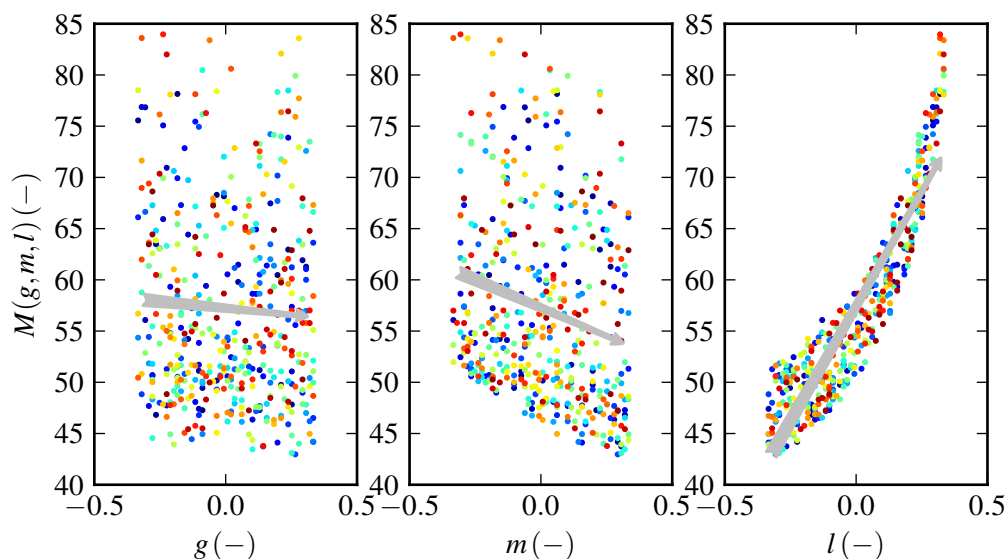
Obr. 53: Definované parametry pro provedení analýzy citlivosti

a dále funkcionál popisující zvlnění statické charakteristiky, které lze určit vztahem

$$R = \sqrt{\sum_i^n (F_i - M)^2}. \quad (81)$$

Vytyčenou snahou je docílit v pracovním rozsahu řešeného aktuátoru maximální hodnoty funkcionálu M a zároveň minimální hodnoty funkcionálu R , tedy navrhnout aktuátor s lineární statickou charakteristikou a maximálním silovým působením, která představuje jeden z nejběžnějších požadavků pro aplikace elektromagnetických aktuátorů. Výsledky analýzy pro funkcionál M jsou uvedeny na obr. 54 a pro funkcionál R na obr. 55.

Z pohledu obou funkcionálů má velmi výrazný vliv délka trnu magnetického obvodu (parametr l). Porovnáním výsledků je patrné, že při prodloužení trnu dochází sice ke zvyšování hodnoty funkcionálu M , ale zároveň také ke zvyšování hodnoty funkcionálu

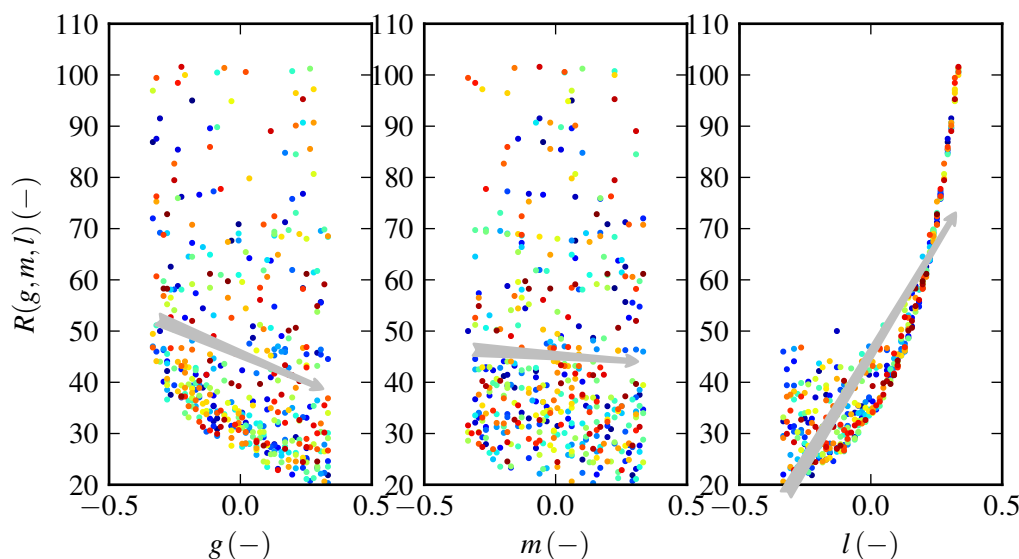

 Obr. 54: Korelační diagramy pro funkcionál M

R . Z toho vyplývá, že změnou tohoto parametru se značně zvyšuje síla působící na pohyblivé jádro (zmenšuje se vzduchová mezera ve směru pohybu jádra), naproti tomu to má však velmi negativní dopad na tvar statické charakteristiky, která se tak stává velmi strmou ve své poslední části.

Z výsledků je dále patrné, že vzduchová mezera mezi jádrem a prstencem magnetického obvodu v ústí aktuátoru (parametr m) by měla být co nejmenší, protože zvětšení mezery má za následek výrazné snížení hodnoty funkcionálu M společně s jen velmi malým snížením funkcionálu R .

Analýza posledního parametru, který udává šířku vzduchové mezery mezi jádrem a středním prstencem magnetického obvodu, ukazuje, že je možné jeho změnou značně snížit hodnotu funkcionálu R za současného mírného snížení M .

Z diskuze výsledků analýzy vyplývá, že změna vzduchové mezery g a m má přímý dopad na tvar statické charakteristiky a je tedy možné různě tvarovaným jádrem dosáhnout různého průběhu silového působení. Tento fakt představuje jednu ze základních a velmi důležitých vlastností navrženého konceptu. Změna vzduchové mezery totiž může být také způsobena měnícím se tvarem jádra, které se pod středním sloupkem magnetického obvodu posouvá. Při zachování konstrukce magnetického obvodu aktuátoru lze tedy výměnou pohyblivého jádra výrazně změnit jeho statickou charakteristiku a tím veškeré provozní parametry.


