

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA
ELEKTROTECHNICKÁ

DISERTAČNÍ PRÁCE

PLZEŇ, 2014

Ing. Lukáš Bouzek

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

KATEDRA ELEKROMECHANIKY A VÝKONOVÉ ELEKTRONIKY

DIZERTAČNÍ PRÁCE

k získání akademického titulu doktor v oboru

elektrotechnika

Ing. Lukáš Bouzek

Elektromagnetické pole, síly, chvění a hluk v elektrických strojích

Školitel: Doc. Ing. Bohumil Skala, Ph.D

Datum státní doktorské zkoušky: 25. dubna 2014

Datum odevzdání práce: prosinec 2014

Plzeň, 2014

Prohlášení

Předkládám k posouzení a k obhajobě disertační práci vypracovanou na závěr doktorského studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni. Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně a k vypracování jsem použil pramenů, které uvádím v seznamu použité literatury.

Jako autor uvedené práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této disertační práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení §11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplívajících z ustanovení §152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Plzni, dne.....

podpis autora.....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli doc. Ing. Bohumilu Skalovi, Ph.D. za jeho odborné rady, ochotu a vedení v průběhu doktorského studia. Dále bych chtěl poděkovat všem, kteří se podíleli na vzniku této práce.

Anotace

Tato disertační práce se rámcově zabývá problematikou vibrací a s nimi spojenému vzniku nežádoucích hlukových účinků. Konkrétně je práce zaměřena na zjišťování modálních parametrů statorového systému malých asynchronních strojů.

První část práce se stručně zabývá obecnými zdroji vibrací, které se mohou u těchto strojů objevit. Další části práce jsou zaměřeny nejprve na popis magnetických sil, které vznikají v asynchronním stroji při sinusovém napájení, a poté je rozebrán stav, kdy je stroj napájen neharmonickým zdrojem.

Na tuto část navazuje analytický popis vlastních frekvencí jednotlivých částí statorového systému – magnetického obvodu, vinutí a mechanické kostry stroje. Následuje hlavní část práce, která je zaměřena na experimentální modální analýzu. Zde jsou prezentovány výsledky měření a jejich numerické modely.

Dále je ukázán vliv košů vinutí a uložení celého magnetického obvodu s vinutím v kostře stroje.

Klíčová slova

asynchronní stroj, radiální síla, modální analýza, vlastní frekvence

Annotation

This thesis deals with vibrations and their association with adverse noise effects. Specifically, the work is focused on determining the modal parameters of stator system of small asynchronous machines.

The first part describes briefly the general sources of vibrations that may occur in these machines. The other part of the work is focused firstly on the description of magnetic forces generated in an asynchronous machine with sinusoidal supply, and secondly on the condition when the machine is powered by inharmonic source.

The next section continues with analytical description of natural frequencies of various parts of the stator system - the magnetic circuit, winding and mechanical machine frame. The major part of the thesis is focused on experimental modal analysis. The results of measurements and their numerical models are presented here.

Then, the influence of winding cages and storage of the entire magnetic circuit with a winding in the machine frame is shown.

Keywords

asynchronous machine, radial force, modal analysis, natural frequency

1 Úvod.....	12
1.1 Současný stav řešeného problému, cíle práce	12
1.2 Cíle práce.....	13
2 Zdroje hluku a vibrací v elektrických strojích.....	14
2.1 Elektromagnetické zdroje vibrací a hluku	15
2.2 Mechanické zdroje vibrací a hluku.....	16
2.3 Aerodynamické zdroje hluku.....	17
3 Radiální síly.....	18
3.1 Indukční stroj s harmonickým napájením	18
3.1.1 Magnetické pole asynchronního stroje	18
3.1.2 Amplituda magnetického tlaku	20
3.1.3 Deformace magnetického jádra způsobené rozložením radiálních sil.....	21
3.1.4 Frekvence a řády radiálních sil	22
3.2 Indukční stroj napájený neharmonickým zdrojem	26
3.2.1 Vznik vyšších časových harmonických	27
3.2.2 Radiální síly pro neharmonické napájení.....	28
3.2.2.1 Statorová a rotorová magnetická indukce	29
3.2.2.2 Statorové harmonické stejného řádu	29
3.2.2.3 Vzájemné působení statorové a rotorové harmonické	30
3.2.2.4 Rotorová harmonická stejného řádu.....	30
3.2.2.5 Řády a frekvence magnetického tlaku pro neharmonické napájení	30
3.2.2.6 Interakce statorových harmonických různého řádu	31
3.2.2.7 Vzájemné působení spínací frekvence a vyšších časových harmonických.....	31
3.2.2.8 Vliv usměrňovače.....	32
3.3 Model asynchronního stroje	32
4. Analytický rozbor modálních vlastností statorového systému.....	36
4.1 Základní výpočet vlastních frekvencí statorového systému	37
4.2 Detailnější výpočet vlastních frekvencí jednotlivých částí statoru	39
4.2.1 Vlastní frekvence magnetického jádra.....	39
4.2.2 Vlastní frekvence kostry stroje	39
4.2.3 Vliv vinutí a zubové části	41
5 Experimentální modální analýza	42

5.1 Systém s jedním stupněm volnosti	43
5.2 Systém s n stupni volnosti	43
5.3 Samostatné magnetické jádro – měření a model jádra	49
5.3.1 Modelování vlastních tvarů a nalezení náhradních parametrů mag. jádra statoru...	52
5.3.2 Modul pružnosti v axiálním směru paketu.....	54
5.4 Měření a modelování vinutí.....	59
5.4.1 Měření vlastních tvarů a frekvencí	59
5.4.2 Simulace vinutí – reálný detailní model	61
5.4.3 Simulace vinutí – zjednodušený model	63
5.5 Jádro s vinutím.....	65
5.5.1 Měření vlastní tvarů a frekvencí	65
5.5.2 Modelování vlastních tvarů a vinutí	69
5.6 Vliv čel vinutí	71
5.7 Vlastní frekvence kostry stroje	72
5.8 Vlastní frekvence rotoru	75
Závěr a zhodnocení výsledků	76
Použitá literatura	78

Seznam tabulek:

Tab. 1: Významné frekvence a řády vyskytující se v neharm. napájeném stroji.....	28
Tab. 2: Výsledky měření mag. obvodu	51
Tab. 3: Vlastní frekvence mag. obvodu – srovnání analytického a numerického výpočtu	54
Tab. 4: Parametry mag. obvodu	58
Tab. 5: Vlastní frekvence samotného mag. obvodu	58
Tab. 6: Parametry detailního modelu vinutí	62
Tab. 8: Přehled frekvencí vinutí	65
Tab. 9: Naměřené vl. frekvence mag. jádra s vinutím	67
Tab. 10: Parametry numerického modelu mag. jádra s vinutím	69
Tab. 11: Vlastní frekvence kostry statoru	72

Seznam obrázků:

Obr.2.1: Zdroje hluku v elektrickém stroji.....	14
Obr. 2.2: Elektromagnetické zdroje vibrací	16
Obr. 3.1: Deformace magnetického jádra	22
Obr. 3.2: Časová závislost magnetostrikčního koeficientu	26
Obr. 3.3: Blokové schéma motoru napájeného usměrňovačem	27
Obr. 3.4: Magnetizační charakteristika stroje	32
Obr. 3.5: Rozložení mag. indukce při stavu naprázdno 6 pólového stroje.....	33
Obr. 3.6: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 6 pólového stroje	33
Obr. 3.7: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 6 pólového stroje	34
Obr. 3.8: Rozložení mag. indukce při stavu naprázdno 4 pólového stroje.....	34
Obr. 3.9: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 4 pólového stroje	35
Obr. 3.10: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 4 pólového stroje	35
Obr. 4.1: 3D model analyzovaného asynchronního stroje	36
Obr. 4.2: Radiální tvary kmitu pro řád $m = 4$	36
Obr. 4.3: Axiální tvary kmitu	37
Obr. 4.4: Vlastní tvary kostry	41
Obr. 5.1: Systém s 2 stupni volnosti.....	44

Obr. 5.2: Systém s n stupni volnosti.....	45
Obr. 5.3: Měřicí síť magnetického jádra	50
Obr. 5.4: Blokové schéma měřicího řetězce	50
Obr. 5.5: Magnetické jádro statoru při měření modální analýzy	51
Obr. 5.6: Vlastní tvar 2,1; frekvence 813 Hz	51
Obr. 5.7: Vlastní tvar 2,0; frekvence 1070 Hz	51
Obr. 5.8: Vlastní tvar 2,0; frekvence 2710 Hz	52
Obr. 5.9: Síť modelu.....	52
Obr. 5.10: Vlastní tvar 2,0 – frekvence 1095 Hz	53
Obr. 5.11: Vlastní tvar 2,1 – frekvence 1885 Hz	53
Obr. 5.12: Vlastní tvar 3,0 – frekvence 2834 Hz	53
Obr. 5.13: Vlastní tvar 4,0 – frekvence 4449 Hz	54
Obr. 5.14: Mag. obvod při měření axiálního modulu pružnosti.....	56
Obr. 5.15: Vlastní tvar 2,1 – frekvence 817 Hz	57
Obr. 5.16: Vlastní tvar 2,0 – frekvence 1047 Hz	57
Obr. 5.17: Vlastní tvar 3,0 – frekvence 2599 Hz	57
Obr. 5.18: Vzorek vinutí během měření.....	59
Obr. 5.19: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru X.....	60
Obr. 5.20: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru Y	60
Obr. 5.21: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru Z	60
Obr. 5.22: Výstup z měření – přenosové funkce a vlastní tvary	61
Obr. 5.23:Detail sítě numerického modelu	62
Obr. 5.24: Detailní model vinutí	62
Obr. 5.25: Vlastní tvary při 59 Hz a 159 Hz	62
Obr. 5.26: Vlastní tvary při 370 Hz a 516 Hz	63
Obr. 5.27: Vlastní tvary při 786 Hz a 1031 Hz	63
Obr. 5.28: Zasíťovaný zjednodušený model vinutí.....	64
Obr. 5.29: Vlastní tvary při 58 Hz a 128 Hz	64
Obr. 5.30: Vlastní tvary při 363 Hz a 784 Hz	64
Obr. 5.31: Vlastní tvary při 1008 Hz.....	65
Obr. 5.32: Paket s vinutím (bez čel vinutí) při měření modální analýzy	66
Obr. 5.33: Měřicí síť při měření na paketu s vinutím bez čel	66
Obr. 5.34: Přenosové funkce jednotlivých buzených bodů paketu s vinutím – bez čel.....	67
Obr. 5.35:Paket při frekvenci 2400 Hz	67

Obr. 5.36: Paket při frekvenci 2630 Hz	68
Obr. 5.37: Paket při frekvenci 4430 Hz	68
Obr. 5.38: Paket při frekvenci 6010 Hz	69
Obr. 5.39: Síť modelu mag. jádra s vinutím.....	70
Obr. 5.40: Mag. jádro s vinutím při 2415 Hz a 2625Hz	70
Obr. 5.41: Mag. jádro s vinutím při 4574 Hz a 6276Hz	71
Obr. 5.42: Vlastní tvar čel vinutí při 3120 Hz a 5591 Hz	71
Obr. 5.43: Závislost frekvencí na vlastních tvarech.....	72
Obr. 5.44: Vlastní tvar při 3029 Hz a 3626 Hz	73
Obr. 5.45: Vlastní tvar při 7304 Hz a 8047 Hz	73
Obr. 5.46: Vlastní tvar při 2323 Hz a 3101 Hz	73
Obr. 5.47: Vlastní tvar při 5907 Hz a 7359 Hz	74
Obr. 5.48: Vlastní tvar kostry při 2344 Hz a při 3099 Hz.....	74
Obr. 5.49: Vlastní tvar kostry při 6268 Hz a při 7249 Hz.....	74
Obr. 5.50: Tvary kmitu rotoru s ocelovým paketem při 2570Hz a 3507Hz	75
Obr. 5.50: Tvary kmitu rotoru s náhradními parametry při 2798Hz a 3750Hz	75

Seznam značek a symbolů

B	amplituda magnetické indukce
D	průměr vrtání statoru
E	modul pružnosti
F	magnetomotorické napětí
G	modul pružnosti ve smyku
H	přenosová funkce
I	moment setrvačnosti
K	tuhost
L	délka
M	hmotnost
N	počet lopatek
P	amplituda mag. tlaku
R	poloměr
I	amplituda proudu
Q	počet drážek statoru, rotoru
p	počet pólových dvojic

b	okamžitá hodnota magnetické indukce, tlumicí konstanta
c_t	šířka zubu
e	excentricita rotoru
f	frekvence, vlastní frekvence
g	vzduchová mezera
h_c	výška mag. jádra
i	okamžitá hodnota proudu
m_1	počet fází
m, n	obvodový, axiální mód vlastního tvaru kmitu
n	počet otáček
p	jednotkový tlak
r	řád síly
s	skluz
t	čas
u	výchylka
x	prostorová souřadnice
Λ	magnetizační koeficient
α	prostorový úhel
δ	velikost vzduchové mezery
λ	vlastní číslo
μ	permeabilita, řád harmonické statoru
ν	řád harmonické rotoru
Φ	fázový posuv
ν	Poissonův koeficient
ρ	hustota
Φ	fázový posuv
ω	úhlová frekvence

1 Úvod

V dnešní době se stále zvyšují požadavky na moderní elektrické stroje. Ty jsou stále častěji provozovány při proměnných otáčkách, a proto se jejich provoz při kritických otáčkách stává důležitým hlediskem, při kterém dochází ke vzniku a zvyšování nebezpečných vibrací a s tím souvisejícím hlukem. Tyto hlediska představují pro výrobce stroje komplikace a musí se brát v úvahu při návrhu elektrického stroje.

Elektrický stroj slouží k přeměně elektrické energie nebo naopak. Magnetické pole ve vzduchové mezeře vytváří sílu potřebnou pro požadovaný moment stroje. Tato síla se skládá za radiálních a tangenciálních složek, které silově působí na satorový paket. Důsledkem je mechanické namáhání satorového jádra a přenos těchto účinků na kostru stroje. Tím dochází ke vzniku nežádoucích vibrací a mechanického namáhání konstrukce.

1.1 Současný stav řešeného problému, cíle práce

Asynchronní stroje jsou dnes nejběžněji používaným druhem elektrických točivých strojů. V době, kdy jsou kladeny stále větší požadavky na konstruování lehčích, levnějších a výkonnějších motorů, se do popředí dostává problematika jejich vibrací. Protože je snaha vyrábět konstrukční části co nejmenší a nejlehčí, mění se tím i mechanické vlastnosti stroje. Tím dochází ke vzniku rizika přílišného namáhání částí vibracemi. Největší riziko nastává, pokud se silové účinky působící na strukturu shodují s tzv. vlastními frekvencemi a vlastními tvary systému. V takovém případě hrozí, že nastane rezonanční jev a zařízení může být vystaveno nebezpečně velkým vibracím, čímž může dojít ke snížení životnosti, v krajním případě i ke zničení stroje. Abychom se vyhnuli takovým režimům stroje, je důležité znát jejich dynamické vlastnosti. Potom se může zařízení navrhout tak, aby jeho pracovní režimy ležely mimo rezonanční frekvence. Ty se dají změřit na již vyrobeném stroji, ale většinou potřebujeme tyto parametry znát už ve fázi návrhu výrobku. Zde se uplatňují modely, díky kterým je jde přibližně určovat. To lze samozřejmě pouze u zařízení s jednodušší geometrií nebo strukturou.

Asynchronní stroj je složen z několika dílčích částí. Nejdůležitější částí z hlediska zdroje vibrací a hluku je satorový systém, konkrétně magnetický obvod s vinutím. Jeho zkoumáním se z různých pohledů do dnešní doby zabývalo několik prací. V mnoha z nich je mag. obvod

považován za homogenní těleso a k modelování jeho vlastností se používá vlastností železa nebo oceli, např. [23], [24].

V publikaci [17] autoři počítají také s vlastnostmi oceli, ale dále srovnávají frekvence vzorku složeného z jednotlivých plechů v závislosti na stlačovací síle, která na ně působí. Ukazuje se, jak se mírně zvětšují frekvence se vzrůstajícím tlakem. K podobným závěrům se dostává i [25], která se také zabývá zmíněnými silovými účinky.

Některé práce, např. [8], zase zavádějí zjednodušení tím, že považují délku stroje mnohem delší, než jsou jeho zbývající dva rozměry. Tím se model zjednoduší na 2D řešení.

Detailnějším modelováním magnetického pole a magnetických sil je věnována publikace [5], kde autor popisuje modelování jha statoru pomocí anizotropních vlastností materiálu a sleduje, jak se mění během procesu výroby (před VPI impregnací a po ní, ...). Také je zde zkoumán vliv tangenciálních složek mag. sil.

V [6] je opět brán statorový magnetický obvod jako ocelové homogenní těleso, je tu však diskutována a ukázána závislost tuhosti statorového svazku na tloušťce impregnační vrstvy v drážce.

1.2 Cíle práce

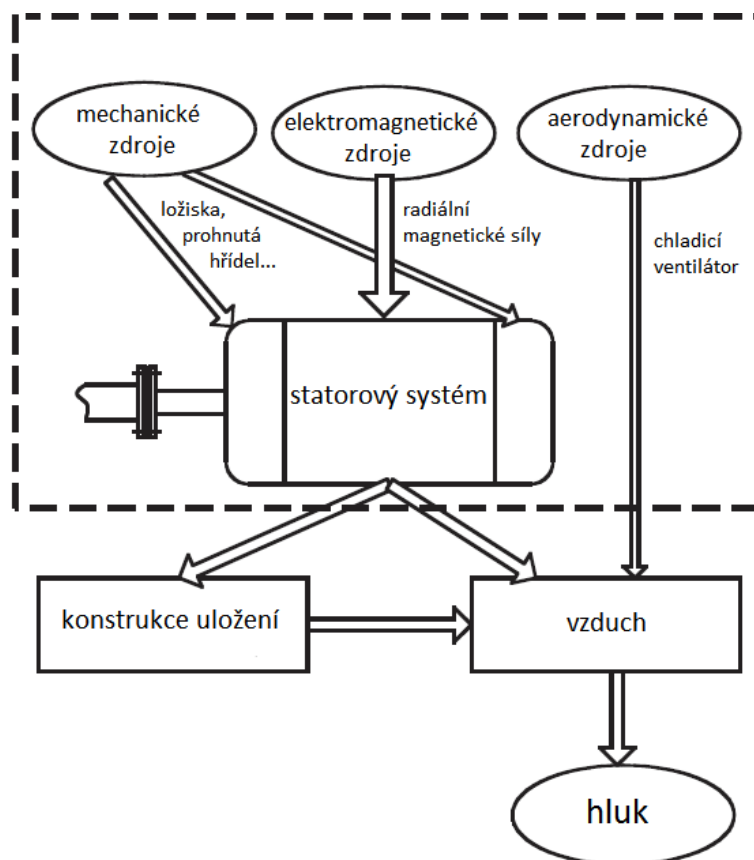
Protože není k dispozici komplexní model statorového systému, ani není k dispozici metodika, jak tento systém modelovat, vznikla tato práce. Cíle práce se mohou rozdělit takto:

- popsat chování magnetického pole ve vzduchové mezeře stroje a v návaznosti popsat a zjistit mechanické parametry modelu statoru,
- tvorba modelu statorového magnetického obvodu z hlediska jeho dynamického chování,
- tvorba modelu vinutí z hlediska jeho dynamického chování,
- jako hlavní cíl práce je tvorba modelu statorového systému, který se skládá z magnetického jádra a vinutí. Znalost takového modelu může sloužit k dalším navazujícím mechanickým výpočtům, hlukové predikci stroje nebo například termomechanickým výpočtům. Dále se díky modelu mohou zkoumat konstrukční změny stroje.

2 Zdroje hluku a vibrací v elektrických strojích

Zdroje vibrací a s nimi spojený hluk v elektrických strojích mohou být obecně rozděleny do tří základních kategorií: [4]

- 1) Elektromagnetické zdroje vibrací a hluku související s parazitními jevy způsobené vyššími časovými a prostorovými harmonickými, excentricitou, magnetickým sycením a magnetostrickými jádru statoru složeného z plechů.
- 2) Mechanické vibrace a hluk způsobené mechanickými zdroji, například ložisky.
- 3) Aerodynamické vibrace související s prouděním ventilačního vzduchu uvnitř nebo kolem stroje.



Obr.2.1: Zdroje hluku v elektrickém stroji[4]

2.1 Elektromagnetické zdroje vibrací a hluku

Nejtypičtější složkou vibrací v asynchronních strojích (obecně ve všech elektrických strojích) je složka elektromagnetická. Je způsobena silovým působením na aktivní části stroje. Tyto silové účinky mají různé frekvence a různé prostorové rozložení po obvodu vzduchové mezeře. Charakter sil závisí na řadě různých faktorů, jako je počet pólů, geometrie vzduchové mezeře nebo kombinace statorového a rotorového počtu drážek. [21]

Elektromagnetické vibrace a hluk jsou způsobeny působením elektromagnetického pole ve vzduchové mezeře. Pokud stator vytváří ve vzduchové mezeře magnetickou indukci:

$$B_1 = B_{m1} \cos(\omega_1 t + k\alpha + \phi_1) \quad (2.1)$$

a rotor vytváří magnetickou indukci

$$B_2 = B_{m2} \cos(\omega_2 t + l\alpha + \phi_2) \quad (2.2)$$

pak je výsledná indukce ve vzduchové mezeře:

$$B = 0,5B_{m1}B_{m2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (k + l)\alpha + (\phi_1 + \phi_2)] + \\ + 0,5B_{m1}B_{m2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (k - l)\alpha + (\phi_1 - \phi_2)] \quad (2.3)$$

kde B_{m1} a B_{m2} jsou amplitudy statorové a rotorové magnetické indukce

ω_1 a ω_2 jsou úhlové frekvence statorového a rotorového magnetického pole

ϕ_1 a ϕ_2 jsou fázové posuvy statorového a rotorového magnetického pole

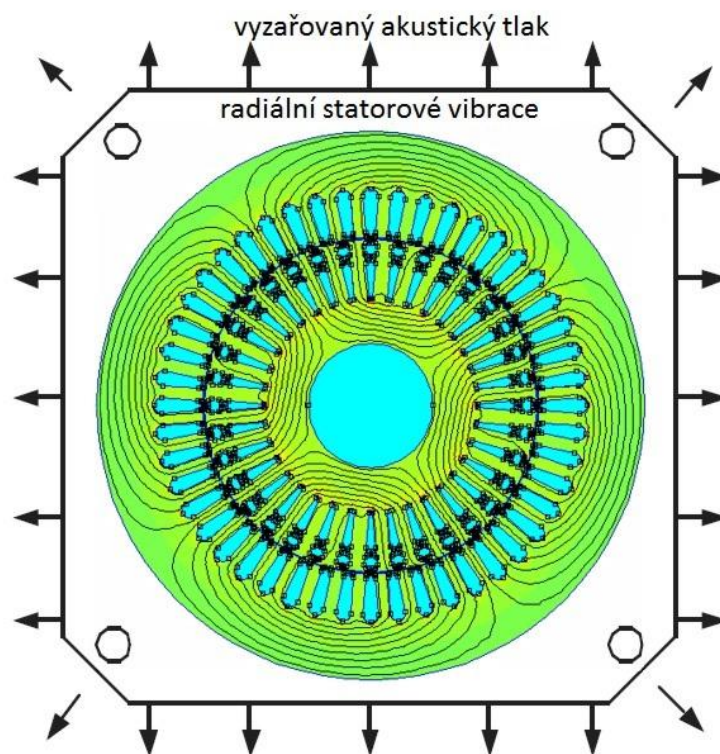
$k, l = 1, 2, 3, \dots$

Indukce vyjádřená rovnicí 2.1 je úměrná magnetickému tlaku s amplitudou $P_m = 0,5B_{m1}B_{m2}$, úhlovou frekvencí $\omega_r = \omega_1 \pm \omega_2$, řádem $r = k \pm l$ a fází $\phi_r = \phi_1 \pm \phi_2$. Tento magnetický tlak působí v radiálním směru na stator a rotor a je příčinou deformace a tím i vibrací.

Vlivem drážkování, rozložení vinutí v drážkách, zkreslení vstupního proudu, rotorové excentricitě a fázové nesymetrie vznikají ve vzduchové mezeře další harmonické, díky nimž vznikají další parazitní síly a momenty. Statorový systém je primárním zdrojem vibrací a hluku vyzařovaných strojem, a pokud je frekvence některé radiální síly blízko nebo rovna některé z vlastních frekvencí statoru, vznikají rezonanční jevy – to vede k silným deformacím statoru a vibracím.

Obecné požadavky na minimalizaci elektromagnetické složky vibrací jsou následující:

- navrhnout stroj tak, aby frekvence sil všech řádů byly odlišné od vlastních frekvencí kmitání statorového systému,
- volit doporučený poměr statorových a rotorových drážek,
- volit menší magnetickou indukci ve vzduchové mezeře stroje,
- volit větší vzduchovou mezeru,
- používat magnetické klíny podle možností,
- provést takovou konstrukci stroje, aby byla co nejmenší excentricita uložení rotoru,
- volit co největší počet drážek na pól a fázi,
- používat dvouvrstvé vinutí,
- zešíkmit drážky o drážkovou rozteč,
- použít dostatečně tuhou konstrukci motoru,
- provést symetrický magnetický obvod a vzduchovou mezeru. [12]



Obr. 2.2: Elektromagnetické zdroje vibrací

2.2 Mechanické zdroje vibrací a hluku

Hlavním zdrojem mechanických vibrací jsou ložiska a jejich vady, kluzné kontakty, ohnutí hřídele, převody, nevyváženost rotoru, kdy přesným vyvážením je možné významně snížit vibrace, které se přenášejí na stator a na ložiska.

Hluk ložisek závisí na typu ložisek (např. kluzná ložiska vyzařují nižší úroveň hluku než valivá), jejich mazání, drsnosti povrchu kroužků, teplotě, rychlosti a zatížení. Silné vibrace mohou vzniknout, pokud se frekvence vyzařované kinetické energie blíží některé z vlastních frekvencí ložiskového štítu. [4]

2.3 Aerodynamické zdroje hluku

Základním zdrojem hluku aerodynamického charakteru je chladicí ventilátor stroje. Dalším zdrojem jsou pak překážky (konstrukční části) umístěné v proudu chladicího média. Podle frekvenčního rozložení vyzařovaného hluku ventilátoru se rozdělují na širokopásmový hluk (100 – 10000 Hz) a sirénový hluk (tónový hluk). Ten vzniká reakcí mezi lopatkami ventilátoru, rotorovými drážkami nebo rotorovými axiálními chladicími kanály a statickými překážkami. Velikost sirénového jevu závisí na vzdálenosti rotujících a statických částí, na symetrii rotujících částí po obvodu a na množství dodávaného chladicího média. Z experimentů vyplývá, že vzdálenost mezi rotující a stacionární částí by neměla být menší než je velikost a [mm]: [4]

$$a = n_m^2 / 30 \quad (2.4)$$

kde n_m je obvodová rychlost ventilátoru v ot/s

Frekvence způsobená lopatkami ventilátoru:

$$f_v = k N_l n_m \quad (2.5)$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$

N_l je počet lopatek ventilátoru

n_m rychlost ventilátoru v ot/s

Podobně frekvence vlivem axiálních kanálů:

$$f_v = k N_k n_m \quad (2.6)$$

kde N_k je počet kanálů

Ventilační hluk se může tedy snížit několika způsoby:

- vyhnutím se rezonančním jevům krytů ventilátoru,
- vyhnutím se vzniku sirénových jevů (dodržovat minimální vzdálenosti otáčejících a stacionárních částí, správná volba počtu lopatek ventilátoru),

- správným návrhem chladicího systému (použít co nejmenší množství chladicího média).

