

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI**

**FAKULTA EKONOMICKÁ**

Diplomová práce

**Analýza tržních podílů mobilních operátorů  
v ČR s využitím sw Mathematica**

**Market shares analysis of mobile services  
providers in the Czech Republic using sw  
Mathematica**

Bc. Ota Rádl

Plzeň 2014

**ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**  
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Ota RÁDL**  
Osobní číslo: **K12N0204P**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Informační management**  
Název tématu: **Analýza tržních podílů mobilních operátorů v ČR s využitím sw Mathematica**  
Zadávající katedra: **Katedra ekonomie a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Uveďte do problematiky stochastických procesů a Markovových řetězců.
2. Popište problematiku tržní segmentace a současný stav tržních podílů mobilních operátorů v ČR.
3. Implementujte v sw Mathematica stochastický model využívající Markovovy řetězce.
4. Proveďte numerické výpočty a vizualizaci vybraných variant vývoje tržní segmentace.
5. Formulujte závěr a zhodnoťte dosažení stanovených cílů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: **60 - 80 stran**

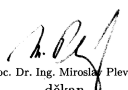
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:


- **KOŘENÁŘ, Václav.** *Stochastické procesy.* Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2002. 227 s. ISBN 80-245-0311-5.
- **KOTLER, Philip.** *Moderní marketing.* 4. evropské vydání. Praha: Grada, 2007. 1041 s. ISBN 978-80-247-1545-2.
- **LUKÁŠ, Ladislav.** *Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy.* Praha: ČMT, 2009. 135 s. Lanna. ISBN 978-80-200-1704-8.
- **AMUE GONEWA JOHN, UMOH GODWIN IKPE, NGAAGE K.T.** *Dynamic Behavior in Customers' Switching and Market Share Analysis: The Markov Model Perspectives.* *Global Journal of Management and Business* [online]. US: Global Journals Inc., 201. roč. 12, č. 17. ISSN 2249 - 4588. Dostupné z: <http://journalofbusiness.org/index.php/GJMBR/article/view/808/735>
- **ANDERSON, T. W., GOODMAN, Leo A.** *Statistical Inference about Markov Chains.* *The Annals of Mathematical Statistics* [online]. roč. 28, č. 1, s. 89-110. ISSN 0003-4851. DOI: 10.1214/aoms/1177707039. Dostupné z: <http://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177707039>
- **Český statistický úřad** [online]. Praha, 2013. Dostupné na [www: http://www.czso.cz/](http://www.czso.cz/)

Vedoucí diplomové práce: **Doc. RNDr. Ing. Ladislav Lukáš, CSc.**  
Katedra ekonomie a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **25. října 2013**  
Termín odevzdání diplomové práce: **25. dubna 2014**

  
Doc. Dr. Ing. Miroslav Plevný  
děkan



  
RNDr. Mikuláš Gangur, Ph.D.  
vedoucí katedry

# Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma

*„Analýza tržních podílů mobilních operátorů v ČR s využitím sw Mathematica“*

vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího diplomové práce za použití pramenů uvedených v příložené bibliografii.

V Plzni dne

.....  
Ota Rádl

# Poděkování

*Rád bych na tomto místě upřímně poděkoval panu docentovi RNDr. Ing. Ladislavu Lukášovi, CSc. za jeho odborné vedení, podporu během navazujícího studia a čas, který věnoval naší spolupráci při zpracování této diplomové práce. Rovněž děkuji svým rodičům a přátelům, kteří mě jakkoliv podporovali během studia.*

*Ota Rádl*



# Obsah

Úvod.....	7
Cíle a metodika.....	9
<b>1. Matematické modelování .....</b>	<b>11</b>
1.1 Základní pojmy teorie systémů .....	11
1.2 Teorie pravděpodobnosti a stochastické procesy .....	13
1.3 Markovovy řetězce .....	16
1.3.1 Markovovy řetězce a podmíněná pravděpodobnost.....	18
1.3.2 Popis chování systému pomocí Markovových řetězců .....	19
1.3.3 Vztahy pro výpočet vektorů nepodmíněných pravděpodobností.....	20
1.3.4 Klasifikace stavů systému.....	21
1.3.5 Limitní chování Markovova řetězce .....	22
1.3.6 Rozhodovací procesy na Markovových řetězcích.....	23
1.4 Metoda úpravy dat pro potřeby Markovova modelu .....	24
<b>2. Trh mobilních operátorů v ČR .....</b>	<b>26</b>
2.1 Základní pojmy marketingu a tržní segmentace.....	27
2.2 Historický vývoj trhu a tržních podílů mobilních operátorů v ČR.....	29
2.3 Současní mobilní operátoři v ČR.....	32
2.3.1 Telefónica O2 Czech Republic a.s. ....	32
2.3.2 Vodafone Czech Republic a.s. ....	32
2.3.3 T-Mobile Czech Republic a.s. ....	33
2.3.4 Virtuální operátoři.....	33
<b>3. Data a datové zdroje .....</b>	<b>35</b>
<b>4. Wolfram Mathematica 9 .....</b>	<b>36</b>
<b>5. Základní stochastický model trhu mobilních operátorů.....</b>	<b>38</b>
5.1 Cíle modelu .....	38
5.2 Definice modelu .....	38
<b>6. Popis implementace v sw Mathematica .....</b>	<b>40</b>
6.1 Import vstupních dat z MS Excel a inicializace proměnných .....	40
6.2 Zpracování vstupních dat .....	42
6.3 Procedury výpočtu variant .....	43
6.4 Prezentace výsledků a vizualizace .....	45
6.5 Trendová křivka.....	47
6.6 Export výsledků .....	47
<b>7. Výpočet a vizualizace variant řešení.....</b>	<b>48</b>
7.1 Varianta A - základní .....	48
7.2 Varianta B - marketingové strategie .....	52
7.3 Varianta C - s novým hráčem na trhu .....	56
7.4 Varianta D - s potenciálními zákazníky .....	64
7.5 Varianta E - zahrnující virtuální operátory .....	68
7.6 Varianta F - rozdělení trhu dle typu SIM karty .....	72
<b>8. Shrnutí a porovnání dosažených výstupů.....</b>	<b>77</b>
<b>9. Závěrečné zhodnocení cílů .....</b>	<b>84</b>

<b>10. Seznam tabulek.....</b>	<b>86</b>
<b>11. Seznam grafů .....</b>	<b>86</b>
<b>12. Seznam obrázků .....</b>	<b>87</b>
<b>13. Seznam zdrojů .....</b>	<b>88</b>
13.1 Literatura.....	88
13.2 Elektronické zdroje.....	89
<b>14. Seznam příloh .....</b>	<b>92</b>

# Úvod

V České republice došlo v nedávné době k velké změně na trhu mobilních operátorů. Do boje o svou pozici na trhu všichni majoritní mobilní operátoři v České republice nasadili novinku v podobě neomezených mobilních tarifů. Rok 2013 by se dal také označit rokem virtuálních operátorů, jejichž počet prudce narostl. Dalo by se říci, že opravdový boj o zákazníky započal a lze očekávat vyšší počty přesunů zákazníků mezi mobilními operátory v České republice.

Tato diplomová práce se zabývá tržními podíly mobilních operátorů v České republice, analyzuje současný stav trhu a nabízí možnosti budoucího vývoje. Cílem práce je tedy analýza variant budoucího vývoje na českém trhu mobilních operátorů. Vývoj trhu ovlivňují marketingové strategie a loajalita zákazníků. Jako vhodný prostředek pro analýzu dynamiky trhu se nabízí modelování na základě Markovových řetězců. Pomocí v současnosti dostupných dat o rozložení trhu mezi české mobilní operátory a simulací marketingového průzkumu odvodíme budoucí stavy na trhu mobilních operátorů. Dalším cílem je tedy zhodnotit využitelnost těchto stochastických modelů v problematice loajality a získávání zákazníků a vyvinout programový aparát pro práci s těmito modely v softwaru Wolfram Mathematica (dále jen „Mathematica“). Vhodnost Markovových řetězců posoudíme na několika variantách vývoje zkoumaného trhu. Na základě sestaveného stochastického modelu vyvodíme, například jaký tržní podíl zaujmou jednotliví mobilní operátoři při současném stavu rozdělení tržních podílů, jaký tržní podíl zaujmou současní mobilní operátoři při vstupu dalšího mobilního operátora na trh či při určitých marketingových akcích. Práce tedy zodpovídá tyto a další otázky týkající se budoucího rozdělení tržních podílů mobilních operátorů v České republice.

Nejprve je v práci uvedena problematika matematického modelování a základní přehled pojmů teorie systémů. Dále práce definuje základní pojmy teorie pravděpodobnosti a stručný popis stochastických procesů s největším důrazem na problematiku Markovových řetězců, jelikož pomocí nich je odvozen model uvedeného trhu a provedeny výpočty. Obsahem kapitoly je charakteristika metody, která slouží k úpravě

dostupných dat, aby mohla být použita v Markovově modelu. Součástí teoretického základu je také stručný náhled na problematiku marketingu a tržní segmentace.

Práce samozřejmě obsahuje kapitolu rozebírající současný a minulý stav na trhu mobilních operátorů v České republice, kde obsahem je i stručný popis současných mobilních operátorů. Třetí kapitola se zabývá analýzou datových zdrojů a dat z Českého statistického úřadu či jiných zdrojů. Obsahem je také představení softwaru Mathematica, ve kterém je poté celý model implementován.

Pátá kapitola definuje stochastický model trhu mobilních operátorů. Tento model je rozšířen do několika variant, implementován a programový kód je v práci stručně okomentován. Poté jsou provedeny výpočty modelu v programu s uvážením různě pravděpodobných situací a změn na trhu mobilních operátorů. V dalších kapitolách jsou výsledky vyhodnoceny a porovnány s predikcí pomocí trendové křivky odvozené na základě dostupných časových řad. Výstupem práce je tedy pohled na pravděpodobné budoucí stavy tržních podílů mobilních operátorů v České republice. Pro snazší pochopení a reprezentaci dosažených výsledků je hlavním prostředkem vizualizace provedená opět pomocí softwaru Mathematica.

