AKTUÁRSKE MODELY PRE POISTENIE KRITICKÝCH CHORÔB

Lea Škrovánková, Michal Šoltés

Úvod

Poisťovníctvo v Slovenskej republike má dlhodobú, takmer storočnú tradíciu. Nie je to nové odvetvie ekonomiky. V súčasnosti zaznamenáva svoj výrazný rozvoj, rozrastá sa hlavne paleta ponúkaných produktov, a tým aj objem finančných prostriedkov, ktoré sa nachádzajú v tomto odvetví hospodárstva. Jedným z odvetví poisťovníctva je aj nemocenské poistenie, ktoré zohráva najvýznamnejšiu úlohu v sociálnom zabezpečení. Nemocenské poistenie je náhradou za príjem osoby, ktorá stratila možnosť zárobku z dôvodu práceneschopnosti, materstva alebo dlhodobého ošetrovania člena rodiny.

Cieľom tohto príspevku je popísať nemocenské poistenie a ponúknuť pohľad na spôsob výpočtu dávok v sociálnom systéme a priblížiť metódy používané súkromnými poisťovňami na ohodnotenie rizík spojených s kritickými chorobami, ktoré sú neoddeliteľnou súčasťou nemocenského poistenia.

Pri príprave tohto príspevku zohrala rozhodujúcu úlohu snaha autorov zviditeľniť stochastické modely, ktoré môžu slúžiť na odhad počtu predpokladaných poistných plnení v zdravotnom alebo nemocenskom poistení.

1 Charakteristika nemocenského poistenia

Nemocenské poistenie chápeme ako poistenie, ktoré poskytuje dávky ako určitú kompenzáciu príjmu v prípade, ak osoba nemôže byť ekonomicky aktívna v dôsledku choroby alebo úrazu. Realizuje sa peňažným plnením vo forme náhrady zárobku.

Zákonné a súkromné nemocenské poistenie má vo väčšine krajín, v ktorých existuje, rovnaký pôvod: nutnosť jednotlivca odbremeniť od ekonomických následkov choroby a tieto rozložiť na spoločnosť. V niektorých krajinách Európskej únie zákonné poistenie poskytuje zásadne vecné služby, zatiaľ čo súkromné poistenie ponúka širokú škálu úhrad liečebných nákladov [6].

Zákonné nemocenské poistenie sa financuje vlastnými príspevkami alebo z daňových prostriedkov. Príspevky sa vymeriavajú buď percentuálnou sadzbou z príjmu, alebo nezávisle od príjmu. Často je zákonné nemocenské poistenie podporované priamymi štátnymi dotáciami, čím sa dotujú ceny úkonov poistného plnenia. Využívajú sa tiež daňové výhody [3]. Príjmy súkromného nemocenského poistenia sú v každej krajine rôzne. Pole pôsobnosti súkromných nemocenských poisťovní je o to menšie, čím menej osôb je zapojených do poistenia a čím rozsiahlejšie sú štátne služby. Na pokrytie nemocenských nákladov ponúkajú pracovníci poisťovní zmluvy, na základe ktorých sa hradia buď náklady na plnenie jedného, alebo viacerých poistných rizík. Na vyrovnanie ušlého zárobku je možné uzatvoriť samostatné alebo spojené poistenie, ktoré pri prechodnej práceneschopnosti pamätá na platenie nemocenskej dennej mzdy a v prípade stálej pracovnej neschopnosti na platenie dôchodkov. V niektorých krajinách však patrí krytie trvalej práceneschopnosti k životným poistkám. Nie v každej krajine sa od seba odlučujú zdravotné poistenie a nemocenské poistenie tak, ako u nás. V mnohých krajinách je nemocenské poistenie zložkou zdravotného poistenia. Sú dokonca krajiny, ktoré nerozlišujú tieto dva termíny. Tam sa udomácnil jediný termín – zdravotné poistenie (podrobnejšie v [6]).

Jednotlivé druhy zdravotného, prípadne nemocenského poistenia majú presne stanovené okruhy osôb, ktoré sa môžu u nich poistiť. Poistené osoby možno v skoro každej krajine rozdeliť na dve základné skupiny: povinne poistení a dobrovoľne poistení.