 Obr. 55: Korelační diagramy pro funkcionál R

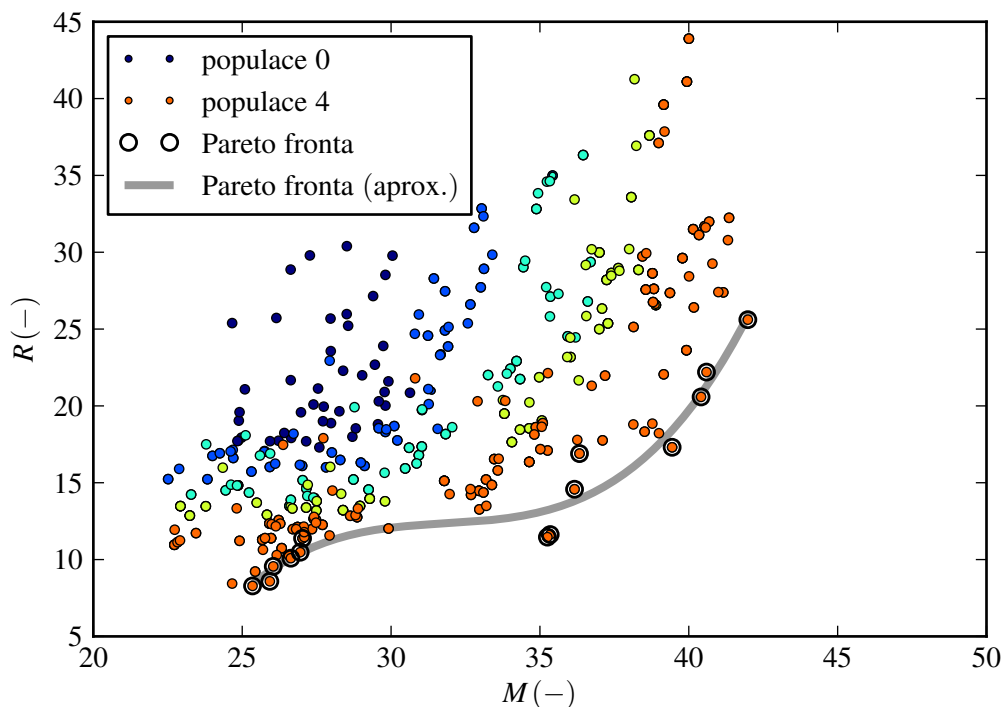
IV.3.5 PROCES TVAROVÉ OPTIMALIZACE

Základní myšlenkou provedené optimalizace je tedy využití tvarovaného jádra tak, aby vzhledem k jeho posuvu docházelo ke změně vzduchové mezery mezi jeho hranou a magnetickým obvodem.

Optimalizace byla provedena s ohledem na dosažení konstantní statické charakteristiky s co nejvyšší průměrnou hodnotou síly. Jedná se tedy o maximalizaci funkcionálu M a minimalizaci funkcionálu R , které jsou definovány podle (80) a (81). Vnější hrana dutého pohyblivého jádra byla rozdělena pomocí řídicích bodů, jejichž posunutí vůči poloze reprezentující počáteční tvar jádra představuje vektor optimalizovaných parametrů. Takto definovaná úloha vede tedy na multikriteriální tvarovou optimalizaci.

Optimalizace byla vzhledem ke konvergenci použité metody rozdělena do dvou navazujících procesů. V prvním z nich byl prostor možných hodnot popisujících posunutí řídicích bodů omezen na množinu diskrétních hodnot a byla provedena rychlá optimalizace v pěti populacích. Každá populace obsahuje 110 variant, které respektují kompletní výpočet statické charakteristiky řešeného aktuátoru, tedy opakovaný výpočet nelineárního magnetického pole a vyhodnocení silového působení.

Průběh procesu optimalizace je pro prvních pět populací zobrazen na obr. 56. Je patrné velmi nízké obsazení množiny možných řešení pro kombinaci optimalizovaných parametrů a tím také nízké obsazení Pareto fronty. To je způsobené již zmíněným omezením parametrů na diskrétní prostor, který umožňuje zvýšit rychlost konvergence ke hledanému řešení.



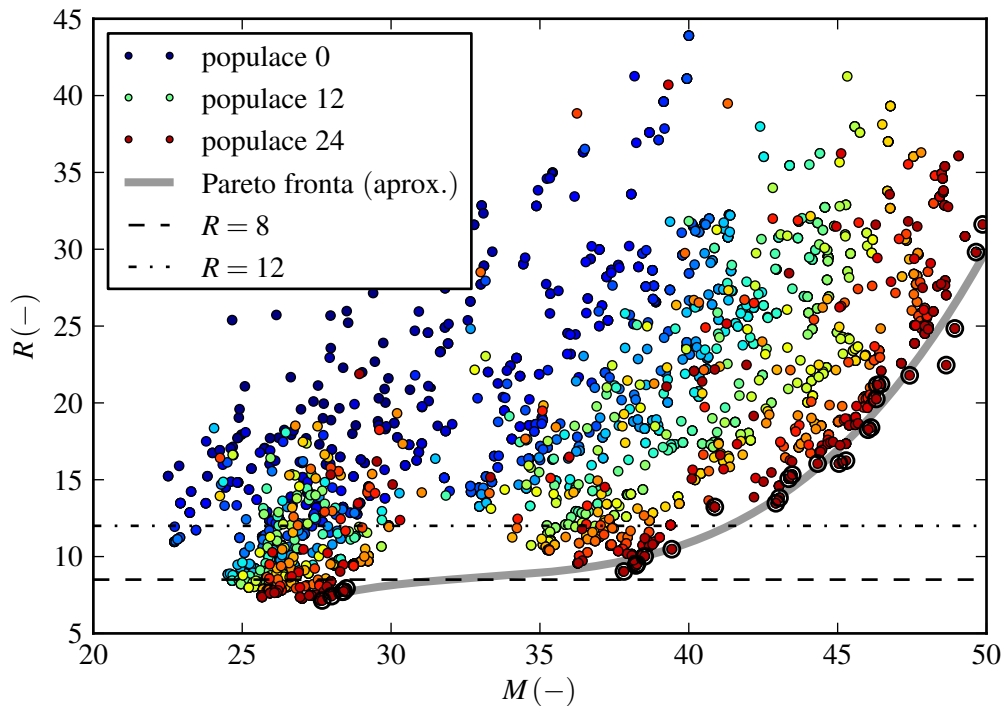
Obr. 56: Výsledky optimalizace pro 5 populací (diskrétní prostor volby optimalizovaných parametrů)

V následujícím procesu bylo na předchozí výsledky navázáno, tentokrát však se spojitým prostorem hodnot optimalizovaných parametrů. Konvergence zde byla sledována pomocí indikace posunu Pareto fronty směrem určeným minimalizací R a maximalizací M a také jejím doplněním o nové varianty. Optimalizační proces byl zastaven po 25 populacích.

Na obr. 57 je již zobrazen celý proces optimalizace. Množina provedených řešení je pro populace 6 – 24 o poznání více obsazená a je zřejmé také výrazné posunutí Pareto fronty a její obsazení nalezenými variantami.