3 Radiální síly

3.1 Indukční stroj s harmonickým napájením

3.1.1 Magnetické pole asynchronního stroje

Budeme uvažovat symetrické třífázové vinutí, jehož fáze jsou prostorově pootočený o úhel $2\pi/3$, a toto vinutí bude napájeno časově proměnnými proudy i_A , i_B a i_C se stejnou amplitudou proudu:

$$\begin{aligned} i_A(t) &= \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t) \\ i_B(t) &= \sqrt{2}I_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_C(t) &= \sqrt{2}I_1 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

pak tyto proudy procházející statorovým vinutím budí statorové magnetomotorické napětí, pro které lze psát:

$$\begin{aligned} F_{1Av} &= \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left(\omega t - v\frac{\pi}{\tau}x\right) + \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left(\omega t + v\frac{\pi}{\tau}x\right) \\ F_{1Bv} &= \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - v\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + v\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - v\frac{\pi}{\tau}x\right) + 1(v-1)\frac{2\pi}{3}\right] + \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - v\frac{\pi}{\tau}x\right) - 1(v+1)\frac{2\pi}{3}\right] \\ F_{1Cv} &= \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - v\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + v\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - v\frac{\pi}{\tau}x\right) + 2(v-1)\frac{2\pi}{3}\right] + \frac{1}{2}F_{mv} \cos\left[\left(\omega t - v\frac{\pi}{\tau}x\right) - 2(v+1)\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Výsledné magnetomotorické napětí neobsahuje 3 harmonickou a vlny řádu $v = 1, 7, 13, \dots$ rotují společně s hlavním polem statoru. Vlny řádu $v = 5, 11, 17, \dots$ rotují v opačném směru.

$$F_1(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} F_{mv} \cos(vp\alpha \mp \omega t) \quad (3.1.3)$$

Pro rotor:

$$F_2(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_{m\mu} \cos(\mu p \alpha \mp \omega_{\mu} t + \phi_{\mu}) \quad (3.1.4)$$

kde p je počet pólpárů,

α úhel měřený z počátku souřadného systému,

ϕ_{μ} je fázový rozdíl mezi statorovou a rotorovou harmonickou stejného řádu,

v a μ jsou řády statorové a rotorové harmonické,

$\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence napájecího proudu,

F_{mv} a $F_{m\mu}$ jsou amplitudy v -té a μ -té harmonické.

Okamžitá hodnota magnetické indukce ve vzduchové mezeře je vyjádřena rovnicí:

$$b(\alpha, t) = [F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, t)]\Lambda_g(\alpha, t) = b_1(\alpha, t) + b_2(\alpha, t) \quad (3.1.5)$$

když pro stator platí:

$$b_1(\alpha, t) = F_1(\alpha, t)\Lambda_g(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} B_{mv} \cos(vp\alpha \mp \omega t) \quad (3.1.6)$$

a pro rotor:

$$b_2(\alpha, t) = F_2(\alpha, t)\Lambda_g(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p \alpha \mp \omega_{\mu} t + \phi_{\mu}) \quad (3.1.7)$$

pak magnetický tlak v každém místě vzduchové mezery:

$$p_r(\alpha, t) = \frac{1}{2\mu_0} [b^2(\alpha, t) - b_t^2(\alpha, t)] \quad (3.1.8)$$

Vzhledem k tomu, že magnetická permeabilita feromagnetického jádra statoru a rotoru je mnohem vyšší než permeabilita vzduchové mezery, magnetické siločáry jsou prakticky kolmé na statorové a rotorové jádro. To znamená, že tečná složka magnetické indukce $b_t(\alpha, t)$ je mnohem menší než jeho normálová složka $b(\alpha, t)$:

$$\begin{aligned} p_r(\alpha, t) &= \frac{b^2(\alpha, t)}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} [F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, t)]^2 \Lambda_g^2(\alpha, t) = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} [F_1^2(\alpha, t)\Lambda_g^2(\alpha, t) + 2F_1(\alpha, t)\Lambda_g(\alpha, t)F_2(\alpha, t)\Lambda_g(\alpha, t) + F_2^2(\alpha, t)\Lambda_g^2(\alpha, t)] = \\ &= \frac{[b_1(\alpha, t)]^2 + 2b_1(\alpha, t)b_2(\alpha, t) + [b_2(\alpha, t)]^2}{2\mu_0} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

V tomto výrazu se vyskytují 3 skupiny radiálních sil:

- magnetický tlak jako výsledek statorové harmonické řádu v (způsobený členem rovnice $[b_1(\alpha, t)]^2$):

$$p_{rv}(\alpha, t) = \frac{[B_{mv}\cos(vp\alpha \mp \omega t)]^2}{2\mu_0} = \frac{B_{mv}^2}{4\mu_0} [1 + \cos(2vp\alpha \mp 2\omega t)] \quad (3.1.10)$$

- tlak způsobený statorovou harmonickou v a rotorovou harmonickou μ (člen rovnice $2b_1(\alpha, t)b_2(\alpha, t)$):

$$\begin{aligned} p_{rv\mu}(\alpha, t) &= \frac{2B_{mv}\cos(vp\alpha \mp \omega t)B_{m\mu}\cos(\mu p\alpha \mp \omega_\mu t + \phi_\mu)}{2\mu_0} = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} B_{mv}B_{m\mu} \{ \cos[(vp\alpha \mp \omega t) - (\mu p\alpha \mp \omega_\mu t + \phi_\mu)] + \\ &+ \cos[(vp\alpha \mp \omega t) + (\mu p\alpha \mp \omega_\mu t + \phi_\mu)] \} = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} B_{mv}B_{m\mu} \{ \cos[p\alpha(v - \mu) \mp (\omega - \omega_\mu)t - \phi_\mu] + \cos[p\alpha(v + \mu) \mp \\ &\mp (\omega + \omega_\mu)t + \phi_\mu] \} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

- tlak způsobený rotorovou harmonickou μ (složka $[b_2(\alpha, t)]^2$):

$$p_{rv}(\alpha, t) = \frac{[B_{m\mu}\cos(\mu p\alpha \mp \omega_\mu t + \phi_\mu)]^2}{2\mu_0} = \frac{B_{m\mu}^2}{4\mu_0} [1 + \cos(2\mu p\alpha \mp 2\omega_\mu t + 2\phi_\mu)] \quad (3.1.12)$$

Obecně lze magnetický tlak působící na jednotku plochy vyjádřit jako:

$$p_r = P_{mr}\cos(r\alpha - \omega_r t) \quad (3.1.13)$$

kde $r = 1, 2, 3, \dots$ je řád síly

ω_r je úhlová frekvence síly řádu r

3.1.2 Amplituda magnetického tlaku

Amplituda radiálního magnetického tlaku P_{mr} r -tého řádu v rovnici 3.1.13 závisí na obsahu harmonických složek magnetické indukce podílející se na jeho vzniku. Pokud je magnetický tlak buzen statorovou harmonickou v , pak amplituda se bude rovnat:

$$P_{mr} = \frac{B_{mv}^2}{4\mu_0} \quad (3.1.14)$$

Pokud je buzen rotorovou harmonickou řádu μ :

$$P_{mr} = \frac{B_{m\mu}^2}{4\mu_0} \quad (3.1.15)$$

Pokud je buzen statorovou harmonickou řádu v a rotorovou harmonickou řádu μ :

$$P_{mr} = \frac{B_{mv}B_{m\mu}}{2\mu_0} \quad (3.1.16)$$

3.1.3 Deformace magnetického jádra způsobené rozložením radiálních sil

Mezi statorem a rotorem tedy vznikají časově proměnné radiální síly, které mají různý počet prostorových vln. Jinými slovy, vznikají síly s různými řády. Tyto síly lze obecně popsat již výše popsanou rovnicí:

$$p_r = P_{mr} \cos(r\alpha - \omega_r t) \quad (3.1.17)$$

Z toho je vidět, že silové vlny obíhají podél vrtání úhlovou rychlostí ω_r/r a kmitočet časové změny tahu f_r je:

$$f_r = \omega_r / 2\pi \quad (3.1.18)$$

Tyto časově proměnné síly se tedy snaží rozechvít stator. Největší deformace přitom nastávají, pokud se frekvence f_r nachází blízko vlastního mechanického kmitočtu statoru.

Nejdůležitější jsou případy, kdy je řád síly nízký: $r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

1) Vibrační mód $r = 0$

Rovnice silové vlny přejde v tomto případě do tvaru:

$$p_0 = P_{m0} \cos \omega_0 t \quad (3.1.19)$$

Síla je rozložena rovnoměrně po obvodu statoru, má periodický průběh a způsobuje radiální kmitání statoru. Vzniká interferencí dvou vln magnetické indukce, které mají stejnou vlnovou délku (stejný počet pólů), ale s různou rychlostí (frekvencí).

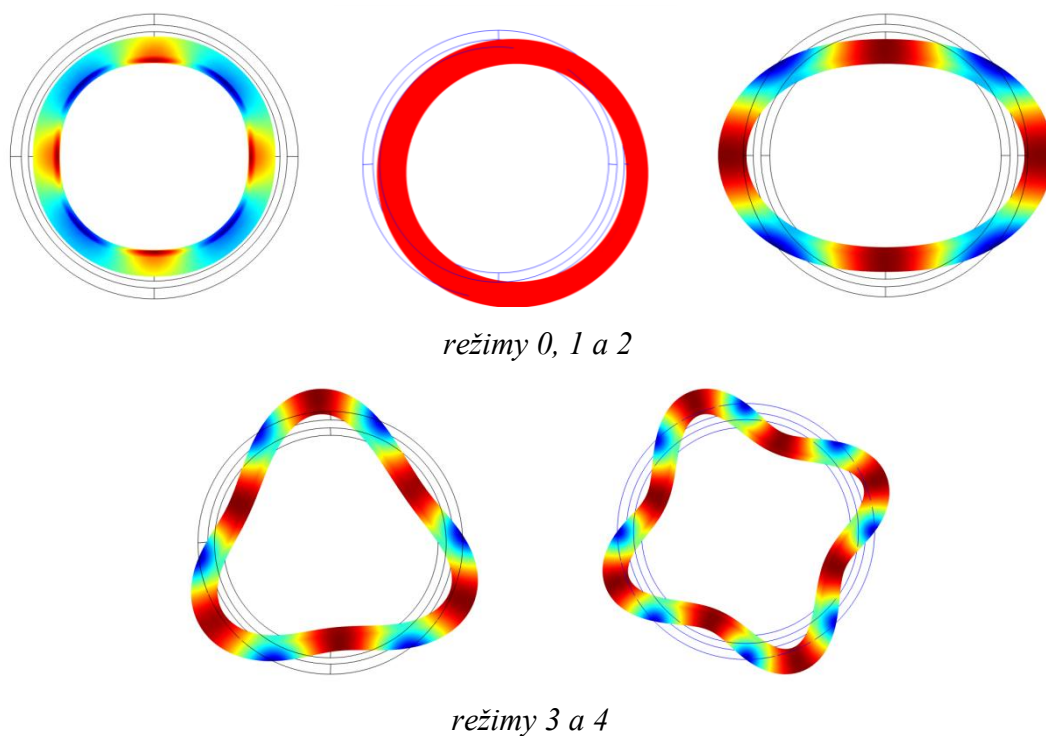
2) Vibrační mód $r = 1$

$$p_r = P_{m1} \cos(r - \omega_1 t) \quad (3.1.20)$$

Režim vytváří jednostranný magnetický tah, který obíhá úhlovou rychlostí ω_1 po obvodu stroje, a pokud se dostane do rezonanční frekvence, vyvolává silné vibrace. Vzniká složením dvou vln indukce, jejichž počet pólpárů se liší o jedničku.

3) Vibrační módy $r = 2, 3, 4, \dots$

Při tomto režimu vznikají obecné průhyby jádra stroje. Pro názornost jsou na obrázku 3 ukázány výše uvedené deformační režimy:



Obr. 3.1: Deformace magnetického jádra

Úhlová frekvence a řád radiálního magnetického tlaku vychází z rovnic 3.1.10, 3.1.11 a 3.1.12:

Tlak buzený statorovou harmonickou ν

$$\omega_r = 2\omega \quad f_r = 2f \quad r = 2\nu p \quad (3.1.21)$$

Tlak buzený rotorovou harmonickou μ

$$\omega_r = 2\omega_\mu \quad f_r = 2f_\mu \quad r = 2\mu p \quad (3.1.22)$$

Tlak buzený statorovou harmonickou ν a rotorovou harmonickou μ

$$\omega_r = \omega \pm \omega_\mu \quad f_r = f \pm f_\mu \quad r = (\nu \pm \mu)p \quad (3.1.23)$$

Pro základní prostorovou harmonickou $\nu = 1$ je frekvence podle rovnice 3.18 rovna $f_r = 2f$ a řád síly je $r = 2p$. [1]

3.1.4 Frekvence a řády radiálních sil

- Síla způsobená statorovou prostorovou harmonickou

Podle výše uvedeného je frekvence radiálních sil rovna dvojnásobku základní napájecí frekvence řád harmonické:

$$r = 2\nu p = 2(kQ_1 \pm p) \quad (3.1.24)$$

- Interakce statorových a rotorových harmonických

Pro základní časovou harmonickou pole statoru platí, že v každém svém bodě pulsuje úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi f$, kde f je základní frekvence. V asynchronním stroji pro úhlovou frekvenci rotorové drážkové harmonické platí:

$$\omega_\mu = \omega \pm kQ_2\Omega_m = \omega \pm kQ_2 \left[2\pi \frac{f}{p}(1-s) \right] = 2\pi f \left[1 - k \frac{Q_2}{p}(1-s) \right] \quad (3.1.25)$$

kde $\Omega_m = 2\pi f(1-s)/p$ je mechanická úhlová frekvence rotoru

$k=1, 2, 3, \dots$

s je skluz stroje

pak výsledná úhlová frekvence radiálních sil způsobených statorovou a rotorovou harmonickou:

$$\omega_r = \omega \pm \omega_\mu = \omega \pm \omega \pm kQ_2 \left[2\pi \frac{f}{p}(1-s) \right] \quad (3.1.26)$$

Odtud frekvence radiálních sil

$$f_r = f k \frac{Q_2}{p}(1-s) \quad \text{a} \quad f_r = f \left[k \frac{Q_2}{p}(1-s) \pm 2 \right] \quad (3.1.27)$$

A řád sil

$$r = (\nu \pm \mu)p = kQ_2 \pm kQ_2 \pm 2p \quad (3.1.28)$$

- Rotorová harmonická

Podle rovnice 3.1.22 je úhlová frekvence radiálních magnetických sil indukčního stroje

$$\omega_r = 2\omega_\mu = 2(\omega \pm kQ_2\Omega_m) = 4\pi f \left[1 \pm \frac{Q_2}{p}(1-s) \right] \quad (3.1.29)$$

$$f_r = 2f \left[1 \pm k \frac{Q_2}{p}(1-s) \right] \quad (3.1.30)$$

a odpovídající řády sil

$$r = 2\mu p = 2(kQ_2 \pm p) \quad (3.1.31)$$

- Radiální síly vlivem excentricity

Pokud je rotor uložen ve stroji s nějakou excentricitou, dochází ke vzniku přídavných pulzací magnetické indukce ve vzduchové mezeře a indukce je vyjádřena:

$$b_{1\epsilon} = \frac{\mu_0}{gk_c} \cos(\alpha - \Omega_\epsilon t) F_{m1} \cos(p\alpha - \omega t - \phi) = \frac{\mu_0 \epsilon}{2gk_c} F_{m1} \cos[v_\epsilon p\alpha \mp (\omega \pm \Omega_\epsilon)t \mp \phi] \quad (3.1.32)$$

pro asynchronní stroje:

$$\Omega_\epsilon = \Omega(1 - s) = \frac{\omega}{p}(1 - s) = 2\pi \frac{f}{p}(1 - s) \quad (3.1.33)$$

[Dále se zavádí statická excentricita (kdy $\Omega_\epsilon = 0$): $\epsilon = \frac{e}{g}$, g je velikost vzduchové mezery, e je rotorová excentricita]

a řád statorové harmonické vlivem excentricity (která má počet pólů $p \pm l$):

$$v_\epsilon = 1 \pm \frac{1}{p} \quad (3.1.34)$$

Tato indukce způsobená excentricitou vyvolá přídavnou indukci v rotoru

$$b_{2\epsilon}(\alpha, t) = \sum_{\mu\epsilon} B_{2m\mu\epsilon} \cos(\mu_\epsilon p\alpha - \Omega_{\mu\epsilon} t - \phi_{\mu\epsilon}) \quad (3.1.35)$$

kde řád harmonické magnetické indukce

$$\mu_\epsilon = k \frac{Q_2}{p} + \left(1 \pm \frac{1}{p}\right) \quad (3.1.36)$$

a úhlová frekvence

$$\Omega_{\mu\epsilon} = \omega_v + \omega \left[k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right] \quad (3.1.37)$$

$$\text{kde } \omega_v = 2\pi\nu f$$

Excentricita tedy způsobuje nevyváženost magnetické síly, která může zapříčinit ohnutí hřídele. Indukuje napětí v paralelních větvích vinutí a vede tak ke vzniku vyrovnávacích proudů. Dále způsobuje snížení mechanické tuhosti hřídele a pokles prvních kritických otáček rotoru.

Úhlová frekvence magnetické indukce pro statickou excentricitu je $\omega = 2\pi f$, pro dynamickou excentricitu je $\omega \pm \Omega_\epsilon$ (pro indukční stroje).

Úhlová frekvence pro vyšší harmonické způsobené excentricitou:

$$\Omega_{r\epsilon} = \omega \pm \Omega_\epsilon \pm \omega_{v=1} + \omega \left[k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right] \quad (3.1.38)$$

Z této rovnice (pro statickou excentricitu) jsou dány 2 frekvence:

$$f_{r\epsilon} = f \left[2 + k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right] \quad \text{a} \quad f_{r\epsilon} = f k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \quad (3.1.39)$$

a základní řády excentrických harmonických:

$$r = 1 \quad \text{a} \quad r = 2 \quad (3.1.40)$$

dále pro vyšší harmonické:

$$r_\epsilon = p(v_\epsilon \pm \mu_\epsilon) = p \pm 1 \pm (kQ_2 + p \pm 1) \quad (3.1.41)$$

tyto lze obecně zanedbat.

pro úhlovou frekvenci vyšších harmonických, způsobené dynamickou excentricitu, lze po rozepsání psát:

$$\Omega_{r\epsilon} = \omega \left[1 \pm \frac{1}{p} (1 - s) \pm 1 \pm k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right] \quad (3.1.42)$$

pak:

$$f_{r\epsilon} = f \left[2 \pm \frac{1}{p} (1 - s) + k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right]; \quad f_{r\epsilon} = f \left[\frac{1}{p} (1 - s) + k \frac{Q_2}{p} (1 - s) \right] \quad (3.1.43)$$

a pro jejich řády platí stejné rovnice jako 3.1.37 a 3.1.38

- **Magnetostrikce**

Magnetostrikce je změna rozměrů a tvaru krystalů magnetických materiálů způsobená střídavou magnetizací. Většina feromagnetických materiálů vykazuje měřitelnou magnetostrikci. Ta je definována pomocí magnetostrikčního koeficientu Λ , který vyjadřuje poměr změny délky Δl k celkové délce l při zvyšující se magnetizaci od nuly do nasycené hodnoty:

$$\Lambda = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.1.44)$$

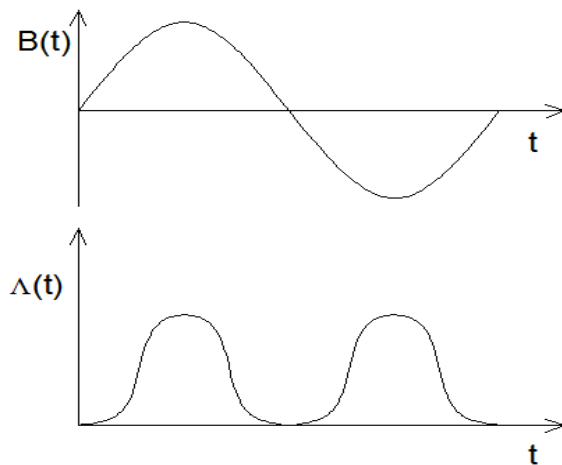
Jádra elektrických točivých strojů, transformátorů a tlumivek působením střídavého toku mění cyklicky své rozměry a tvar. Na obrázku 3.2 je ukázán průběh magnetické indukce a korespondující průběh koeficientu Λ . Průběh Λ se skládá ze stejnosměrné složky a řady harmonických funkcí, které se mohou podílet na vzniku přídavných vibrací. Základní vlna

těchto vibrací má dvojnásobnou frekvenci, než je frekvence indukce (napájecí frekvence), a nežádoucí složku hluku může vytvářet zejména u dvoupólových strojů: [4]

$$f_{ms} = 2f \quad (3.1.45)$$

a řád

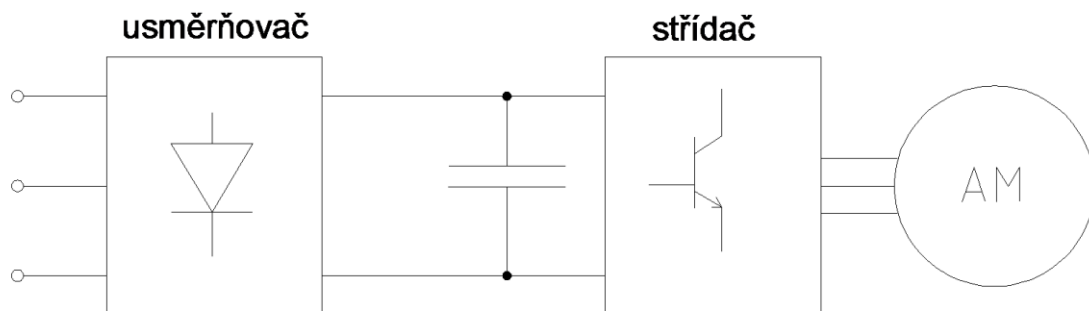
$$r_{ms} = 2p \quad (3.1.46)$$



Obr. 3.2: Časová závislost magnetostrikčního koeficientu

3.2 Indukční stroj napájený neharmonickým zdrojem

V dnešní době je většina řízených asynchronních motorů napájena z měničů. Ty se skládají z usměrňovače, stejnosměrného obvodu a střídače, který napájí stroj. Výstupní proud a napětí z měniče mají nesinusový průběh, to znamená, že obsahují vyšší časové harmonické v důsledku spínání prvků měniče. Vibrace (a s nimi spojený hluk) stroje napájeného neharmonickým proudem jsou obecně vyšší, než u stroje napájeného čistě harmonickým napájením.



Obr. 3.3: Blokové schéma motoru napájeného usměrňovačem

3.2.1 Vznik vyšších časových harmonických

Jak již bylo řečeno, proud statoru elektrického stroje napájeného ze střídače nemá sinusový charakter, obsahuje vyšší časové harmonické $n = 2m_1k \pm 1$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tento proud můžeme vyjádřit rovnicí (Fourier řadou):

$$i_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{1mn} \sin(\omega_n t - \phi_{in}) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_{1n} \sin(\omega_n t - \phi_{in}) \quad (3.2.1)$$

kde $I_{1mn} = \sqrt{2} I_{1n}$ je amplituda n -té harmonické proudu, úhlová frekvence a frekvence vyšší harmonické proudu jsou:

$$\omega_n = n\omega = 2\pi n f \quad (3.2.2)$$

$$f_n = n f \quad (3.2.3)$$

Proudy vyjádřené rovnicí 3.2.1 jsou posunuty v každé fázi o $2\pi/m_1$, kde m_1 je počet fází. Skluz n -té harmonické je vyjádřen:

$$s_n = \frac{nn_s \mp n_s(1-s)}{nn_s} \quad (3.2.4)$$

$n.n_s = nf/p$ je synchronní rychlost n -té harmonické, $n_s(1-s)$ je rotorová rychlost, s je skluz základní harmonické. Znaménko '-' je pro časové harmonické $n = 2m_1k + 1$ a znaménko '+' platí pro časové harmonické $n = 2m_1k - 1$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Protože indukční stroje pracují s malým skluzem, lze přibližně psát:

$$s_n = 1 \mp \frac{1}{n} \quad (3.2.5)$$

Se zvyšujícím řádem harmonické se rovnice blíží k jedničce. Skluz s_n , úhlová frekvence ω_n rotorového proudu, skluz vyšší časové harmonické korespondující se synchronní rychlostí jsou:

- pro rotující magnetické pole:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - \frac{1}{n}(1 - s) \\ \omega_n &= n\omega s_n = \omega[n - (1 - s)] \\ s_{sn} &= 1 - n \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

- pro zpětně rotující pole:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{n}(1 - s) \\ \omega_n &= n\omega s_n = \omega[n + (1 - s)] \\ s_{sn} &= 1 + n \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

kde s je skluz základní harmonické, $\omega = 2\pi f$ je úhlová rychlost základní harmonické, f je její frekvence, n je řád harmonické

3.2.2 Radiální síly pro neharmonické napájení

Frekvence a řády nejdůležitějších radiálních sil, které vznikají vlivem působení střídače, jsou v následující tabulce:

Zdroj silového účinku	frekvence	řád síly
Statorová harmonická b1vn2 stejného řádu n	$f_m = 2nf$, $n = 2km_1 \pm 1$ $k = 0, 1, 2, \dots$	$r = 2vp$
Rotorové harmonické stejného řádu	$f_m = 2nf_\mu$	$R = 2\mu p$
Statorová a rotorová harmonická	$f_m = f_n \pm f_\mu$	$R = (v \pm \mu)p$
Součet a rozdíl základní frekvence střídače a vyšších harmonických různých řádů	$f_m = f \pm f_n$ $n = 2km_1 \pm 1$	$r = 0$ nebo $r = 2p$
Vzájemná interakce spínací frekvence f_{sw} a vyšší časové harmonické $f_n = n' f_{sw} \pm n'' f$	$f_m = (\pm f_n) - f $ $n' \neq n''$	$r = 0$
Vliv permanence a časové harmonické	$f_m = (\pm f_n) - f $ $f_m = f_n \pm \mu f $	$r = 0, r = 2$
Harmonické přenášené přes meziobvod a střídač	$f_m = 2m_1 kf$ $k = 1, 2, 3, \dots$	$r = 2p$

Tab. 1: Významné frekvence a řády vyskytující se v neharmonickém napájení stroji

3.2.2.1 Statorová a rotorová magnetická indukce

Prostorová a časová harmonická magnetické indukce n -té časové harmonické může být ve tvaru: (jako suma prostorových harmonických)

-pro stator:

$$b_{1n}(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} b_{1vn}(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} B_{mvn} \cos(vp\alpha - \omega_n t) \quad (3.2.8)$$

-pro rotor

$$b_{2n}(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{1\mu n}(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\mu n} \cos(\mu p\alpha - \omega_{\mu,n} t + \phi_{\mu,n}) \quad (3.2.9)$$

N je řád statorové prostorové harmonické, μ je řád rotorové prostorové harmonické, n je řád statorové časové harmonické, B_{mvn} a $B_{m\mu n}$ jsou amplitudy harmonických magnetické indukce statoru a rotoru, α je úhel měřený z počátku souřadného systému, $\omega_n = 2\pi f$ je úhlová frekvence časové harmonické proudu statoru, f je základní frekvence, $\omega_{\mu,n}$ je úhlová frekvence prostorové harmonické μ rotoru pro danou časovou harmonickou n , $\phi_{\mu,n}$ je úhel mezi statorovou a rotorovou n -tou prostorovou harmonickou.

Vyšší prostorové jsou způsobeny rozdělením statorového a rotorového vinutí v drážkách, časové harmonické v proudu statoru zase vlivem napájení (z měniče).