Časť z celkovej sumy povinného poistenia hradí zvyčajne zamestnávateľ, nezamestnaným a študentom poistné hradí štát. Členovia rodiny povinne poistených sú automaticky poistení, bez zvláštnych príplatkov k poistnému. Ak sa občan rozhodne pre dobrovoľné poistenie, toto sa týka len jeho osoby a každý rodinný príslušník sa musí poistiť osobitne.

Súkromné nemocenské poistenie má dve formy:

- hromadné poistenie,
- individuálne poistenie.

Individuálne súkromné nemocenské poistenie nie je povinné a uzatvára ho jednotlivec s príslušnou súkromnou poisťovňou. Hromadné poistenie sa vzťahuje na zamestnancov podnikov a firiem, pričom sa často vzťahuje aj na ich rodinných príslušníkov. Tieto projekty hromadného poistenia sú financované z príspevkov podnikateľov a zamestnancov [8].

Produkty životného poistenia sú splatné na základe stanovenej udalosti, ako napríklad smrť poistenej osoby. Dávka vyplácaná po nastatí zmluvne dohodnutej udalosti je fixne stanovená suma peňažných jednotiek. Smrť poisteného je podnetom na vyplatenie dávok oprávnenej osobe. Na rozdiel od životného poistenia je nemocenské poistenie všeobecne používaný pojem na popísanie rôznych druhov poisťovacích produktov, kde výplaty dávok sú závislé na zdravotnom stave poistenej osoby. Poistná udalosť nemocenského poistenia môže byť definovaná ako jednorazová udalosť alebo dôsledok zmeny zdravotného stavu v priebehu časového intervalu. Poistná udalosť môže vyvolať výplatu rôznych následných poistných plnení, ktoré sa líšia v závažnosti a výške vyplatenej sumy. Principiálny rozdiel medzi životným a nemocenským poistením je v tom, že ak poistený životným poistením zomrie, smrť nastala a poistné plnenie je vyplatené pozostalým, zatiaľ čo v nemocenskom poistení je spôsob výplaty omnoho komplikovanejší. Poistná zmluva nemocenského poistenia chápe poistnú udalosť ako zranenie alebo začiatok ochorenia. Individuálny stav zdravia poisteného musí byť taký, aby viedol k vyhľadaniu zdravotnej starostlivosti alebo k práceneschopnosti zo zdravotných dôvodov (podrobnejšie v [7]).

2 Pravdepodobnosť výskytu civilizačnej choroby

Pre neustále rastúcu pravdepodobnosť výskytu niektorej z civilizačných chorôb sa stále viac do popredia dostáva moderný poistný produkt – poistenie kritických chorôb (*Označované ako aj Terminal Illness Insurance, Critical Illness Benefits, Versichrung der ernstlichen Krankheiten (podľa [7]*). Na trh bol uvedený poisťovacou spoločnosťou Crusader Life v Juhoafrickej republike v roku 1983. Neskôr sa rozšíril do Austrálie, juhovýchodnej Ázie a Severnej Ameriky. Až potom ho začali poskytovať poisťovne na území Európy. Poistenie kritických chorôb spočíva vo vyplatení stanoveného poistného plnenia v prípade diagnostikovania niektorej z kritických chorôb, bližšie špecifikovaných vo Všeobecných poistných podmienkach pre poistenie/ pripoistenie kritických chorôb danou poisťovňou u poisteného. Poistné plnenie sa celkovo vyplatí len raz, a to aj v prípade, ak počas trvania poistenia nastanú dve alebo viac poistných udalostí.

Poistenie kritických chorôb poskytnú poisťovne buď samostatne alebo spolu s klasickým životným poistením, tj. poistením pre prípad úmrtia alebo dožitia sa určitého veku. Týmto môžu na trhu ponúkať komplexnejšiu ochranu proti rozličným životným rizikám. Výhodou je aj zásada, že plnenie sa poskytne žijúcej osobe, ktorou je poistený alebo jeho pozostalým. Pri diagnostikovaní niektorého z kritických ochorení dochádza často k vážnemu narušeniu existujúceho životného štýlu i finančnej situácie danej osoby. Preto ako hlavné výhody poistenia kritických chorôb možno spomenúť:

- možnosť pokrytia bežných nákladov na liečenie,
- možnosť kvalitnej liečby a nadštandardného ošetrenia,
- finančné zabezpečenie rodiny ako kompenzácia straty zárobku,
- možnosť financovania nákladov na zmenené životné a pracovné podmienky,
- pozitívny vplyv na psychický stav poisteného vylúčením materiálnych starostí a i.