## Cíle a metodika

Tato diplomová práce zavazuje ke splnění cílů a zásad, které byly vymezeny následovně:

1. *Uvedte do problematiky stochastických procesů a Markovových řetězců.*

V prezentované diplomové práci je problematika tržní segmentace vybraného trhu analyzována pomocí Markovova modelu. Z tohoto důvodu teoretická část práce obsahuje charakteristiku matematického modelování, pojmy související se stochastickými procesy a využitý teoretický základ o Markovových řetězcích. Pro uvedení do této problematiky je čerpáno z publikací od několika autorů. V první řadě z publikace Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy od L. Lukáše (2009). Dále je využita publikace Stochastické procesy od autora V. Kořenáře (1998) a další viz seznam literatury. Ze zahraniční literatury byla využita kniha od G. Bolche: Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications (2006). S touto zásadou je spjata kapitola zabývající se převodem dostupných dat do podoby potřebné pro Markovův model. K tomuto účelu byly využity zahraniční odborné teze, pracující s touto metodou Statistical Inference about Markov Chains. The Annals of Mathematical Statistics, T. W. Anderson a L. A. Goodman (1957), dále pak Estimating The Transition Matrix Of A Homogeneous Markov Chain, Brian A. Craig a Peter P. Sendi (1998).

2. *Popište problematiku tržní segmentace a současný stav tržních podílů mobilních operátorů v ČR.*

Tržní segmentace je v diplomové práci popsána pro uvedení do problematiky tržních podílů. K tomuto tématu bylo čerpáno od P. Kotlera z jeho publikace Moderní marketing: 4. evropské vydání (2007). Jelikož se tato práce nezabývá příliš trhem z pohledu marketingu, jedná se pouze o stručný výčet pojmů problematiky. Zásada také zavazuje zhodnotit současný stav tržních podílů mobilních operátorů v České republice. Tato analýza je provedená na základě dostupných dat Českého statistického úřadu případně Českého telekomunikačního úřadu či odborných článků zabývajících se touto problematikou.

3. *Implementujte v sw Mathematica stochastický model využívající Markovovy řetězce.*

Z předchozí analýzy stavu trhu mobilních operátorů v České republice je vyveden model využívající Markovovy řetězce. Získaný model je poté implementován v prostředí softwaru Mathematica. Jedná se o programovou část diplomové práce, z tohoto důvodu jsou v této kapitole uvedeny části programového kódu se stručnými komentáři pro snazší orientaci v prostředí softwaru.

4. *Proveďte numerické výpočty a vizualizaci vybraných variant vývoje tržních podílů.*

Uvedená zásada navazuje na předchozí. Obsahem kapitol týkajících se této zásady je vždy popis vybraných variant, ve kterých se mění výchozí podmínky modelu, aby bylo možné zhodnotit více či méně pravděpodobné varianty vývoje. Veškeré výsledky numerických výpočtů jsou samozřejmě doprovázeny odpovídající vizualizací vyvedenou v grafech ze softwaru Mathematica.

5. *Formulujte závěr a zhodnoťte dosažení stanovených cílů.*

Závěrečná část diplomové práce obsahuje zhodnocení dosažených výstupů, jejich porovnání s výsledky získané z analýzy časové řady a hodnocení dosažení vytyčených cílů. Obsahem závěru jsou rovněž doporučené možnosti dalšího výzkumu zabývajícího se tržními podíly mobilních operátorů či jiné oblasti v České republice, na kterou je možné aplikovat stejné postupy a využít prezentovaný Markovův model.

# 1. Matematické modelování

Teoretický základ nutný pro pochopení problematiky stochastických procesů a Markovových řetězců spadá do oblasti matematického modelování ekonomických jevů. Jednotlivé matematické modely jsou členěny dle několika hledisek, například z hlediska respektování náhodných vlivů působících na veličiny modelu se modely dělí na deterministické a stochastické. Dalším příkladem dělení modelů může být hledisko času, kde modely pracující s časem se nazývají dynamické modely, naproti tomu statické modely uvažují časové změny jako zanedbatelné. Konkrétně pro popis problematiky tržních podílů, kterými se práce zabývá, budeme využívat oblast stochastických modelů, které pracují s veličinami, jejichž hodnoty jsou ovlivněny náhodnými vlivy. Z této skutečnosti vyplývá, že základem pro práci s těmito modely je teorie pravděpodobnosti. (L. Lukáš, 2009, s. 13)

Další důležitou teorií, kterou využijeme pro popis zkoumaného trhu mobilních operátorů v České republice je teorie systémů. Jak již název teorie napovídá, je nutné definovat několik základních pojmů o systémech, jelikož na trh nahlížíme jako na systém složený z prvků, které představují jednotliví mobilní operátoři.

Ve třetí podkapitole podrobněji uvedeme do problematiky Markovových řetězců, na základě nichž bude dále sestaven stochastický model pro analýzu trhu mobilních operátorů v České republice. Poslední podkapitola se zabývá teoretickým podkladem pro transformaci naměřených dat do podoby potřebné pro aparát Markovových řetězců.

## 1.1 Základní pojmy teorie systémů

*Systém* lze definovat jako určitou množinu prvků, které jsou ve vzájemném funkčním vztahu. Trh mobilních operátorů v České republice si lze tedy představit jako množinu složenou z jednotlivých mobilních operátorů, kteří na českém trhu figurují a samozřejmě z toho vyplývající vztahy, jelikož se navzájem ovlivňují.

Tyto vztahy rozlišujeme na *vnitřní vazby*, což jsou vztahy mezi prvky systému a *vnější vazby*, které mají prvky systému s jinými okolními systémy. Jedná se tedy jistě o *otevřený systém*, jelikož podléhá i vnějším vlivům, které nelze zanedbat.

Dalším pojmem z teorie systémů souvisejícím zejména s otevřeným systémem je *okolí systému*. Nechť uvažovaný systém označíme  $S$ , pak *okolím systému*  $S$  nazveme množinu  $\{S_1, \dots, S_n\}$ .

Pro popis *stavu systému v čase*  $t$  se používá souhrn kvantitativních a kvalitativních vlastností prvků v systému v daném časovém okamžiku  $t$ . Stavy pomocí jejich změn, kterými dochází právě ke změně kvantitativních a kvalitativních vlastností prvků, rozlišujeme na základě jejich uskutečnění v průběhu času na spojité stavy a diskrétní stavy. Diskrétní stavy na rozdíl od spojitých probíhají po skocích či časových intervalech. Další charakteristikou spojenou se stavem systému je počet stavů, který může být konečný nebo nekonečný a to spočetný i nespočetný.

Pokud se v systému vyskytují prvky, které určitým způsobem působí na *řízení systému*, hovoříme o *řídících prvcích*, které ovlivňují *řízené prvky*. Je zřejmé, že z tohoto hlediska jsou si mobilní operátoři na trhu rovni a nevyskytuje se mezi nimi řízení.

Důležitým pojmem teorie systémů je *cíl činnosti*, kterým se obvykle rozumí určitý stav systému, ve kterém má systém požadovanou vlastnost. Pro hodnocení činnosti systému směřujícího k danému cíli se zavádí *kritérium efektivnosti činnosti systému*, které má přímý vztah k cíli činnosti systému a citlivě zachycuje změny parametrů a stavů systému. Je použitelné i pro měření vnějších vazeb apod. Toto kritérium může být deterministického či stochastického charakteru.

Základem pro práci se systémem a pro zkoumání jeho činnosti je jeho popis matematickým modelem. Model tak umožňuje identifikaci, analýzu či optimalizaci zkoumaného systému. Jelikož známe zkoumaný systém, můžeme na základě srovnávacích kritérií verifikovat výsledky získané pomocí modelu. Na základě členění



z hlediska modelování činností systémů rozdělujeme modely na analytické modely popisující systém jako soustavu rovnic a nerovnic, kde řešení soustavy představuje stavy systému. Topologické modely systém zobrazují pomocí grafu. Simulační modely umožňují simulovat činnost systému. (L. Lukáš, 2009, s. 14 - 16)

Pokud popíšeme trh mobilních operátorů v České republice pomocí definovaných pojmů teorie systémů, jedná se o systém, který je otevřený. Lze uvažovat vztahy s okolím, jako jsou zákazníci mobilních operátorů či stát a jeho působení prostřednictvím legislativy. Jak již bylo zmíněno, jedná se o systém bez řízení mezi jednotlivými mobilními operátory. V práci nebudeme předpokládat existenci jakýchkoliv kartelových dohod mezi mobilními operátory, a proto lze uvažovat nezávislost mezi nimi a není zde žádné hierarchické uspořádání do úrovně. Za cíl činnosti trhu mobilních operátorů by se dalo považovat pokrýt trh, jeho rozdělení na tržní podíly jednotlivých mobilních operátorů a poskytovat tak své služby všem potenciálním zákazníkům.

## 1.2 Teorie pravděpodobnosti a stochastické procesy

Na rozdíl od deterministických modelů pracujících s veličinami, u kterých předpokládáme stabilitu a je tak možné náhodné vlivy zcela zanedbat, problematika pravděpodobnostních modelů je založena na teorii pravděpodobnosti, která studuje zákony popisující náhodné jevy. Tedy na rozdíl od deterministických modelů zavádíme náhodné veličiny. Z tohoto důvodu je nutné nadefinovat určité pojmy z teorie pravděpodobnosti, které jsou důležité pro následné pochopení analýzy pomocí stochastického modelu. (V. Kořenář, 1998, s. 7)

Jako první ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti uvedeme *pravděpodobnostní prostor*  $(\Omega, A, P)$ , který je postaven na trojici pojmů. Neprázdná množina  $\Omega$  představuje množinu všech elementárních jevů, což jsou veškeré možné výsledky náhodného pokusu. Parametr  $A$  značí systém náhodných jevů vytvořený z podmnožin prostoru elementárních jevů  $\Omega$ , součástí tohoto systému jsou samozřejmě *jev jistý* a *jev nemožný*. (L. Lukáš, 2009, s. 17)

Pokud se zaměříme přímo na definici pojmu pravděpodobnosti  $P$ , v literatuře nalezneme v zásadě dvě podoby definice.