3.2.2.2 Statorové harmonické stejného řádu

Radiální tlak je vyjádřen pomocí Maxwellova tenzoru dle rovnice 3.1.9. První člen této rovnice je způsoben statorovými harmonickými $[b_{1vn}(\alpha, t)]^2$ stejného řádu v nebo n

$$\begin{aligned} p_{r,n}(\alpha, t) &= \frac{[b_{1vn}(\alpha, t)]^2}{2\mu_0} = \frac{[B_{mvn} \cos(vp\alpha - \omega_n t)]^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{B_{mvn}^2}{4\mu_0} [1 + \cos(2vp\alpha - 2\omega_n t)] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

pro vyšší časové harmonické $n > 1$ je úhlová rychlost statorové prostorové harmonické $\omega_n = 2\pi f_n$, kde $f_n = nf$ je frekvence n -té časové harmonické. Pro základní harmonickou $v = 1$ a $n = 1$ je frekvence radiálního mag. tlaku $f_r = 2f$ a je řád $r = 2p$. Pro vyšší prostorovou harmonickou $v > 1$ a základní časovou harmonickou $n = 1$ bude frekvence radiálního tlaku je také $f_r = 2f$ a řád (vibrační mód) bude $r = 2vp$. Pro prostorovou harmonickou $v = 1$ a vyšší časovou harmonickou bude frekvence $f_m = 2nf$ a řád $r = 2p$.

3.2.2.3 Vzájemné působení statorové a rotorové harmonické

Druhý člen rovnice 3.1.9 vyjadřuje působení statorové a rotorové harmonické $2b_{1\nu n}(\alpha, t)b_{2\mu n}(\alpha, t)$

$$\begin{aligned}
 p_{r,n}(\alpha, t) &= \frac{2b_{1\nu n}(\alpha, t)b_{2\mu n}(\alpha, t)}{2\mu_0} = \frac{[B_{m\nu n} \cos(\nu p\alpha \mp \omega_n t)]^2}{2\mu_0} \\
 &= \frac{2 \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu n} \cos(\nu p\alpha \mp \omega_n t) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\mu n} \cos(\mu p\alpha \mp \omega_{\mu n} t + \phi_{\mu n})}{2\mu_0} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\nu n} B_{m\mu n} \{ \cos[(\nu p\alpha \mp \omega_n t) - (\mu p\alpha \mp \omega_{\mu n} t + \phi_{\mu n})] + \\
 &\quad + \cos[(\nu p\alpha \mp \omega_n t) + (\mu p\alpha \mp \omega_{\mu n} t + \phi_{\mu n})] \} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\nu n} B_{m\mu n} \{ \cos[(\nu - \mu) p\alpha \mp (\omega_n - \omega_{\mu n}) t - \phi_{\mu n}] + \\
 &\quad + \cos[(\nu + \mu) p\alpha \mp (\omega_n + \omega_{\mu n}) t + \phi_{\mu n}] \}
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

vzájemné působení těchto harmonických generuje radiální tlak s počtem párů $r = (\nu \pm \mu)p$ a s frekvencemi $f_r = f_n \pm f_{\mu n}$.

Podle rovnice 3.2.4 a 3.2.5 pro asynchronní stroje a pro $n = 1$ skluz je $s_{n=1} = s \approx 0$ a pro $n > 1$ je $s_n \approx 1$. Frekvence vibrací asynchronního stroje působením $2b_{1\nu n}(\alpha, t) b_{2\mu n}(\alpha, t)$ pro $\mu = kQ_2/p \pm 1$ jsou :

$$f_{rn} = f_n \pm f_{\mu n} = f_n \pm f_{\mu} \left[1 \pm k \frac{Q_2}{p} (1 - s_n) \right] \tag{3.2.12}$$

3.2.2.4 Rotorová harmonická stejného řádu

Třetí člen rovnice 3.1.9 je výsledek interakce rotorových harmonických $[b_{2\mu n}(\alpha, t)]^2$ stejného řádu

$$\begin{aligned}
 p_{r,n}(\alpha, t) &= \frac{[b_{2\mu n}(\alpha, t)]^2}{2\mu_0} = \frac{[B_{m\mu n} \cos(\mu p\alpha \mp \omega_{\mu n} t + \phi_{\mu n})]^2}{2\mu_0} \\
 &= \frac{1}{4\mu_0} B_{m\mu n}^2 [1 + \cos(2\mu p\alpha \mp 2\omega_{\mu n} t + 2\phi_{\mu n})]
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

3.2.2.5 Řády a frekvence magnetického tlaku pro neharmonické napájení

Úhlové frekvence a řády tlaku působící v radiálním směru vlivem vyšších prostorových a časových harmonických z rovnic 3.2.11, 3.2.12 a 3.2.13:

-buzené statorovými harmonickými stejného řádu:

$$\omega_{rn} = 2n\omega; \quad f_{rn} = 2nf; \quad r = 2vp \quad (3.2.14)$$

-buzené statorovými harmonickými v a rotorovými harmonickými μ :

$$\omega_{rn} = n\omega \pm \omega_{\mu n}; \quad f_{rn} = nf \pm f_{\mu n}; \quad r = (v \pm \mu)p \quad (3.2.15)$$

-buzené rotorovými harmonickými stejného řádu

$$\omega_{rn} = 2n\omega_{\mu}; \quad f_{rn} = 2nf_{\mu}; \quad r = 2\mu p \quad (3.2.16)$$

podle rovnice 3.2.14, pro základní prostorovou harmonickou $v = 1$ a časovou harmonickou $n > 1$, bude frekvence radiální síly $f_m = 2nf$ a její řád bude $r = 2p$.

Dle rovnice 3.2.15, pro $v = 1$ a pro časovou harmonickou $n > 1$, frekvence síly je $f_m = n(f \pm f_{\mu})$ a řád $r = (1 \pm \mu)p$.

Dle 3.2.13, pro prostorovou $\mu > 1$ a pro časovou harmonickou $n > 1$, potom frekvence radiální síly bude $f_m = 2nf_{\mu}$ a řád $r = 2\mu p$. ($f_m = 2nf[1 \pm k(Q_2/p)(1-s_n)]$ - to vychází z: $f_r = 2f[1 \pm kQ_2(1-s)/p]$).

3.2.2.6 Interakce statorových harmonických různého řádu

Napájení asynchronního motoru ze střídače obsahuje vysoký obsah různých časových harmonických ve vinutí statoru. Vyšší časové harmonické těchto různých řádů mohou vyvolat silové účinky, jejichž frekvence a řády jsou:

$$f_{rn} = (n' \pm n'')f; \quad r = 0; \quad r = 2p \quad (3.2.17)$$

kde $n' \neq n''$. Nejvýznamnější síly jsou způsobeny součtem a rozdílem základní harmonické a největšími časovými harmonickými statorového proudu. Jejich frekvence je $f_m = (1 \pm n)f$, kde $n = 2km_l \pm 1$.

3.2.2.7 Vzájemné působení spínací frekvence a vyšších časových harmonických

Vysoká amplituda sil vlivem spínací frekvence f_{sw} a vyšší časové harmonické $f_n = n'f_{sw} \pm n''f$. Pokud n' bude liché číslo, n'' sudé a naopak: $f_n = f_{sw} \pm 2f$; $f_n = f_{sw} \pm 4f$; $f_n = f_{sw} \pm 6f \dots$ a $f_n = 2f_{sw} \pm f$; $f_n = 2f_{sw} \pm 3f$; $f_n = 4f_{sw} \pm 5f$. Důležitý je případ interakce mezi základní harmonickou a časovou harmonickou, pro který platí:

$$f_{rn} = |(\pm f_n) - f|; \quad r = 0 \quad (3.2.18)$$

3.2.2.8 Vliv usměrňovače

Harmonické mohou být také přenášeny z meziobvodu přes střídač do statorového vinutí.

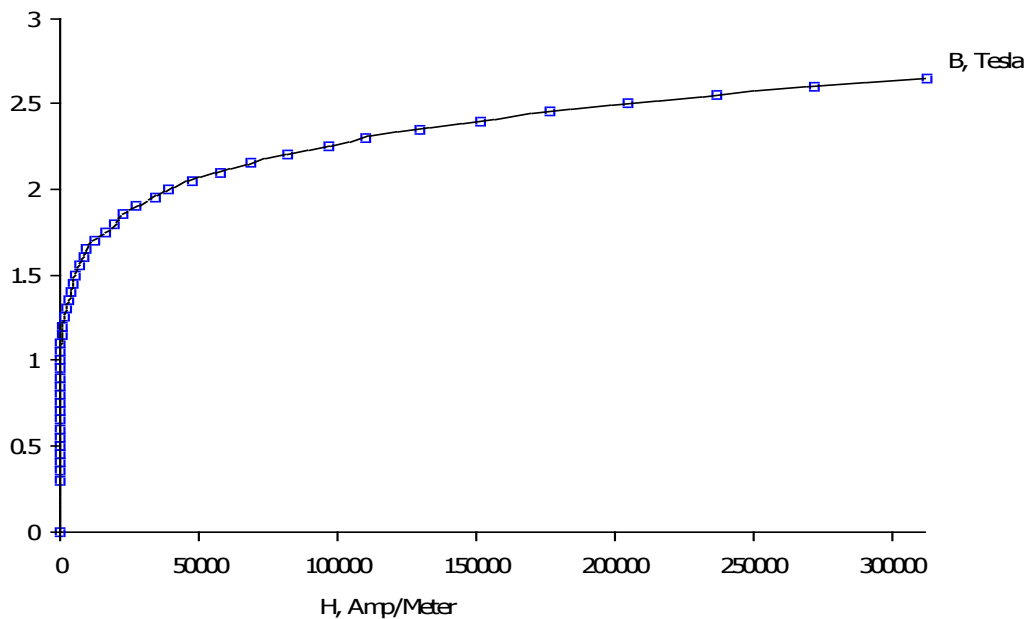
Mohou vyvolat radiální síly s následující frekvencí a řádem:

$$f_{rn} = nf = 2m_1kf; \quad r = 2p \quad (3.2.19)$$

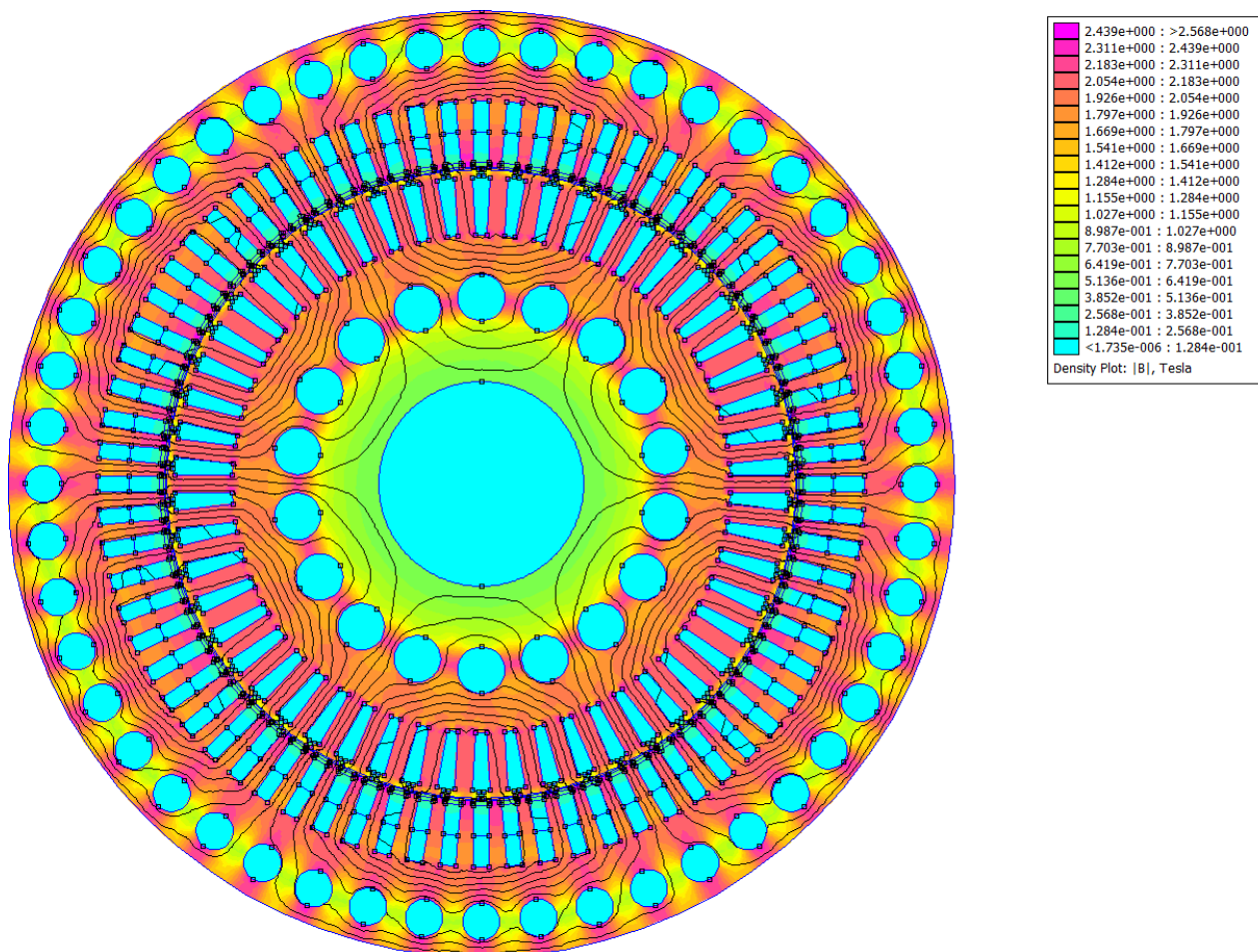
kde $n = 2m_1k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, m_1 je počet fází.

3.3 Model asynchronního stroje

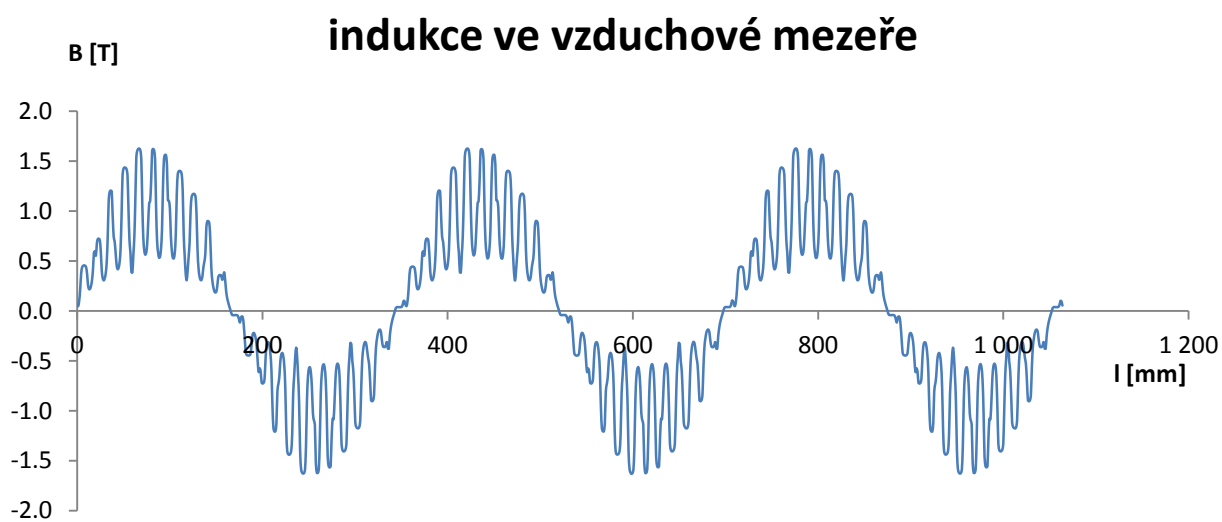
Pro názornost jsou v této kapitole ukázány dva příklady asynchronních motorů – jejich rozložení magnetického pole v řezu motoru, průběh indukce ve vzduchové mezeře a průběh síly ve vzduchové mezeře. Jedná se šestipólový motor se jmenovitými parametry: $P_n = 250$ kW, $U_n = 425$ V, $n = 1380$ ot./min., $I_n = 430$ A, $\cos \varphi = 0,84$ a čtyřpólový motor se jmenovitými parametry: $P_n = 84$ kW, $U_n = 400$ V, $n = 2230$ ot./min., $I_n = 178$ A, $\cos \varphi = 0,75$



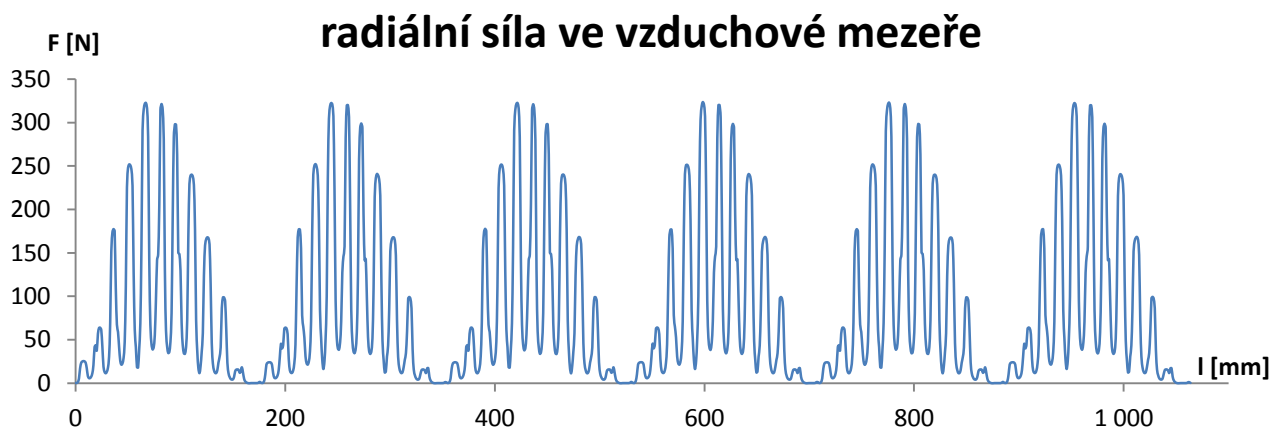
Obr. 3.4: Magnetizační charakteristika stroje



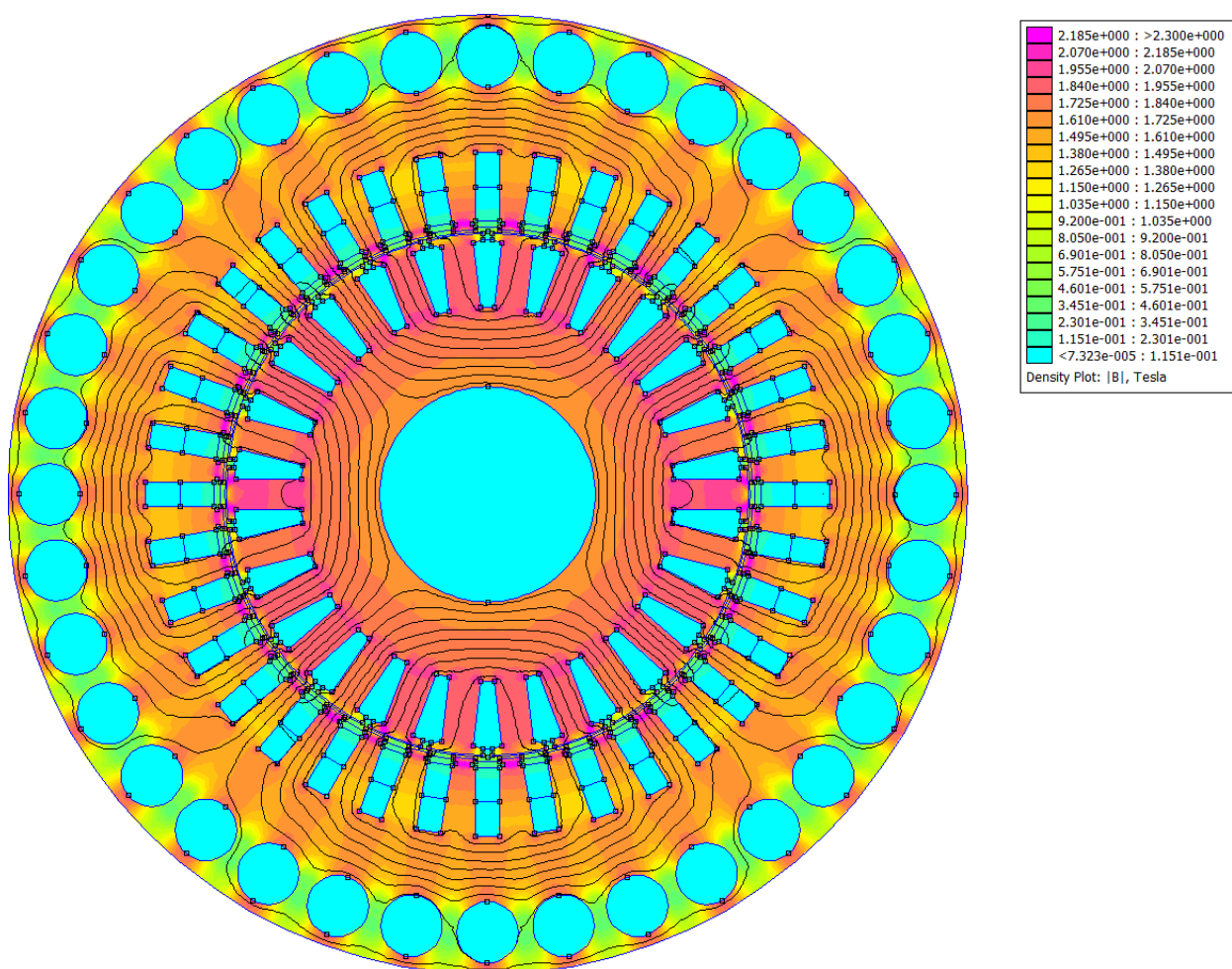
Obr. 3.5: Rozložení mag. indukce při stavu naprázdno 6 pólového stroje



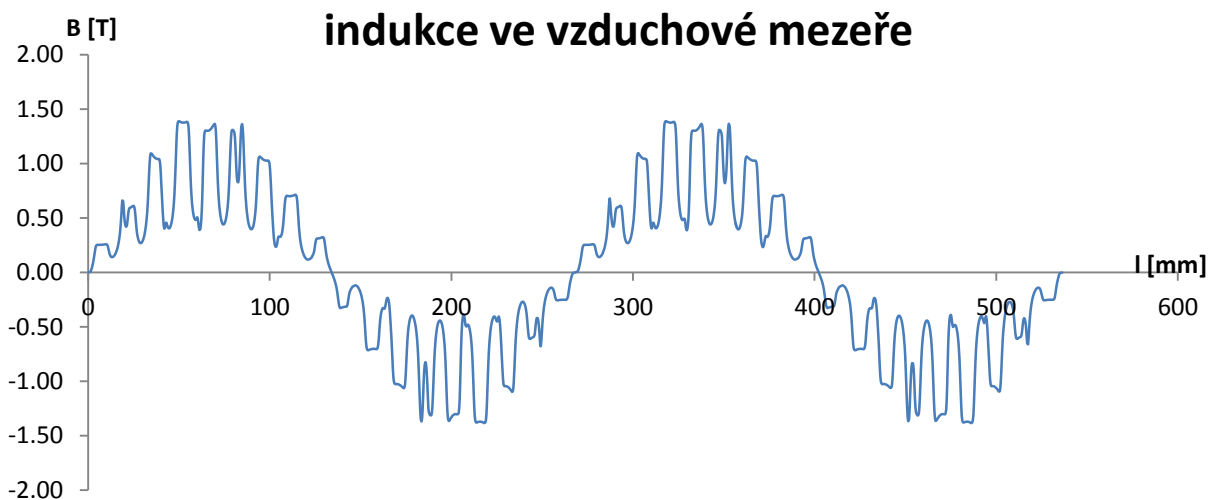
Obr. 3.6: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 6 pólového stroje



Obr. 3.7: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 6 pólového stroje



Obr. 3.8 : Rozložení mag. indukce při stavu naprázdno 4 pólového stroje

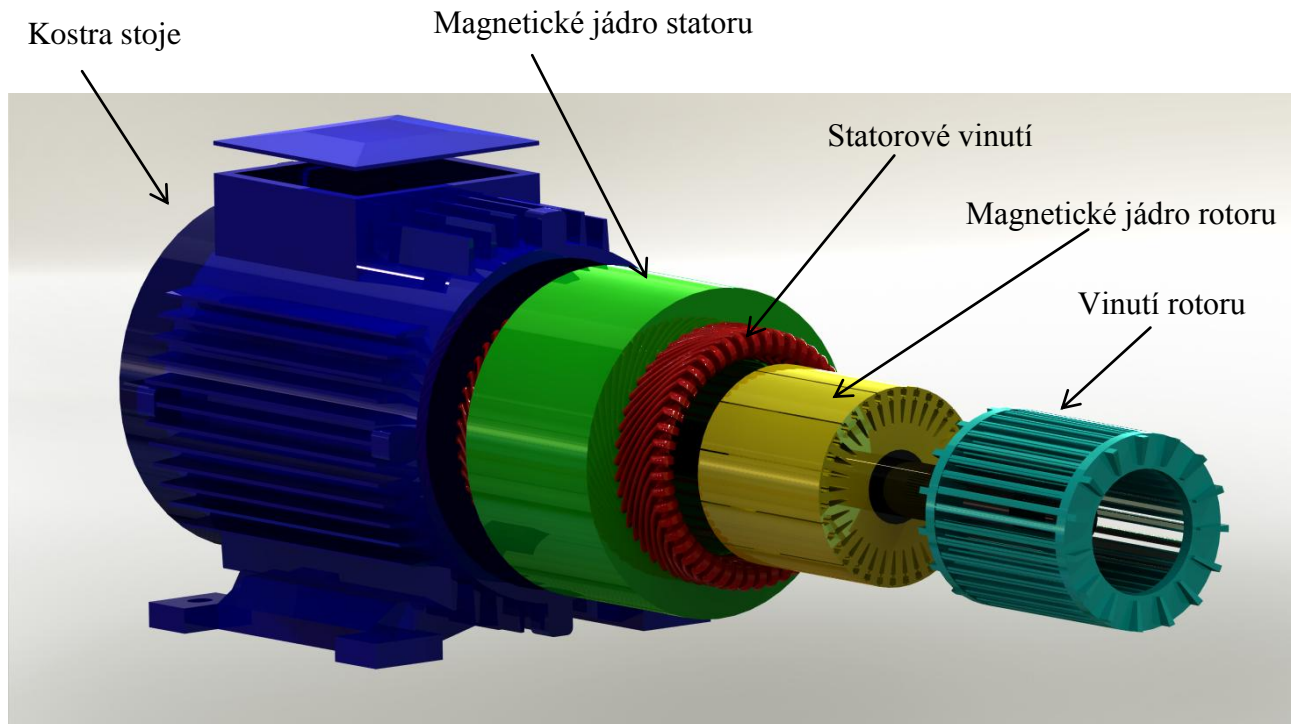


Obr. 3.9: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 4 pólového stroje



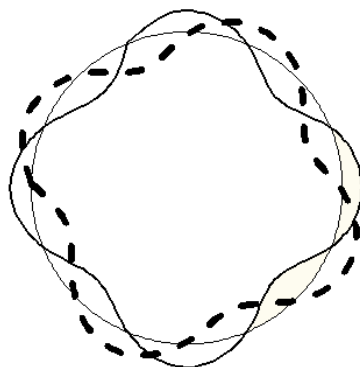
Obr. 3.10: Průběh mag. indukce ve vzduchové mezeře při stavu naprázdno 4 pólového stroje

4. Analytický rozbor modálních vlastností statorového systému



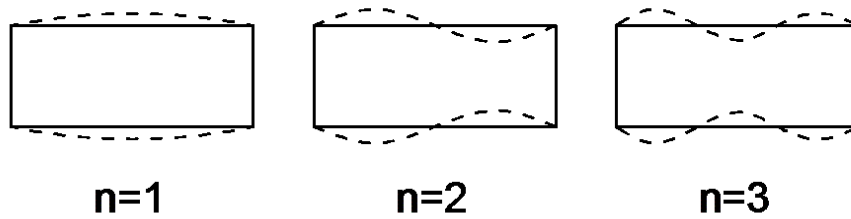
Obr. 4.1: 3D model analyzovaného asynchronního stroje

Jak již bylo řečeno, statorová konstrukce je primárním zdrojem vibrací. Jejich kompletní analytický popis může být docela obtížný, a proto se statorová kostra a magnetické jádro statoru nahrazují válcovými modely jednotlivých částí statorového systému. Vlastní tvary kmitu zaujímají stejné tvary jako při deformaci statorového jádra vlivem působení magnetických sil (popsáno výše). Pro každý čistě obvodový režim (pro který platí $m > 0$) se dále vyskytuje další režim, který má tvar kmitu posunut o úhel $\pi/2m$ a má maximum v místě, kde měl předchozí tvar svůj uzel (při stejné frekvenci); situace je znázorněna na následujícím obrázku: [3]



Obr. 4.2: Radiální tvary kmitu pro řád $m = 4$

V případě kostry stroje bude mít tvar kmitu ještě další axiální tvar:



Obr. 4.3: Axiální tvary kmitu

4.1 Základní výpočet vlastních frekvencí statorového systému

Vlastní frekvence statoru mají velký význam pro analýzu elektrických točivých strojů. Statorový systém, který se skládá z magnetického jádra, vinutí a rámu, je uvažován jako jeden silný válec. Vlastní frekvence statorového systému může být počítána jako:

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_m}{M_m}} \quad (4.1)$$

kde K_m je tuhost [N/m], M_m je hmotnost [kg] statorového systému.