Niet pochýb o tom, ako významné sú v rámci tohto poistenia práve zdravotné aspekty a lekárska záruka (underwriting). Veľmi dôležité sú už samotné definície jednotlivých diagnóz pri dojednávaní poistných zmlúv. Vzhľadom na veľkú rizikovosť tohto poistenia, poisťovne používajú dve základné ochranné opatrenia [6]: doba prežitia – je zmluvne stanovená doba od diagnostikovania vážneho ochorenia (zvyčajne dva týždne až tri mesiace) a najskôr až po jej uplynutí má poistený nárok na poistné plnenie. Jej hlavný dôvod je zrejmý. V prípade smrti poisteného krátko po diagnóze ochorenia, skôr ako poisťovňa stačí dokončiť príslušné šetrenie, by mohli nastať značné problémy s likvidáciou poistnej udalosti. Čakacia doba – ide o zmluvne stanovené obdobie od uzatvorenia poistenia, počas ktorého poistený nie je krytý proti riziku kritických chorôb. Dôvodom zavedenia bola eliminácia možnosti zneužitia tohto poistenia osobami, ktoré už v čase uzatvárania poistenia trpia niektorou z kritických chorôb v počiatočnom štádiu, postihnutí o nej vedia a práve preto sa snažia poistiť. Táto lehota je obvykle trojmesačná až polročná, avšak podobne ako v predchádzajúcom prípade, jej dĺžka závisí od konkrétnych podmienok poistenia ako aj poisťovne.

Dôležitou podmienkou pri tvorbe poistenia kritických chorôb je stanovenie diferencovaného poistného, čo vyplýva z rôznej frekvencie výskytu rakoviny, mozgovej príhody alebo inej kritickej choroby u mužov a žien. Túto diferenciáciu umožňuje používanie rozdielnych úmrtnostných tabuliek pre mužov a ženy [1].

3 Modely nemocenského poistenia

Pri aplikáciách v operačnej analýze a v ekonómii sa najčastejšie využívajú typy náhodných procesov so spojitým parametrom (časom) a diskrétnymi (nespojitými) stavmi [9]. Ide o procesy s jednoduchou väzbou prebiehajúce v spojitom čase, ktoré nazývame Markovove procesy. Príkladmi procesov tohto typu môžu byť napríklad zákazníci vstupujúci do obchodu, t. j. vstup jednotiek do systému obsluhy, rast obyvateľstva, ktorý závisí od počtu narodených a počtu zomretých, t. j. proces zrodov a úmrtí, ale aj rozširovanie infekčnej choroby medzi obyvateľstvom, t. j. počet nakazených predstavuje proces zrodov.

V súčasnosti poisťovne využívajú rôzne aktuárske modely založené na stochastických Markovových procesoch. V druhej polovici minulého storočia sa v poisťovníctve začali používať viacstavové modely, ktoré sa s jednotlivými obmenami používajú až dodnes. Základom modelovania je voľba množiny stavov, v ktorom sa môže osoba v priebehu života nachádzať a ďalej určenie, akým spôsobom dochádza k prechodu medzi jednotlivými stavmi.

Majme konečnú množinu stavov $S(x)=\{1,2,...,n\}$, kde $x+t$ predstavuje vek poistenca.

Pravdepodobnosť toho, že v čase $x+t$ sa osoba nachádza v stave j, za predpokladu, že v čase x bola v stave i (pravdepodobnosť závisí iba od stavu v čase x) označíme:

$$p_{ij}(x,x+t) = P[S(x+t)=j/S(x)=i] \text{ pre } i,j\in\{1,2,...,n\} \quad (1)$$

a platí:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij'}(x,x+t) = 1 \text{ pre } \forall x,t \geq 0 \text{ a pevné } i. \quad (2)$$

Hovoríme o pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j.

Potom

$$[S(x): 0 \leq x \leq \omega] \quad (3)$$

s vlastnosťou (1) predstavuje nehomogénny Markovov proces s konečným počtom $\boldsymbol{n}$ možných stavov pre spojitý čas $\boldsymbol{x}$, kde ω je jeho horné ohraničenie.