*Klasická definice pravděpodobnosti* udává, že lze předpokládat, že všechny možné výsledky náhodného pokusu mají stejnou rovnocennost a neočekáváme výskyt jednoho výsledku více než jiný.

*Statistická definice pravděpodobnosti* však předpokládá, že neplatí předpoklad stejné možnosti výskytu všech jevů. Tato definice je založena na empirickém pozorování a udává, že zejména při velkém počtu pozorování je relativní četnost výskytu jevů poměrně stabilní. Limitně se pak pro počet pozorování blíží se nekonečnu relativní četnost přibližuje klasické definici. (R. Hindls, 2007, s. 55)

Dalším důležitým pojmem teorie pravděpodobnosti je *náhodný jev*. O náhodný jev se jedná, pokud s jistotou nemůžeme určit, zda jev nastane či nikoliv, jinak řečeno, nejedná se o jev jistý ani o jev nemožný. Existují situace - *náhodné pokusy*, kdy při dodržení všech podmínek nastávají různé výsledky, v takovém případě hovoříme právě o náhodném jevu. (R. Hindls, 2007, s. 52)

Za *náhodnou veličinu*  $X$  považujeme každou veličinu, která může obecně nabývat více hodnot  $\{x\}$ . Tyto hodnoty jsou ovlivněny mnoha vlivy (jsou náhodné) a ve většině případů se jedná o reálné číslo (počet poruch, počet zákazníků, hodnota měření pevnosti materiálu, ...). Hodnota náhodné veličiny je tedy jednoznačně určena pouze realizací náhodného pokusu a každá z nich nastává s určitou pravděpodobností  $P(x)$ . (R. Hindls, 2007, s. 60)

Pro práci s Markovovými řetězci je z teorie pravděpodobnosti velmi důležitý pojem *podmíněná pravděpodobnost*. Podmíněná pravděpodobnost  $P(A|B)$  je definována jako pravděpodobnost výskytu jevu  $A$  za předpokladu, že nastal jev  $B$  (S. M. Ross, 2010, s. 97):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.2.1)$$

S tímto pojmem souvisí definice *současného výskytu obou jevů A a B*, jehož pravděpodobnost je definována jako:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A) \quad (1.2.2)$$

Pokud uvažujeme, že jsou jevy nezávislé, tedy z podmíněné pravděpodobnosti musí platit:  $P(A|B) = P(A)$  a  $P(B|A) = P(B)$ . Pak pro *nezávislost jevů A a B* platí:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) = P(B) P(A) \quad (1.2.3)$$

(L. Lukáš, 2009, s. 27)

Jedním z nejdůležitějších termínů je *stochastický proces* (SP). Stochastický proces je definován jako náhodná funkce  $X(t)$ , jejíž výsledek při každé hodnotě argumentu  $t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , je náhodná veličina (NV). Definiční obor  $\mathcal{T}$  označíme jako časovou množinu a obor funkčních hodnot, tedy množinu stavů stochastického procesu, označíme  $\mathcal{R}$  a nazývá se *stavový prostor*. Z toho vyplývá stav náhodného procesu  $X(t)$  jako určitá číselná hodnota vymezená podle účelu studia ekonomického procesu, který je reprezentován matematickým modelem. Obor funkčních hodnot je tedy číselná podmnožina množiny reálných čísel  $\mathcal{R}$ . (S. M. Ross, 2010, s. 84)

Stochastický proces má ve své podstatě vlastnosti náhodné veličiny i funkce. Jelikož je stochastický proces závislý na dvou proměnných, jednak času  $t$  a jednak na elementárním jevu  $e$ , lze definovat další dva pojmy, průsek a realizace stochastického procesu:

*Realizací* stochastického procesu se rozumí stav, kdy uvažujeme pouze jeden konkrétní elementární jev, což je jeden výsledek náhodného pokusu a stochastický proces závisí pouze na  $t$  a jedná se tedy o nenáhodnou funkci. Stochastický proces je soubor svých realizací.

*Průsek* stochastického procesu na druhou stranu uvažuje pevnou hodnotu  $t$  a v tomto případě jde o náhodnou veličinu závislou na množině elementárních jevů. (L. Lukáš, 2009, s. 18)

Základní členění stochastických procesů uvažuje 4 skupiny rozdělené podle hodnot definičního oboru  $\mathcal{T}$  a stavového prostoru  $\mathcal{R}$ . Dělení je založeno na spočetnosti či nespočetnosti těchto množin, tedy v případě spočetného počtu hodnot se jedná o diskrétní časy, resp. stavy. Nespočetný počet hodnot pak vede na spojitý čas, resp. stavy. Toto dělení zobrazuje následující tabulka 1.

**Tabulka 1: Rozdělení stochastických procesů**

Stavový prostor $\mathcal{R}$	Definiční obor $\mathcal{T}$ , čas $t \in \mathcal{T}$	
	diskrétní	spojitý
diskrétní	(1) <i>diskrétní náhodná posloupnost</i>	(2) <i>diskrétní náhodný proces</i>
spojitý	(3) <i>spojitý náhodná posloupnost (posloupnost)</i>	(4) <i>spojitý náhodný proces (proces)</i>

Zdroj: L. Lukáš, 2009

Stochastické procesy mají v ekonomické praxi široké uplatnění zejména z důvodu nárůstu procesů, které mají hromadný charakter. Potřeba modelování těchto procesů je způsobena neustálým růstem automatizace výroby, růstem spektra a objemu služeb, zefektivňováním v oblasti zásobování a hromadných obsluh. Tyto faktory jsou impulzem pro snahu vystihnout pravděpodobnostní strukturu popsanych procesů. (V. Kořenář, 1998, s. 9)

Pro potřeby analýzy tržních podílů mobilních operátorů pomocí Markovových řetězců je důležitá oblast diskrétní náhodné posloupnosti, do které se Markovovy řetězce řadí. Proto se nadále budeme zabývat pouze kategorií diskrétní náhodné posloupnosti.

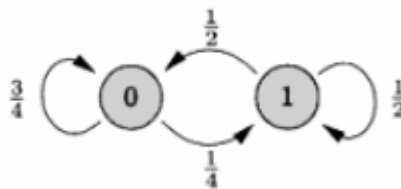
### 1.3 Markovovy řetězce

Jak uvádí autor A. Uslu (2000, s. 583): „*In marketing, Markov Chains Model is frequently used for topics such as “brand loyalty” and “brand switching dynamics”. Although it is very complicated to transform marketing problems in to mathematical equations, Markov Chains Method comes out as the primary and most powerful technique in predicting the market share a product will achieve in the long term especially in an oligopolistic environment and in finding out the brand loyalty for*

*a product.*” Markovovy řetězce jsou vhodnou technikou pro predikci tržních podílů zejména v oligopolní struktuře a při odhadech loajality zákazníků.

Markovovy řetězce představují zjednodušení Markovových procesů, které obecně představují speciální oblast stochastických procesů s diskrétním stavovým prostorem, na rozdíl od času, který je v těchto procesech uvažován spojitý. Teorie Markovových procesů je tak fundamentální například pro teorie zabývající se hromadou obsluhou a systémem front. (G. Bolch, 2006, s. 51) Ukázkou diskrétního Markovova řetězce může být obrázek 1.

**Obrázek 1: Dvoustavový Markovův řetězec**



*Zdroj: G. Bolch, 2006*

Jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, Markovovy řetězce patří do kategorie diskrétních náhodných posloupností. Markovovy řetězce tedy pracují s diskrétním stavovým prostorem i diskrétními hodnotami časů. Tyto vlastnosti Markovova řetězce jsou dostatečné pro analýzu tržních podílů mobilních operátorů v České republice, jelikož budeme pracovat na omezeném počtu mobilních operátorů, mezi kterými se zákazníci rozhodují. Neboli stav bude představován zákazníkem, který využívá služeb daného mobilního operátora. Co se týče časů, budeme uvažovat diskrétní časové kroky například roky, pro které jsou k dispozici naměřená data o počtech zákazníků.

Markovovy řetězce jsou používány pro modelování ekonomických systémů, které se po spočetném počtu časových kroků nacházejí v jednom ze spočetného počtu stavů. Prvním krokem je zavést vhodné značení jednotlivých stavů. Pro nejjednodušší rozlišení stavů budeme zapisovat v literatuře (L. Lukáš, 2009, s. 27) používané značení  $i$ -tého stavu v  $n$ -tém okamžiku (kroku) jako:

$$s(n) = i \tag{1.3.1}$$

### 1.3.1 Markovovy řetězce a podmíněná pravděpodobnost

Náhodný charakter u Markovových řetězců vyplývá z úvahy, že v daný okamžik  $n$  nastane s určitou pravděpodobností jeden z množiny všech stavů  $s(n)$ . Z teorie pravděpodobnosti je důležité připomenutí pojmu podmíněná pravděpodobnost (1.2.1), jelikož pracujeme s úvahou, že stochastický proces v minulých krocích prošel určitými stavy, tedy výskyt stavu  $s(n) = j$  závisí na předešlých krocích  $(n - 1)$ ,  $(n - 2)$ , ..., ve kterých se vyskytly jiné stavy, formálně zapsáno pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(s(n) = j | s(n - 1) = i, s(n - 2) = k, \dots, s(0) = m). \quad (1.3.1.1)$$

Stav  $s(n) = j$  zde logicky představuje bezprostředně následnou budoucnost, tedy odhadujeme pravděpodobnost, že tento stav v dalším kroku nastane. Proto lze intuitivně odvodit, že  $s(n - 1) = i$  vyjadřuje současný stav, v němž se stochastický proces právě nyní nachází, a další stavy představují minulé stavy v jednotlivých okamžicích. Speciálně stav  $s(0) = m$  představuje počáteční stav, ze kterého stochastický proces odstartoval.