Pro statorové jádro s výškou h_c , hmotností M_c a středním průměrem D_c můžeme pro tuhost a hmotnost psát:

$$K_0 = 4\pi \frac{E_c h_c L_i}{D_c} \quad M_0 = \pi D_c h_c L_i \rho_c k_{Fe} k_{md} \quad (4.2)$$

kde ρ_c hustota materiálu jádra, k_{Fe} je činitel plnění a k_{md} lze definovat jako:

$$k_{md} = 1 + \frac{M_t + M_w + M_i}{M_c} \quad (4.3)$$

M_t je hmotnost statorových zubů, M_c je hmotnost jha, M_w je hmotnost vinutí, M_i je hmotnost izolace.

Potom vlastní kmitočet pro režim tvaru $m = 0$:

$$f_0 = \frac{1}{\pi D_c} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c k_i k_{md}}} \quad (4.4)$$

Pro obvodový režim $m = 1$:

$$K_1 = 4\pi \frac{E_c h_c L_i}{D_c} \quad M_1 = \frac{M_c k_{md}}{F_1^2} = \frac{M_0}{F_1^2} \quad (4.5)$$

$$F_1 = \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2 k_{mrot}/k_{md}}} \quad \kappa = \frac{h_c}{\sqrt{3}D_c} \quad (4.6)$$

$$k_{mrot} = 1 + \frac{Q_1 c_t L_i h_t^2}{\pi D_c I_c} \left(1 + \frac{M_w + M_i}{M_t}\right) (4h_t^2 + 6h_c h_t + 3h_c^2) \quad (4.7)$$

h_t je výška zubu, c_t je šířka zubu, Q_1 počet statorových drážek

$$I_c = \frac{h_c^2 L_i}{12} \quad (4.8)$$

je moment setrvačnosti

Potom výsledná vlastní frekvence bude:

$$f_1 = \frac{1}{\pi D_c} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c k_i k_{md}}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2 \frac{k_{mrot}}{k_{md}}}} = f_0 F_1 \quad (4.9)$$

A nakonec pro režimy $m \geq 2$:

$$K_m = 16\pi \frac{E_c I_c}{D_c^3} (m^2 - 1)^2 k_a^2 \quad (4.10)$$

$$M_m = \pi D_c h_c L_i \rho_c k_i \frac{k_{md} m^2 + 1}{F_m^2 m^2} \quad (4.11)$$

$$F_m = \left\{1 + \frac{\kappa^2 (m^2 - 1) [m^2 (4 + k_{mrot}/k_{md}) + 3]}{m^2 + 1}\right\}^{-1/2} \quad (4.12)$$

$$f_1 = \frac{1}{\pi D_c} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c k_i k_{md}}} \sqrt{\frac{I_c}{\rho_c L_i} \frac{m(m^2 - 1)}{m^2 + 1}} k_a F_m = f_0 \kappa \frac{m(m^2 - 1)}{m^2 + 1} k_a F_1 \quad (4.13)$$

kde koeficient $k_a > 1$ zohledňuje vliv štítů stroje a mechanické uchycení stroje (patky, příruba,...)

Pro vlastní frekvence statoru vlastních tvarů $m \geq 2$ platí:

$$f_m = \frac{2}{\pi D_c^2} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c k_i k_{md}}} \sqrt{\frac{I_c}{L_i h_c} \frac{m(m^2 - 1)}{\sqrt{(m^2 + 1)}}} k_a F_m \quad (4.14)$$

Uvedené rovnice nezaručují přesnost výsledků, protože systém je ve skutečnosti složen z dílčích částí - jha, zubů, vinutí uloženého v drážkách a uložení v rámu stroje. Proto se mohou použít jen k hrubému odhadu frekvencí pouze samotného jádra s částečným vlivem vinutí a zubů. [4]

4.2 Detailnější výpočet vlastních frekvencí jednotlivých částí statoru

V této kapitole je uveden analytický výpočet jednotlivých částí, tj. magnetického jádra, kostry stroje a vinutí.

4.2.1 Vlastní frekvence magnetického jádra

Pokud je poměr délky k průměru jádra $L_i/D_C < 1$, jádro je možné považovat za dutý válecek konečné délky, pro který platí:

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \frac{m(m^2-1)}{\sqrt{(m^2+1)}} \sqrt{\frac{E_c I_c}{\rho_l (0.5D_C)^4}} = \frac{2}{\pi D_C^2} \frac{m(m^2-1)}{\sqrt{(m^2+1)}} \sqrt{\frac{E_c I_c}{\rho_c h_c L_i}} \quad (4.15)$$

I_c je moment setrvačnosti, h_c výška jha, ρ_l hmotnost na jednotku obvodu

$$\rho_l = \rho_c h_c L_i \quad (4.16)$$

Pokud je poměr délky a průměru jádra $L_i/D_C > 1$, tak jádro statoru lze považovat za válcovou skořepinu nekonečné délky a tvary kmitu $m \geq 0$:

$$f_m = \frac{\Omega_m}{\pi D_C} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c (1-\nu_c^2)}} \quad (4.17)$$

ν je poissonův koeficient,

Ω_m je frekvenční parametr, pro který platí:

-pro obvodový tvar kmitu $m = 0$:

$$\Omega_0 = 1 \quad (4.18)$$

-pro obvodový tvar kmitu $m \geq 1$:

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + m^2 + \kappa^2 m^4) \pm \sqrt{(1 + m^2 + \kappa^2 m^4)^2 - 4\kappa^2 m^6}} \quad (4.19)$$

$$\text{kde } \kappa^2 = \frac{h_c^2}{3D_C^2} \quad (4.20)$$

4.2.2 Vlastní frekvence kostry stroje

Kostra motoru s uzavřeným ložiskovým štítem se chová jako válcová nádoba (skořepina) s konci, které jsou pevně vetknuty. Obvodové režimy vlastních tvarů jsou zobrazeny na obr. 4.2, a typické axiální tvary kmitu na obr. 4.3. Pro vlastní kmitočty válcového pláště konečné

délky L , jehož konce jsou na obou koncích vetknuty, platí následující charakteristická rovnice: [4]

$$\Omega_{mn}^6 - (C_2 + \kappa\Delta C_2)\Omega_{mn}^4 + (C_1 + \kappa\Delta C_1)\Omega_{mn}^2 - (C_0 + \kappa\Delta C_0) = 0 \quad (4.21)$$

Výsledkem této rovnice jsou tři kořeny, které odpovídají vibracím ve třech na sebe kolmých směrech. Nejmenší reálný kořen z těchto kořenů pak souvisí s vlastní frekvencí rámu. Pro koeficienty v rovnici (4.21) platí:

$$C_0 = \frac{1}{2}(1 - \nu_f)[(1 - \nu_f^2)\lambda^4 + \kappa^2(m^2 + \lambda^2)^4] \quad (4.22)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(1 - \nu_f)[(3 + 2\nu_f)\lambda^2 + m^2 + (m^2 + \lambda^2)^2 + [(3 - \nu_f)/(1 - \nu_f)]\kappa^2(m^2 + \lambda^2)^3] \quad (4.23)$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2}(3 - \nu_f)(m^2 + \lambda^2) + \kappa^2(m^2 + \lambda^2)^2 \quad (4.24)$$

$$\Delta C_0 = \Delta C_1 = \Delta C_2 = 0 \quad (4.25)$$

$$\lambda_e = n\pi \frac{R_f}{L_f - L_0} ; \quad L_0 = L_f \frac{0,3}{n-0,3} ; \quad \kappa^2 = \frac{h_f^2}{12R_f^2} ; \quad R_f = 0,5(D_f - h_f) \quad (4.26)$$

kde ν_f je poissonův koeficient

R_f je střední poloměr rámu stroje

D_f je vnější průměr kostry

L_f je délka kostry

h_f je tloušťka kostry

Výsledný vlastní kmitočet pro obvodové tvary kmitu $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

a axiální tvary $n = 1, 2, 3, \dots$ je

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega_{mn}}{R_f} \sqrt{\frac{E_f}{\rho_f(1-\nu_f^2)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{mn}}{M_f}} \quad (4.27)$$

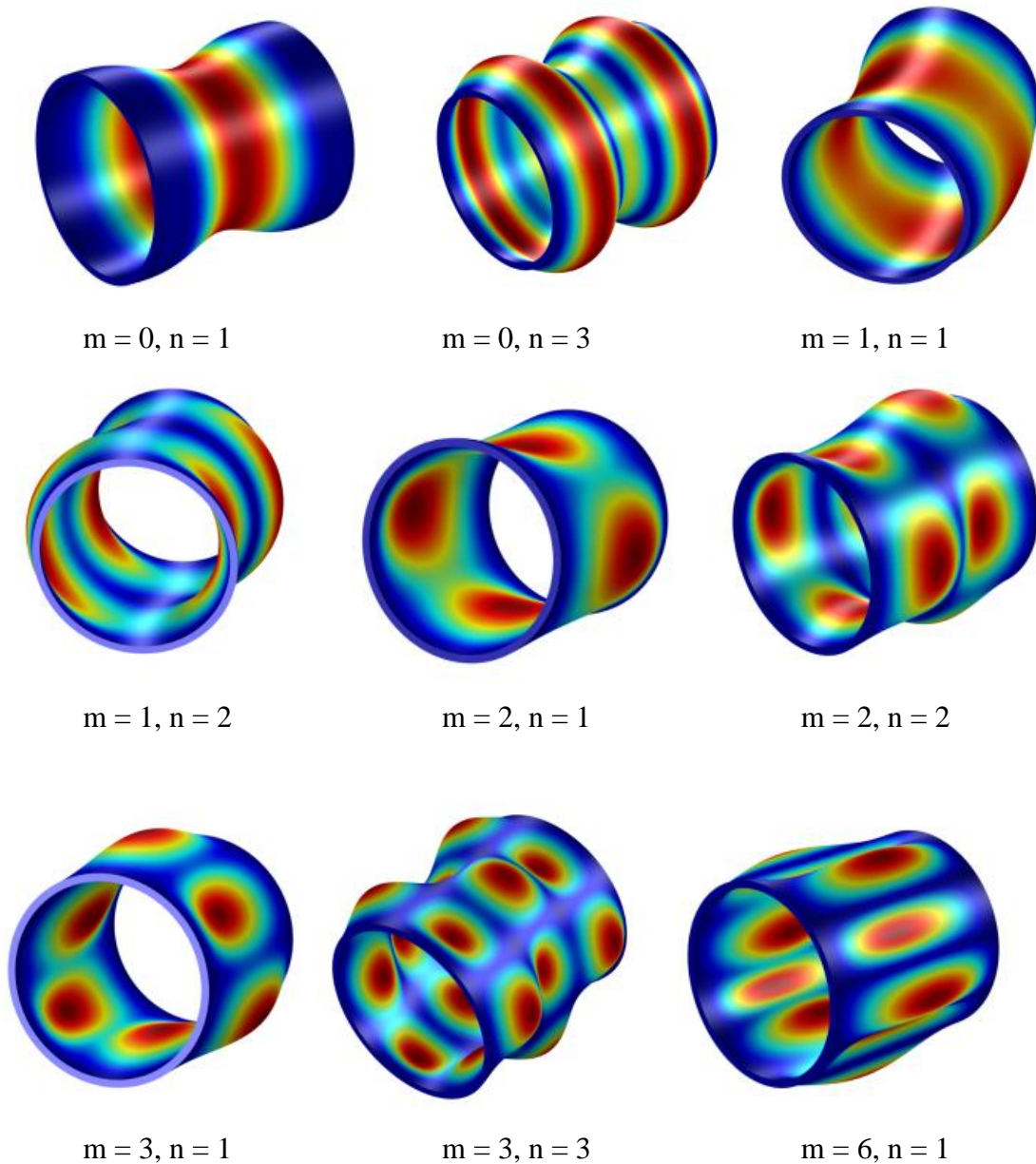
kde E_f je modul pružnosti materiálu kostry

ρ_f je hustota materiálu

$$K_{mn} \text{ je tuhost rámu, pro kterou platí: } K_f = \frac{2E_f L_f h_f \Omega_{mn}^2}{R_f (1-\nu_f^2)} \quad (4.28)$$

$$M_{mn} \text{ je hmotnost kostry: } M_f = \rho_f L_f h_f (2\pi R_f) \quad (4.29)$$

Příklady tvarů kmitu, při kterých může kmitat duté válcové těleso s vetknutými konci při svých vlastních frekvencích:



Obr. 4.4: Vlastní tvary kostry

4.2.3 Vliv vinutí a zubové části

Vinutí uložené v drážkách a oddělené mezi zuby statoru se může považovat za další válcové těleso uvnitř jha s ekvivalentním modulem pružnosti (pro měď s izolací: $9,4 \cdot 10^9$ Pa) a

s hustotou mědi. Vlastní frekvence se spočítají podle stejné rovnice jako pro statorové jádro. Vlastní frekvence statorového systém skládajícího se z jha, kostry stroje a vinutí bude:

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_m^{(c)} + K_{mn}^{(f)} + K_m^{(w)}}{M_c + M_f + M_w}} \quad (4.30)$$

$K_m^{(w)}$ je tuhost zubové oblasti s vinutím, M_w je hmotnost zubů, vinutí a izolace

Tuhost se dá opět vyjádřit na základě poměru délky a průměru vinutí

pro krátkou délku vinutí

$$K_m^{(w)} = \frac{1}{2\pi} \frac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)} \frac{2\pi E_w l_w}{R_w^3} \quad (4.31)$$

pro dlouhá vinutí (nekonečně dlouhý válec)

$$K_m^{(w)} = \frac{1}{2\pi} \frac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)} \frac{2\pi E_w l_w}{R_w^3} \quad (4.32)$$

5 Experimentální modální analýza

V předchozích kapitolách byly rozebrány elektromagnetické poměry v asynchronních strojích. Jejich důsledkem je působení radiálních sil na statorový magnetický obvod a dále se přenáší ve formě vibrací do dalších mechanických struktur statorového systém. Tyto časově proměnné síly zaujímají po obvodu stroje různé prostorové tvary – módy, řády – s různými časovými průběhy nebo pulzacemi. Pokud se některá z těchto sil svým časovým a prostorovým rozložením shoduje s některou vlastní frekvencí a vlastním tvarem statoru, buzená struktura začne silně vibrovat – nastává jev označovaný jako rezonance. V tomto stavu hrozí poškození stroje, nebo jeho jednotlivých částí (zvýšené vibrace mohou mít vliv na životnost izolačního systému), v nejhorším případě může dojít k destrukci zařízení. Proto je snaha se těmto stavům bezpodmínečně vyhnout. Za tímto účelem vznikla následující část práce, díky které může např. výpočtář elektrického stroje prostřednictvím modální analýzy určit kritické frekvence stroje a tím se jim může vyhnout už během fáze návrhu. V následující části práce je popsáno měření a popis modelů.

5.1 Systém s jedním stupněm volnosti

Nejprve si ukážeme jednoduchý příklad, jak je popsán netlumený pohyb mechanického systému. Jako první je uveden mechanický systém s jedním stupněm volnosti. Tento model je složen z tělesa o hmotnosti m , které je uchyceno přes nehmotnou pružinu k rámu. Počátek souřadnic je volen v místě rovnovážné polohy tělesa – v místě s minimální potenciální energií. Ta je dána potenciální energií pružiny a její tuhostí k : $E_p = 1/2kx^2$ (x je deformace pružiny). Pohybová rovnice soustavy je ve tvaru:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.1)$$

ta se dá přepsat do tvaru:

$$m\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5.2)$$

podíl konstant si označíme:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.3)$$

pohybová rovnice bude mít tvar:

$$m\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (5.4)$$

Řešení této rovnice:

$$x = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t \quad (5.5)$$

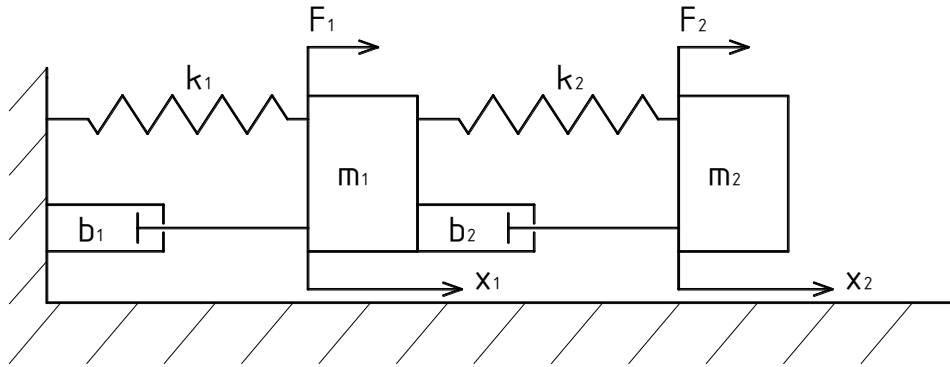
nebo také

$$x = C \sin(\Omega_0 t) + \varphi_0 \quad (5.6)$$

V uvedených rovnicích představuje C amplitudu, φ_0 fázový úhel a Ω_0 je vlastní frekvence soustavy. Konstanty A , B a C se určí z počátečních podmínek

5.2 Systém s n stupni volnosti

Pro modelování složitějších mechanických struktur je třeba vytvořit model s vyšším počtem vibrujících bodů – vznikne tak diskrétní model se soustřednými parametry. Takový model je popsán soustavou lineárních diferenciálních rovnic.



Obr. 5.1 : Systém s 2 stupni volnosti

Příklad jednoduchého systému s 2 stupni volnosti je na předchozím obrázku 5.1. Je tvořen jednotlivými body s hmotnostmi m_1, m_2, \dots a jsou vzájemně vázány lineárními pružinami s tuhostmi k_1, k_2, \dots a tlumiči s tlumením b_1, b_2, \dots a na každý z bodů působí budící síla F_1, F_2, \dots a mají souřadnice x_1, x_2, \dots

Pro body o hmotnostech pak můžeme napsat pohybové rovnice

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1 \quad (5.7)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2 \quad (5.8)$$

po jejich úpravě dostaneme

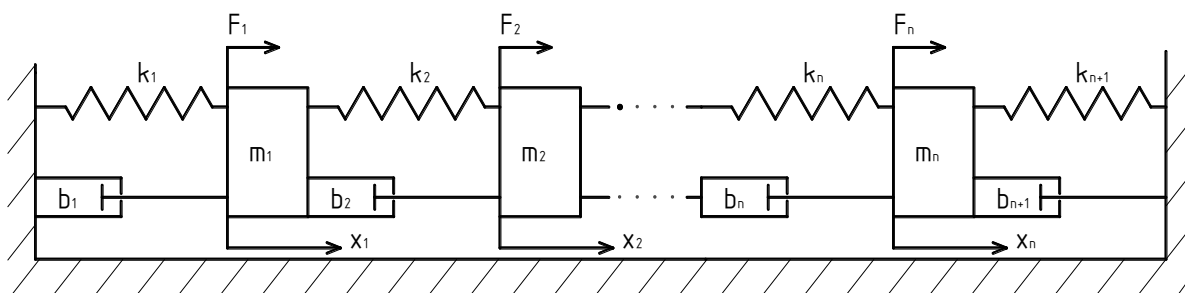
$$m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \dot{x}_1 - b_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (5.9)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - b_1 \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 = F_2 \quad (5.10)$$

pokud zapíšeme v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Pomocí takového maticového zápisu se může popsat jakákoliv soustava s n stupni volnosti se soustředěnými parametry. Pokud bychom vzali v úvahu systém na obrázku 5.2 a sestavili opět rovnice pro jednotlivé body, obdržíme soustavu rovnic:



Obr. 5.2: Systém s n stupni volnosti

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1 \quad (5.12)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + F_2 \quad (5.13)$$

⋮
⋮
⋮

$$m_n \ddot{x}_n = -k_n (x_n - x_{n-1}) + k_{n+1} (x_{n+1} - x_n) - b_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + b_{n+1} (\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n) + F_n \quad (5.14)$$

po úpravě:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \dot{x}_1 - b_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (5.15)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - b_2 \dot{x}_1 + (b_2 + b_3) \dot{x}_2 - b_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = F_2 \quad (5.16)$$

⋮
⋮
⋮

$$m_n \ddot{x}_n - b_{2n} \dot{x}_{n-1} + (b_n + b_{n+1}) \dot{x}_n - b_{n-1} \dot{x}_{n-1} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = F_n \quad (5.17)$$

Je vidět, že čím je systém složitější, tím nám narůstá počet rovnic s konstantními koeficienty (zvyšuje se počet stupňů volnosti soustavy). Protože by se soustava rovnic stávala více a více nepřehlednou, můžeme pohybové rovnice uvedených 2 příkladů přepsat do maticového tvaru:

$$[M][\ddot{x}] + [B][\dot{x}] + [K][x] = [F] \quad (5.18)$$

kde: $[\ddot{x}]$, $[\dot{x}]$, $[x]$ jsou vektory zrychlení, rychlosti a výchylky ve tvarech:

$$[\ddot{x}] = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix}, \quad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

[M] je matice hmotnosti

je to čtvercová matice řádu n , v uvažovaném příkladu má tvar

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

[B] je matice tlumení

opět se jedná o čtvercovou matici ve tvaru:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & -b_n & b_n + b_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

[K] je matice tuhosti

v našem případě bude mít stejný tvar jako matice tlumení, protože ke každému tlumiči je připojena paralelně pružina:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

[F] je vektor budících sil ve tvaru:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Při řešení volného netlumeného kmitání systému s n stupni volnosti se zanedbává vliv tlumení a budících sil. Pohybová rovnice pak bude mít tvar:

$$[M][\ddot{x}] + [K][x] = 0 \quad (5.24)$$

Řešení se předpokládá ve tvaru

$$[x] = [X]e^{i\omega t} \text{ a } [\ddot{x}] = -\omega^2[X]e^{i\omega t} \quad (5.25)$$

kde $[X]$ je vektor časově nezávislých amplitud, které jsou neznámé a Ω je úhlová frekvence, na níž je schopen kmitat celý systém. Dosazením rovnice 5.25 do 5.24 dostaneme

$$-[M][X]\omega^2 e^{i\Omega t} + [K][X]e^{i\omega t} = 0 \quad (5.26)$$

a po úpravě můžeme psát soustavu rovnic pro neznámé amplitudy x_i :

$$([K] - [M]\omega^2)[X] = 0 \quad (5.27)$$

pro netriviální řešení je determinant soustavy roven nule (alespoň jedna amplituda vektoru $[X] \neq 0$):

$$\det([K] - [M]\omega^2) = 0 \quad (5.28)$$

při substituci $\omega^2 = \lambda$ můžeme psát:

$$\det([K] - [M]\lambda) = 0 \quad (5.29)$$

tento determinant se nazývá frekvenční determinant a jeho rozepsáním dojdeme k tzv. rezonanční rovnici n -tého stupně:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5.30)$$

řešením této rovnice je n hodnot λ – tím jsme obdrželi vlastní čísla systému. Vlastní frekvence získáme jako:

$$\omega_i^2 = \lambda_i \quad (5.31)$$

Jsou to frekvence, kterými může mechanická soustava harmonicky kmitat. Pokud vezmeme některou vlastní frekvenci a dosadíme ji do rovnice 5.27, dostaneme odpovídající vektor amplitud odpovídající dané vlastní frekvenci. Tím obdržíme takzvaný vlastní tvar (mód) systému. Tento vektor vyjadřuje pouze vzájemný poměr prvků – amplitud – v jednotlivých bodech systému jestliže kmitá na dané vlastní frekvenci (u_1/u_1 ; u_2/u_1 ; u_3/u_1 ; ... u_n/u_1 nebo u_1/u_2 ; u_2/u_2 ; u_3/u_2 ; ... u_n/u_2 atd., takže např. vektor vlastních tvarů $[1; 3; 1]$ zobrazuje stejný vlastní tvar jako vektor $[3; 9; 3]$). Problém odstraníme tzv. normováním vlastních tvarů.

Experimentální modální analýzu můžeme popsat jako proces, při kterém je cílem získat popis měřeného mechanického systému a získat tak model dynamického chování struktury. Výsledkem jsou parametry součásti – vlastní mechanická frekvence, jí odpovídající vlastní tvar kmitu (mód) a tlumení. Před samotným měřením je třeba stanovit uložení nebo uchycení

vzorku, který chceme měřit. Prvním nejjednodušším způsobem je volné uložení – je to takové uložení, kdy těleso nemá teoreticky žádnou vazbu s okolím. To znamená, že je umístěno v prostoru. V našem případě bude magnetický obvod zavěšen na popruhu. Dalším způsobem, jak se může těleso uchytit je ten, že ho v některém místě pevně uchyťme – vetkneme. Tímto způsobem bude měřeno vinutí statoru. Tím si do modelu zaneseme okrajovou podmínku. Třetím způsobem je tzv. uložení in situ – takové měření se provádí za skutečných provozních podmínek.

Důvodem měření modální analýzy je zjišťování modálních parametrů jednotlivých částí statorového systému. Ty se srovnají z numerickým modelem dané části, která je modelována a laděna na základě právě těchto změřených frekvencí a tvarů.