Nakoľko sa jedná o procesy t. j. čas je spojitá premenná, môžeme pomocou pravdepodobností prechodu definovať jednotlivé intenzity prechodu nasledovným spôsobom:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(x,x+t)}{t} = \mu_{i,j}(x) \text{ pre } i\neq j, \quad (4)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1-p_{ij}(x,x+t)}{t} = \mu_{i,i}(x). \quad (5)$$

Matematický aparát takéhoto modelovania tvorí systém diferenciálnych rovníc pomocou ktorých vypočítame potrebné pravdepodobnosti. Pre ich odvodenie potrebujeme najskôr získať vzťahy pre pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(x,x+t)$.

Všeobecné vyjadrenie pre pevne zvolené indexy i, j, pričom uvažujeme časové okamihy $x; x+t; x+t+h$ a s využitím vety o úplnej pravdepodobnosti je:

$$p_{ij}(x,x+t+h) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x,x+t)\, p_{kj}(x+t,x+t+h). \quad (6)$$

Pre $k=j$ použitím vzťahu (2) dostávame:

$$p_{jj}(x+t,x+t+h) = 1-\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} p_{js}(x+t,x+t+h). \quad (7)$$

Pre $k\neq j$ z definície intenzity prechodu (4) dostaneme:

$$p_{kj}(x+t,x+t+h) \cong h\mu_{kj}(x+t) + o_{kj}(h), \quad (8)$$

pričom $o_{kj}(h)$ reprezentuje funkciu, ktorá konverguje k nule rýchlejšie ako lineárna funkcia. Ide o tzv. funkciu rádu nula, pre ktorú platí:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{o_{kj}(h)}{h} = 0. \quad (9)$$

Potom pomocou vzťahu (8) vyjadríme $p_{jj}(x+t, x+t+h)$:

$$p_{jj}(x+t,x+t+h) \cong 1-h\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} \left[\mu_{js}(x+t) + \frac{o_{js}(h)}{h}\right]. \quad (10)$$

Po postupnom dosadení vzťahov (8) a (10) do (6) dostávame:

$$p_{ij}(x,x+t+h)=p_{ij}(x,x+t)p_{ij}(x+t,\,x+t+h)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}p_{ik}(x,x+t)\,p_{kj}(x+t,\,x+t+h)\cong p_{ij}(x,x+t)\left\{1-h\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\left[\mu_{js}(x+t)+\frac{o_{js}(h)}{h}\right]\right\}+$$
$$+h\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}p_{ik}(x,x+t)\left[\mu_{kj}(x+t)+\frac{o_{kj}(h)}{h}\right]. \qquad (11)$$

Po jednoduchej úprave dostaneme rovnicu:

$$\frac{p_{ij}(x,x+t+h)-p_{ij}(x,x+t)}{h}\cong p_{ij}(x,x+t)\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\left[\mu_{js}(x+t)+\frac{o_{js}(h)}{h}\right]+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}p_{ik}(x,x+t)\left[\mu_{kj}(x+t)+\frac{o_{kj}(h)}{h}\right]$$

Predpokladáme, že funkcia je diferencovateľná, potom limitným prechodom pre $h\to 0^{+}$ získame diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,p_{ij}(x,x+t)=-p_{ij}(x,x+t)\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\mu_{js}(x+t)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}p_{ik}(x,x+t)\mu_{kj}(x+t). \qquad (12)$$

Uvedené diferenciálne rovnice predstavujú matematický model uvažovaného systému. Môžeme ho postupne riešiť buď všeobecne, ak máme začiatočné podmienky, alebo hľadáme numerické riešenie v prípade známych intenzít prechodu. Z uvedeného systému si pre vopred zvolené vyberieme pár simultánnych rovníc, v ktorých sa nachádzajú neznáme funkcie $p_{ij}(x,x+t)$. Postupnou úpravou získame jednu diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu pre $p_{ij}(x,x+t)$, kde i, j sú konštantné. Ďalej pri riešení používame známe numerické metódy pri zadaných začiatočných podmienkach.