S popsanou aplikací podmíněné pravděpodobnosti na pravděpodobnost výskytu daného stavu (1.3.1.1) souvisí důležitá vlastnost Markovových řetězců označována jako *Markovova vlastnost* (L. Lukáš, 2009, s. 28):

$$\begin{aligned} P(s(n) = j | s(n - 1) = i, s(n - 2) = k, \dots, s(0) = m) = \\ = P(s(n) = j | s(n - 1) = i). \end{aligned} \quad (1.3.1.2)$$

Ze zápisu (1.3.1.2) je tato vlastnost zcela zřejmá. Markovova vlastnost vyjadřuje skutečnost, že při použití Markovových řetězců pravděpodobnost výskytu daného stavu  $s(n) = j$  v bezprostředně následné budoucnosti závisí pouze na stavu, ve kterém se stochastický proces nachází právě nyní v současnosti. Markovovy řetězce tedy abstrahují od závislosti budoucího stavu na minulých stavech  $s(n - 2) = k, \dots, s(0) = m$ , kterými stochastický proces prošel. Jiný způsob výkladu této vlastnosti předkládá, že minulost je prakticky shrnuta do současnosti ve stavu  $s(n - 1) = i$ , z tohoto důvodu stačí brát v úvahu tento současný stav. (G. Bolch, 2006, s. 53)

Pojem, který budeme nadále využívat, a vyjadřuje zmíněnou podmíněnou pravděpodobnost, že v následujícím kroku nastane stav  $s(n) = j$  za předpokladu, že v předchozím kroku se stochastický proces nacházel ve stavu  $s(n - 1) = i$ , je *pravděpodobnost přechodu*. Z uvedené Markovovy vlastnosti vyplývá, že pro analýzu tržních podílů mobilních operátorů v České republice pomocí aparátu Markovových řetězců bude potřeba mít k dispozici pouze poslední (současná) naměřená data o rozdělení tržních podílů na trhu, nikoliv jakýkoliv vývoj tržních podílů v minulosti.

### 1.3.2 Popis chování systému pomocí Markovových řetězců

Pro vyjádření chování systému (L. Lukáš, 2009, s. 28) popsaného modelem, kde uvažujeme diskrétní náhodnou posloupnost, používáme vektory nepodmíněných pravděpodobností  $\mathbf{p}(n)$  v jednotlivých časových krocích<sup>1</sup>

$$(\mathbf{p}(n))^T = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n)), \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.2.1)$$

kde  $p_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, N$  jsou nepodmíněné pravděpodobnosti, že systém je v okamžiku  $n$  ve stavu  $j$ . Pro představu se jedná o nutnost určit výchozí vektor  $\mathbf{p}(0)$  v okamžiku  $n = 0$ , což znamená pravděpodobnosti stavů, ve kterých se systém nachází na počátku. Při modelování chování systému pomocí Markovových řetězců můžeme pro určení vektorů  $\mathbf{p}(n)$  (kde  $n = 1, 2, \dots$ ) využít známý vektor  $\mathbf{p}(0)$  a popsanou Markovovu vlastnost (1.3.1.2), tedy:

1. Předpokládáme známý vektor v počátku  $(\mathbf{p}(0))^T = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_N(0))$ , kde  $p_i(0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , vyjadřují nepodmíněné pravděpodobnosti, že se Markovův řetězec nachází v okamžiku  $n = 0$  ve stavu  $i$ ,
2. stanovenou matice pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}(n)$ , která vyjadřuje pravděpodobnosti přechodů mezi všemi stavy v bezprostředně následujícím kroku. Formálně zapsáno (L. Lukáš, 2009, s. 29):

$$P(s(n) = j \mid s(n - 1) = i) = [p_{ij}(n)] = \mathbf{P}(n),$$

$$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, \text{ pro } n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.2.2)$$

<sup>1</sup> Vektory  $(\mathbf{p}(n))^T$  chápeme transponované jako sloupce, přestože se v oblasti Markovových řetězců interpretují v řádku

kde  $p_{ij}(n)$  vyjadřuje pravděpodobnost, že systém v bezprostředně následujícím kroku  $n$  přejde ze stavu  $i$ , ve kterém se v současnosti  $(n - 1)$  nachází, do stavu  $j$ .

Další důležité zjednodušení, které využijeme při analýze tržních podílů mobilních operátorů, vede na *homogenní Markovův řetězec* (L. Lukáš, 2009, s. 29). V tomto případě uvažujeme matici podmíněných pravděpodobností přechodů jako

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}, \text{ po složkách tedy: } p_{ij}(n) = p_{ij} \\ i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, \text{ pro } n = 1, 2, \dots \quad (1.3.2.3)$$

Homogenní Markovův řetězec tedy pracuje s maticí podmíněných pravděpodobností přechodů nezávislou na okamžiku  $n$ . Dále předpokládáme soustavu  $N$  stavů jako úplnou soustavu jevů a matici podmíněných pravděpodobností přechodů jako stochastickou, jelikož platí vztah (L. Lukáš, 2009, s. 29):

$$p_{ij} > 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, \text{ a } \sum_{j=1}^N (p_{ij}) = 1, i = 1, \dots, N. \quad (1.3.2.4)$$

Vztah (1.3.2.4) vyjadřuje pravidlo pro sčítání pravděpodobností, tedy skutečnost, že suma přechodů z  $i$ -tého stavu do všech ostatní stavů (včetně setrvání v  $i$ -tém) je rovna 1.

### 1.3.3 Vztahy pro výpočet vektorů nepodmíněných pravděpodobností

Nyní se již dostáváme k základním vztahům pro výpočet výše definovaných vektorů. Cílem výpočtů je nalézt takový vektor nepodmíněných pravděpodobností  $\mathbf{p}(n)$ , při kterém se již jednotlivé nepodmíněné pravděpodobnosti  $p_j(n)$ ,  $j = 1, \dots, N$  prakticky nemění, tj. *limitní chování*, viz dále. Nejprve vycházíme z rekurentního vztahu vyjadřujícího souvislosti mezi vektory nepodmíněných pravděpodobností ve dvou po sobě jdoucích okamžicích (L. Lukáš, 2009, s. 30), tj.:

$$(\mathbf{p}(n))^T = (\mathbf{p}(n - 1))^T \mathbf{P} \text{ pro } n = 1, 2, \dots \quad (1.3.3.1)$$

Vztah (1.3.3.1) udává získání bezprostředně následujícího vektoru nepodmíněných pravděpodobností roznásobením současného vektoru s maticí podmíněných pravděpodobností přechodů, což potvrzuje výše uvedené úvahy s vektorem  $(\mathbf{p}(0))^T$ . Tím se dostáváme na vyjádření vektoru  $(\mathbf{p}(n))^T$  pomocí vektoru  $(\mathbf{p}(0))^T$  a  $n$ -té mocniny



matice  $\mathbf{P}$ . Pokud tedy známe hodnoty vektoru  $(\mathbf{p}(0))^T$ , lze stanovit pravděpodobnosti výskytu stavů systému v jakémkoliv okamžiku podle tohoto vztahu (L. Lukáš, 2009, s. 30):

$$(\mathbf{p}(n))^T = (\mathbf{p}(0))^T \mathbf{P}^n \text{ pro } n = 1, 2, \dots \quad (1.3.3.2)$$

V souvislosti s maticí  $\mathbf{P}^n$ , která prakticky vyjadřuje  $n$ -násobný součin matice  $\mathbf{P}$ , zavádíme ještě jedno značení, a to pro pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  právě po  $n$  krocích a značíme ji  $p_{ij}^{[n]}$ .

#### 1.3.4 Klasifikace stavů systému

Uvedené vztahy (1.3.3.1) a (1.3.3.2) se využívají pro výpočet zmíněného limitního chování Markovova řetězce při  $n \rightarrow \infty$  a také pro zjišťování dosažitelnosti stavu  $j$  ze stavu  $i$  po  $n$  krocích. S těmito výpočty je spojena další teorie ohledně klasifikace stavů systému.

Jelikož pracujeme s maticovým vyjádřením, základní rozdělení prvků matice pro klasifikaci stavů systému spočívá v členění prvků matice na diagonální a nediagonální. Diagonální prvky  $p_{ii}^{[n]}$  vyjadřují pravděpodobnost, že se systém navrátí do stavu  $i$  po  $n$  krocích. Další možné členění související s diagonálními prvky rozděluje stavy podle hodnot  $p_{ii}^{[n]}$  na *transientní (přechodný) stav*, který vyjadřuje, že po určitém počtu  $n$  kroků je návrat do tohoto stavu  $i$  nemožný jev, tedy formálně zapsáno:

$$p_{ii}^{[n]} = 0, \quad \forall k \geq n \quad (1.3.4.1)$$

Pokud pak vztah (1.3.4.1) neplatí, jedná se o *stav rekurentní (trvalý)*. Tento stav se dále dělí na *rekurentní periodický s periodou  $m$* , který v určitých periodách má nenulovou pravděpodobnost, *rekurentní nulový stav* má hodnotu  $p_{ii}^{[n]} \neq 0$  pro všechna  $n$ , avšak při  $n \rightarrow \infty$  se pravděpodobnost limitně blíží k nule a *ergodický stav*, který je neperiodický a nenulový. Poslední stav, který uvedeme v souvislosti s diagonálními prvky, je *stav absorpční (pohlcující)*. Stav  $i$  je absorpční, pokud setrvání ve stavu je jev jistý a hodnota  $p_{ii} = 1$ . Zároveň musí existovat vstup do tohoto stavu, tj. existence  $k$ , pro které platí  $0 < p_{ki} < 1$ . Nediagonální prvky  $p_{ij}^{[n]}$ ,  $j \neq i$  umožňují rozlišovat stavy dosažitelné a nedosažitelné. Toto členění je logicky zřejmé. Pokud  $p_{ij}^{[n]} > 0$ , je stav  $j$  po  $n$  krocích

*dosažitelný* ze stavu  $i$ , jinak se jedná o *stav nedosažitelný*. S tím dále souvisí *stavy sousledné*, což vyjadřuje stavy vzájemně dosažitelné. Pomocí těchto pojmů lze definovat Markovův řetězec jako *nerozložitelný*, pokud každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu. (L. Lukáš, 2009, s. 31)

### 1.3.5 Limitní chování Markovova řetězce

Mezi nerozložitelné neperiodické Markovy řetězce se řadí v zásadě dva typy na základě jejich stavů (L. Lukáš, 2009, s. 32):

1. Veškeré stavy jsou transientní nebo rekurentní nulové ( $p_{ij}^{[n]}$  jsou pro libovolné stavy  $i, j$  nulové či limitně nulové pro  $n \rightarrow \infty$ ) a neexistuje tak stacionární rozdělení limitních nepodmíněných pravděpodobností výskytu systému v množině stavů.
2. Stavy jsou ergodické, což znamená  $p_{ij}^{[n]} = u_j > 0$  při  $n \rightarrow \infty$  a existuje tak limitní rozdělení nepodmíněných pravděpodobností výskytu systému v množině stavů.