IV.3.6 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

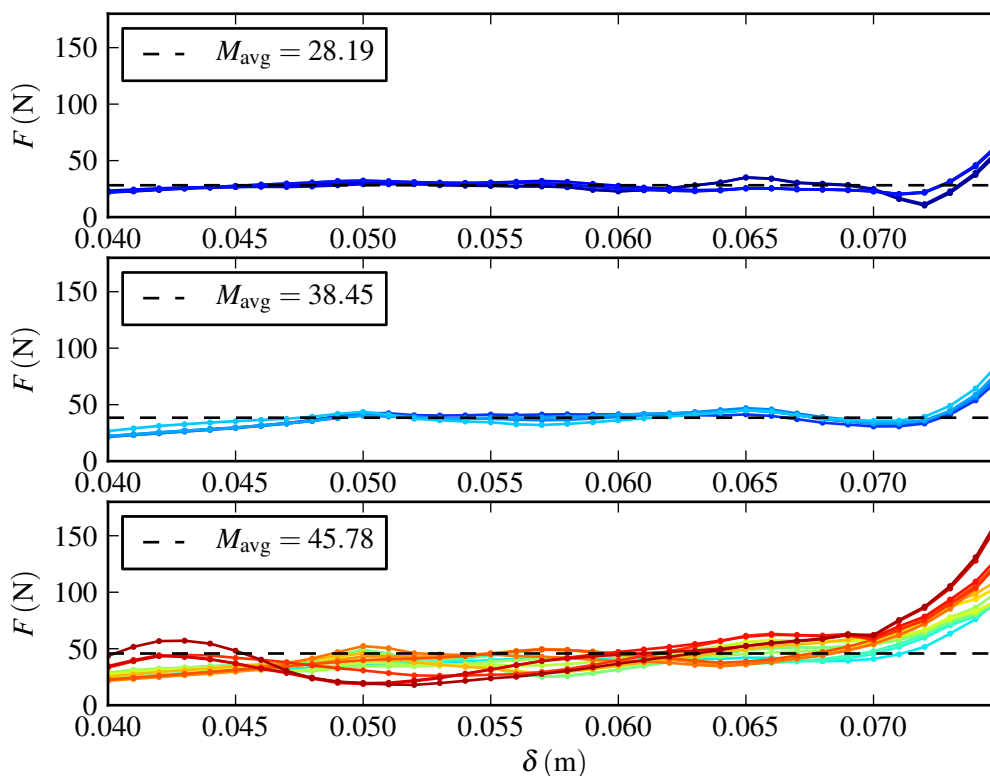
Výsledky provedené optimalizace jsou uvedeny na obr. 58, kde jsou vykresleny statické charakteristiky pro všechny nalezené varianty nacházející se na Pareto frontě poslední populace. Jednotlivé průběhy jsou rozděleny do tří kategorií podle hodnoty funkcionálu R . V prvním grafu jsou tedy zobrazeny varianty splňující podmínku ($R < 8$) a v následujících grafech pak ($8 < R < 12$) a ($R > 12$) (rozdělení Pareto fronty je patrné také z obr. 57).



Obr. 57: Výsledky optimalizace pro 25 populací

Z uvedených průběhů a zároveň z jejich porovnání s původní statickou charakteristikou, která je uvedena například na obr. 52, je patrné, že optimalizace vedla ke značnému snížení zvlnění síly působící na pohyblivé jádro. Mezi hlavní výhody nového konceptu lze tedy zařadit:

- Široký rozsah pohybu jádra dosažený dělením magnetického obvodu a stejnosměrných cívek.
- Možnost změny statické charakteristiky aktuátoru pouze záměnou tvarovaného pohyblivého jádra, a to bez nutnosti jakékoli změny magnetického obvodu.
- Snadné řízení velikosti silového působení řízením proudu dělených stejnosměrných cívek.
- Zlepšení dynamiky pohybu jádra použitím dutého jádra, které značně snižuje jeho hmotnost.



Obr. 58: Zobrazení statické charakteristiky pro varianty z vybrané Pareto fronty (řazení je podle funkcionálu R , rozdělení do oblastí $R < 8$, $R \in (8, 12)$, $R > 12$)

IV.3.7 PRAKTICKÉ VYUŽITÍ ZÍSKANÝCH POZNATKŮ

Velmi perspektivní oblastí využití elektromagnetických aktuátorů jsou ventily pro řízení toku tekutin, které je možné využít v mnoha aplikacích. Například dávkovací ventily, které vyžadují precizní řízení polohy jádra a jeho rychlosti, bezpečnostní ventily pracující v bistabilním režimu nebo jednoduché ventily s řízením průtoku kapaliny [113]. Moderním využitím jsou také ventily pro vstřikování paliva v motorech automobilů. [114] [115]

Jedním z hlavních problémů, které se vyskytují u existujících konceptů elektromagnetických aktuátorů pracujících ve funkci ventilu je jejich konstrukční složitost. Ve většině systémů jsou využívány pružiny pro zajištění bistabilního režimu ventilu, těsnění v místech, kde prochází táhlo aktuátoru mimo potrubí, dále také soustavy komor pro zajištění požadovaných tlaků a mnohé další konstrukční prvky. Všechny tyto prvky přitom velmi snižují spolehlivost ventilu a komplikují jeho řízení. V mnoha odvětvích, mezi které patří například potravinářský a chemický průmysl, je zároveň kladen značný důraz na mož-

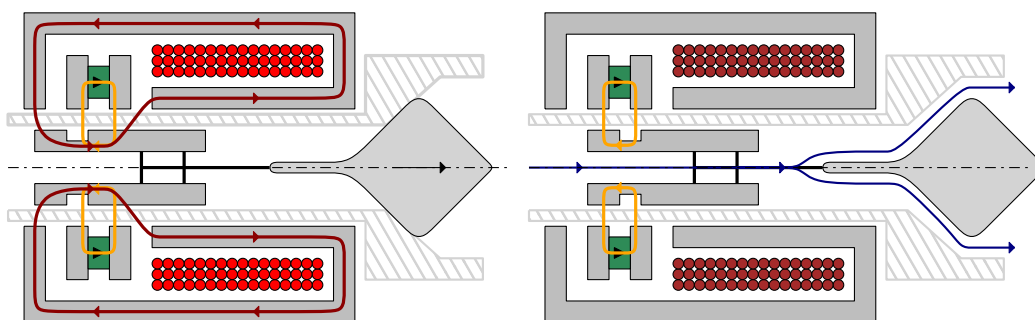
nosti čištění, které jsou však také snižovány vlivem konstrukční složitosti celého systému ventilu. [116] [117] [118] [61]

Všechny zmíněné nedostatky elektromagnetických ventilů lze však odstranit, a to při zachování hlavních předností elektromagnetických aktuátorů. Základní myšlenkou, která vede k přímému využití navrženého konceptu a provedené tvarové optimalizace jádra aktuátoru je eliminace konstrukční složitosti existujících řešení využitím dutého tvarovaného jádra aktuátoru, umístěného přímo v místě svého působení. Řízená tekutina tedy protéká skrze ventil, který je tak nasazen přímo na přerušeném potrubí. Nemagnetické vedení, které bylo u navrženého konceptu aktuátoru může být přitom vytvořeno na jeho povrchu, jak ukazují následně prezentované návrhy ventilů.

S ohledem na tento koncept a s ohledem na výsledky provedené optimalizace byly tedy dále rozpracovány dva odlišné návrhy, které se liší svým využitím. První ventil je navržen jako monostabilní a druhý jako bistabilní.

Koncept monostabilního ventilu

Monostabilní ventil pracuje standardně ve dvou režimech (zavřeno/otevřeno), přičemž režim vypnuto, který je zároveň stabilní polohou jádra, je zajištěn pomocí permanentního magnetu umístěného v sekundárním magnetickém obvodu jenž se nachází v hlavním magnetickém obvodu buzeného cívkou. Dostatečného silového působení vytvořeného permanentním magnetem je docíleno speciálně tvarovaným pohyblivým jádrem aktuátoru, kdy je velmi důležité přesně formulovat část jádra, která se pohybuje pod sekundárním magnetickým obvodem. Základní koncept a princip funkce navrženého ventilu je uveden na obr. iv.3.7.



Obr. 59: Základní konstrukce, koncept a princip funkce monostabilního ventilu (z levé strany: otevírání, zavírání)

Při vybuzení cívky dojde k vytvoření magnetického toku, který se uzavírá přes hlavní magnetický obvod a jádro, kde dochází k vyrušení magnetického toku vytvořeného permanentním magnetem (demagnetizace) a jádro je současně vybaveno do režimu otevřeno. Princip vybavení aktuátoru je patrný z obr. iv.3.7. Při vypnutí cívky se pohyblivé jádro vlivem silového působení permanentního magnetu opět vrátí do stabilní polohy.