Ďalej sa budeme venovať pravdepodobnosti $p_{\overline{ii}}(x,x+t)$, t. j. pravdepodobnosti zotrvania v stave i. Definujme nasledovné pravdepodobnosti:

$$p_{jj}(x,x+t)=P[S(x+t)=i/S(x)=i] \qquad (13)$$

$$p_{\overline{ii}}(x,x+t)=P[S(x+k)=i;\ \forall k\in\langle 0,\ t\rangle/\mathrm{S}(x)=i,$$
$$\text{pre } x\geq 0,\ t\geq 0,\ i=1,\,2,\,...,\,n. \qquad (14)$$

Pravdepodobnosť $p_{ii}(x,x+t)$ vyjadruje prechod zo stavu i do stavu i za časové obdobie $\langle x,x+t\rangle$, avšak nehovorí nič o tom, akými stavmi prechádzala osoba medzi týmito dvoma časovými bodmi. Pravdepodobnosť $p_{\overline{ii}}(x,x+t)$ vyjadruje zotrvanie v stave i, t. j. nedošlo počas uvedeného časového obdobia k žiadnemu prechodu.

Z vety o úplnej pravdepodobnosti pre $p_{\overline{ii}}(x,x+t)$ vyplýva:

$$p_{\overline{ii}}(x,x+t+h)=p_{\overline{ii}}(x,x+t)p_{\overline{ii}}(x+t,\,x+t+h), \qquad (15)$$

kde $p_{\overline{ii}}(x,x+t)=p_{\overline{ii}}(x,x+t)$.

Podľa (7) a (10) platí:

$$p_{\overline{ii}}(x+t,\,x+t+h)\cong 1-h\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\left[\mu_{is}(x+t)+\frac{o_{is}(h)}{h}\right].$$

Po dosadení a limitným prechodom pre $h\to 0^{+}$ dostávame diferenciálnu rovnicu prvého rádu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,p_{\overline{ii}}(x,x+t)=-p_{\overline{ii}}(x,x+t)\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\mu_{is}(x+t) \qquad (16)$$

so začiatočnou podmienkou $p_{ii}(x,x+t)=1$ pre $t=0$.

Riešením tejto rovnice je:

$$p_{\overline{ii}}(x,x+t)=e^{-\int_{0}^{t}\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\mu_{is}(x+r)\mathrm{d}r}. \qquad (17)$$

V praxi sa veľmi často využívajú štvor a viacstavové modely poistenia [5]. Ide hlavne o modelovanie v rámci dôchodkového, či nemocenského poistenia. Aktuárske modely založené na stochastických Markovových procesoch však možno využiť aj pri modelovaní poistenia kritických chorôb, ktoré poskytuje poistenému jednorazové plnenie v prípade rôznych rizikových ochorení uvedených v poistnej zmluve. Tieto budeme špecifikovať v nasledujúcej kapitole. V súčasnosti existujú rôzne modifikácie modelov pre tento druh poistenia.

4 Aplikácia viacstavových modelov

V tejto kapitole sa budeme venovať aplikáciám markovovských modelov. Pomocou konkrétnych modelov sa pokúsime znázorniť už opisované poistenie kritických chorôb. Jeden z prvých aktuárskych modelov bol vytvorený Britským aktuárskym inštitútom na konci 80-tych rokov. Zaoberá sa jednou z najzákernejších kritických chorôb. Predstavuje aplikáciu Markovovho procesu, na ktorom popisuje priebeh prenosu HIV a rozširovanie AIDS, pritom však pracuje s údajmi, ktoré sú bežne dostupné každej poisťovni (čitateľ sa viac dočíta v [7]).

V britskom aktuárskom modeli je však ťažké dospieť k nejakým analytickým výsledkom veľmi dôležitým pre poisťovne. Aj preto došlo k jeho podstatnému zjednodušeniu. Podstatným a najdôležitejším zjednodušením je, že budeme uvažovať už s intenzitami prechodu medzi jednotlivými stavmi nezávislými na veku osoby a dĺžky zotrvania v danom stave t. j. budú konštantné. Aj napriek tomu, že v britskom aktuárskom modeli bola nutná závislosť od veku, tu môžeme prijať tento predpoklad z dvoch hlavných dôvodov:

- vďaka uvedenému zjednodušeniu dostávame numerické výsledky,
- hodnoty intenzít prechodu spojených s AIDS prevážia riziko úmrtnosti spojené s vekom.

Takmer vo všetkých modeloch týkajúcich sa AIDS, ktoré boli už boli vytvorené, sa predpokladá nezávislosť intenzít prechodu [3]. Stav mŕtvy je spoločný pre všetky „živé" stavy. Model aplikujeme nie na celú populáciu, ale len na mužských jedincov, ktorí sa na začiatku nachádzajú v stave rizikový a neskôr sa môžu dostať do akéhokoľvek z ďalších uvažovaných stavov modelu. Posledným zjednodušením je predpoklad, že intenzity prechodu zo stavu rizikovosti do stavu seropozitivity sú konštantné a nezávisia na počte infikovaných osôb. Tento predpoklad je zhodný s exponenciálnym priebehom nových prípadov choroby AIDS v skorých štádiách epidémie.