Právě druhý případ vede k regulárnímu řetězci (V. Kořenář, 1998, s. 15), což znamená, že matice  $\mathbf{P}^n$  po určitém počtu kroků  $n$  neobsahuje nulové prvky. Jak je uvedeno v bodu 2, matice pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje do limitní matice ve tvaru

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{bmatrix}, \quad (1.3.5.1)$$

kde řádky této matice  $\mathbf{U}$  reprezentují *limitní (stacionární) vektory*, které budeme značit  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ .

V případě regulárního řetězce máme tedy možnost stanovit vektor  $\mathbf{u}$ , který je *stacionárním rozdělením* výskytu systému v jednotlivých stavech. Jedná se tedy o určení vektoru nepodmíněné pravděpodobnosti  $\mathbf{p}(n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ve kterém se jednotlivé pravděpodobnosti výskytu systému ve stavech již nadále nemění, což je cílem

zmíněným na začátku kapitoly 1.3.3. Tato skutečnost lze formálně vyjádřit pomocí limitních vztahů jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n-1) = \mathbf{u} \quad (1.3.5.2)$$

S návazností na vzorec (1.3.3.1), který je uveden ve zmíněné kapitole, můžeme určit limitní verzi tohoto vztahu takto:

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{P}, \text{ neboli } \mathbf{u}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}^T \quad (1.3.5.3)$$

Vztah (1.3.5.3) má však netriviální řešení v případě, kdy  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = 0$ , není tedy možné nalézt jediné řešení z důvodu lineární závislosti. V kapitole 1.3.2 bylo zmíněno, že uvažujeme matici  $\mathbf{P}$  jako stochastickou, díky splnění podmínky (1.3.2.4). Z tohoto důvodu je nutné doplnit podmínku, která zajistí nalezení jednoho řešení (L. Lukáš, 2009, s. 32):

$$\sum_{j=1}^N u_j = 1 \quad (1.3.5.4)$$

### 1.3.6 Rozhodovací procesy na Markovových řetězcích

Při analýze tržních podílů mobilních operátorů se nabízí zhodnotit, jaké náklady způsobí odchod zákazníka k jinému mobilnímu operátorovi, případně naopak výnos spojený s příchodem zákazníka. Oceněním přechodů mezi stavy se zabývají Markovské rozhodovací procesy.

Pro hodnocení přechodů zavádíme další matici  $\mathbf{R}$ , jejíž prvky značíme  $r_{ij}$  a představují výnosy, případně náklady spojené s přechodem ze stavu  $i$  do stavu  $j$ . Matice má poté tvar (V. Kořenář, 1998, s. 57):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{bmatrix}. \quad (1.3.6.1)$$

Ocenění  $r_{ij}$  lze uvažovat dle potřeby konstantní pro všechny přechody, v případě trhu mobilních operátorů lze předpokládat rozdílné hodnoty. Dokonce lze předpokládat kladné hodnoty diagonálních prvků  $r_{ii}$ , jelikož v takovém případě zákazník setrvává u daného operátora a přináší mu tak zisky. Naopak nediagonální prvky  $r_{ij}$ ,  $i \neq j$  představují ocenění přechodu k jinému operátorovi, kde se dá předpokládat ztráta.

Dále zavedeme *střední hodnotu celkového výnosu procesu* po  $n$  krocích vycházejícího ze stavu  $i$  a označíme ji jako  $v_i(n)$ . Pro  $v_i$  platí níže uvedený rekurentní vztah (V. Kořenář, 1998, s. 58):

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^N p_{ij} [r_{ij} + v_j(n-1)],$$

po úpravě dostaneme vzorec

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^N p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^N p_{ij} v_j(n-1). \quad (1.3.6.2)$$

První člen vzorce představuje střední hodnotu spojenou s jedním přechodem ze stavu  $i$  a označuje se jako střední hodnota přímého výnosu  $q_i$ . Druhý člen je střední hodnota výnosu spojená se zbývajících  $n - 1$  přechody. Maticové vyjádření vzorce (1.3.6.2) se zavedením  $q_i$  lze zapsat tímto způsobem:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1) \quad (1.3.6.3)$$

Posledním bodem pro výpočet dle vztahu (1.3.6.2) je nutnost stanovit hodnotu  $v_i(n)$ , kde  $n = 0$  a  $i = 1, 2, \dots, N$ . Značí tedy hodnoty, kdy proces neuskuteční žádný přechod a skončí ve stavu  $i$ . Pokud nezáleží, v jakém stavu proces skončí, je možné stanovit  $v_i(0) = 0$  pro  $i = 1, 2, \dots, N$ . (V. Kořenář, 1998, s. 58)

## 1.4 Metoda úpravy dat pro potřeby Markovova modelu

Z teoretického hlediska zbývá definovat způsob, jakým bude stanovena matice podmíněných pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}$ . Jak bylo uvedeno v předešlé kapitole týkající se popisu chování Markovova řetězce, budeme předpokládat homogenní Markovův řetězec, ve kterém platí, že pravděpodobnosti přechodů  $p_{ij}$  jsou statické, tj. nezávislé na časovém okamžiku  $n$ . (T. W. Anderson, 1957, s. 90)

Jelikož neznáme skutečné hodnoty  $p_{ij}$ , musíme provést odhad těchto pravděpodobností pomocí dostupných dat. Proto dále zavedeme hodnotu  $n_{ij}(t)$ , která vyjadřuje počet jednotlivců ve stavu  $i$  v čase  $t - 1$  a ve stavu  $j$  v čase  $t$ . Jinak řečeno, v případě trhu mobilních operátorů tato hodnota představuje počet zákazníků (aktivních SIM karet), kteří přešli od  $i$ -tého operátora k  $j$ -tému mezi dvěma obdobími. Odhad pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  pak vychází ze vztahu (T. W. Anderson, 1957, s. 92):

$$\hat{p}_{ij} = n_{ij} / n_i^* = \sum_{t=1}^T n_{ij}(t) / \sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^T n_{ik}(t) = \sum_{t=1}^T n_{ij}(t) / \sum_{t=0}^{T-1} n_i(t), \quad (1.4.1)$$

kde  $n_{ij}$  vyjadřuje sumu všech přechodů do stavu  $i$  ze stavu  $j$  přes všechny období, neboli kolik zákazníků v minulosti  $j$ -tého mobilního operátora využívá v současnosti  $t$  služby  $i$ -tého operátora. Hodnota  $n_i^*$  vyjadřuje sumu zákazníků, kteří příslušeli  $i$ -tému operátorovi jedno období před, tj. období  $(t - 1)$ . Lze rovněž prokázat, že je toto nejpravděpodobnější odhad pravděpodobnosti přechodu, který je konzistentní, avšak směřující k nule se zvyšující se velikostí vzorku. (T. W. Anderson, 1957, s. 93)

Dále budeme vycházet z předpokladu, že intervaly mezi pozorováním jsou konstantní. Tento předpoklad je v případě dat o trhu mobilních operátorů splněn, jelikož máme k dispozici statistická data ke konci daného roku. Poté matice vyjadřující počty napozorovaných přechodů  $n_{ij}$  lze obecně zapsat takto (B. A. Craig, 1998):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1m} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{m1} & n_{m2} & \dots & n_{mm} \end{bmatrix}, \quad (1.4.2)$$

kde  $m$  vyjadřuje celkový počet stavů. Ze stanovené matice vychází odhad matice pravděpodobností přechodu  $\hat{\mathbf{P}} = \{\hat{p}\}$  kde

$$\hat{p}_{nj} = n_{ij} / \sum_{k=1}^m n_{ik} \quad (1.4.3)$$

Což potvrzuje stejné závěry, které uvádí autor T. W. Andersona (1957). Zde je nutné připomenout vlastnost související se vztahem (1.4.1), kterou musí hodnoty  $n_{ij}$  splňovat (G. J. Amue, 2012, s. 2):

celková suma horizontálních prvků odpovídá hodnotě dat v čase  $t - 1$ ,

celková suma vertikálních prvků odpovídá hodnotě dat v čase  $t$ .

(1.4.4)

Podmínku (1.4.4) lze však splnit pouze s teoretickými hodnotami, jelikož reálná data vychází z marketingových výzkumů a měření mobilních operátorů, dochází ke statistickému vyhodnocování a je nutno hodnoty zaokrouhlovat, apod.

Podstatou problému je schopnost společnosti udržet si své zákazníky. Přestože společnost v současnosti disponuje velkým tržním podílem, díky interpretaci matice pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}$ , může v dlouhodobém horizontu o svojí pozici přijít, případně se neudržet na trhu. Základem jsou marketingové strategie, kterými se společnost snaží vytvořit si loajální zákazníky či přilákat nové zákazníky od konkurentů. Stanovení matice je tedy klíčovým bodem v aparátu Markovových řetězců. (G. J. Amue, 2012, s. 7)

## 2. Trh mobilních operátorů v ČR

Rok 2013 na trhu mobilních operátorů v České republice by se dal označit jako rok, který odstartoval boj o tržní podíly pomocí neomezených tarifů. Dalším stěžejním marketingovým průlomem v boji o zákazníky byly v roce 2013 především virtuální operátoři. V současnosti na českém trhu působí tři síťoví mobilní operátoři:

- Telefónica O2 Czech Republic, a.s.
- Vodafone Czech Republic a.s.
- T-Mobile Czech Republic a.s.