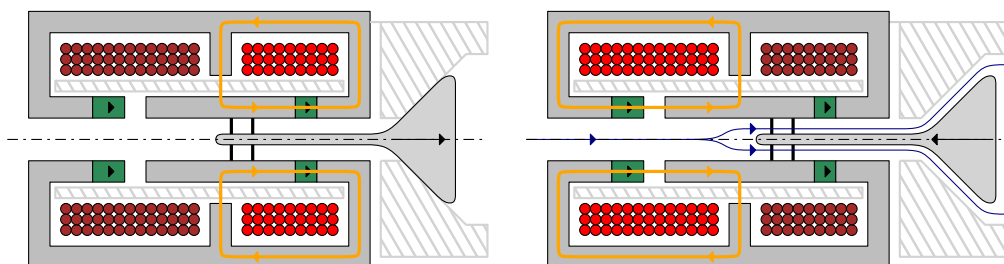
Mezi hlavní výhody navrženého konceptu tedy patří:

- Ventil neobsahuje žádné nadbytečné nadbytečné konstrukční prvky.
- Monostabilní režim zajištění permanentními magnety (odstranění pružin).
- Jednoduchý proces otevírání a zavírání ventilu plně kontrolovaný pouze řízením stejnosměrného proudu cívkou.
- Permanentní magnet zajišťující stabilní režim není demagnetován a nehrozí tak riziko jeho poškození.

Praktické využití navrženého monostabilního ventilu nalezne své uplatnění především v aplikacích, kde je požadovaná bezpečnost provozu a tedy uzavření ventilu při ztrátě napájení.

Koncept bistabilního ventilu

Bistabilní ventil pracuje opět ve dvou režimech (zapnuto/vypnuto), kdy duté pohyblivé jádro je v obou stabilních polohách zajištěno silovým působením permanentních magnetů, které jsou tentokrát umístěny na hlavním magnetickém obvodu. Základní koncept a princip funkce této varianty ventilu je uveden na obr. iv.3.7.



Obr. 60: Základní konstrukce, koncept a princip funkce bistabilního ventilu (z levé strany: otevírání, zavírání)

Tento návrh ventilu přímo vychází z navrženého konceptu a dále jej rozvíjí. Magnetický obvod aktuátoru je tedy dělen na dvě části, ve kterých jsou umístěny samostatné cívky oddělené pomocí středního sloupku magnetického obvodu. Přepnutí magnetu z jednoho režimu do druhého se provede přivedením krátkého pulzu na jednu z cívek. Vzniklý magnetický tok se uzavírá jen jednou částí magnetického obvodu a při jeho správné polaritě posiluje magnetický tok permanentního magnetu, čímž dojde ke značnému zvýšení silového působení na jádro a tím také k přesunutí jádra do požadované polohy.

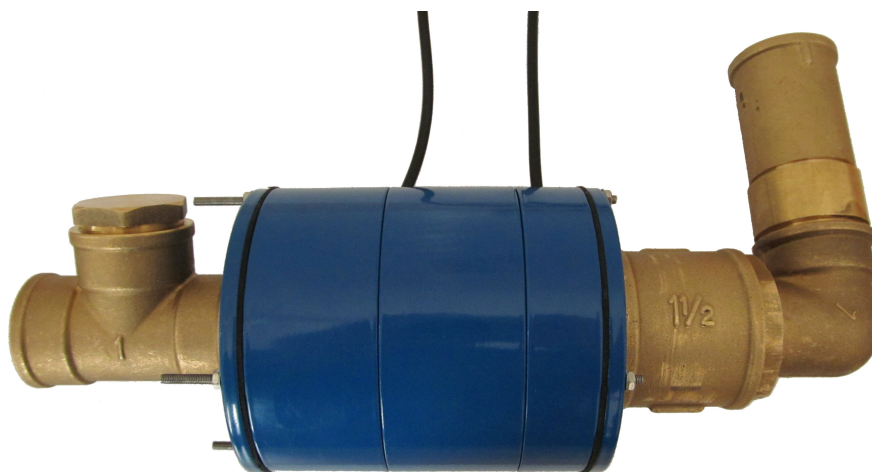
Hlavní přednosti tohoto konceptu lze tedy shrnout takto:

- Ventil neobsahuje žádné nadbytečné konstrukční prvky.

iv.3.7 PRAKTICKÉ VYUŽITÍ ZÍSKANÝCH POZNATKŮ

- Stabilní polohy jádra jsou zajištěny permanentními magnety (ventil je energeticky nenáročný a není náchylný k rázovým změnám tlaku v potrubí).
- Jednoduchý proces otevírání a zavírání ventilu plně kontrolovaný pouze řízením stejnosměrného proudu dvou cívek.
- Permanentní magnety zajišťující stabilní režim nejsou demagnetovány, ale magnetický vyvolaný cívkami pouze posiluje tok magnetů. Snižuje se tím riziko jejich poškození.

Navržený bistabilní elektromagnetický ventil je určen pro aplikace, kde je důležitá nízká spotřeba a není požadované jeho vypnutí v případě ztráty napájení. Jeho nespornou výhodou je také jednoduchost jeho řízení. Tato varianta elektromagnetického ventilu byla již realizována a otestována, prototyp zařízení je uveden na obr. 61.



Obr. 61: Prototyp navrženého elektromagnetického ventilu

Část V

ZHODNOCENÍ A ZÁVĚR

ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ A SMĚR DALŠÍHO ROZVOJE PRÁCE

Hlavním tématem mé práce bylo spojení numerického řešení matematických modelů a sdružených úloh, jejich analýza a optimalizace. Tato oblast matematického modelování je velmi aktuální a její rozvoj přináší do oblasti vědy a techniky důležité postupy, které mají značný dopad na způsoby návrhu a analýzy technologií, zařízení a jejich systémů.

V.1.1 ZHODNOCENÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ

Rozvíjející se numerické metody, a obzvláště pak pokročilé algoritmy jako je prostorová a časová adaptivita, umožňují výrazně snížit výpočetní náročnost řešených úloh, a to často také se zvýšením přesnosti jejich řešení [17]. Pro praktické využití těchto metod v technické praxi je však nezbytná jejich efektivní implementace do komplexních výpočetních systémů. To byla také prvotní motivace ke vzniku aplikace Agros2D, na jejímž vývoji se podílím již do začátku projektu v roce 2009. Svou koncepcí nabízí tato aplikace velmi silný nástroj, který kromě moderních numerických metod umožňuje využít velmi propracovanou výpočetní infrastrukturu [18] a tím otevírá možnosti komplexnějšího popisu modelovaných systémů a zároveň také pokročilemu přístupu jejich využití.

Na základě zkušeností, které jsem získal při řešení konkrétních technických problémů, patří analýza citlivosti a neurčitosti počítačového modelu k velmi důležitým technikám, které umožňují důslednou analýzu modelu a vedou tak k pochopení základních zákonitostí modelovaného systému. Využití optimalizačních technik pak s sebou přináší nový způsob, jak hledat nové a neotřelé koncepce zařízení. Jejich využití však vždy vyžaduje velmi dobré pochopení použitého matematického modelu, použité metody jeho řešení a použité metody optimalizace. Proto je velmi důležité tuto oblast dále rozvíjet jak z pohledu vývoje stabilních a efektivních metod a algoritmů, tak z pohledu metodiky jejich využití v konkrétní oblasti.