Při měření se zjišťuje množina frekvenčních odezvových funkcí – tzv. odezvový model – jejichž analýzou se zjistí modální model. Základem fyzikálního modelu je frekvenční odezvová funkce (FRF), která je definována jako:

$$H(\omega) = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}} = \frac{\text{odezva}}{\text{buzení}} \quad (5.31)$$

nebo přesnější definice:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{f_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_j^r \Phi_k^r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (5.32)$$

kde λ_r je vlastní číslo r-tého módu

Φ_j^r je j-tý prvek r-tého vektoru vlastních tvarů $[\Phi]$ – relativní výchylka v j-tém bodě při kmitání na r-tém tvaru

N je počet módů

Předchozí rovnice může být vyjádřena jako: Prvek $\alpha_{jk}(\omega)$ představuje harmonickou odezvu v místě x_j způsobenou harmonickou silou působící v jiném místě F_k . [26]

Jinak řečeno, frekvenční odezvová funkce vyjadřuje dynamické vlastnosti systému. V případě experimentální analýzy můžeme použít pro popis výchylku, rychlost nebo zrychlení. Podle toho se odezvová funkce nazývá poddajnost, pohyblivost a akcelerace a na základě charakteristiky jedné z těchto veličin můžeme odvodit odpovídající zbylé dvě.

poddajnost	pohyblivost	akcelerance
$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}, [\text{m/N}]$	$H(\omega) = \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)}, [\text{ms}^{-1}/\text{N}]$	$H(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)}, [\text{ms}^{-2}/\text{N}]$

Při měření reálné soustavy – soustavy s více stupni volnosti – se získá měřením matice frekvenčních odezvových funkcí. Pro každý budící účinek a snímanou odezvu v jednom bodě sítě diskretizace dostáváme frekvenční odezvou funkci $H(\omega)$ jednoduchého systému s jedním stupněm volnosti:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \Rightarrow X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (5.33)$$

Pokud budeme budít a snímat odezvu diskretizované soustavy ve více bodech, pracujeme se soustavou s mnoha stupni volnosti.

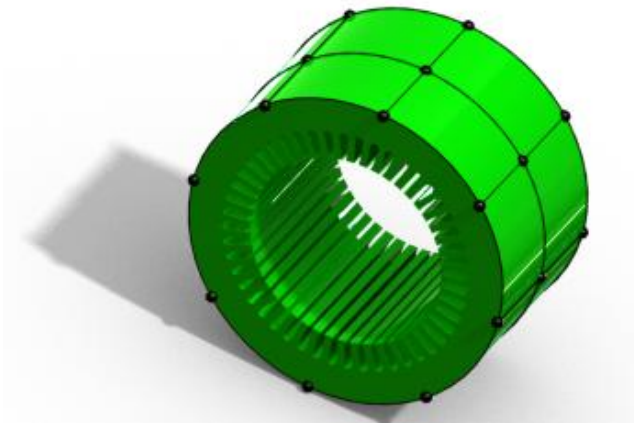
$$F(\omega) \quad (5.34)$$

V technické praxi se pro určení modálních vlastností vychází z matice frekvenčních odezvových funkcí, jejíž řád je roven počtu stupňů volnosti. Buzení a snímání odezev ve všech bodech měřicí sítě systému je ale v praxi nemožné. Matice frekvenčních budících funkcí $[H(\omega)]$ je díky předpokládané linearitě měřené struktury symetrická. Tato symetrie matice odezvových funkcí $[H(\omega)]$ umožňuje k určení potřebných modálních vlastností naměření minimálně jednoho sloupce matice $[H(\omega)]$, je-li soustava buzena v jednom bodě sítě a odezva snímána ve všech bodech měření, anebo jeden řádek matice $[H(\omega)]$, pokud je soustava buzena ve všech bodech diskretizace a odezva je snímána ve zvoleném referenčním bodě. Při měření modálním kladívkem tedy zaznamenáváme jednotlivé řádky matice FRF. [26]

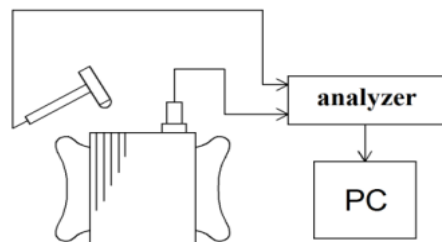
5.3 Samostatné magnetické jádro – měření a model jádra

Protože asynchronní motor se skládá z jednotlivých konstrukčních částí (magnetický obvod statoru, vinutí statoru, klec rotoru,...), je potřeba nejprve zjistit parametry jednotlivých částí. Poté se může vytvořit celkový komplexní model motoru. Pro zjištění mechanických vlastností samotného magnetického jádra statoru se nejprve provede experimentální modální analýza statorového paketu. Pro tento účel se měřilo na magnetickém jádře bez vinutí, které bylo zavěšené na popruhu ve vzduchu. Tímto zavěšením se realizuje vytvoření volného tělesa v prostoru – takové těleso vykazuje 6 vlastních tvarů tuhého tělesa s teoreticky nulovými vlastními frekvencemi, jedná se o 3 posuvy ve směru souřadných os a 3 rotace kolem souřadných os. Aby se co nejvíce eliminoval vliv zavěšení za popruhy, bylo jádro navíc vyloženo měkkou pěnou. Je také snaha, aby jádro bylo zavěšeno mimo uzlové kmitny. Při samotném měření si nejprve zvolíme měřicí síť podle frekvenčního rozsahu měření a podle

měřených tvarů kmitů. Bodů by mělo být tolik, aby se daly určit měřené vlastní tvary. V našem případě má měřicí síť 8 bodů kolem obvodu a 3 body v axiálním směru jádra - viz. obr. 5.3. Tu samou geometrii si vytvoříme v měřícím softwaru a zvolíme si referenční bod, ve kterém se snímá odezva buzeného systému. V tomto bodě je umístěn 3-osý akcelerometr. Ostatní body jsou během měření buzeny rázovým pulsem pomocí modálního kladívka, a tím se postupně změří budící rázy v jednotlivých bodech a jim odpovídající odezva v referenčním bodě. Měřeny byly odezvy v radiálním směru.



Obr. 5.3: Měřicí síť magnetického jádra



Obr. 5.4: Blokové schéma měřicího řetězce

Parametry měřeného magnetického obvodu:

vnější průměr: $D_1 = 220 \text{ mm}$

vnitřní průměr: $D = 129 \text{ mm}$

počet drážek: $Q_1 = 36$

výška jha: $h_j = 20.7 \text{ mm}$

šířka zubu: $b_z = 4,8 \text{ mm}$

délka paketu: $L = 100 \text{ mm}$



Obr. 5.5: Magnetické jádro statoru při měření modální analýzy

Měřením byly zjištěny základní vlastní kmity:

tvar kmitu	frekvence [Hz]
2,1	813
2,0	1070
3,0	2710

Tab. 2: Výsledky měření mag. obvodu



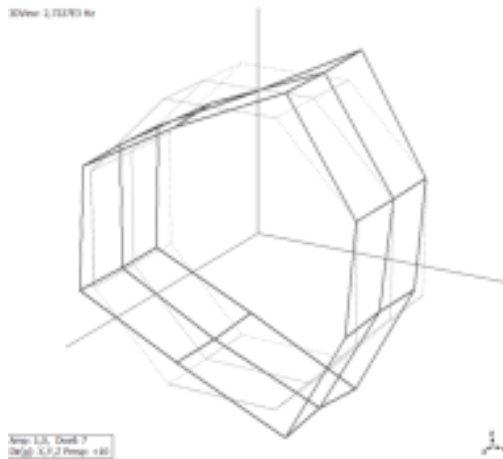
3DView: 813,78 Hz



3DView: 1066,63 Hz

Obr. 5.6: Vlastní tvar 2,1; frekvence 813 Hz

Obr. 5.7: Vlastní tvar 2,0; frekvence 1070 Hz

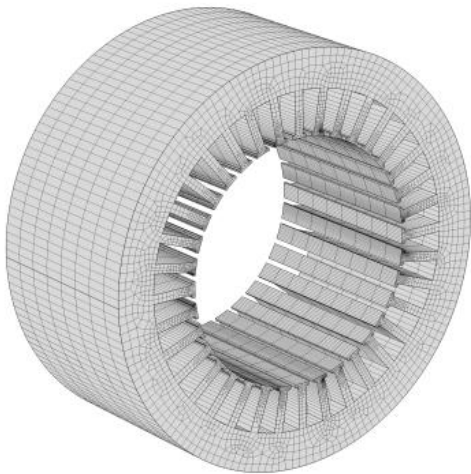


Obr. 5.8: Vlastní tvar 2,0; frekvence 2710 Hz

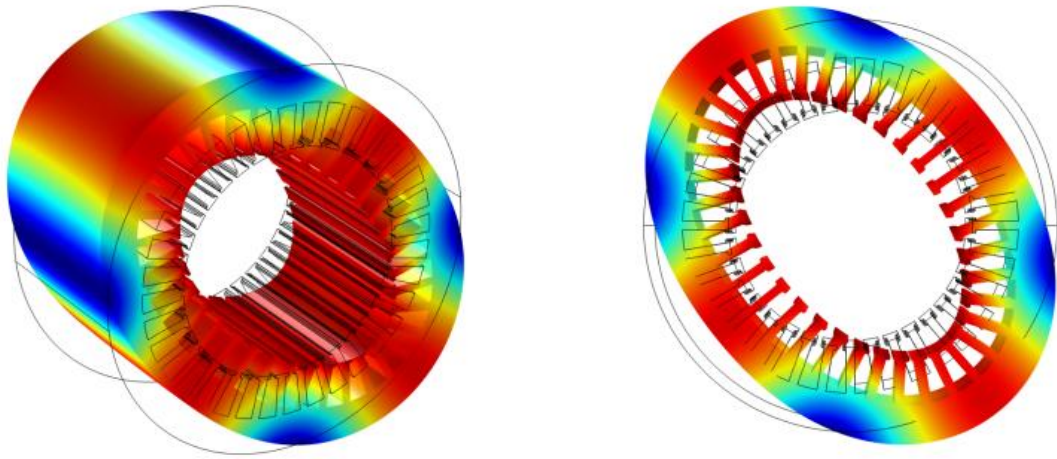
5.3.1 Modelování vlastních tvarů a nalezení náhradních parametrů mag. jádra statoru

Při modelování vlastních frekvencí si nejprve vytvoříme 3D geometrii jádra, kterou si přeneseme do Comsolu, nastavíme si parametry materiálu (nastavujeme modul pružnosti E , poissonovu konstantu ν a hustotu materiálu). Nejprve si ukážeme výsledky pro magnetické

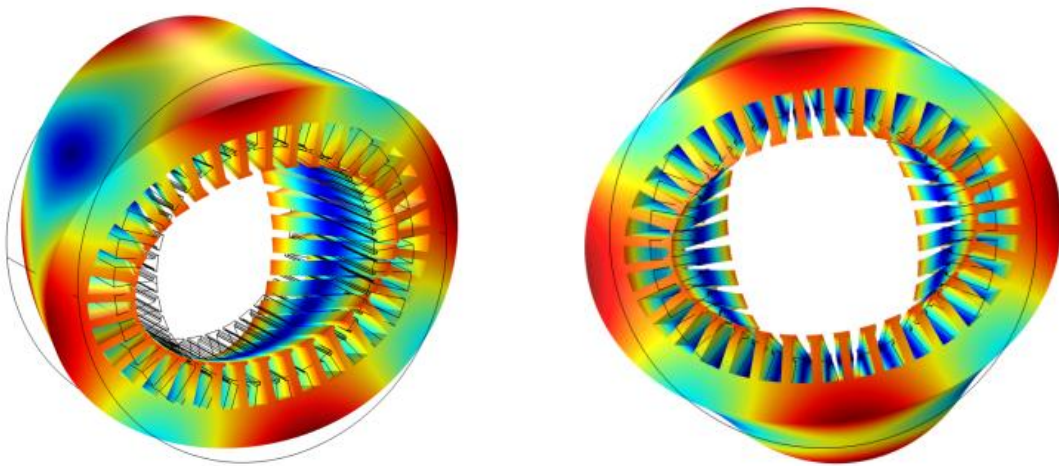
jádro, pokud by bylo složeno z oceli (Youngův modul pružnosti $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, poissonova konstanta $\nu = 0,33$ a měrná hustota $\rho = 7850$ kg/m³)



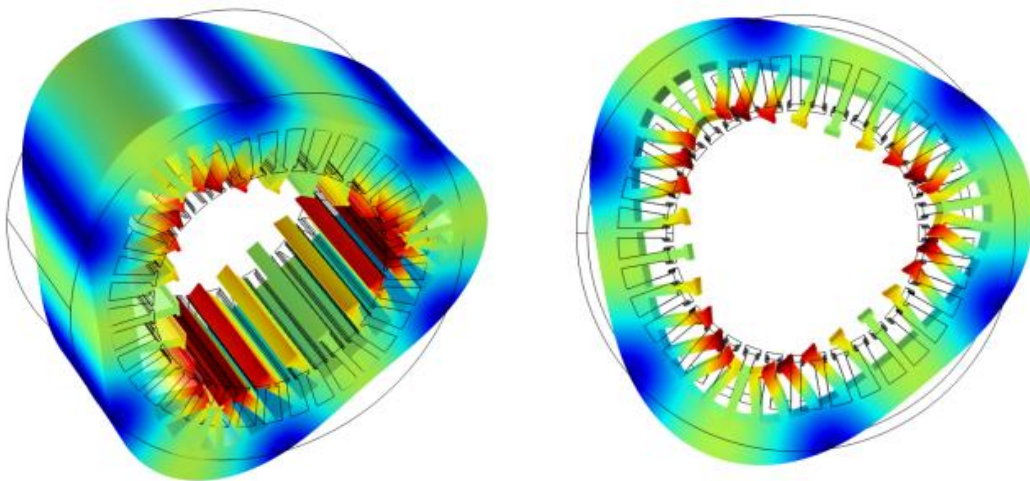
Obr. 5.9: Síť modelu



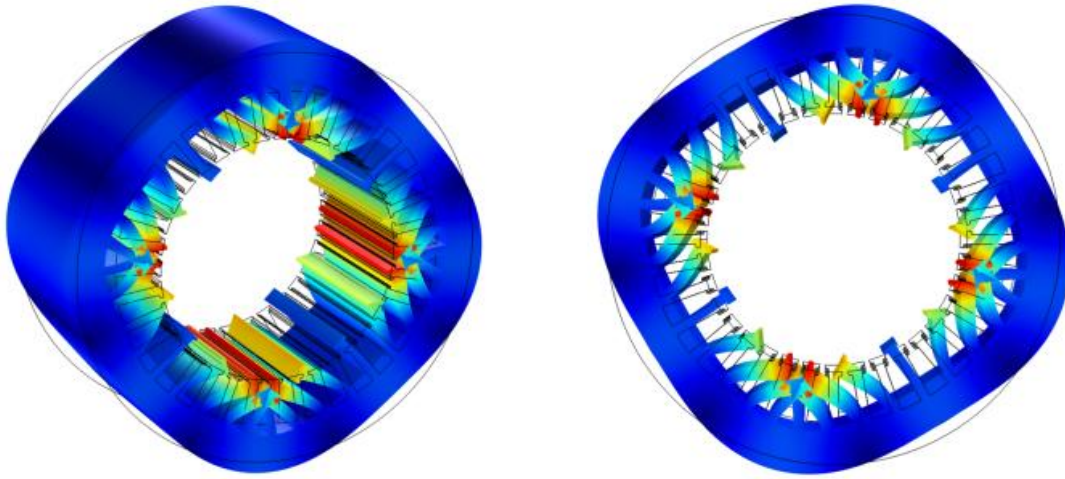
Obr. 5.10: Vlastní tvar 2,0 – frekvence 1095 Hz



Obr. 5.11: Vlastní tvar 2,1 – frekvence 1885 Hz



Obr. 5.12: Vlastní tvar 3,0 – frekvence 2834 Hz



Obr. 5.13: Vlastní tvar 4,0 – frekvence 4449 Hz

Porovnání analytického a numerického výpočtu:

vlastní tvar	analyticky	numericky	rozdíl
0,0	8532	-	-
1,0	255	-	-
2,0	1292	1095	17 %
2,1	-	1855	-
3,0	3084	2834	8 %
4,0	5606	4449	26 %

Tab. 3: Vlastní frekvence mag. obvodu – srovnání analytického a numerického výpočtu

Z výsledků je vidět, že vlastní frekvence se nemohou modelovat s vlastnostmi izotropního materiálu (některé tvary se svými frekvencemi značně liší, některé tvary nebyly identifikovány). Z tohoto důvodu se musely nalézt takové parametry anizotropního materiálu, které by vyhovovaly naměřeným hodnotám tvarů a frekvencí a od kterého by se mohlo dojít k celkovému statorovému modelu. Proto bylo nejprve provedeno měření modulu pružnosti ve směru laminace paketu.

5.3.2 Modul pružnosti v axiálním směru paketu

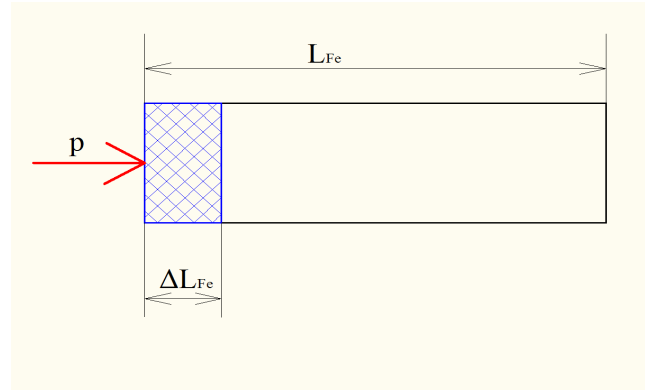
Protože v axiálním směru je magnetický obvod složen z jednotlivých vrstev izolačního laku a feromagnetických plechů, bylo provedeno „dodatečné“ měření za účelem zjištění modulu pružnosti v tomto podélném směru paketu. Tato hodnota posloužila jako jeden ze vstupů pro modelování. Měření probíhalo tak, že se samotný statorový paket zatížil určitou známou silou

v axiálním směru, poté se změnila deformace (o kolik se stlačil statorový mag. obvod) – a z těchto hodnot se poté spočítal modul pružnosti:

Vycházelo se ze vztahu pro výpočet deformace materiálu:

$$\Delta l = p \frac{l}{E} = \frac{F l}{S E} \quad (5.34)$$

kde l je celková délka vzorku
 E je modul pružnosti materiálu
 Δl je deformace
 F je síla, která působí na plochu S
 p je tlak na materiál



pokud uvažujeme vzorek složený z plechů a izolačního laku, můžeme psát:

$$\Delta l_{Fe} = p \frac{l_{Fe}}{E_{Fe}} \quad (5.35)$$

$$\Delta l_{iz} = p \frac{l_{iz}}{E_{iz}} \quad (5.36)$$

pro tento vzorek po úpravě:

$$\Delta l_{iz} + \Delta l_{Fe} = p \left(\frac{l_{Fe}}{E_{Fe}} + \frac{l_{iz}}{E_{iz}} \right) = p \frac{l_{Fe} E_{iz} + l_{iz} E_{Fe}}{E_{Fe} E_{iz}} \quad (5.37)$$

pokud budeme uvažovat ten samý vzorek, ale z materiálu s náhradním modulem pružnosti, platí:

$$\Delta l = p \frac{l_{Fe} + l_{iz}}{E} \quad (5.38)$$

nyň dáme do rovnosti deformace

$$\Delta l = \Delta l_{iz} + \Delta l_{Fe} \quad (5.39)$$

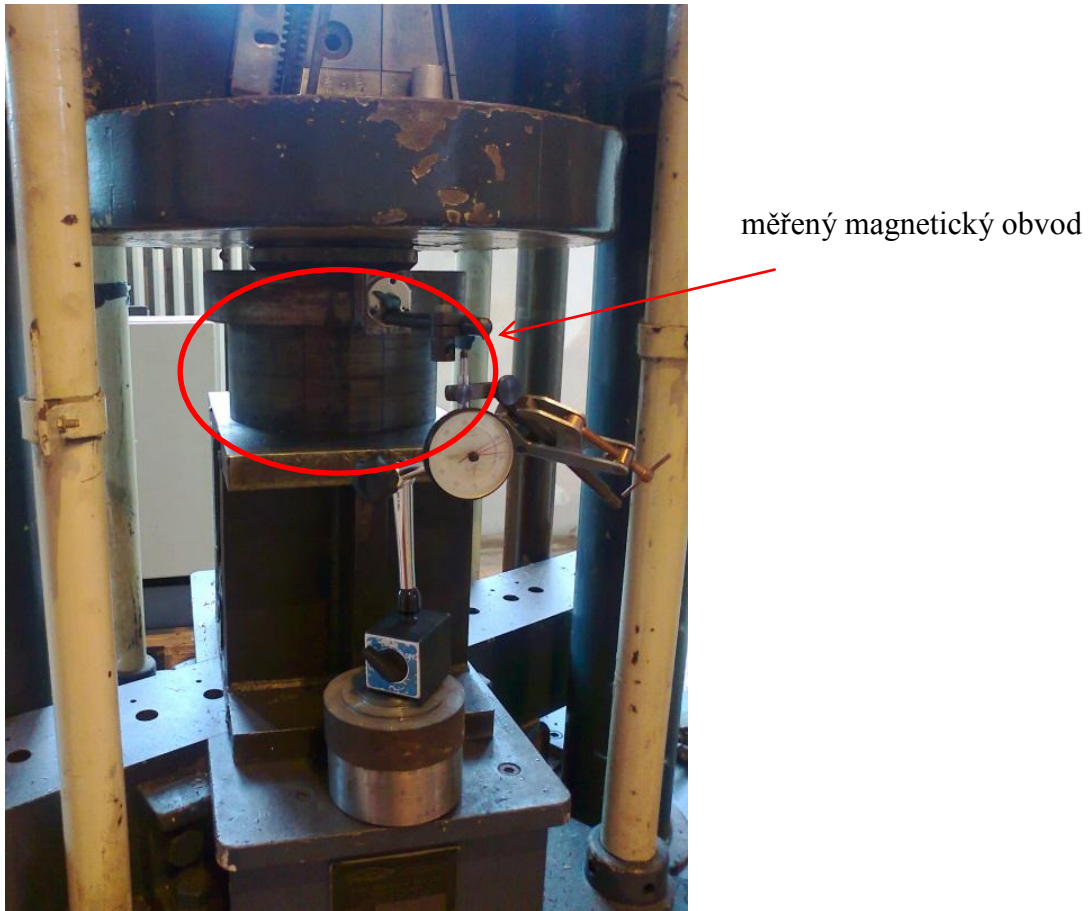
$$p \frac{l_{Fe} + l_{iz}}{E} = p \frac{l_{Fe} E_{iz} + l_{iz} E_{Fe}}{E_{Fe} E_{iz}} \quad (5.40)$$

Při zavedení vztahů: $l_{Fe} + l_{iz} = l$, $l_{Fe} = k_{Fe} l$ a $l_{iz} = (1 - k_{Fe}) l$ máme konečný vztah pro náhradní modul pružnosti:

$$E = \frac{(l_{Fe} + l_{iz})E_{Fe}E_{iz}}{l_{Fe}E_{iz} + l_{iz}E_{Fe}} = \frac{E_{Fe}E_{iz}}{k_{Fe}E_{iz} + (1 - k_{Fe})E_{Fe}} \quad (5.41)$$

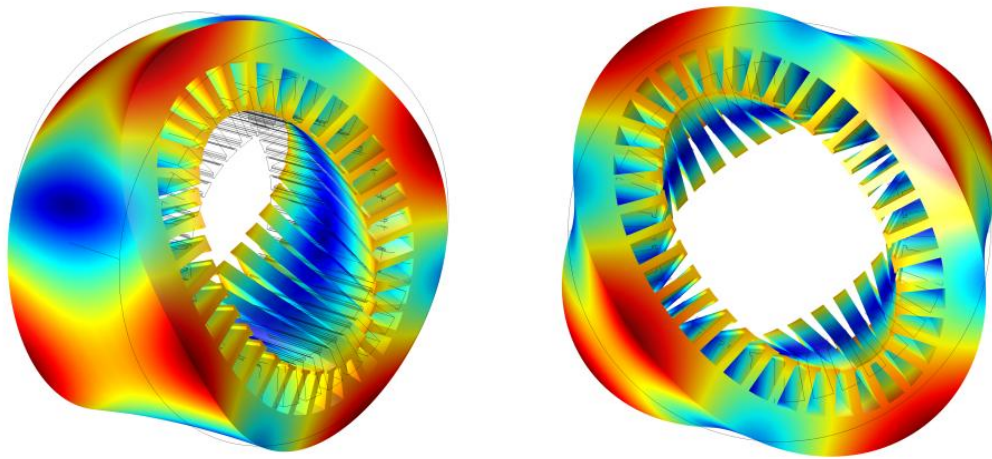
(Z tohoto vztahu se může např. spočítat modul pružnosti izolačního laku E_{iz} , při změřeném náhradním E a známém E_{Fe})

Během samotného měření byl paket vložen na „trhačku“ a byl stlačován silou tak, jak je zobrazeno na obrázku 5.14. Při působící síle 124 000 N byla změřena deformace svazku 0,4 mm – to odpovídá modulu pružnosti v axiálním směru $1,78 \cdot 10^9$ Pa.