V následujících podkapitolách stručně popíšeme vývoj a segmentaci na trhu mobilních operátorů v České republice. Kapitola také obsahuje představení jednotlivých operátorů působících na českém trhu společně se stručnou podkapitolou o virtuálních operátorech pro pochopení této problematiky. Nejprve však uvedeme do pojmů týkajících se tržních podílů a tržní segmentace.

## 2.1 Základní pojmy marketingu a tržní segmentace

První pojem týkající se marketingu, na který jsme již narazili v kapitole o Markovových řetězcích (1.3) je loajalita zákazníků. V současném konkurenčním prostředí jsou přechody zákazníků mezi jednotlivými společnostmi, neboli obchodními značkami, zcela běžné a časté. Základem marketingových strategií je vytvořit loajálního zákazníka, který bude opětovně nakupovat produkty či služby u dané firmy. Autor (A. Uslu, 2000, s. 586) uvádí několik definic *loajality zákazníka*. Popíšeme zde však definici z pohledu stochastických modelů nejpodstatnější. Loajalita zákazníka znamená konzistentní nákup u jedné značky během určitého časového období a opakovaný nákup tak vytváří vazbu mezi zákazníkem a značkou. Je tedy možné využít stochastické modely pro odhad pravděpodobnosti, že zákazník setrvá u prodejce.

Každý trh má omezenou kapacitu. Kapacita trhu neboli objem trhu zahrnuje realizovaná množství určitého produktu všemi nabízejícími za určitý časový interval, nejčastěji jeden rok. (R. Kozel, 2006, s. 181) Je tedy přirozené, že dochází ke konkurenčním bojům a klíčem k úspěchu je tedy bezesporu orientace společnosti na zákazníka, tzn. poskytnout mu vyšší hodnoty než konkurence. Předtím je však nutné pochopit přání a potřeby jednotlivých segmentů trhu, aby mohl být marketing cíleně zaměřen na daný typ zákazníků a bylo tak možné rozšířit tržní podíl. *Tržní segmentace* tedy znamená rozdělení zákazníků do skupin podle různých charakteristik, potřeb a chování. Hromadný marketing tak v dnešní době není společnostmi příliš využíván. Namísto toho se využívá *cílený marketing*, který spočívá v identifikaci jednotlivých tržních segmentů a přípravě produktů pro daný segment. Tento segment společnost vyhodnotila jako atraktivní a chce se nadále na něj zaměřovat a provést tak *tržní targeting*. (P. Kotler, 2007, s. 457)

Cílený marketing je samozřejmě využíván i mobilními operátory. Základní segmentaci provádí mobilní operátoři rozdělením mobilních SIM karet na tzv. předplacené (prepaid), určené pro zákazníky, kteří nechtějí platit pravidelné měsíční poplatky za služby, a tarifní (postpaid) neboli smluvně vázané zákazníky. Jednoznačným příkladem cíleného marketingu mohou být studentské tarify, které nabízejí všichni tři mobilní operátoři. Případně speciální tarify pro seniory či handicapované, s čímž je spojená

například nabídka z hlediska ovladatelnosti jednodušších mobilních telefonů. Samozřejmostí jsou i firemní či podnikatelské tarify, které například dovolují provázanost více SIM karet pro volání zdarma. Současnou nabídkou jsou mobilní operátoři schopni se zacílit prakticky na všechny tržní segmenty rozdělené dle věku či ekonomické aktivity.

Důležitý je dále navazující *tržní positioning*, prostřednictvím kterého se společnost snaží odlišit a vyzdvihnout své produkty či služby oproti konkurenci. Společnost může využít své silné stránky pro zlepšení pozice produktu, ta je však definována především tím, jak je produkt vnímán zákazníky. (P. Kotler, 2007, s. 503)

Na trhu mobilních operátorů může být příkladem konkurenční výhody pokrytí České republiky 3G<sup>2</sup> signálem. Dle ČTÚ si po této stránce nejlépe vede T-Mobile CZ a.s., který nabízí nejvyšší procento pokrytí území i obyvatelstva 3G signálem (ČTÚ, 2013a). Tento aspekt však někteří zákazníci mohou přehlížet. Samozřejmě na službu mobilního internetu působí další aspekty jako cena, datové limity a zákazníci jsou tak často zahrnuti přemírou informací a nemohou neustále opětovně přehodnocovat nabídky. Z těchto důvodů není konkurenční výhoda jednoznačným pojítkem k lepší pozici produktu. (P. Kotler, 2007, s. 504)

Jelikož se budeme zabývat přechody zákazníků mezi mobilními operátory, je důležitý pojem *hodnota zákazníka* (P. Kotler, 2007, s. 547) a jeho udržení. Přechod zákazníků mezi mobilními operátory v současnosti není pro zákazníka nikterak obtížný díky možnosti přenosu telefonního čísla k novému operátorovi. Tento přechod samozřejmě pro operátora znamená náklady, proto musí zvažovat hodnotu zákazníka a úsilí spojené s jeho udržením.

---

<sup>2</sup> 3G - mobilní síť třetí generace umožňující vysokorychlostní přenos dat a řadu multimediálních funkcí

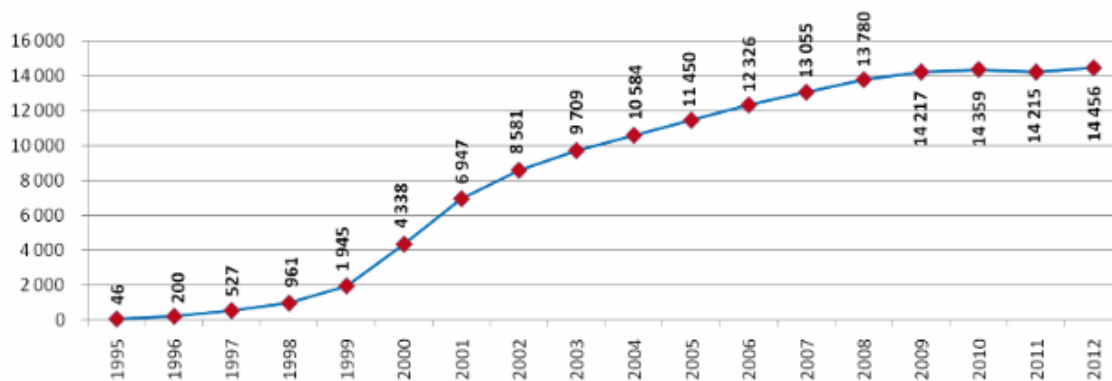


## 2.2 Historický vývoj trhu a tržních podílů mobilních operátorů v ČR

Historie trhu mobilních telekomunikačních služeb v České republice sahá do roku 1991, kdy byla na českém území spuštěna mobilní síť první generace společnosti Eurotel (dnes Telefónica O2 CZ), která však byla využívána pouze malým počtem manažerů a nenabízela oproti pevným linkám další výhody. Za skutečný start mobilních telekomunikačních služeb v České republice by se dala považovat polovina roku 1996. V tu dobu společnost Eurotel spustila mobilní síť druhé generace. Záhy na to se přidal tehdejší Radiomobil (později Paegas, dnes T-Mobile CZ) a v roce 2000 vstoupil na trh třetí hráč Český mobil (dříve Oskar, nyní Vodafone CZ). (ČSÚ, 2014)

Vývoj trhu od roku 1995 zobrazuje uvedený graf 1, zachycující vývoj počtu aktivních SIM karet v ČR. Tento ukazatel nelze zaměnit s ukazatelem počtu uživatelů mobilních telefonů, protože v dnešní době se SIM karty využívají i do jiných inteligentních zařízení než je mobilní telefon a jeden uživatel tak může mít více SIM karet. Počet aktivních SIM karet tedy vyznačuje rozsah infrastruktury a celkovou velikost trhu.

Graf 1: Aktivní SIM karty v ČR (v tis.)

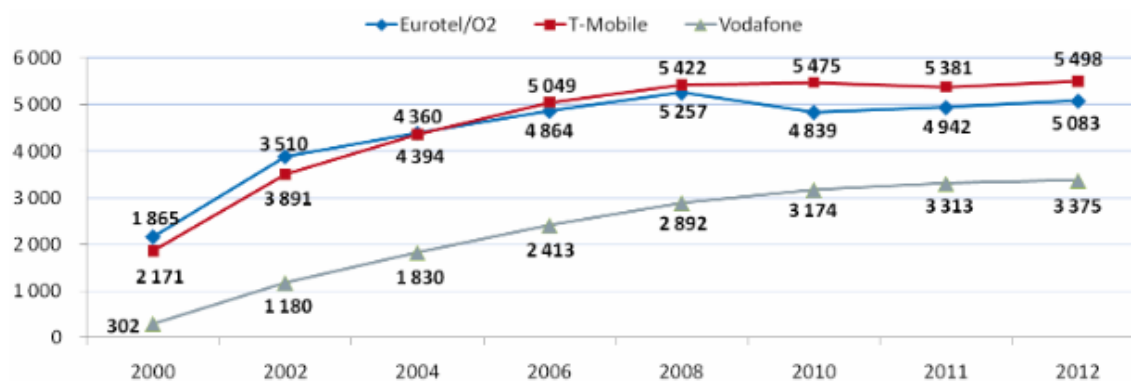


Zdroj: ČSÚ, 2014

Patrný je počáteční prudký růst a současná stagnace, což vede k úvaze o logistickém trendu vývoje, jelikož došlo k jistému nasycení. Z toho důvodu zcela jistě dochází ke konkurenčnímu boji jednotlivých mobilních operátorů o zvýšení podílu na trhu. Není však vyloučen další možný nárůst v případě rozšíření nových technologií využívající SIM karty.

Vhodný pohled na minulý vývoj tržních podílů nabízí Český statistický úřad. Úřad nabízí graf aktivních mobilních SIM karet v ČR pro jednotlivé operátory v období 2000 - 2012, viz graf 2.