Kromě popisu numerických metod řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic a metod analýzy citlivosti a optimalizace, které jsou uvedeny v kapitolách ii.2, iii.1, iii.2 jsou nedílnou součástí této práce ilustrativní příklady, které jsou podrobněji diskutovány v kapitole iv. Tyto přitom vycházejí z konkrétních projektů řešených v rámci mého doktorského studia na Katedře teoretické elektrotechniky FEL ZČU v Plzni.

Tvarová optimalizace elektrod triboelektrického separátoru, popisovaná v kapitole iv.1, byla řešena s cílem stanovení provozních parametrů separátoru průmyslového plas-

tového odpadu, jehož model popisuje sdružená úloha elektrostatického pole a pohybových rovnic pro elektricky nabitých kusů odpadu. Úloha byla řešena jako multikriteriální a byly použity dvě optimalizační metody, genetické algoritmy v podobě NSGA-II a simulované žihání. Na základě výsledků počítačových simulací [106] a následně také popisované optimalizace [93] [94] byl návrh realizován v podobě prototypu. Četné experimenty s průmyslovým plastovým odpadem, které byly na tomto prototypu provedeny, jasně ukazují výhody a nevýhody této technologie v praxi a vymezují oblast jejího využití v odpadovém hospodářství [105] [104] [119]. S ohledem na dosažené výsledky lze tuto technologii považovat v dané oblasti za velmi perspektivní.

Použití optimalizačních technik pro řešení inverzních úloh je ilustrováno v kapitole iv.2, a to pro případ odhadu teplotní závislosti měrné tepelné kapacity Fieldova kovu [107]. Na základě analýzy citlivosti sdružené úlohy harmonického magnetického a nestacionárního teplotního pole byly vyloučeny nepodstatné parametry, které výrazně neovlivňují výsledky řešení a následná inverzní úloha byla řešena jako jednokriteriální optimalizační úloha s cílem nalezení nelineární charakteristiky měrné tepelné kapacity Fieldova kovu, a to pomocí vlastní implementace genetických algoritmů. Dosažené výsledky ukazují, že uvedená metodika může být velmi perspektivní pro oblast analýzy zařízení, u kterých nejsou přesně známé materiálové parametry nebo jejich vnitřní konstrukce. Pokud je tedy nutná analýza funkce nebo příčiny vzniku defektu zařízení, je možné vytvořit odpovídající model jen na základě měření veličin vnějšího projevu zařízení. Další oblastí praktického využití této metodiky je také rekonstrukce tvaru defektu při nedestruktivní defektoskopii pomocí vířivých proudů [120] nebo například speciální metody měření [121].

Velmi perspektivní oblastí přímého využití optimalizačních technik je také návrh magnetických obvodů elektromechanických aktuátorů, a to především pro náročnost samotného návrhu vzhledem k obecně nelineární charakteristice relativní permeability feromagnetických materiálů. Tato oblast je diskutována v kapitole iv.3. Hlavní část práce se zabývá vývojem lineárního elektromagnetického aktuátoru, který by bylo možné využít pro širokou škálu běžných aplikací, a to jen s minimálními konstrukčními úpravami [96]. Při návrhu byla použita analýza citlivosti počítačového modelu prototypu aktuátoru s cílem identifikovat důležité parametry jeho geometrie. Na základě této analýzy byla následně použita tvarová optimalizace pohyblivého jádra s cílem dosažení maximálního silového působení při jeho minimálních změnách na vymezeném pracovním rozsahu. Úloha byla tedy řešena jako multikriteriální optimalizace s využitím genetických algoritmů. Velmi dobré výsledky ukazují sílu tohoto vyvinutého konceptu aktuátoru a možnosti jeho praktického využití, které jsou demonstrovány na speciálních aplikacích, monostabilního a bistabilního elektromagnetického ventilu [122] [123].

Za hlavní přínos své práce považuji možnost dalšího využití dosažených výsledků. Numerické metody a algoritmy implementované v knihovně Hermes a aplikaci Agros2D, a stejně tak metody pro analýzu a optimalizaci implementované do systému OptiLab jsou navrženy tak, aby nebyly závislé na povaze řešeného problému. Je tak umožněno jejich

V.1.2 DALŠÍ SMĚRY POKRAČOVÁNÍ PRÁCE

přímé využití pro řešení konkrétních technických problémů. Dalším přínosem práce je také vytvoření nové metodiky využití těchto metod na Fakultě elektrotechnické ZČU v Plzni.

V.1.2 DALŠÍ SMĚRY POKRAČOVÁNÍ PRÁCE

Dosavadní práce položila základy novému systému OptiLab, jehož vývoj bude samozřejmě dále pokračovat. Jedním z hlavních směrů tohoto vývoje bude jeho bližší propojení s aplikací Agros2D, a to především za účelem vývoje metod a algoritmů pro topologickou optimalizaci a redukci řádu modelu. Současná koncepce je v tomto ohledu nedostačující, a to především s ohledem na nutnost přístupu systému OptiLab do vnitřních struktur Agros2D, tedy algoritmů pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Bližším provázáním bude možné provádět například topologickou optimalizaci na stejné diskretizační síti, která slouží pro řešení samotného matematického modelu, nebo právě analýzu a optimalizaci pomocí metod redukce řádu.

Další směr práce bude zaměřen také na vývoj metod pro analýzu nejistoty, odolnosti a spolehlivosti řešeného modelu a jejich následná implementace v podobě efektivních algoritmů a jejich začlenění do procesu optimalizace. Velmi důležitým směrem bude také rozvoj metodiky využití moderních metod analýzy a optimalizace v oblasti elektromagnetismu. Velké množství těchto metod je vyvíjeno pro konkrétní oblast vědy a techniky a proto je nutné věnovat se jejich multidisciplinárnímu pojetí.

LITERATURA

- [1] Miroslav Bárta, Jörg Büchner, and Marian Karlivký. Multi-scale mhd approach to the current sheet filamentation in solar coronal reconnection. *Advances in Space Research*, 45(1):10–17, 2010.
- [2] Martin Oliver Steinhauser. *Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids*. Springer, 2008.
- [3] Ulrich Rüde. Coupled physical models for exa-scale computing. In *Proceedings of 9th International Conference on Computational Physics*, 2015.
- [4] Klaus Iglberger and Ulrich Rüde. Large-scale rigid body simulations. *Multibody System Dynamics*, 25(1):81–95, 2011.
- [5] Stefan Donath, Christian Feichtinger, Thomas Pohl, Jan Götz, and Ulrich Rüde. A parallel free surface lattice boltzmann method for large-scale applications. *Parallel Computational Fluid Dynamics: Recent Advances and Future Directions*, page 318, 2010.
- [6] Dominik Bartuschat and Ulrich Rüde. Parallel multiphysics simulations of charged particles in microfluidic flows. *Journal of Computational Science*, 2014.
- [7] Alessandro Candeo, Christophe Ducassy, Philippe Bocher, and Fabrizio Dughiero. Multiphysics modeling of induction hardening of ring gears for the aerospace industry. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(5):918–921, 2011.
- [8] Jasmin Smajic, Walter Halaus, Jadran Kostovic, and Uwe Riechert. 3d full-maxwell simulations of very fast transients in gis. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(5):1514–1517, 2011.
- [9] Marjan Popov, Lou Van der Sluis, Gerardus C Paap, and Hans De Herdt. Computation of very fast transient overvoltages in transformer windings. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 18(4):1268–1274, 2003.
- [10] Samuel Stanton, Clark McGehee, and Brian Mann. Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting: Investigation of a bistable piezoelectric inertial generator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(10):640–653, 2010.
- [11] Yoshiaki Kano, Takashi Kosaka, and Nobuyuki Matsui. A simple nonlinear magnetic analysis for axial-flux permanent-magnet machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(6):2124–2133, 2010.