Na základe uvedených zjednodušení dostávame model s piatimi stavmi, ktorý je znázornený na obr. 1. V ňom sú taktiež uvedené aj možné prechody medzi jednotlivými stavmi. Je nutné poznamenať, že v prípade opustenia nejakého stavu osoby vo veku , neexistuje už možný návrat späť.

Stav rizikový je vstupný stav pre každého jedinca prichádzajúceho do modelu. Postupne sa osoba môže stať HIV pozitívnou alebo v prípade zdravého životného štýlu môže prejsť do stavu 4. Samozrejme, pre jednotlivca v stave 1 až 4 je možnosť úmrtia, t. j. prechod do stavu 5. V prípade HIV pozitívnej osoby môže nastať prechod do stavu choroby na AIDS. Vzhľadom na konštantnosť intenzít prechodu, doba, ktorú osoba strávi v nejakom stave, nemá vplyv na budúce obdobie, počas ktorého ešte osoba zotrvá v danom stave.

Aktuárske funkcie, napríklad dôchodky, poistenia na úmrtie alebo rezervy počítané pre osobu vo veku , sú zložitými funkciami intenzít prechodu vo viacstavovom modeli. Ich citlivosť na zmeny intenzít môže byť vysvetlená pomocou výpočtov vedených v rôznych počítačových programoch [1].

Na matematické vyjadrenie daného modelu opäť využijeme systém Kolmogorových diferenciálnych rovníc, kde $p_{ii}(x,x+t)$ je pravdepodobnosť toho, že x- ročná osoba, ktorá sa nachádza v stave i, po uplynutí t rokov bude v stave j.

Matica pravdepodobností prechodu má tvar:

$$P(x,x+t)=\begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & p_{13}(x,x+t) & p_{14}(x,x+t) & p_{15}(x,x+t) \\ 0 & p_{22}(x,x+t) & p_{23}(x,x+t) & 0 & p_{15}(x,x+t) \\ 0 & 0 & p_{33}(x,x+t) & 0 & p_{35}(x,x+t) \\ 0 & 0 & 0 & p_{44}(x,x+t) & p_{45}(x,x+t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matica intenzít prechodu má tvar:

$$A(x)=\begin{pmatrix} -\sum\mu_{1j}(x) & \mu_{12}(x) & 0 & \mu_{14}(x) & \mu_{15}(x) \\ 0 & -\mu_{23}(x)-\mu_{25}(x) & \mu_{23}(x) & 0 & \mu_{25}(x) \\ 0 & 0 & -\mu_{35}(x) & 0 & \mu_{35}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{45}(x) & \mu_{45}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

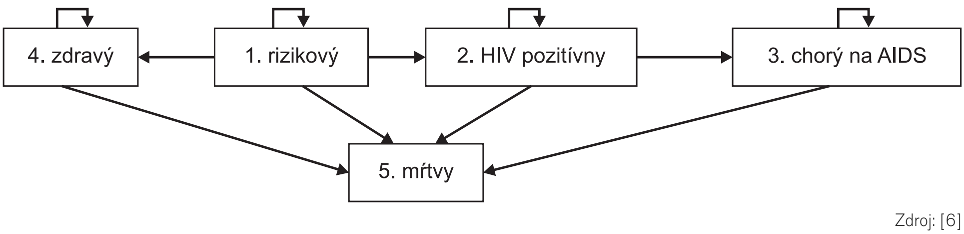
Z modelu vyplýva že:

$p_{ij}(x,x+t)=0$ pre $i>1$

a tiež platí:

$p_{24}(x,x+t) = p_{34}(x,x+t) = 0.$

Obr. 1: Modifikovaný model AIDS



Zdroj: [6]