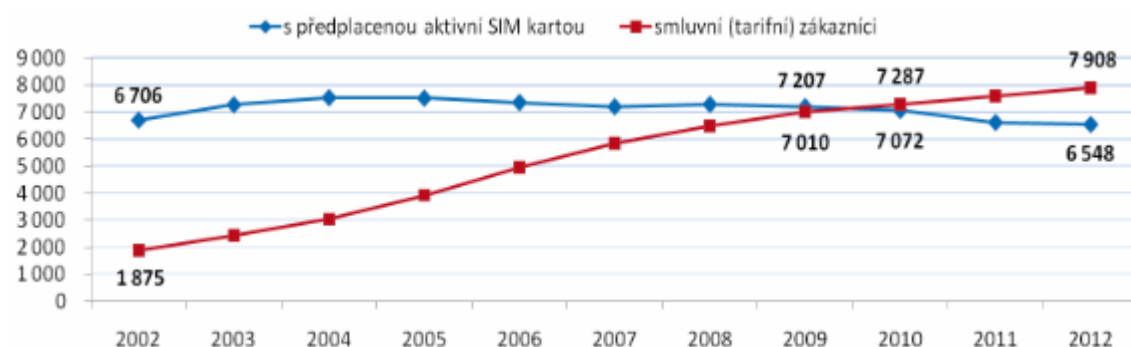
**Graf 2: Aktivní SIM karty podle operátorů k 31. 12. daného roku (v tis.)**



Zdroj: ČSÚ, 2014

Dle dostupných dat v počátcích mobilní sítě v České republice vedl trh Eurotel/O2. Současný T-Mobile CZ během 4 let své počáteční existence dokázal překročit tržní podíl Eurotelu, oba mobilní operátoři však zůstávají velmi vyrovnaní. Znatelně nižší podíl zaujímá Vodafone CZ. Pokud se zaměříme na tržní segmentaci zákazníků podle typu SIM karty, je patrné, že mobilní operátoři upřednostňují druhou variantu z důvodu pravidelných plateb a je tedy snahou mobilních operátorů motivovat zákazníky k přechodu na tyto služby, což potvrzuje graf 3.

**Graf 3: Aktivní SIM karty podle typu (v tis.)**

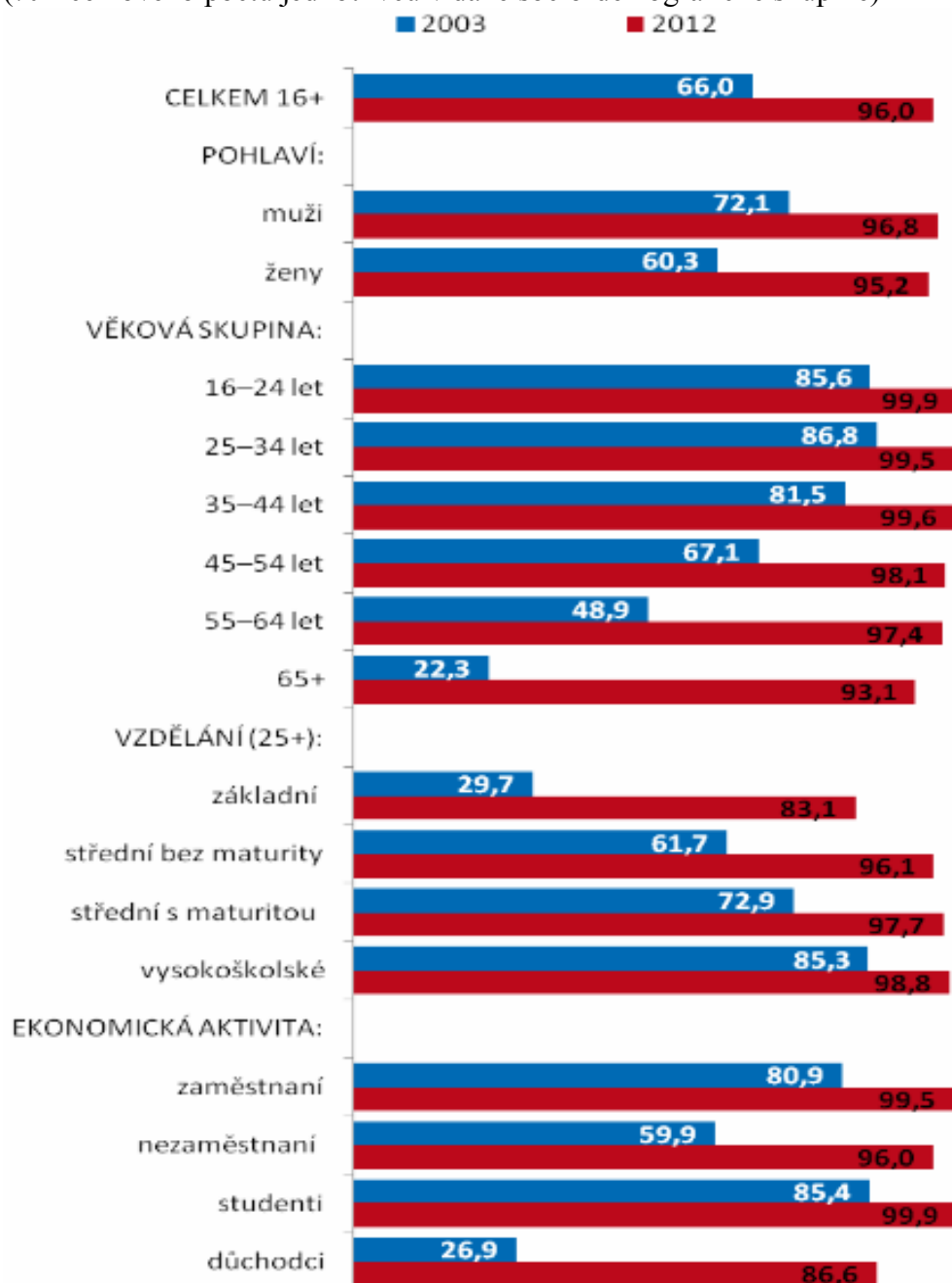


Zdroj: ČSÚ, 2014

Poslední pohled na vývoj a stav trhu mobilních operátorů v České republice nám nabízí graf porovnávající jednotlivé tržní segmenty zákazníků v letech 2003 a 2012, kteří používají mobilní telefon, viz graf 4.

**Graf 4: Jednotlivci používající mobilní telefon (16 a více let)**

(% z celkového počtu jednotlivců v dané socio-demografické skupině)



Zdroj: ČSÚ, 2014

Během porovnávaných let zaznamenal nejvyšší nárůst segment osob starších 65 let. Obdobný nárůst je vidět v případě segmentace podle vzdělání u osob se základním vzděláním, což je pravděpodobně způsobené tím, že osoby s vyšším vzděláním mobilní telefon užívaly již dříve pro výkon svého povolání a samozřejmě vysokými cenami mobilních telefonů, které u základních modelů podstatně klesly. Mladí lidé (studenti) prakticky všichni využívají mobilní telefon. Nicméně graf potvrzuje úvahu o nasycení

trhu a nutném konkurenčním boji, jelikož převážná většina tržních segmentů přesahuje 90 %. Určitá mezera pod 90 % je u zmíněných segmentů, které zaznamenaly největší nárůst mezi léty 2003 a 2012, a nabízí tak určitý prostor pro tržní targeting.

## **2.3 Současní mobilní operátoři v ČR**

Koncem loňského roku proběhla v rámci trhu mobilních operátorů aukce kmitočtů pro mobilní síť spojená se zaváděním nové technologie LTE<sup>3</sup>. V této aukci zvítězili pouze současní tři mobilní operátoři, proto v blízké době na český trh pravděpodobně nevstoupí další mobilní operátor. (ČTÚ, 2013b)

### **2.3.1 Telefónica O2 Czech Republic a.s.**

Společnost Telefónica O2 Czech Republic a.s. patří do skupiny Telefónica, která působí na 25 trzích v zemích po celém světě s celkovým počtem 316 milionů zákazníků. Telefónica O2 CZ a.s. podle údajů, které uvádí ve výroční zprávě, na českém trhu poskytuje služby celkově 7,9 milionům zákazníků. Celkový počet mobilních zákazníků dosáhl k 30. červnu 2013 výše 5 082 tisíc a zaujímá tak 2. místo na tomto trhu.

Telefónica O2 je první český operátor, který na přelomu let 2012 a 2013 umožnil vstup do sítě virtuálním operátorům. Od ledna 2014 je Telefónica O2 součástí české investiční skupiny PPF. Snahou společnosti je také udržovat si pozici inovativního leadera na trhu, a proto byla první ve spuštění neomezených tarifů v dubnu 2013. (Telefónica O2 CZ a.s., 2013)

### **2.3.2 Vodafone Czech Republic a.s.**

Skupina Vodafone je globální mobilní operátor se sídlem ve Velké Británii a působí ve 30ti zemích světa s 371 miliony zákazníků. Vodafone Czech Republic a.s. vznikla v roce 1999 původně jako Český mobil a.s. Jako člen Vodafone skupiny vystupuje od

---

<sup>3</sup> LTE (Long Term Evolution) - jedná se o technologii pro vysokorychlostní internet v mobilních sítích

roku 2005. V současnosti zaujímá na českém mobilním trhu 3. místo, co se do tržního podílu týče. Společnost poskytuje mobilní služby zhruba 3 358 tis. zákazníkům. (Vodafone CZ a.s., 2013)

Společnost Vodafone CZ a.s. se soustředí na společenskou odpovědnost. Mezi body tohoto programu patří například napájení telekomunikační sítě zejména z obnovitelných zdrojů. O společenské odpovědnosti také vypovídá Nadace Vodafone, která se například od začátku roku 2014 podílí na vývoji mobilního rozhraní pro nevidomé. (Vodafone CZ a.s., 2014)

### **2.3.3 T-Mobile Czech Republic a.s.**

Podle odborné ankety Word Finance Awards byla společnost T-Mobile Czech Republic a.s. v roce 2012 vyhlášena nejlepším mobilním operátorem ve Východní Evropě. Stejně tak jako předchozí operátoři, i společnost T-Mobile patří k mezinárodní skupině. T-Mobile CZ a.s. v současné době poskytuje své mobilní služby přibližně 5,8 mil. zákazníkům a jedná se tedy o lídra na českém trhu mobilních operátorů.