- [12] Ekaterina Poutrina, Da Huang, and David R Smith. Analysis of nonlinear electromagnetic metamaterials. *New Journal of Physics*, 12(9):093010, 2010.
- [13] Dimitrios L Sounas, Toshiro Kodera, and Christophe Caloz. Electromagnetic modeling of a magnetless nonreciprocal gyrotropic metasurface. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 61(1):221–231, 2013.
- [14] M Kuczmann and A Iványi. A new neural-network-based scalar hysteresis model. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 38(2):857–860, 2002.
- [15] Charalampos Patsios, Evangelos Tsampouris, Minos Beniakar, Panagiotis Rovolis, and Antonios G Kladas. Dynamic finite element hysteresis model for iron loss calculation in non-oriented grain iron laminations under pwm excitation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(5):1130–1133, 2011.
- [16] Yuguo Li and Shikun Dai. Finite element modelling of marine controlled-source electromagnetic responses in two-dimensional dipping anisotropic conductivity structures. *Geophysical Journal International*, 185(2):622–636, 2011.
- [17] Pavel Karban, František Mach, and Ivo Doležel. Latest trends in solving multiphysics problems. *International Compumag Society Newsletter*, 21(3):3–14, 2014.
- [18] Pavel Karban, František Mach, Pavel Kůs, David Pánek, and Ivo Doležel. Numerical solution of coupled problems using code agros2d. *Computing*, 95(1):381–408, 2013.
- [19] Luis Garcia Castillo, David Pardo Zubiaur, and Leszek F Demkowicz. Fully automatic hp adaptivity for electromagnetics, application to the analysis of h-plane and e-plane rectangular waveguide discontinuities. In *IEEE/MTT-S International Microwave Symposium*, pages 285–288, 2007.
- [20] Dominik Schillinger and Ernst Rank. An unfitted hp-adaptive finite element method based on hierarchical b-splines for interface problems of complex geometry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47):3358–3380, 2011.
- [21] Mark Ainsworth and Bill Senior. An adaptive refinement strategy for hp-finite element computations. *Applied Numerical Mathematics*, 26(1):165–178, 1998.
- [22] Wolfgang Bangerth, Michael Geiger, and Rolf Rannacher. Adaptive galerkin finite element methods for the wave equation. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, 10(1):3–48, 2010.
- [23] Pavel Karban, František Mach, and Ivo Doležel. Advanced adaptive algorithms in 2d finite element method of higher order of accuracy. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(3):834–849, 2013.

- [24] Pavel Solin, David Andrs, Jakub Cervený, and Miroslav Simko. Pde-independent adaptive hp-fem based on hierarchic extension of finite element spaces. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(12):3086–3094, 2010.
- [25] Pavel Solín, J Cervený, Lenka Dubcova, and David Andrs. Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp-fem. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(7):2350–2357, 2010.
- [26] Ruo Li. On multi-mesh h-adaptive methods. *Journal of Scientific Computing*, 24(3):321–341, 2005.
- [27] Michael Schmich and Boris Vexler. Adaptivity with dynamic meshes for space-time finite element discretizations of parabolic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1):369–393, 2008.
- [28] GW Yang, GN Zheng, and XY Nie. Fast dynamic mesh method and its application on aeroelasticity. *Procedia Engineering*, 67:438–446, 2013.
- [29] Fernando de Goes, Siome Goldenstein, and Luiz Velho. A simple and flexible framework to adapt dynamic meshes. *Computers & Graphics*, 32(2):141–148, 2008.
- [30] Amaury Johnen, J-F Remacle, and Christophe Geuzaine. Geometrical validity of curvilinear finite elements. *Journal of Computational Physics*, 233:359–372, 2013.
- [31] Julian P Swartz and David Bruce Davidson. Curvilinear vector finite elements using a set of hierarchical basis functions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 55(2):440–446, 2007.
- [32] Andreas Schröder. Constrained approximation in hp-fem: Unsymmetric subdivisions and multi-level hanging nodes. In *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, pages 317–325. Springer, 2011.
- [33] Pavel Šolín, Jakub Červený, and Ivo Doležel. Arbitrary-level hanging nodes and automatic adaptivity in the hp-fem. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(1):117–132, 2008.
- [34] Andrew J Younge, Gregor Von Laszewski, Lizhe Wang, Sonia Lopez-Alarcon, and Warren Carithers. Efficient resource management for cloud computing environments. In *Green Computing Conference*, pages 357–364, 2010.
- [35] Wolfgang Bangerth, Ralf Hartmann, and Guido Kanschat. deal. ii—a general-purpose object-oriented finite element library. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 33(4):24, 2007.
- [36] Everton Hermann, Bruno Raffin, François Faure, Thierry Gautier, and Jérémie Allard. Multi-gpu and multi-cpu parallelization for interactive physics simulations. In *Euro-Par 2010-Parallel Processing*, pages 235–246. Springer, 2010.

- [37] Paulius Micikevicius. 3d finite difference computation on gpus using cuda. In *Proceedings of 2nd Workshop on General Purpose Processing on Graphics Processing Units*, pages 79–84. ACM, 2009.
- [38] Jan Mandel, Bedřich Sousedík, and Jakub Šístek. Adaptive bddc in three dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(10):1812–1831, 2012.
- [39] Paola F Antonietti and Paul Houston. A class of domain decomposition preconditioners for hp-discontinuous galerkin finite element methods. *Journal of Scientific Computing*, 46(1):124–149, 2011.
- [40] Zhen Peng, Xiao-Chuan Wang, and J-F Lee. Integral equation based domain decomposition method for solving electromagnetic wave scattering from non-penetrable objects. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 59(9):3328–3338, 2011.
- [41] Zhen Peng, Vineet Rawat, and Jin-Fa Lee. One way domain decomposition method with second order transmission conditions for solving electromagnetic wave problems. *Journal of Computational Physics*, 229(4):1181–1197, 2010.
- [42] Jiefu Chen and Qing Huo Liu. Discontinuous galerkin time-domain methods for multiscale electromagnetic simulations: A review. *Proceedings of the IEEE*, 101(2):242–254, 2013.
- [43] Max Duarte, Zdeněk Bonaventura, Marc Massot, Anne Bourdon, Stéphane Descobes, and Thierry Dumont. A new numerical strategy with space-time adaptivity and error control for multi-scale streamer discharge simulations. *Journal of Computational Physics*, 231(3):1002–1019, 2012.
- [44] GT Ma and H Rauh. Thermo-electromagnetic properties of a magnetically shielded superconductor strip: theoretical foundations and numerical simulations. *Superconductor Science and Technology*, 26(10):105001, 2013.
- [45] Stefano Markidis and Giovanni Lapenta. The energy conserving particle-in-cell method. *Journal of Computational Physics*, 230(18):7037–7052, 2011.
- [46] Yvan Notay. An aggregation-based algebraic multigrid method. *Electronic transactions on numerical analysis*, 37(6):123–146, 2010.
- [47] Nico Trost, Javier Jiménez, Dimitar Lukarski, and Victor Sanchez. Accelerating cobaya3 on multi-core cpu and gpu systems using paralution. *Annals of Nuclear Energy*, 2014.
- [48] Jie Chen, Lois Curfman McInnes, and Hong Zhang. Analysis and practical use of flexible bicgstab. *Preprint ANL/MCS-P3039-0912, Argonne National Laboratory*, 2012.