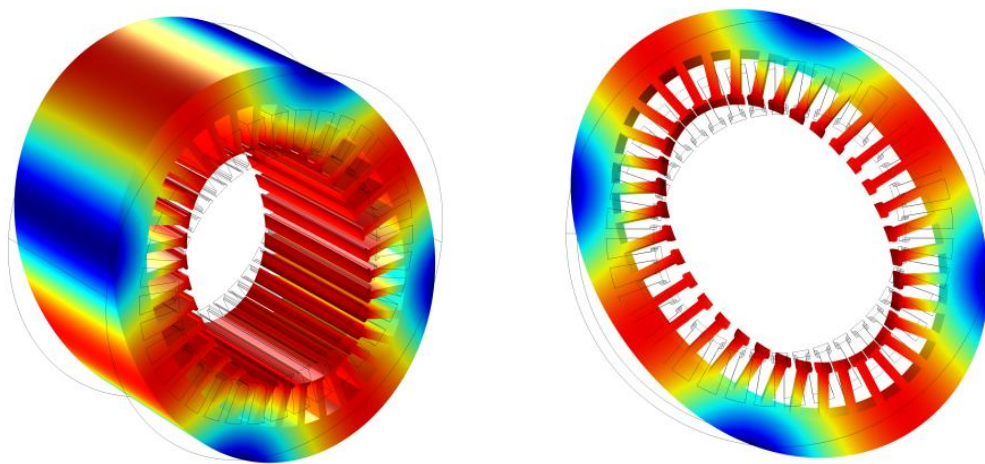


Obr. 5.14: Mag. obvod při měření axiálního modulu pružnosti

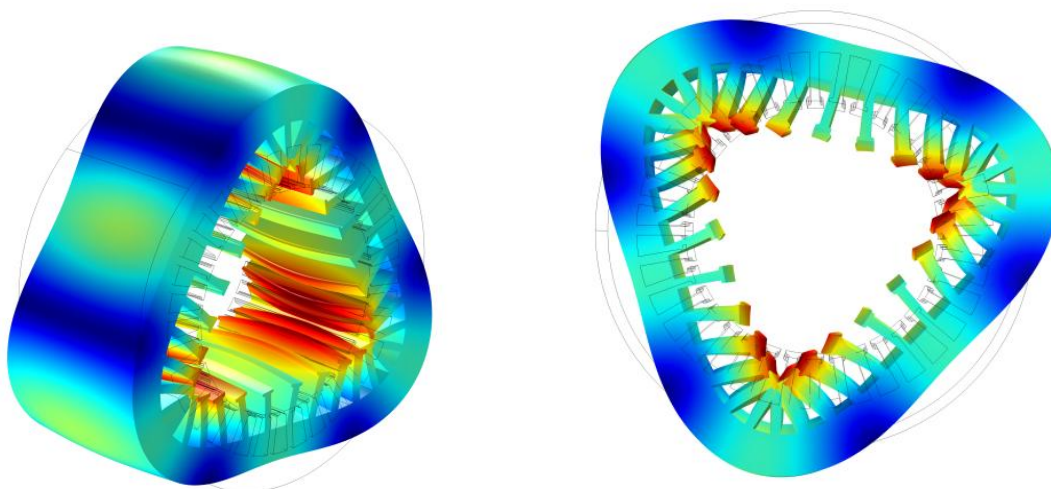
Z předchozího měření se získala orientační hodnota modulu pružnosti. S touto pomocnou hodnotou byly poté nalezeny takové náhradní parametry materiálu, ze kterého by byl tvořen celý paket a jenž má stejné parametry jako reálný fyzický model. Výsledné vlastní tvary a frekvence, podle kterých byl laděn model, jsou vidět na následujících obrázcích:



Obr. 5.15: Vlastní tvar 2,1 – frekvence 817 Hz



Obr. 5.16: Vlastní tvar 2,0 – frekvence 1047 Hz



Obr. 5.17: Vlastní tvar 3,0 – frekvence 2599 Hz

Uvedené výsledky odpovídají těmto parametrům paketu, které byly naladěny dle výše získaných naměřených vlastních frekvencí a vlastních tvarů (modelováno bylo v cylindrickém souřadném systému, G je modul pružnosti ve smyku):

materiálové parametry	hodnota parametru
E_r [Pa]	$2,05 \cdot 10^{11}$
E_φ [Pa]	$2,05 \cdot 10^{11}$
E_z [Pa]	$1,5 \cdot 10^9$
$\nu_{r\varphi}$	0,3
$\nu_{\varphi z}$	0,3
ν_{rz}	0,3
$G_{r\varphi}$ [Pa]	$25 \cdot 10^9$
$G_{\varphi z}$ [Pa]	$1,5 \cdot 10^9$
G_{rz} [Pa]	$1,5 \cdot 10^9$
ρ_c [kg/m^3]	7500

Tab. 4: Parametry mag. obvodu

Pokud srovnáme výsledky, můžeme vidět, že rozdíl mezi měřením a modelem s anizotropními náhradními parametry je menší než 5 % (viz. tabulka 5) a lze říci, že jsme našli mechanický model paketu.

tvar kmitu	změřená vlastní frekvence [Hz]	vlastní frekvence modelu [Hz]	rozdíl [%]
2,1	813	817	0.5
2,0	1070	1047	2.2
3,0	2710	2599	4.2

Tab. 5: Vlastní frekvence samotného mag. obvodu

5.4 Měření a modelování vinutí

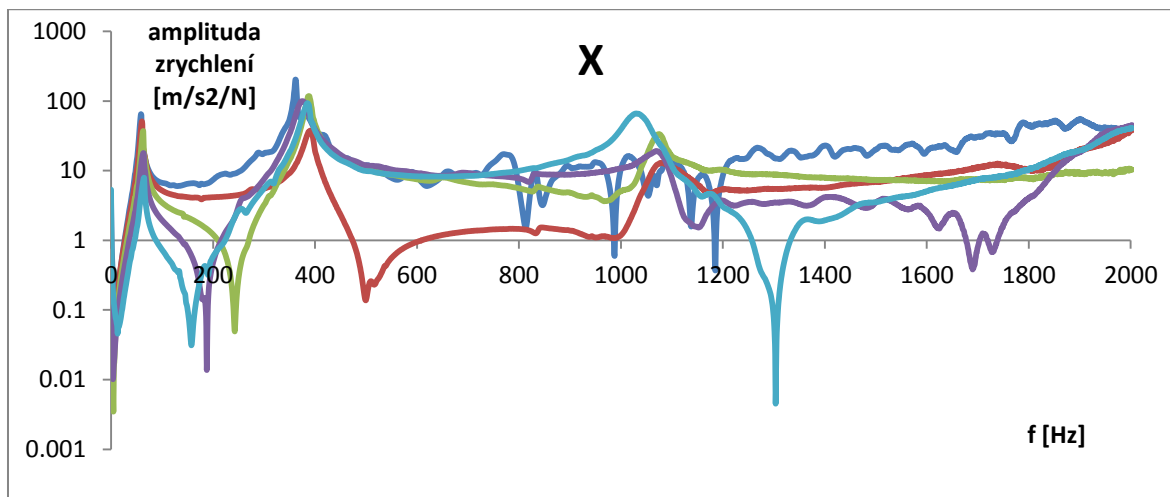
5.4.1 Měření vlastních tvarů a frekvencí

Pro simulaci vlastních tvarů a frekvencí komplexního modelu statorového systému bylo zapotřebí stanovit modální vlastnosti samotného vinutí. Protože v dostupné literatuře není uvedeno, jaké parametry vinutí volit při modelování, bylo provedeno měření vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Pro tyto potřeby byla provedena modální analýza vzorku statorového vinutí. Vzorek vinutí motoru je tvořen sedmi pasovými vodiči, každý vodič o rozměru 8 x 2,5 mm. Izolační systém je nahrazen jedním homogenním izolačním materiálem (ve skutečnosti je tvořen několika materiály – vodič omotaný izolační páskou a další izolace cívky, cívka byla po impregnačním procesu). Tato statorová tyč byla upnuta ve svěráku. Tím se zavedla okrajová podmínka pro model – vetknutí na jednom konci vinutí. Poté byl zvolen referenční bod, ve kterém byla snímána odezva na budící signály – v tomto bodě je přichycen tříosý akcelerometr (bod na obrázku 5.18, který je označen černě - B). V ostatních bodech je vinutí buzeno pomocí modálního kladívka (červeně označené – 1÷5). Pro každý z těchto bodů byly zaznamenány frekvenční odezвовé funkce (grafy na obrázcích 5.19, 5.20 a 5.22 pro jednotlivé osy) a jednotlivé vlastní tvary a frekvence. Z grafů je vidět, že nejvíce vyniklé módy jsou ve směru X. Situace je zachycena na následujícím obrázku:

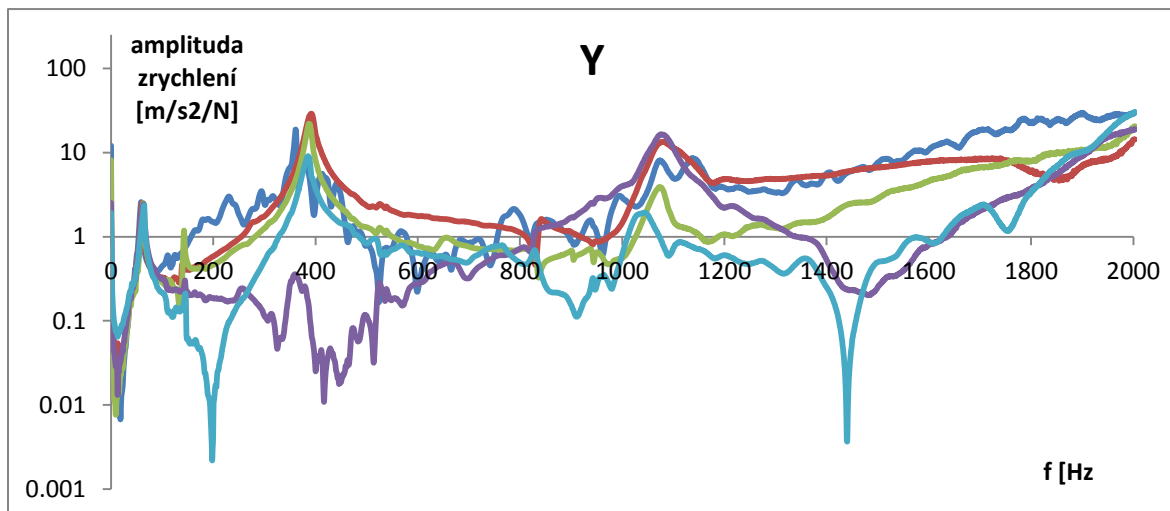


Obr. 5.18: Vzorek vinutí během měření

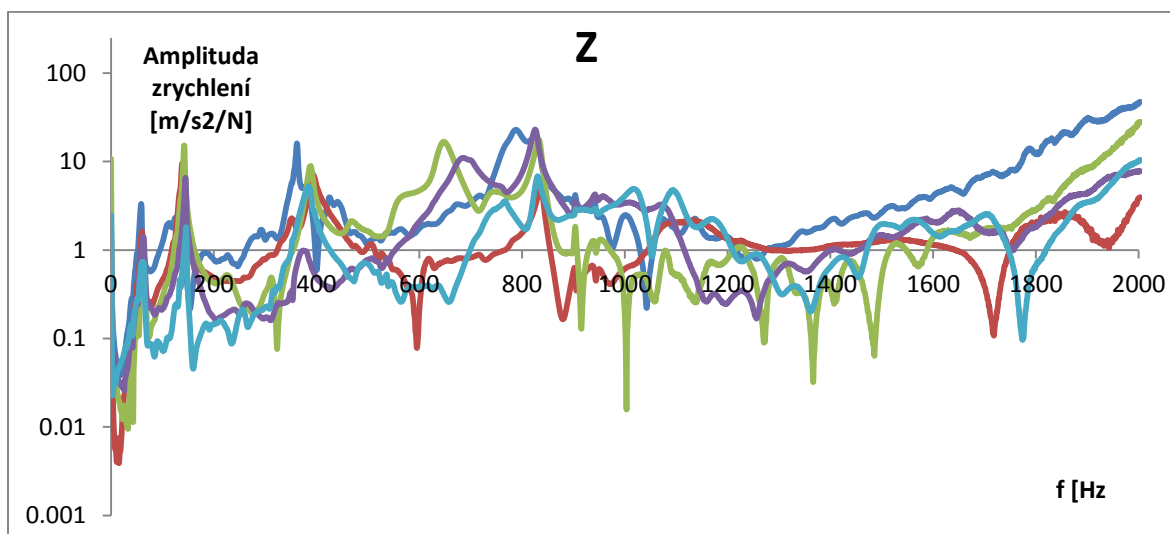
Výsledky měření vinutí:



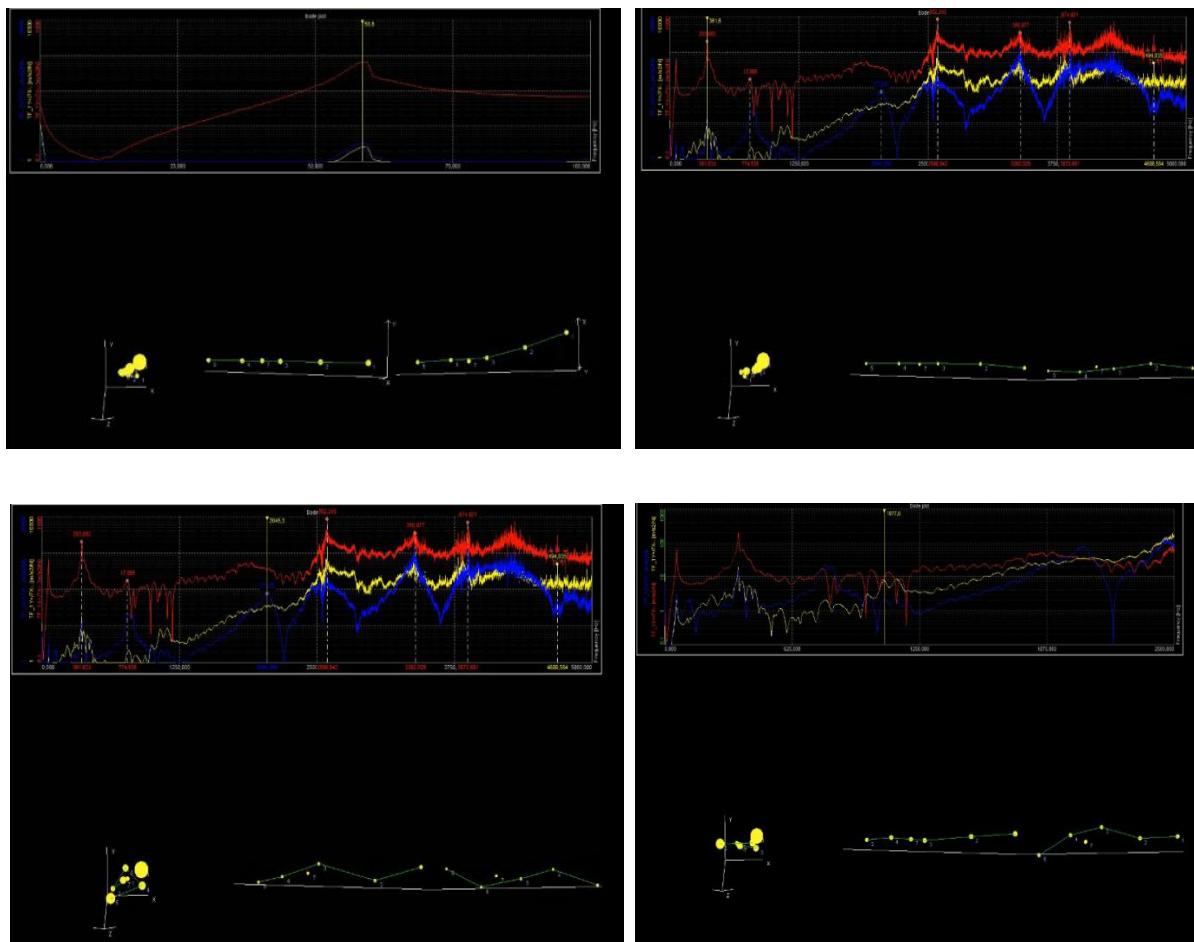
Obr. 5.19: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru X



Obr. 5.20: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru Y



Obr. 5.21: Odezva jednotlivých měřících bodů ve směru Z

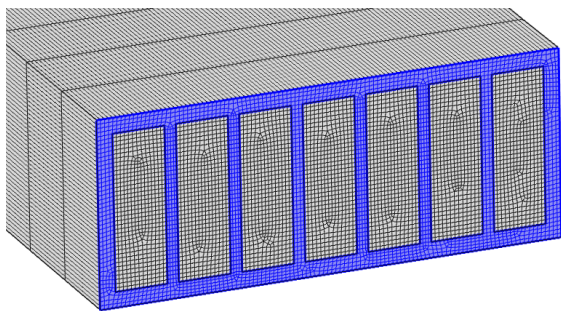


Obr. 5.22: Výstup z měření – přenosové funkce a vlastní tvary

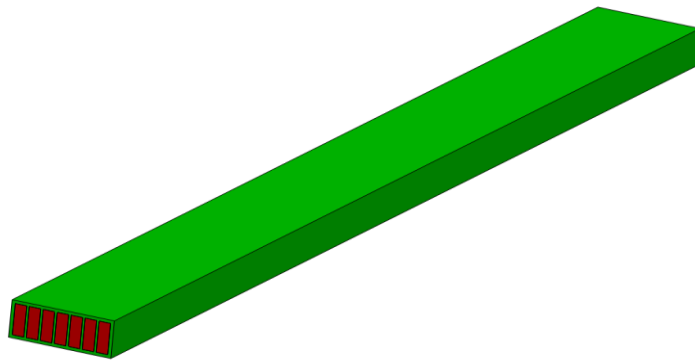
Z naměřených výsledků byly vybrány tvary vinutí a frekvence, při kterých byly nejméně výraznější odezvy na buzení, a podle nich byl laděn numerický model, jde o tyto frekvence: 58 Hz, 362 Hz, 778 Hz a 2045 Hz – jejich vlastní tvary jsou ukázány na výsledných vlastních tvarech z numerické analýzy.

5.4.2 Simulace vinutí – reálný detailní model

Z výsledků měření se vychází pro naladění modelu vinutí, který je vytvořen v programu Comsol. Nejprve byl vytvořen detailní model, kde je uvažována geometrie měděných vodičů a izolace. Pro izolaci byl hledán takový modul pružnosti, kdy výsledky simulace odpovídají naměřeným vlastním tvarům a frekvencím. Výsledné parametry pro měď a izolaci jsou v tabulce 6.



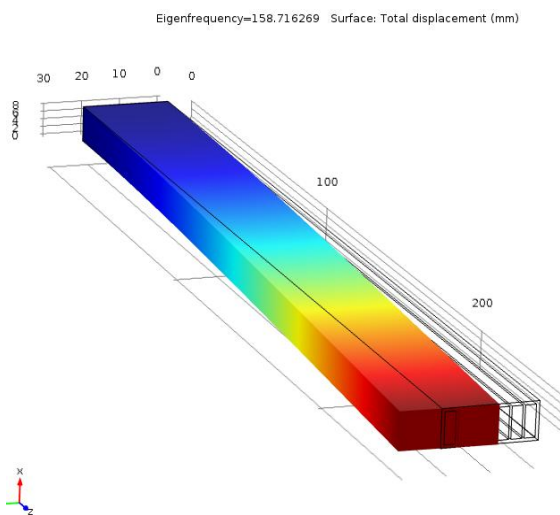
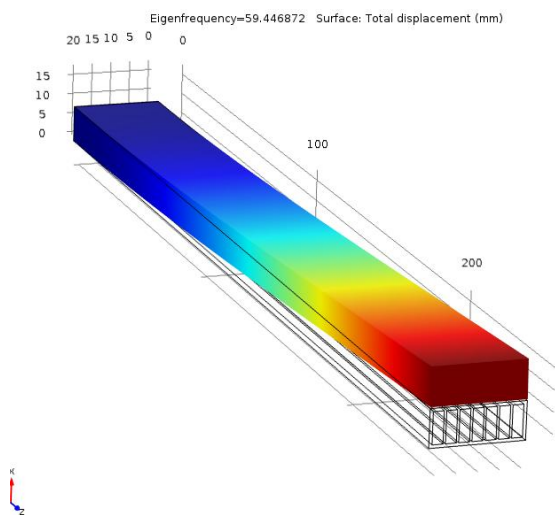
Obr. 5.23: Detail sítě numerického modelu



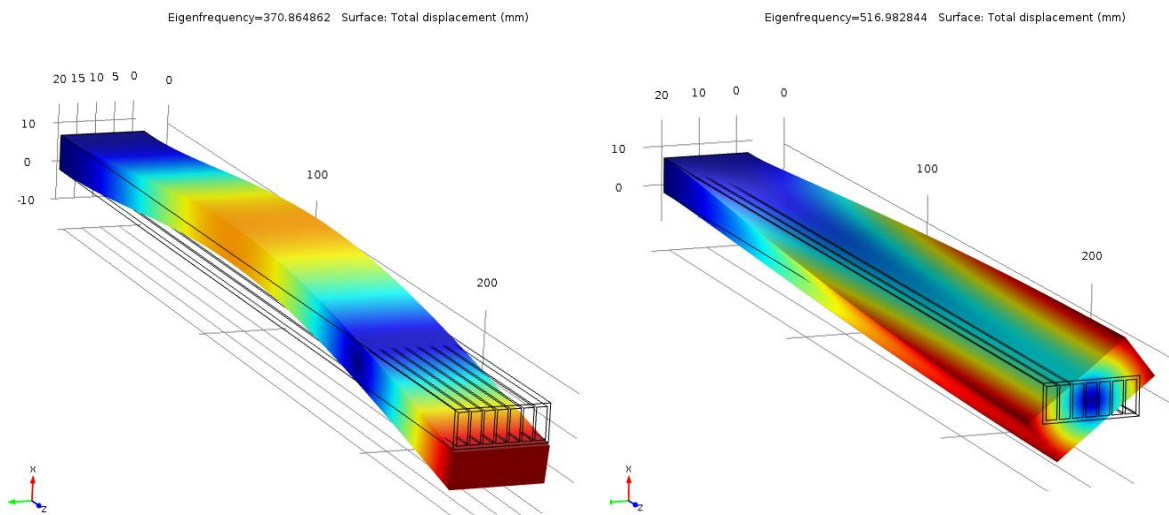
Obr. 5.24: Detailní model vinutí

	měď	izolační vrstva
Modul pružnosti E [Mpa]	$90 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$
Poissonova konstanta ν [-]	0,35	0,45
Měrná hustota ρ [kg/m ³]	8700	2000

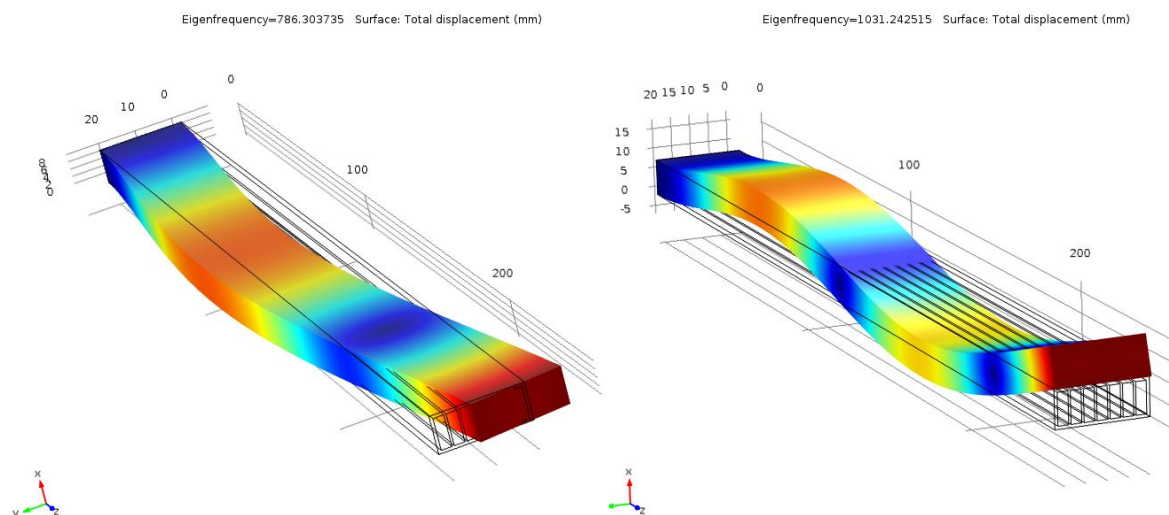
Tab. 6: Parametry detailního modelu vinutí



Obr. 5.25: Vlastní tvary při 59 Hz a 159 Hz



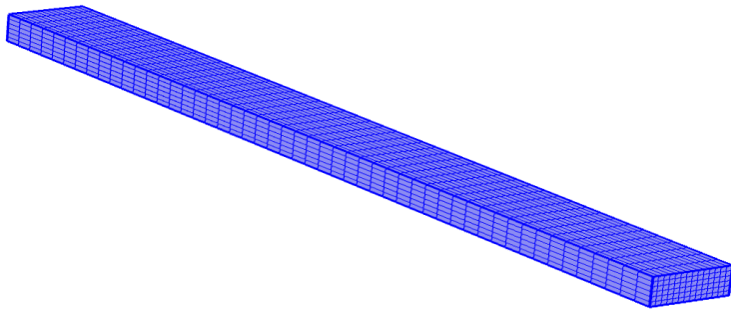
Obr. 5.26: Vlastní tvary při 370 Hz a 516 Hz



Obr. 5.27: Vlastní tvary při 786 Hz a 1031 Hz

5.4.3 Simulace vinutí – zjednodušený model

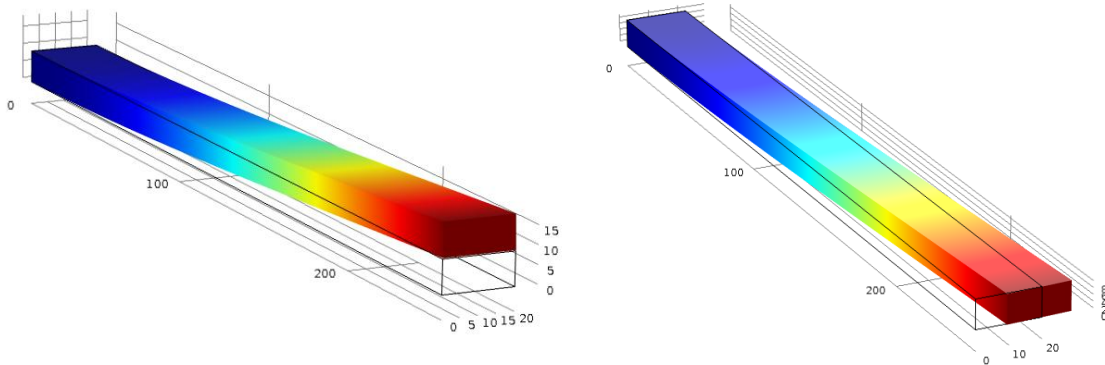
V dalším kroku byl vytvořen zjednodušený model vinutí, který by se dal s dostatečnou přesností použít pro určení vlastních tvarů (a frekvencí). Tento model je složen z obyčejného kvádrů stejných rozměrů jako vzorek vinutí. Opět byl nalezen takový náhradní modul pružnosti, při kterém má model shodné tvary a frekvence s výsledkem měření.



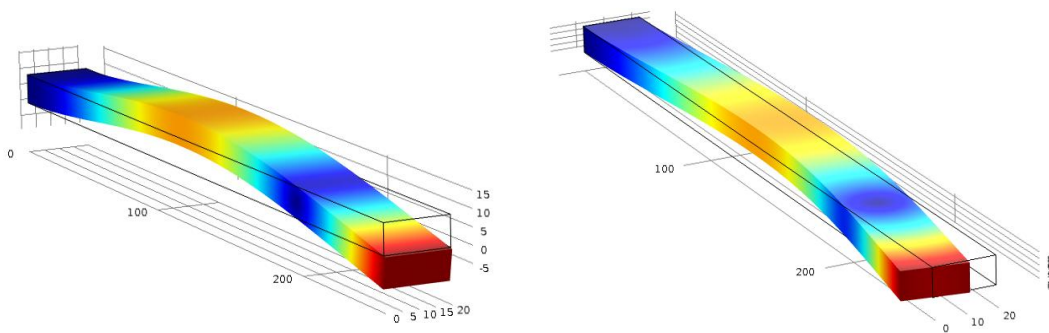
	Náhradní materiál
Modul pružnosti E [Mpa]	$53 \cdot 10^9$
Poissonova konstanta ν [-]	0,35
Měrná hustota ρ [kg/m ³]	8500

Obr. 5.28: Zasiťovaný zjednodušený model vinutí

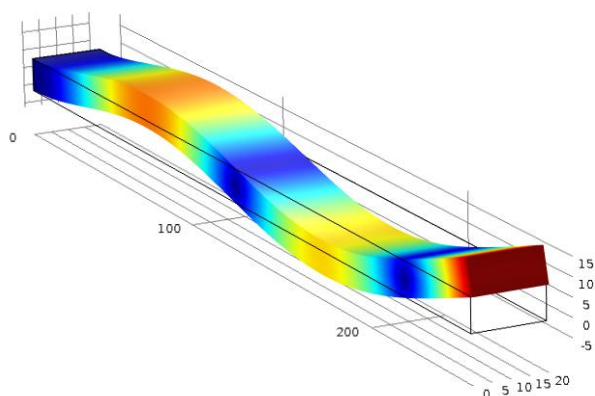
Tab. 7: Parametry modelu



Obr. 5.29: Vlastní tvary při 58 Hz a 128 Hz



Obr. 5.30: Vlastní tvary při 363 Hz a 784 Hz



Obr. 5.31 : Vlastní tvary při 1008 Hz

tvar kmitu	změřené vlastní frekvence [Hz]	Detailní model - vlastní frekvence [Hz]	Náhradní model - vlastní frekvence [Hz]	rozdíl [%]
1, směr x	58	59	58	1,7
2, směr x	362	370	363	2,2
1, směr y	778	786	784	1

Tab. 8: Přehled frekvencí vinutí

5.5 Jádru s vinutím

5.5.1 Měření vlastní tvarů a frekvencí

Po měření samotného magnetického jádra a samotného vinutí byl analýze podroben paket se založeným vinutím. Pro usnadnění ladění modelu podle měření byla odstraněna čela vinutí. Měření probíhalo stejně jako u samotného paketu, pro uchycení se použily očka připevněná k magnetickému obvodu. Opět byla zvolena měřicí síť (zobrazena na obrázku 5.33). Zvolil se referenční bod, ve kterém se k jádru připevnil 3-osý akcelerometr, a opět se postupně budily ostatní body struktury pomocí modálního kladívka a zaznamenaly se odezvy na budící rázy. Zvolená měřicí síť a referenční bod jsou na obrázku 5.33. Změřené výsledky jsou ukázány v tabulce 9.