Na základe vzťahu (12) dostávame nasledujúce vyjadrenie diferenciálnych rovníc modelu:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{11}(x, x+t) = -p_{11}(x, x+t)\,\mu_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{12}(x, x+t) = p_{11}(x, x+t)\mu_{12} - p_{12}(x, x+t)\,\mu_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{13}(x, x+t) = p_{12}(x, x+t)\,\mu_{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{14}(x, x+t) = p_{11}(x, x+t)\,\mu_{14} - p_{14}(x, x+t)\,\mu_{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{15}(x, x+t) = p_{11}(x, x+t)\,\mu_{15} - p_{12}(x, x+t)\,\mu_{25} + p_{14}(x, x+t)\,\mu_{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{22}(x, x+t) = -p_{22}(x, x+t)\mu_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{23}(x, x+t) = p_{22}(x, x+t)\mu_{23} - p_{23}(x, x+t)\mu_{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{25}(x, x+t) = p_{22}(x, x+t)\mu_{25} - p_{23}(x, x+t)\mu_{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{33}(x, x+t) = -p_{33}(x, x+t)\mu_{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{35}(x, x+t) = p_{33}(x, x+t)\mu_{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{44}(x, x+t) = -p_{44}(x, x+t)\mu_{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{45}(x, x+t) = p_{44}(x, x+t)\mu_{45}$$

kde $\mu_1 = \mu_{12} + \mu_{14} + \mu_{15}$ a $\mu_2 = \mu_{23} + \mu_{25}$

Systém rovníc budeme ďalej riešiť pri nasledujúcich začiatočných podmienkach ($t = 0$):

$p_{ii}(x, x) = 1$, $p_{ij}(x, x) = 0$.

Na základe vzťahu (17) dostávame riešenie niektorých z rovníc, vyjadrujúcich pravdepodobnosti zotrvania v stavoch 1, 2, 3, 4. Pravdepodobnosti zotrvania $p_{ii}(x, x+t)$, resp. $p_{ii}(x, x+t)$ v určitom stave sú rovnaké (v modeli neexistuje možný prechod späť do predchádzajúceho stavu [6]).

$$p_{11}(x, x+t) = e^{-\mu_1 t},$$

$$p_{22}(x, x+t) = e^{-\mu_2 t},$$

$$p_{33}(x, x+t) = e^{-\mu_{35} t},$$

$$p_{44}(x, x+t) = e^{-\mu_{45} t}.$$

Riešením ostatných rovníc zo systému dostávame:

$$p_{12}(x, x+t) = e^{-\mu_2 t} + \frac{\mu_{12}}{\mu_2 - \mu_1}\, e^{-\mu_1 t}$$

$$p_{13}(x, x+t) = -\frac{\mu_{23}}{\mu_2}\, e^{-\mu_2 t} - \frac{\mu_{12}\,\mu_{23}}{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}\, e^{-\mu_1 t}$$

$$p_{14}(x, x+t) = e^{-\mu_{45} t} + \frac{\mu_{14}}{\mu_{45} - \mu_1}\, e^{-\mu_1 t}$$

$$p_{23}(x, x+t) = e^{-\mu_{45} t} + \frac{\mu_{23}}{\mu_{35} - \mu_2}\, e^{-\mu_2 t}$$

Dosadením už známych pravdepodobností do zvyšných rovníc dostávame vzťahy pre pravdepodobnosti úmrtnosti:

$$p_{15}(x, x+t) = 1 - \sum_{j=1}^{4} p_{1j}(x, x+t)$$

$$p_{25}(x, x+t) = 1 - \sum_{j=2}^{3} p_{2j}(x, x+t)$$

$$p_{35}(x, x+t) = 1 - e^{-\mu_{35} t}$$

$$p_{45}(x, x+t) = 1 - e^{-\mu_{45} t}$$

Záver

V príspevku sme sa snažili poskytnúť niekoľko základných informácií o nemocenskom poistení a jeho výpočtoch počnúc základnou charakteristikou pojmov využívaných v nemocenskom poistení a popisom jednotlivých dávok. V sociálnom zabezpečení zohráva nemocenské poistenie veľmi dôležitú úlohu. Umožňuje poisteným zachovať si príjem peňažných prostriedkov aj v prípade práceneschopnosti, kritickej choroby alebo materstva.