- [49] Kezhong Zhao, Marinos N Vouvakis, and Jin-Fa Lee. Solving electromagnetic problems using a novel symmetric fem-bem approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):583–586, 2006.
- [50] D Soares, WJ Mansur, and O Von Estorff. An efficient time-domain fem/bem coupling approach based on fem implicit green’s functions and truncation of bem time convolution process. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(9):1816–1826, 2007.
- [51] Ningning Yan and Zhaojie Zhou. A rt mixed fem/dg scheme for optimal control governed by convection diffusion equations. *Journal of Scientific Computing*, 41(2):273–299, 2009.
- [52] Michael Oberguggenberger, Julian King, and Bernhard Schmelzer. Classical and imprecise probability methods for sensitivity analysis in engineering: A case study. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(4):680–693, 2009.
- [53] Andrea Saltelli, Paola Annoni, Ivano Azzini, Francesca Campolongo, Marco Ratto, and Stefano Tarantola. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181(2):259–270, 2010.
- [54] S Kucherenko et al. A new derivative based importance criterion for groups of variables and its link with the global sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 181(7):1212–1217, 2010.
- [55] Bruno Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7):964–979, 2008.
- [56] Ziyang Ren, Minh-Trien Pham, Minho Song, Dong-Hun Kim, and Chang Seop Koh. A robust global optimization algorithm of electromagnetic devices utilizing gradient index and multi-objective optimization method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(5):1254–1257, 2011.
- [57] Marcos A Valdebenito and Gerhart I Schuëller. A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(5):645–663, 2010.
- [58] Thomas Most and Holger Neubert. Robust design and reliability analysis of an electromagnetic actuator system. In *Proceedings 16th ITI Symposium, Dresden*, 2013.
- [59] J Unger and Dirk Roos. Investigation and benchmarks of algorithms for reliability analysis. *Proceedings Weimarer Optimierungs-und Stochastiktage*, 1, 2004.

- [60] Leandro dos Santos Coelho, Helon Vicente Hultmann Ayala, and Piergiorgio Alotto. A multiobjective gaussian particle swarm approach applied to electromagnetic optimization. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(8):3289–3292, 2010.
- [61] Xin-She Yang. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization. *Engineering with Computers*, 29(2):175–184, 2013.
- [62] Joshua D Deaton and Ramana V Grandhi. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1):1–38, 2014.
- [63] Shiwei Zhou, Wei Li, and Qing Li. Level-set based topology optimization for electromagnetic dipole antenna design. *Journal of Computational Physics*, 229(19):6915–6930, 2010.
- [64] Thibaut Labbé and Bruno Dehez. Convexity-oriented mapping method for the topology optimization of electromagnetic devices composed of iron and coils. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(5):1177–1185, 2010.
- [65] Rajkumar Roy, Srichand Hinduja, and Roberto Teti. Recent advances in engineering design optimisation: Challenges and future trends. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 57(2):697–715, 2008.
- [66] Yoshifumi Okamoto, Yusuke Tominaga, and Shuji Sato. Topological design for 3-d optimization using the combination of multistep genetic algorithm with design space reduction and nonconforming mesh connection. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(2):515–518, 2012.
- [67] Matthieu Petelet, Bertrand Iooss, Olivier Asserin, and Alexandre Loredo. Latin hypercube sampling with inequality constraints. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 94(4):325–339, 2010.
- [68] Amith Singhee and Rob A Rutenbar. Why quasi-monte carlo is better than monte carlo or latin hypercube sampling for statistical circuit analysis. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 29(11):1763–1776, 2010.
- [69] Jianqing Fan, Fang Han, and Han Liu. Challenges of big data analysis. *National science review*, 1(2):293–314, 2014.
- [70] Francisco Facchinei, Simone Sagratella, and Gesualdo Scutari. Flexible parallel algorithms for big data optimization. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pages 7208–7212. IEEE, 2014.
- [71] Amir Hossein Gandomi and Amir Hossein Alavi. Krill herd: a new bio-inspired optimization algorithm. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12):4831–4845, 2012.

- [72] Xin-She Yang. Firefly algorithms for multimodal optimization. In *Stochastic algorithms: foundations and applications*, pages 169–178. Springer, 2009.
- [73] Hanning Chen, Yunlong Zhu, and Kunyuan Hu. Discrete and continuous optimization based on multi-swarm coevolution. *Natural Computing*, 9(3):659–682, 2010.
- [74] Aniruddha Bhattacharya and Pranab Kumar Chattopadhyay. Biogeography-based optimization for different economic load dispatch problems. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 25(2):1064–1077, 2010.
- [75] Xiangtao Li, Jie Zhang, and Minghao Yin. Animal migration optimization: an optimization algorithm inspired by animal migration behavior. *Neural Computing and Applications*, 24(7-8):1867–1877, 2014.
- [76] Suraj Pandey, Linlin Wu, Siddeswara Mayura Guru, and Rajkumar Buyya. A particle swarm optimization-based heuristic for scheduling workflow applications in cloud computing environments. In *Advanced Information Networking and Applications (AINA), 2010 24th IEEE International Conference on*, pages 400–407. IEEE, 2010.
- [77] Luca Mussi, Fabio Daolio, and Stefano Cagnoni. Evaluation of parallel particle swarm optimization algorithms within the cuda™ architecture. *Information Sciences*, 181(20):4642–4657, 2011.
- [78] Francisco Chinesta, Pierre Ladeveze, and Elías Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4):395–404, 2011.
- [79] Brice Bognet, F Bordeu, Francisco Chinesta, A Leygue, and A Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201:1–12, 2012.
- [80] Pavel Karban. *Zpracování kovových materiálů s využitím elektromagnetického pole a počítačového modelování příslušných procesů*. 2011.
- [81] Rajkumar Roy, Srichand Hinduja, and Roberto Teti. Recent advances in engineering design optimisation: Challenges and future trends. *{CIRP} Annals - Manufacturing Technology*, 57(2):697 – 715, 2008.
- [82] Kalyanmoy Deb. *Optimization for engineering design: Algorithms and examples*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2012.
- [83] Dantzig George Bernard. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 1998.