Parametry měřeného mag. jádra:

vnější průměr: $D_1 = 160$ mm

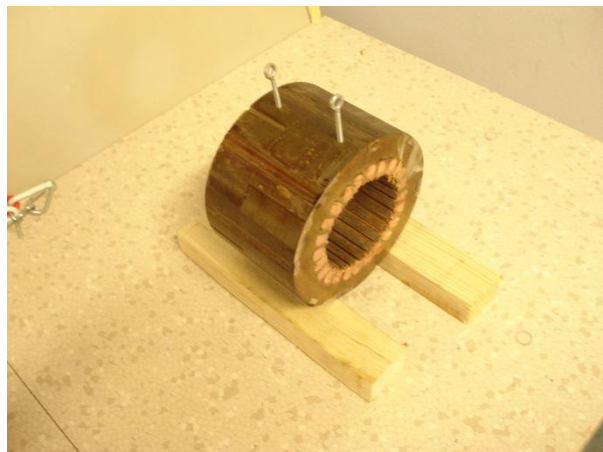
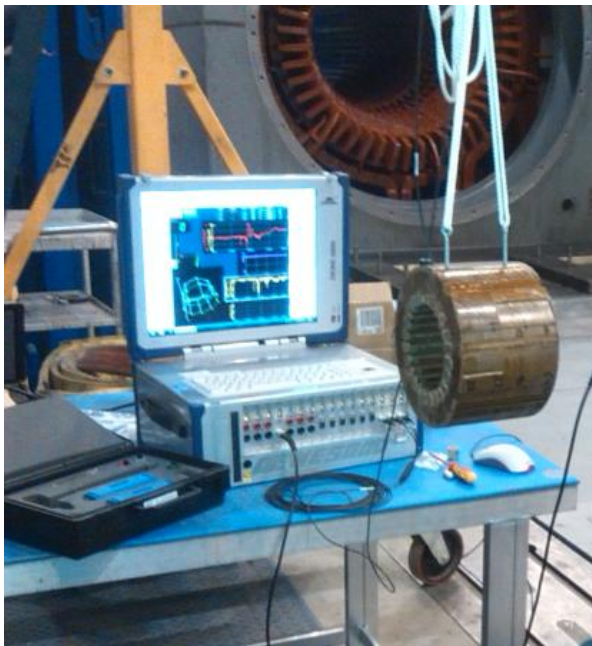
vnitřní průměr: $D = 85$ mm

počet drážek: $Q_1 = 24$

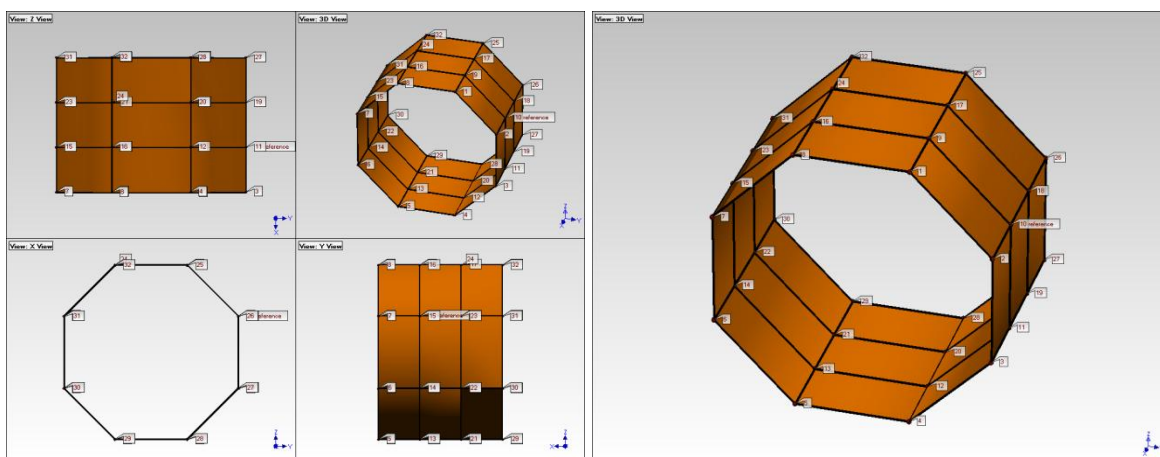
výška jha: $h_j = 20,4$ mm

šířka zubu: $b_z = 5$ mm

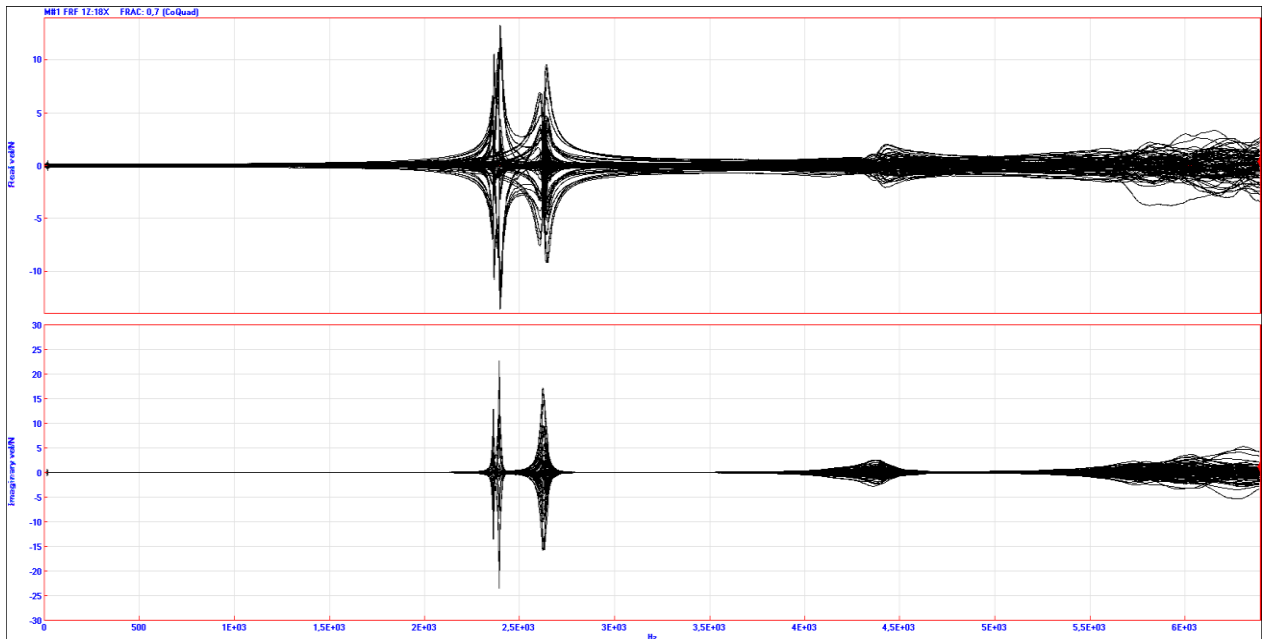
délka paketu: $L = 104$ mm



Obr. 5.32: Paket s vinutím (bez čel vinutí) při měření modální analýzy



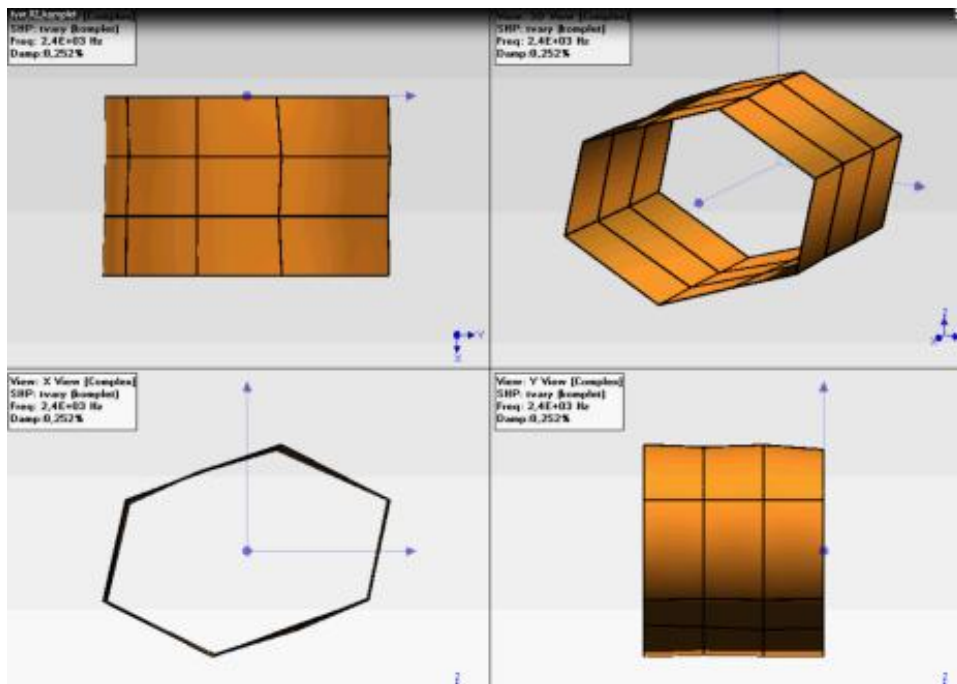
Obr. 5.33 : Měřicí síť při měření na paketu s vinutím bez čel



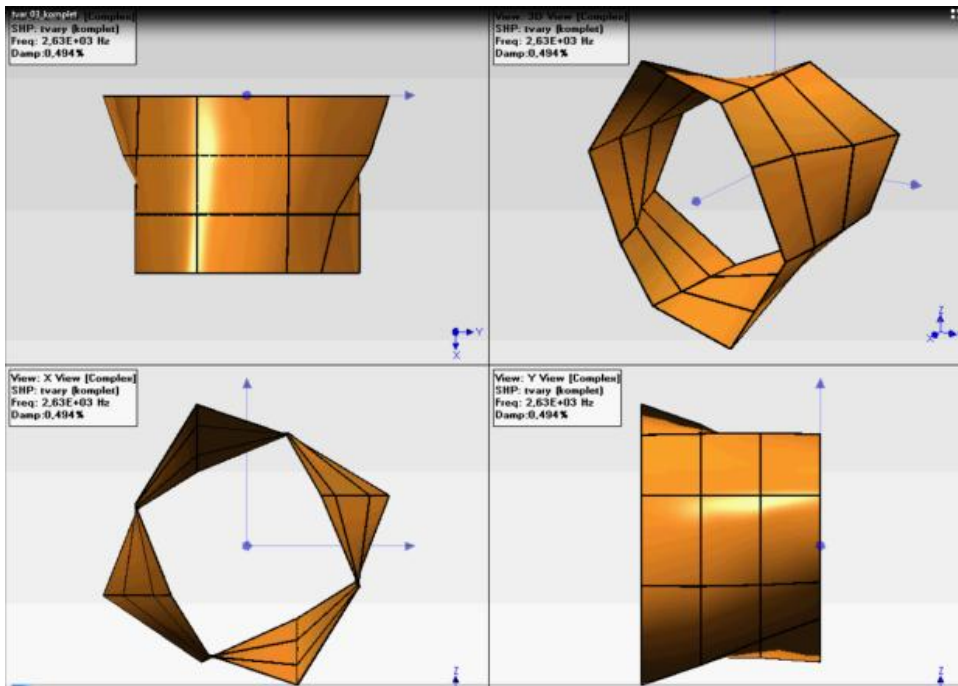
Obr. 5.34: Přenosové funkce jednotlivých buzených bodů paketu s vinutím – bez čel

tvár kmitu	frekvence [Hz]
2,0	2400
2,1	2630
1,1	4430
3,0	6010

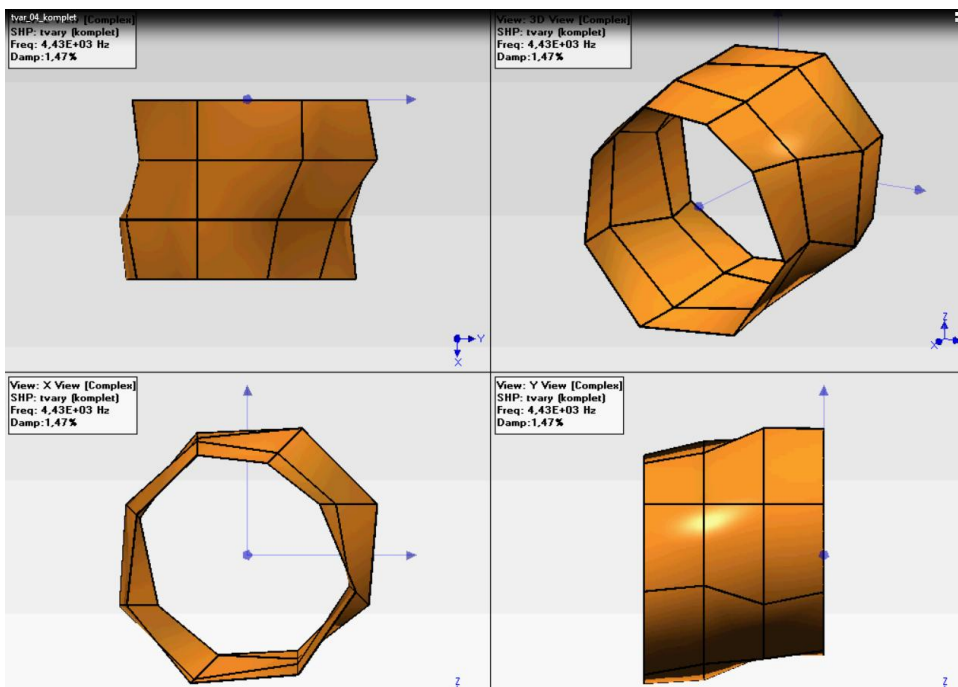
Tab. 9: Naměřené vl. frekvence mag. jádra s vinutím



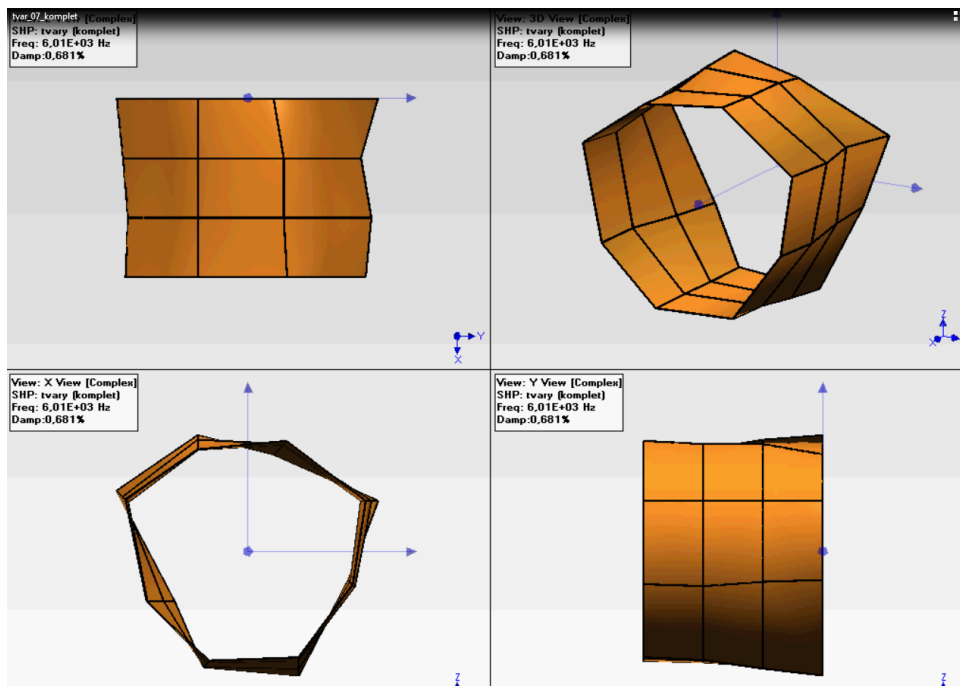
Obr. 5.35: Paket při frekvenci 2400 Hz



Obr. 5.36: Paket při frekvenci 2630 Hz



Obr. 5.37: Paket při frekvenci 4430 Hz



Obr. 5.38: Paket při frekvenci 6010 Hz

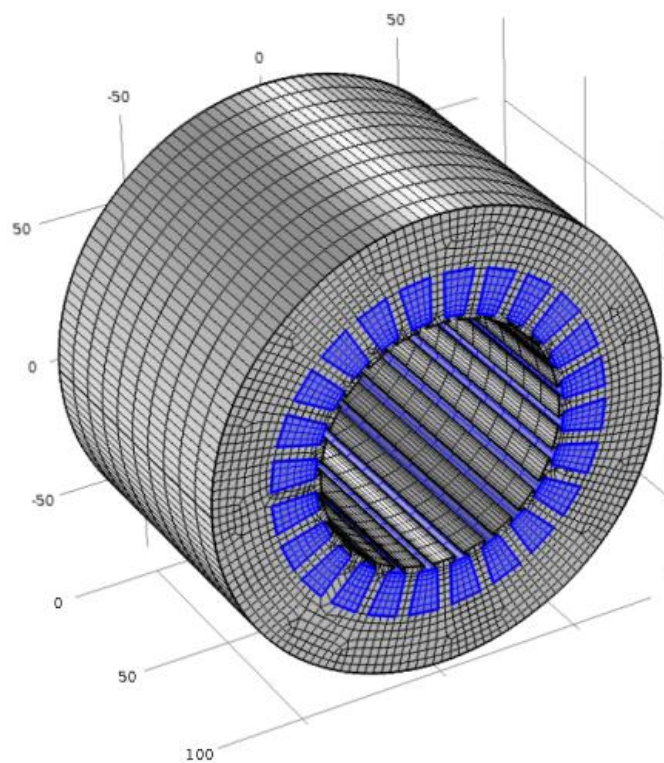
5.5.2 Modelování vlastních tvarů a vinutí

Stejně jako v přechozích případech, výsledky měření posloužily pro naladění numerického modelu. Magnetický obvod byl modelován v cylindrických souřadnicích, stejně jako samotné jádro. Vinutí bylo modelováno jako materiál se zjednodušenými izotropními parametry, které vycházely z předchozího modelu samotného vinutí.

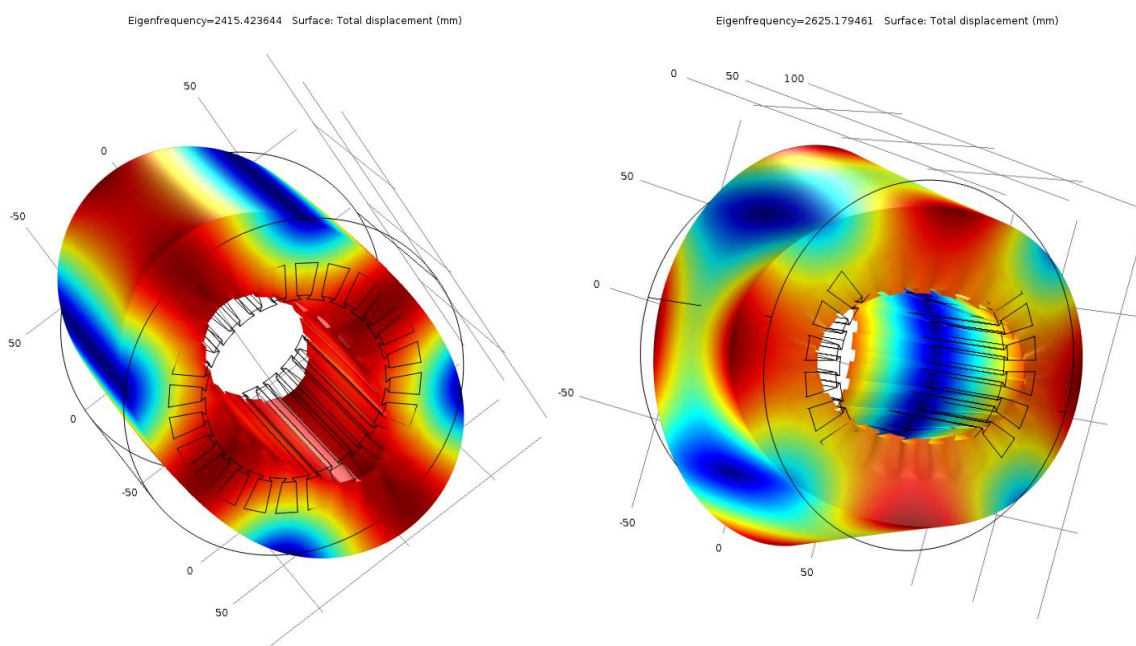
magnetický obvod	hodnota parametru
E_r [Pa]	$1,8 \cdot 10^{11}$
E_φ [Pa]	$1,8 \cdot 10^{11}$
E_z [Pa]	$1,2 \cdot 10^{11}$
$\nu_{r\varphi}$	0,3
$\nu_{\varphi z}$	0,3
ν_{rz}	0,3
$G_{r\varphi}$ [Pa]	$180 \cdot 10^9$
$G_{\varphi z}$ [Pa]	$18 \cdot 10^9$
G_{rz} [Pa]	$18 \cdot 10^9$
ρ_c [kg/m ³]	8000

vinutí	hodnota parametru
Modul pružnosti E [Mpa]	$53 \cdot 10^9$
Poissonova konstanta ν [-]	0,35
Měrná hustota ρ [kg/m ³]	8500

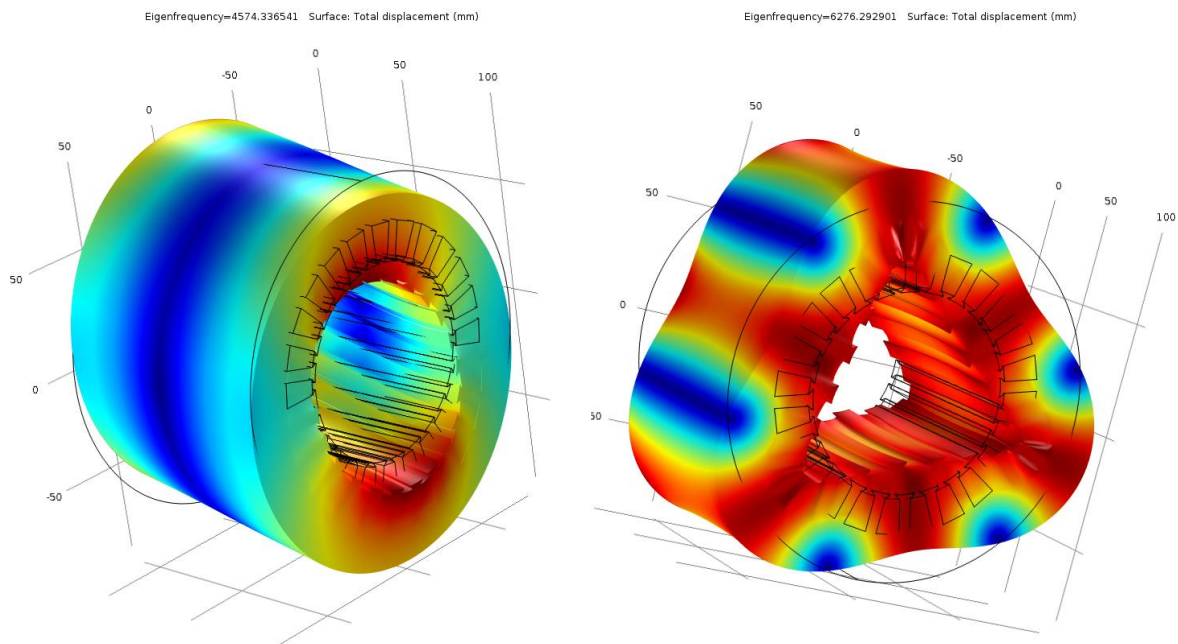
Tab. 10: Parametry numerického modelu mag. jádra s vinutím



Obr. 5.39: Síť modelu mag. jádra s vinutím



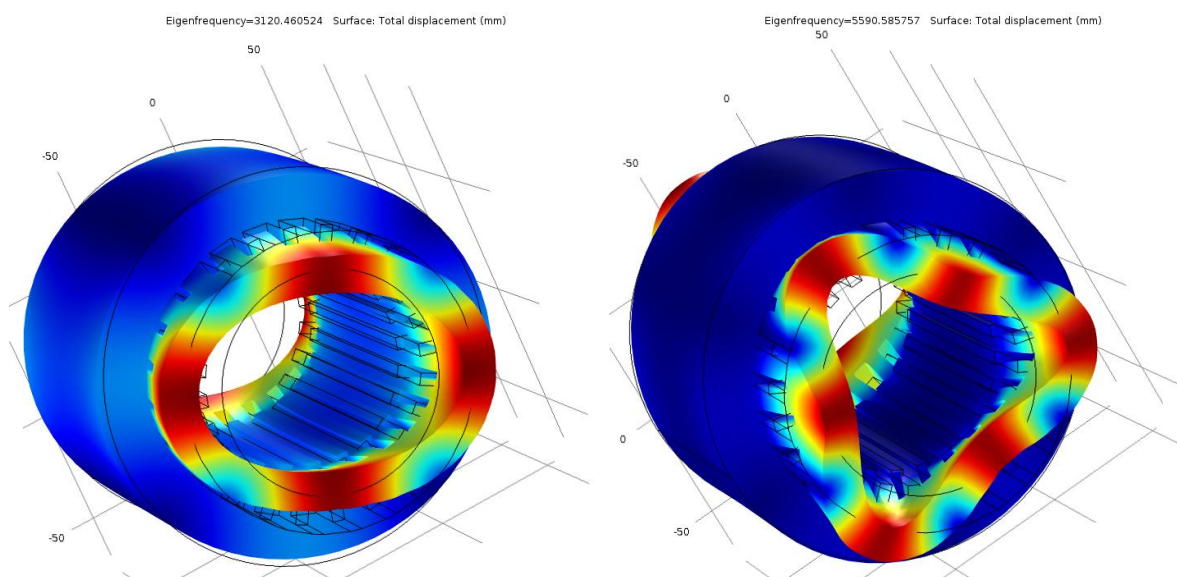
Obr. 5.40: Mag. jádro s vinutím při 2415 Hz a 2625Hz



Obr. 5.41: Mag. jádro s vinutím při 4574 Hz a 6276Hz

5.6 Vliv čel vinutí

V předchozích kapitolách byl uvažován magnetický obvod s vinutím bez čel vinutí. Ve skutečnosti mohou tato čela zanést do konstrukce další vlastní frekvence, které mohou v krajním případě také rozkmitat stroj. Vinutí je modelováno se stejnými parametry, které byly naladěny u modelu rovné části vinutí, jeho geometrie je zjednodušená – viz níže zobrazený model. To si můžeme dovolit z toho důvodu, protože čela jsou provázána tkaninou mezi sebou, naimpregnována a vytvrzena – z mechanického hlediska se jedná o „kruhový prsteneček“ připojený ke kostře. Frekvence a tvary košů jsou ukázány na dalších obrázcích:



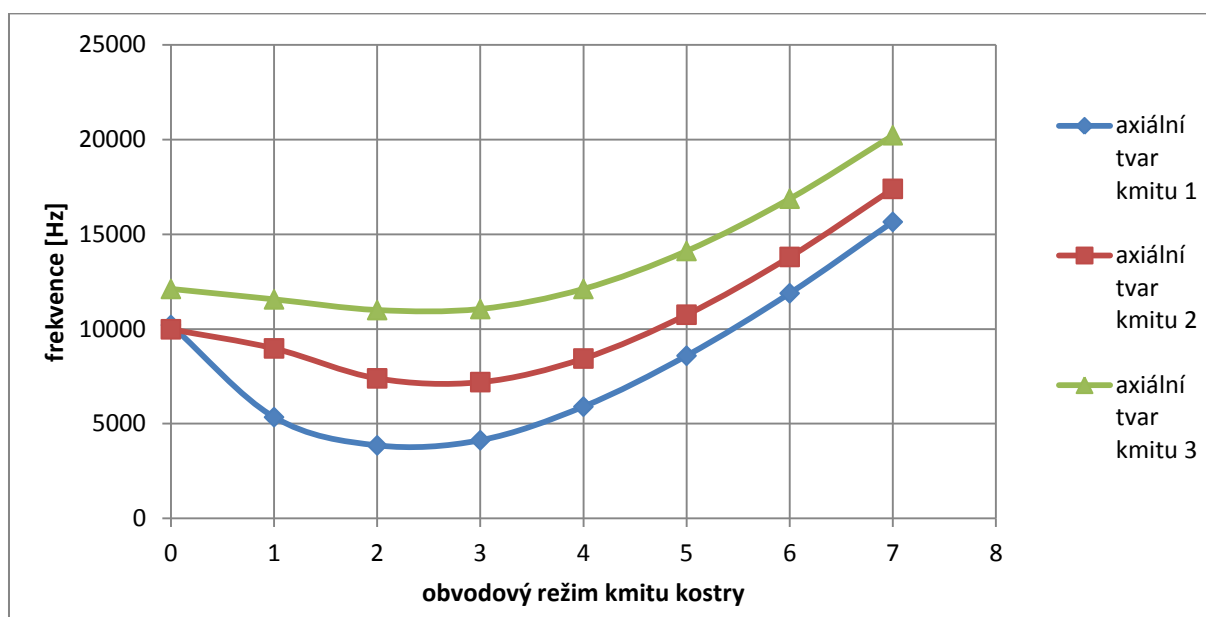
Obr. 5.42: Vlastní tvar čel vinutí při 3120 Hz a 5591 Hz

5.7 Vlastní frekvence kostry stroje

V této části je představen model naladěného magnetického jádra, které je uloženo v kostře stroje. Jak bylo řečeno v kapitole analytického výpočtu kostry, je modelována jako dutý válec. Ten má vetknuty oba své konce. Kostra stroje je modelována pro tři případy. Nejdříve je kostra uvažována s tloušťkou 10 mm a jsou vypočteny tvary a frekvence. Pro srovnání je ve druhém případě použita stejná kostra, ale její tloušťka je zmenšena na 5 mm. Ve třetím případě byla použita slabší kostra s tím rozdílem, že byly uvažovány chladicí žebra po obvodu kostry. Ilustračně jsou analyticky vypočítané vl. frekvence samotného rámu dle vztahu 4.27 srovnány s numerickým výpočtem, v závorce jsou výsledky numerického modelu, bez závorek podle analytického výpočtu, délka kostry byla uvažována 200 mm, její tloušťka 10 mm, hustota 7800 kg/m^3 , poisson. koef 0,35 a modul pružnosti $2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$:

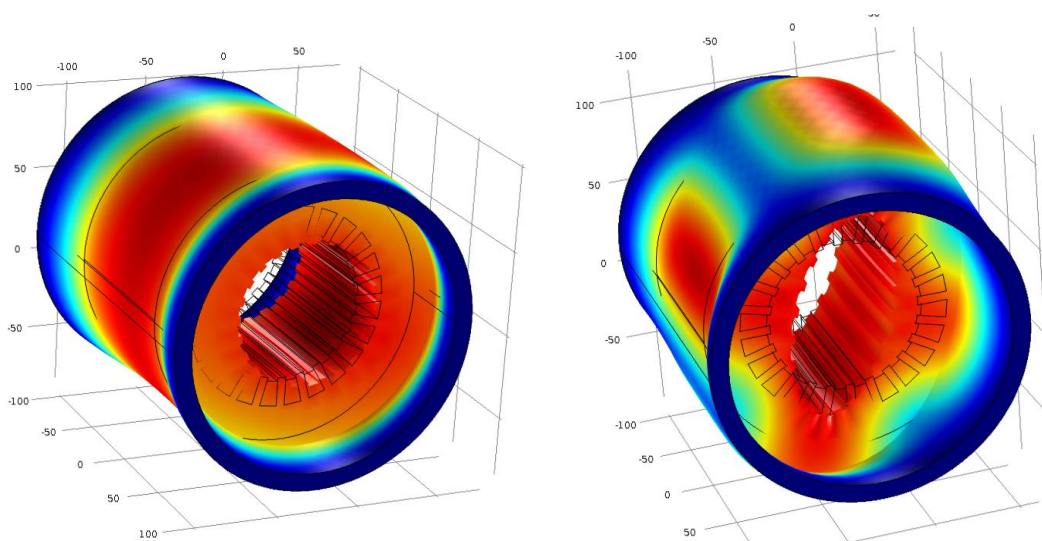
$n \downarrow$ $m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	10205 (9508)	5341 (6426)	3851 (4377)	4121 (4603)	5896 (6632)	8584 (9696)	11880 (13543)	15649 (18113)
2	9981 (10194)	8971 (9243)	7390 (7933)	7192 (7850)	8437 (9359)	10749 (12136)	13798 (15857)	17392 (20375)
3	12110 (11841)	11559 (11599)	10994 (11314)	11050 (11738)	12109 (13269)	14113 (15906)	16874 (19504)	20223 (23943)

Tab. 11: Vlastní frekvence kostry statoru

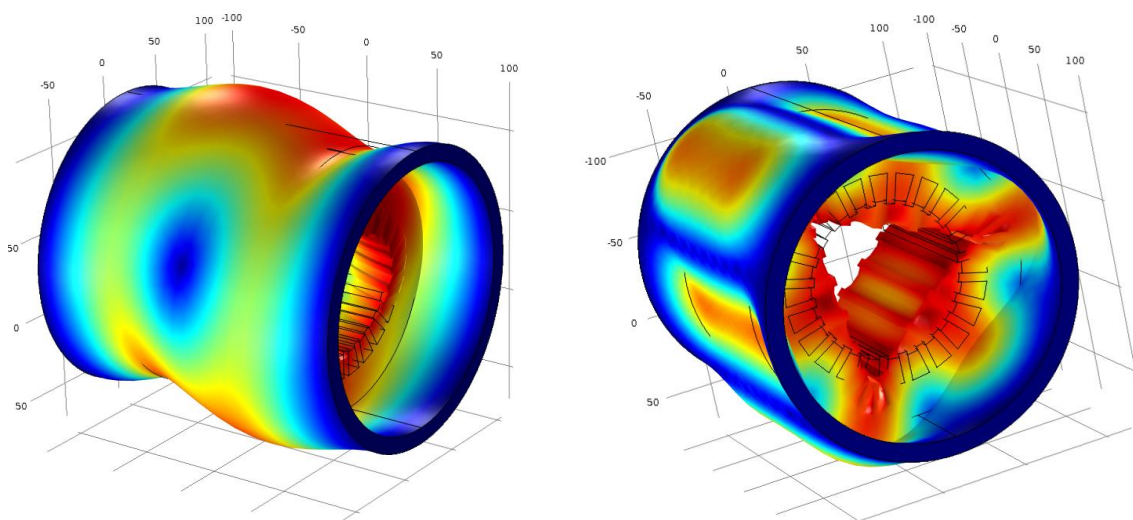


Obr. 5.43: Závislost frekvencí na vlastních tvarech

První případ s kostrou silnou 10 mm:

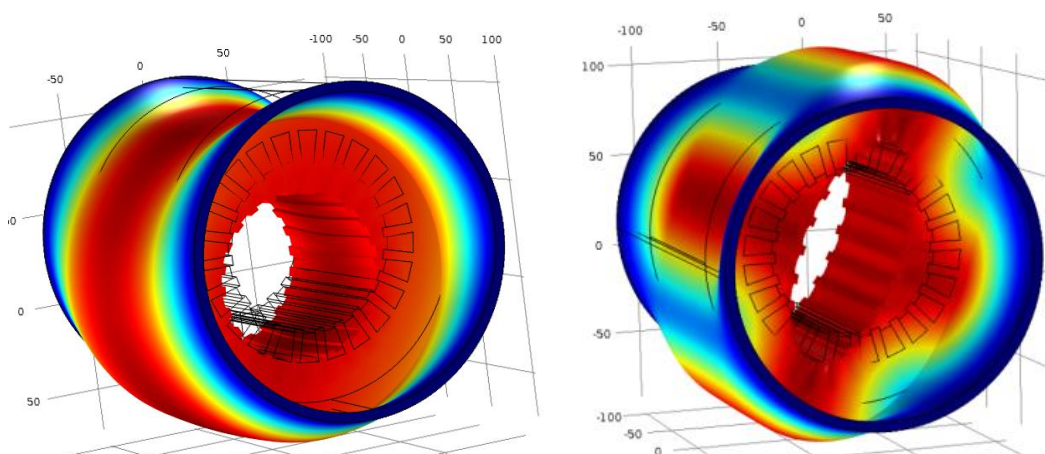


Obr. 5.44: Vlastní tvar při 3029 Hz a 3626 Hz

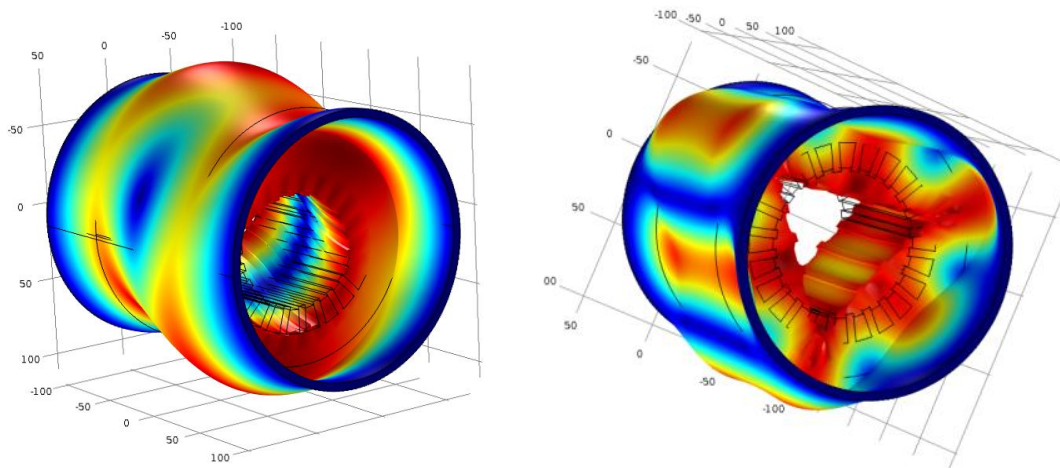


Obr. 5.45: Vlastní tvar při 7304 Hz a 8047 Hz

Druhý případ: magnetický obvod ve slabší 5mm kostře

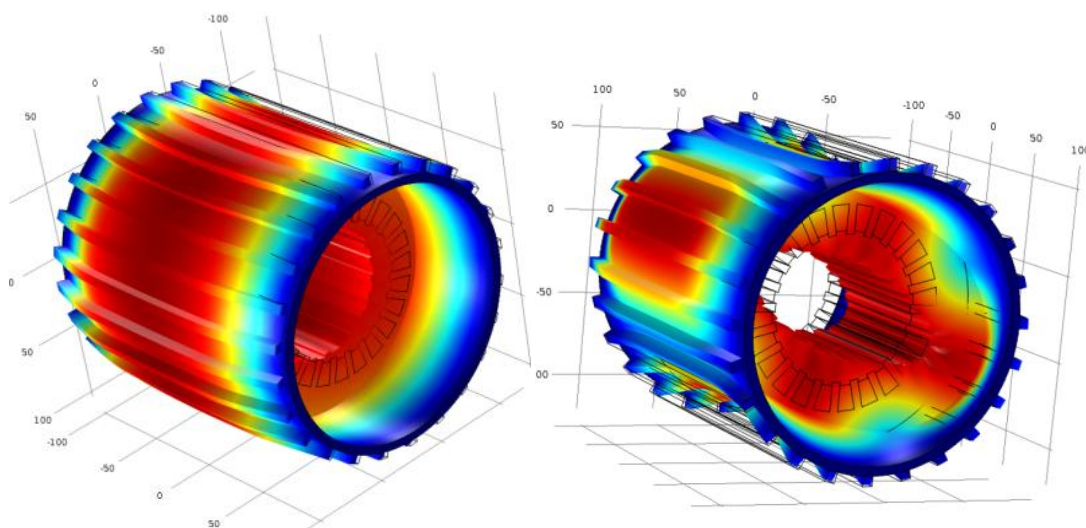


Obr. 5.46: Vlastní tvar při 2323 Hz a 3101 Hz

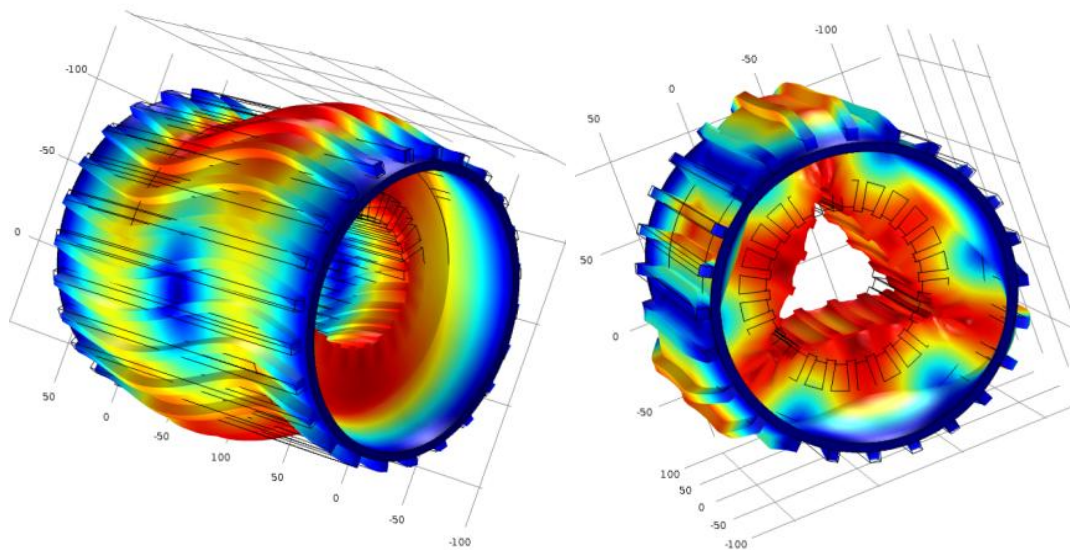


Obr. 5.47: Vlastní tvar při 5907 Hz a 7359 Hz

Třetí případ: kostra s chladícími žebry



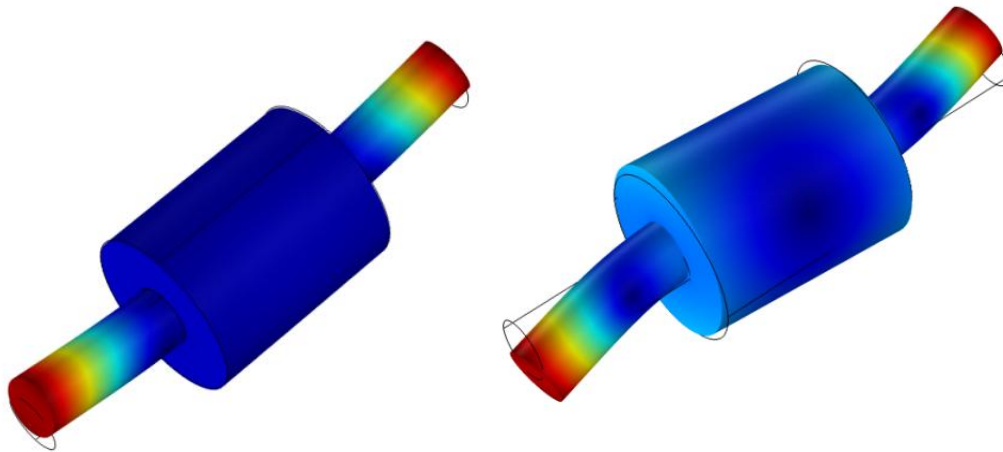
Obr. 5.48: Vlastní tvar kostry při 2344 Hz a při 3099 Hz



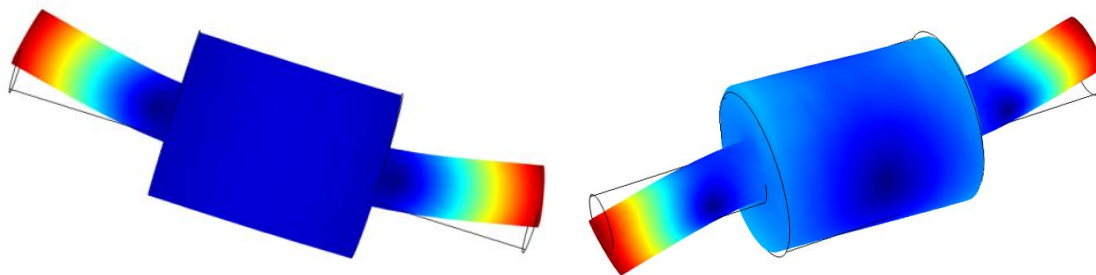
Obr. 5.49: Vlastní tvar kostry při 6268 Hz a při 7249 Hz

5.8 Vlastní frekvence rotoru

Jedním z dalších směrů zkoumání elektrických strojů, založeném na znalosti dynamických parametrů statoru, může být vliv rotorových částí stroje na jeho modální vlastnosti. Jako příklad je uveden vliv rotorového magnetického obvodu na vlastní frekvence rotoru. Je ukázáno, jak se změní hodnota frekvencí, pokud použijeme vlastnosti oceli pro paket rotoru nebo pokud je modelován pomocí náhradních parametrů. Vlastní tvary zůstanou stejné, jen se změní hodnota frekvence cca o 230 Hz.



Obr. 5.50: Tvary kmitu rotoru s ocelovým paketem při 2570Hz a 3507Hz



Obr. 5.50: Tvary kmitu rotoru s náhradními parametry při 2798Hz a 3750Hz

Závěr a zhodnocení výsledků

Rezonance patří bezesporu k nejnebezpečnějším jevům, které mohou nastat při provozu asynchronních strojů. Obzvláště v případech, při kterých je stroj provozován při různých otáčkách je důležité znát oblasti, při kterých může k těmto stavům dojít. To nastává například u trakčních aplikací, kdy dochází k provozu motoru v celém spektru otáček. Předložená práce je zaměřena na zjištění takových případů, kdy k rezonanci může dojít.

V první části práce jsou popsány složky magnetického pole, které se skládá z různých frekvencí a amplitud. Toto pole vyvolává silové vlny, díky kterým vzniká radiální tlak působící na vnitřní povrch statorového obvodu.

Hlavní část práce se zabývá vyšetřováním parametrů paketu statoru a jeho vinutí. Pokud se podíváme na výsledky z analytického výpočtu magnetického jádra a numerického modelu, který je modelován jako ocel, je vidět, že se liší a některé tvary nebyly vůbec nalezeny. Právě zjištění parametrů tohoto modelu bylo cílem této práce. Srovnáme-li frekvence a vlastní tvary kmitu naměřené experimentální analýzou a výsledky z modální analýzy samotného magnetického obvodu pomocí nalazených modálních parametrů, vidíme, že panuje značná shoda mezi výsledky – rozdíl mezi změřenými a namodelovanými výsledky je nejvíce 4,2 %. Je vidět, že modul pružnosti v axiálním směru je menší v porovnání s ostatními směry – tím byl ukázán vliv laminace paketu v axiálním směru.

Dále jsem provedl modální analýzu samotného vinutí, za účelem pozdějšího nalezení přesnějšího modelu celkového statorového svazku. Opět jsou vidět přesné výsledky mezi naměřenými a vypočítanými výsledky. Rozdíl výsledků je v řádu procent (2,2 %). Zde jsou představeny dva způsoby modelování vl. frekvencí. V prvním je vinutí modelováno z jednotlivých měděných pásků a izolace, ve druhém jako náhradní materiál s náhradními parametry. Tyto dva modely se jeví jako téměř identické.

Nakonec je opět představen model statorového paketu se založeným vinutím. Z parametrů modelu je vidět, že díky vinutí dojde k vyztužení celého modelu v axiálním směru. Modul pružnosti modulu v tomto směru vzrostl, ale stále je menší o 30 % než moduly v ostatních směrech.

Výsledky obdržené z modelu jsou dostatečně přesné v porovnání s měřením. Lze tedy konstatovat, že model prezentovaný v této práci je dostatečně přesný a lze jej použít pro predikci vlastních frekvencí a vlastních tvarů asynchronních strojů.

Dále je tento model možné použít k dalším mechanickým, akustickým nebo teplotním výpočtům.

Možné směry dalšího výzkumu

Na modelu statorového jádra s vinutím lze stavět při dalším zkoumání a modelování dynamických dějů elektrických strojů. V posledních kapitolách práce je ukázán vliv čel vinutí, založení paketu do kostry. Směr dalšího vývoje modelu je ve zkoumání vlivu těchto částí a jejich experimentální ověření. Budoucí práce by měla být také zaměřena na vliv štítů a na tom, jakým způsobem je modelovat. Dalším námětem je měření řady magnetických obvodů s různou geometrií, protože z dostupné literatury je zřejmé, že vlastní frekvence daného vlastního kmitu bude stoupat s klesajícím poměrem poloměru vrtání magnetického obvodu a výšky jha.

Použitá literatura

- [1] Bedřich Heller, Václav Hamata, *Přídavná pole, síly a ztráty v asynchronním stroji*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1961
- [2] Bartoš V.: *Teorie elektrických strojů*. Plzeň, Vydavatelství Západočeské univerzity, 2006
- [3] Marco Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, University of Parma, Italy, ISBN 9780521883290
- [4] Jacek F. Gieras, Chong Wang, Joseph Cho Lai, *Noise of Polyphase Electric Motors*, ISBN 0-8247-2381-3
- [5] Janne Roivainen, *Unit-wave response-based modeling of electromechanical noise and vibration of electrical machines*, Helsinki 2009, ISBN 978-951-22-9910-2
- [6] Dušek D., Solodyankin K., *Vliv tuhosti statorového svazku na modální vlastnosti elektrických strojů*, Elektrotechnika, ISSN 1213-1539
- [7] Wei Cai, Pragasen Pillay, Zhangjun Tang, *Impact of stator windings and end-bells on resonant frequencies and mode shapes of switched reluctance motors*, IEEE Transactions on industry applications, vol. 38, No. 4, July/August 2002
- [8] Kukula P., Ondrůšek Č., *Electric machine vibration analysis*, Ústav konstruování, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, 2007
- [9] Koen Delaere, Michele Iadevaia, Paul Sas, Ronnie Belmans and Kay Hameyer, *Coupling of numerical magnetic and experimental vibration analysis for electrical machines*, Katholieke Universiteit Leuven, B3000 Leuven, Belgium
- [10] Zhang F., Ningze T., FENGXIANG, W., *Analysis of Vibration Modes for Large Induction Motor*, Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2005, Sept. 2005, 64-67 Vol. 1
- [11] Koen Delaere, Ward Heylen, Ronnie Belmans, Kay Hameyer, *Finite element based expressions for lorentz, reluctance and magnetostriction forces*, Katholieke Universiteit Leuven, Kardinaal Mercierlaan 94, B3001 Heverlee, Belgium
- [12] Madejewski B., *Hluk elektrických strojů*, Výzkumný ústav elektrických strojů, Brno

- [13] Mochizuki M., Noda S., Ishibashi F, *Numerical simulation of electromagnetic vibration of small induction motors*, IEE Proc. –Electr. Power Appl. Vol. 145, No. 6, November 1998
- [14] Noda S., Ishibashi F, Kamimoto K., Itomi K., *Natural frequency of stator core of small induction motor*, IEE Proc. –Electr. Power Appl. Vol. 150, No. 2, November 2003
- [15] Alfredo Munoz R.,Gonzalo Nahmias C., *Mechanical vibration of three-phase induction motors fed by nonsinusoidal currents*, CIEP, Mexico 1994
- [16] Qing H., Qiu J. J., Hu Y. D., *Vibration Analysis of large turbo-generator stator system*, IEEE 2000, 0-7803-7459-2/02
- [17] Wang H., Williams K., *Vibration modes of thick cylinders of finite length*, Journal of Sound and Vibration 1996, 955 – 971
- [18] Noda S., Mori S. Itomi K., *Effect of coils on natural frequencies of stator cores in small induction motors*, IEEE transactions on Energy Conversion, Vol. EC-2, No. 1, 1987
- [19] Kobayashi T, Tajima F., Ito M. and Shibukawa S., *Effects of slot combination on acoustic noise from induction motors*, IEEE transactions on magnetics, Vol. 33, No. 2, 1997
- [20] Howe D., Zhu Z. Q., *Effects of end shields and rotor on natural frequencies and mode shapes of stator of small electrical machines*, University of Sheffield
- [21] Ishibashi F., Matsushita M., Noda S.,Kenzo T., *Change of Mechanical Natural Frequencies of Induction Motor*, IEEE transactions of industry applications, Vol. 46, No. 3, 2010
- [22] Hamata V., *Hluk elektrických strojů*, Academia, 1987
- [23] Grabner C., Hajdarevic I., *Analytical and numerical approaches for the prediction of resonance frequencies of a switched reluctance motor*, Institute of electrical machines and drives
- [24] Shiga M., *Natural frequencies of stator core of induction machine*, JSME, Vol. 27, No. 233, 1984

- [25] Wang H., *Experimental study of vibration behaviour of laminated annular disks*, J. Acoustic Soc. Am., Vol. 111, No. 4, 2002
- [26] Dvořák V., *Experimentální modální analýza jako metoda určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu mechanické soustavy*, ZČU Plzeň, 2009
- [27] Bilošová A., *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů, část Modální zkoušky*, Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava

Seznam publikovaných prací:

- 1) Bouzek Lukáš: *Frekvenční analýza statorového jádra asynchronního stroje*, Elektrotechnika a informatika 2010. Část 1., Elektrotechnika, ISBN: 978-80-7043-913-5
- 2) Kindl Vladimír; Pechánek Roman; Bouzek Lukáš: *Cooling of new designed machine*, Book of abstracts : 13th international symposium on mechatronics , 2010, ISBN: 978-80-8075-452-5
- 3) Bouzek Lukáš: *Chvění kostry asynchronního stroje*, Elektrotechnika a informatika 2011. Část první. Elektrotechnika, 2011, ISBN: 978-80-261-0016-4
- 4) Kindl Vladimír; Pechánek Roman; Bouzek Lukáš: *Cooling of new designed machine*, Book of abstracts : 13th international symposium on mechatronics, 2010, ISBN: 978-1-4244-7962-7
- 5) Bouzek Lukáš: *Natural Frequency of Stator Core of Asynchronous Machine*, Proceedings of 14th International Conference on Mechatronics, 2011, ISBN: 978-80-8075-476-1
- 6) Bouzek Lukáš: *Influence of Lamination on Natural Frequency of The Asynchronous Machine Magnetic Core*, Conference Proceeding LVEM 2012, 2012, ISBN: 978-80-214-4602-1
- 7) Bouzek Lukáš: *Měření vlastních frekvencí magnetického jádra*, Elektrotechnika a informatika 2012. Část 1., Elektrotechnika, 2012, ISBN: 978-80-261-0120-8
- 8) Pechánek Roman; Bouzek Lukáš: *Analyzing of Two Types Water Cooling Electric Motors Using Computational Fluid Dynamics*, EPE PEMC 2012 ECCE Europe - 15th International Power Electronics and Motion Conference and Exposition, 2012, ISBN: 978-1-4673-1971-3
- 9) Bouzek Lukáš, Vachtlová Michaela: *Vibrations of asynchronous machine frame*, XIV International PhD Workshop OWD 2012, 2012, ISBN: 978-83-935427-0-3
- 10) Bouzek Lukáš; Pechánek Roman: *Vibration behaviour of the asynchronous machine magnetic core*, EPE 13 ECCE Europe -15th European conference on power electronics and applications, 2013, ISBN: 978-1-4799-0116-6