Uviedli sme poistenie kritických chorôb, výpočet výšky dávky a tiež jednotlivé formy poistenia. Tento prístup je založený na získaní údajov o pravdepodobnosti prvého výskytu kritickej choroby a následnom určení aktuárskeho modelu pre niektorú z kritických chorôb. Aktuárske modely uvedené v tomto príspevku sú založené na viacstavových modeloch. Tento prístup sa začína používať pri uvažovaní náhodných vplyvov na danú udalosť, čo je charakteristické pre pojem choroba. Záverom môžeme konštatovať, že význam nemocenského poistenia je nepopierateľný. V zložitých životných situáciách poskytuje náhradu príjmu, a tým zabezpečuje poistenému zachovanie si životného štandardu.

Literatúra:
[1] BILÍKOVÁ, M. *Spojité metódy v poistnej matematike*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2003. ISBN 80-225-1698-8
[2] JAKUBÍKOVÁ, E., ŠOLTÉS, V. Optimálna stratégia doplnkového dôchodkového poistenia v Slovenskej republike v kontexte legislatívnych zmien. *E+M Ekonomie a Management*, 2004, roč. 7, č. 2, s. 25-29. ISSN 1212-3609.
[3] KAFKOVÁ, E. a kol. *Poisťovníctvo – vybrané kapitoly*. 1. vyd. Bratislava: Ekonóm, 2004. ISBN 80-225-1948-0.
[4] POTOCKÝ, R., STEHLÍK, M. Stochastic Models in Insurance, Risk and Pension Funds. *Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 2005, roč. 1, č. 1, s. 77 – 86. ISSN 1336-9180.
[5] POTOCKÝ, R., STEHLÍK, M. Stochastic models in insurance and finance with respect to Basel II. *Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 2007, roč. 3, č. 2, s. 237 – 245. ISSN 1336-9180.
[6] ŠKROVÁNKOVÁ, L. *Aktuárske metódy v dôchodkovom a nemocenskom poistení.* 1. vyd. Bratislava: Ekonóm, 2004. ISBN 80-225-1836-0.
[7] ŠKROVÁNKOVÁ, L., BILÍKOVÁ, M. *Penzijné a nemocenské poistenie*. 1. vyd. Bratislava: Ekonóm, 2002. ISBN 80-225-1532-9.
[8] ŠKROVÁNKOVÁ, P., HRNČIAROVÁ, Ľ. Využitie poistnej matematiky v zdravotnom a nemocenskom poistení. *E + M Ekonomie a Management*, 2007, roč. 10, č. 3, s. 97 – 103. ISSN 1212-3609.
[9] ŠOLTÉS, V., PENJAK, V., LACKOVÁ, D. *Finančná matematika*. 1. vyd. Košice: TU v Košiciach, Ekonomická fakulta, 2006. ISBN 80-8073-487-9.

doc. RNDr. Lea Škrovánková, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky
Katedra matematiky
leaskrov@post.sk

Ing. Michal Šoltés, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Ekonomická fakulta
Katedra bankovníctva a investovania
Michal.Soltes@tuke.sk

Doručeno redakci: 7. 12. 2008
Recenzováno: 18. 1. 2009; 20. 3. 2009; 1. 4. 2009
Schváleno k publikování: 29. 6. 2009

ABSTRACT

THE ACTUARIAL MODELS FOR CRITICAL ILLNESS INSURANCE

Lea Škrovánková, Michal Šoltés

The aim of this paper will be analysis of some problems about health and sickness insurance. Therefore we describe the important problems: advantages and limitations of the use sickness function as compared with other methods, subdivide sickness functions into duration of sickness, some problems of health care. The first part will intend to provide a orientation on the present situation and the objectives of health insurance in the Slovak republic. List the main conceptions used in sickness and health insurance: the fundamental qualifying condition for the allocation and payment of benefits, retention of claims for a specified period of time based on a protection period, basic indicators for health care.

In part two – a basic probabilistic multistate structure is defined, which provides the possibility of a systematic modeling for sickness insurance (disability annuities and lump sum). There are some specific applications of the actuarial theory in the solution of problems relating to critical illness. Some of the many approaches that can be used for calculations in this paper are multiple-state and decrement models. Their advantage is that they make use of stochastic approach for the transitions between the states. This brings with it a more faithful modeling of the real world than does the deterministic model.

In the various chapters of this paper attention is directed not only towards the analysis of the existing theory, but also in particular to extending these models so that they can be used more widely in actuarial work in life, sickness and health insurance. Of course, natural developments lead to recurrent premiums, mathematical reserves, expense loadings and profit testing.

Key Words: *health insurance, differential equation, disability annuities, actuarial models.*

JEL Classification: *C19.*