- [84] Nelder John and Mead Roger. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308–313, 1965.
- [85] Magnus Rudolph Hestenes and Eduard Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, 1952.
- [86] Howard Rosenbrock. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *The Computer Journal*, 3(3):175–184, 1960.
- [87] Vladimír Černý. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of optimization theory and applications*, 45(1):41–51, 1985.
- [88] Stuart Russell, Peter Norvig, and Artificial Intelligence. A modern approach. *Artificial Intelligence. Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, 25, 1995.
- [89] Lee Badger. Lazzarini’s lucky approximation of π . *Mathematics Magazine*, pages 83–91, 1994.
- [90] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and TAMT Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2):182–197, 2002.
- [91] J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1942–1948, 1995.
- [92] Alberto Colomi, Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, et al. Distributed optimization by ant colonies. In *Proceedings of the first European conference on artificial life*, volume 142, pages 134–142. Paris, France, 1991.
- [93] Mach František, Kůs Pavel, Karban Pavel, and Doležel Ivo. Optimized arrangement of device for electrostatic separation of plastic particles. In *ELEKTRO, 2012*, pages 431–434, 2012.
- [94] Mach František, Adam Lukáš, Kacerovský Jan, Karban Pavel, and Doležel Ivo. Evolutionary algorithm-based multi-criteria optimization of triboelectrostatic separator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 270(0):134 – 142, 2014.
- [95] František Mach, Pavel Kůs, Pavel Karban, and Ivo Doležel. Optimization of the system for induction heating of nonmagnetic cylindrical billets in rotating magnetic field produced by permanent magnets. *Computing*, 95(1):537–552, 2013.
- [96] Frantisek Mach, Ivan Novy, Pavel Karban, and Ivo Dolezel. Shape optimization of electromagnetic actuators. In *ELEKTRO, 2014*, pages 595–598. IEEE, 2014.

- [97] Jefferson Hopewell, Robert Dvorak, and Edward Kosior. Plastics recycling: challenges and opportunities. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 364(1526):2115–2126, 2009.
- [98] Environmental data centre on waste [online]. <http://ec.europa.eu/eurostat/web/waste>. cit. 10.3.2015.
- [99] Gjergj Dodbiba, Jun Sadaki, Atshushi Shibayana, and Toyohisa Fujita. Sorting techniques for plastics recycling. *The Chinese Journal Process Engineering*, 2006.
- [100] G Dodbiba, T Fujita, et al. Progress in separating plastic materials for recycling. *Physical Separation in Science and Engineering*, 13(3-4):165–182, 2004.
- [101] Arthur Diaz, Felix-Navarro, and Rosa María. A semi-quantitative tribo-electric series for polymeric materials: the influence of chemical structure and properties. *Journal of Electrostatics*, 62(4):277–290, 2004.
- [102] Amar Tilmatine, Karim Medles, Mohamed Younes, Abdelber Bendaoud, and Lucian Dascalescu. Roll-type versus free-fall electrostatic separation of tribocharged plastic particles. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 46(4):1564–1569, 2010.
- [103] Laur Calin, Adrian Mihalcioiu, Subhankar Das, Vasile Neamtu, Ciprian Dragan, Lucian Dascalescu, and Alexandru Iuga. Controlling particle trajectory in free-fall electrostatic separators. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 44(4):1038–1044, 2008.
- [104] Štarman Václav, Kacerovský Jan, Mach František, Karban Pavel, and Doležel Ivo. Impact of humidity on efficiency of triboelectric separator for mixture of plastic particles. In *CPEE - AMTEE 2013*, pages IV–4., 2013.
- [105] Kacerovský Jan, Mach František, Nikolayev Denys, , Karban Pavel, and Doležel Ivo. Estimation of charges and critical velocity of plastic particles in triboelectric separator. In *ELEKTRO, 2014*, pages 575–579, 2014.
- [106] Frantisek Mach, Pavel Kus, Pavel Karban, and I Doležel. Higher-order modeling of electrostatic separator of plastic particles. *Przegląd Elektrotechniczny*, 88:74–76, 2012.
- [107] Frantisek Mach, Jana Kuthanova, Katerina Mizerova, Pavel Karban, Pavel Kus, Ivo Dolezel, and Radek Polansky. Model-based determination of nonlinear material parameters of metals with low melting points. In *Industrial Electronics Society, IECON 2014-40th Annual Conference of the IEEE*, pages 3240–3245. IEEE, 2014.
- [108] Kashan A Shaikh, Shifeng Li, and Chang Liu. Development of a latchable microvalve employing a low-melting-temperature metal alloy. *Microelectromechanical Systems, Journal of*, 17(5):1195–1203, 2008.

- [109] ZH Han, B Yang, Y Qi, and J Cumings. Synthesis of low-melting-point metallic nanoparticles with an ultrasonic nanoemulsion method. *Ultrasonics*, 51(4):485–488, 2011.
- [110] MJ O’neill. Measurement of specific heat functions by differential scanning calorimetry. *Analytical chemistry*, 38(10):1331–1336, 1966.
- [111] Carlton G Slough and Nathan D Hesse. High precision heat capacity measurements of metals by modulated dsc. In *Proc NATAS Annu Conf Therm Anal Appl*, volume 34, page 160, 2006.
- [112] O. Gomis-Bellmunt and L.F. Campanile. *Design Rules for Actuators in Active Mechanical Systems*. Springer, 2010.
- [113] Bernhard Warberger, Jonathan Feller, Christoph Guntermann, Thomas Nussbaumer, and Johann W Kolar. High-dynamics low-cost flow control with solenoid actuator for ultrahigh purity applications. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 47(5):2268–2273, 2011.
- [114] Ryan R Chladny, Charles Robert Koch, and Alan F Lynch. Modeling automotive gas-exchange solenoid valve actuators. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(3):1155–1162, 2005.
- [115] NA Posey, T Wu, M Wolff, and J Zumberge. Modeling and control scheme design of a solenoid-actuated fuel injection system. In *Aerospace and Electronics Conference (NAECON), 2012 IEEE National*, pages 92–95, 2012.
- [116] TA Parlikar, WS Chang, YH Qiu, MD Seeman, DJ Perreault, JG Kassakian, and TA Keim. Design and experimental implementation of an electromagnetic engine valve drive. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 10(5):482–494, 2005.
- [117] Baoping Cai, Yonghong Liu, Xiaojie Tian, Zelu Wang, Fei Wang, Hang Li, and Renjie Ji. Optimization of submersible solenoid valves for subsea blowout preventers. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(2):451–458, 2011.
- [118] Jan Albert, Remus Banucu, Wolfgang Hafla, and Wolfgang M Rucker. Simulation based development of a valve actuator for alternative drives using bem-fem code. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(3):1744–1747, 2009.
- [119] Václav Štarman, Jan Kacerovský, František Mach, Pavel Karban, and Ivo Doležel. Experimental study of triboelectric separator for mixture of plastic particles. In *International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, 2013.
- [120] Mihai Rebican, Zhenmao Chen, Noritaka Yusa, Ladislav Janousek, and Kenzo Miya. Shape reconstruction of multiple cracks from ect signals by means of a stochastic method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4):1079–1082, 2006.

Literatura

- [121] P Di Barba, K Komez, E Napieralska Juszcak, J Ph Lecointe, and N Hihat. Coupling field analysis and non-deterministic optimization by means of multiprocessor parallel computation for characterizing magnetic anisotropy, 2011.
- [122] František Mach, Pavel Karban, and Ivo Doležel. Design of novel bearing-less electromagnetic actuator in valve operations. In *International Symposium Magnetic Bearings*, 2014.
- [123] Martin Kurfířt, František Mach, Pavel Karban, and Ivo Doležel. Numerical study and experimental verification of novel electromagnetic actuator in valve operation. In *Computational Problems of Electrical Engineering*, 2014.