Společnost jako svoji strategii udává být nejlepší v poskytování internetových služeb. Tato strategie se společnosti T-Mobile CZ a.s. pravděpodobně daří, jelikož dle ČTÚ poskytuje nejlepší pokrytí obyvatelstva a území ČR 3G signálem. S touto strategií souvisí i aktuální inovační nabídka sdíleného internetu, která umožňuje sdílet datový limit na dvou zařízeních. Společnost se rovněž ve velké míře soustředí na kulturní a sportovní akce. (T-Mobile CZ a.s., 2013)

### **2.3.4 Virtuální operátoři**

Co virtuální operátor vlastně znamená? Virtuální operátor (MVNO<sup>4</sup>) nemá oproti běžnému síťovému mobilnímu operátorovi (MNO<sup>5</sup>) licenci na provozování telekomunikační sítě, ani nevlastní telekomunikační infrastrukturu, tj. nemá vlastní

---

<sup>4</sup> MVNO - Mobile virtual network operator

<sup>5</sup> MNO - Mobile network operator

vysílače, telekomunikační střediska, atd. Virtuální operátor má však přímý vztah s koncovým zákazníkem. Provádí tak běžné zákaznické služby a marketing, má vlastní SIM karty, je však závislý na MNO. Převážná většina českých virtuálních operátorů patří do skupiny tzv. brandových virtuálních operátorů<sup>6</sup>. (A. Pospíšil, 2013)

První virtuální operátor se na českém telekomunikačním trhu objevil koncem roku 2012. V současné době jich na trhu působí přibližně padesát a podle idnes.cz je trh prakticky rozdělený. Dle odhadů je na trhu virtuálních operátorů 684 tisíc zákazníků (viz tabulka 2). Mezi nejznámější a nejúspěšnější virtuální operátory patří Blesk Mobil, který byl také první na trhu, dále pak Mobil.cz, Tesco Mobile či ČEZ Mobil. Klíčovým faktorem úspěchu je především doba příchodu na trh, distribuční síť a kvalitní marketing. Zatím se dá hovořit o odděleném trhu od hlavní trojice mobilních operátorů, jelikož úroveň služeb je rozdílná. (J. Matura a P.P. Novotný, 2014)

**Tabulka 2: Virtuální operátoři v ČR (v tis.)**

<b>Operátor</b>	<b>Počet zák. (v tis.)</b>
Blesk Mobil	300
MOBIL.CZ	100
Tesco Mobile	80
GTS	50
Mobil od ČEZ	47
Oskarta	14
Kaktus	20
Ostatní	73
<b>Celkem</b>	<b>684</b>

*Zdroj: mobil.idnes.cz, 2014*

Virtuální operátoři ve srovnání s běžnými mobilními operátory nabízejí nižší ceny, které jsou způsobené zejména skutečností, že nemusejí provozovat telekomunikační síť a veškerá prostředky tak soustředí na marketing. Virtuální operátoři jsou přístupnější alternativou s menším spektrem služeb pro méně náročné zákazníky. Český telekomunikační úřad v současnosti neposkytuje žádná agregovaná data o virtuálních operátorech a o počtech jejich zákazníků.

<sup>6</sup> Brandový virtuální operátor - zajišťuje služby spojené pouze s prodejem a marketingem, ostatní služby jako přístupová síť, služby s přidanou hodnotou, definice služeb pro zákazníky, zajišťuje mobilní operátor, se kterým má virtuální operátor smlouvu

### 3. Data a datové zdroje

Hlavním zdrojem dat pro analýzu tržních podílů mobilních operátorů je statistika Českého statistického úřadu. Český telekomunikační úřad sice vykonává státní správu telekomunikačního trhu a poštovních služeb, monitoruje, reguluje trh a řeší vzniklé spory, ale data ČTÚ neposkytuje ve strojově čitelném formátu a nabízí pouze zprávu o vývoji trhu elektronických komunikací. (ČTÚ, 2013c)

Na základě emailové korespondence s oddělením výzkumu, vývoje a informační společnosti Českého statistického úřadu bylo zjištěno, že celková data o trhu mobilních operátorů získaná od ČTÚ převádí do strukturované podoby ve formě tabulek prostředí MS Excel. Tato data jsou uvedena ve dvou variantách, celkové počty aktivních SIM karet dle metodologie ČSÚ, které využijeme, a druhá varianta dle metodologie EU pro mezinárodní srovnávání. Nicméně data o počtech zákazníků jednotlivých mobilních operátorů čerpá ČSÚ od jednotlivých operátorů a uvádí je pouze v grafech. Je zcela zřejmé, že podrobnější informace o počtech zákazníků, kteří například byli marketingovými akcemi získáni od jiného mobilního operátora, podléhají obchodnímu tajemství. Budeme tedy pracovat pouze s daty od ČSÚ, případně daty přímo od mobilních operátorů. Jelikož data čerpáme z více a souborově různých zdrojů, budou nad těmito daty vytvořeny vlastní tabulky v prostředí MS Excel, ze kterých pak budou data pro potřeby výpočtů importována do softwaru Mathematica.

Ukazatel tržního podílu daného mobilního operátora byl již uveden v kapitole 2.2 v grafu 2, který zobrazuje počet aktivních SIM karet jednotlivých operátorů v letech 2000 - 2012. Data jsou shrnuta v uvedené tabulce 3, rok 2013 je zjištěn přímo z tiskových zpráv jednotlivých mobilních operátorů.

**Tabulka 3: Aktivní SIM karty podle operátorů k 31. 12. daného roku (v tis.)**

	2000	2001	2002	2003	2004	2005
<b>Telefónica O2</b>	2 171	-	3 891	-	4 360	-
<b>T-Mobile</b>	1 865	-	3 510	-	4 394	-
<b>Vodafone</b>	302	-	1 180	-	1 830	-
<b>Celkem (dle MNO)</b>	4 338	6 947	8 581	9 709	10 584	11 450
<b>Celkem (dle ČSÚ)</b>	4 338	6 947	8 581	9 709	10 584	11 450

2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
4 864	-	5 257	-	4 839	4 942	5 083	5 102
5 049	-	5 422	-	5 475	5 381	5 498	5 831
2 413	-	2 892	-	3 174	3 313	3 375	3 358
12 326	13 055	13 571	14 217	13 488	13 636	13 956	14 291
12 326	13 055	13 780	14 217	14 359	14 215	14 456	

Zdroj: vlastní zpracování, data ČSÚ, 2013, tiskové zprávy MNO, 2014

Ve stanoveném modelu bude stav  $i$  reprezentovat skutečnost, že zákazník využívá služeb  $i$ -tého mobilního operátora. Proto nejaktuálnější data o počtech zákazníků jednotlivých mobilních operátorů budou využita pro stanovení vektoru  $\mathbf{p}(0)$  v okamžiku  $n = 0$ , což znamená pravděpodobnosti výskytu systému ve stavech na počátku.

Varianta matice podmíněných pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}$  bude sestavována na teoretickém základě, který je popsán v kapitole 1.4 popisující metodu převodu dat pro potřeby Markovova modelu. Jak je výše uvedeno, počty zákazníků vyjadřující sumy přechodů mezi mobilními operátory podléhají obchodnímu tajemství, v práci tedy simulujeme hodnoty vycházející z marketingových průzkumů. Cílem práce nejsou marketingové průzkumy. Tyto průzkumy v reálné situaci musejí být založeny na velmi širokém výběru statistického vzorku, aby se skutečně projevilo chování trhu a bylo možné určit podmíněné pravděpodobnosti přechodů. Obsahem těchto průzkumů jsou například otázky na respondenty, zdali jsou za různých konkrétních podmínek (marketingové akce, vstup nového operátora, ...) ochotni opustit svého stávajícího poskytovatele mobilních služeb a přejít k jinému či otázky týkající se oblíbenosti nabídek mobilních operátorů atp. Z těchto skutečností vyplývá nákladnost a časová náročnost těchto výzkumů při sběru dat. Budeme vyvozovat různé varianty matice podmíněných pravděpodobností přechodů pro studii marketingových strategií apod.

## 4. Wolfram Mathematica 9

Wolfram Mathematica je programový systém pro numerické a symbolické výpočty a vizualizaci dat. Jádrem softwaru je vysoce výkonný a propracovaný symbolický jazyk, který umožňuje automatizaci výpočtů a dovoluje tak efektivnější tvorbu



matematických programů. Samozřejmostí je možnost procedurálního a funkcionálního programování. Mathematica je založena na základních principech, pomocí nichž jsou veškeré zápisy vyhodnocovány jako výrazy pomocí aplikace pravidel spojených se zabudovanými symboly. Široké možnosti software Mathematica nabízí také při manipulaci s daty.

Wolfram Mathematica nalézá uplatnění zejména v oblasti vědecko-technických výpočtů, statistickém zpracování dat a finančním managementu. Výhody softwaru Mathematica spočívají v několika základních vlastnostech systému. Jedná se o interpretovaný programovací jazyk vysoké úrovně, který umožňuje inkrementální programování. Rozdělen je na interaktivní část softwaru, ve které pracuje uživatel a dostává výsledky, a na jádro programu Kernel, které pak zpracovává výpočet. Mathematica obsahuje velké množství zabudovaných funkcí, což velmi zefektivňuje programování a samozřejmě umožňuje tvorbu vlastních funkcí a jejich ukládání formou balíků. Velmi propracovaná je oblast vizualizace, která bude v práci využita. Mezi další výhody softwaru bezesporu patří nezávislost na platformě operačního systému a konektivita s různými datovými formáty. (L. Shifrin, 2008, s. 19)

Programová část práce bude vypracována ve verzi Wolfram Mathematica 9. Pro výpočty bude využito rozhraní softwaru, tzv. notebooku, což je souborový formát s příponou \*.nb. Potřebné nadefinované funkce budou seskupeny a uloženy ve vlastním balíku s \*.m příponou. Tato verze softwaru nabízí plnou podporu pro práci s Markovovými řetězci. Program bude postaven na kombinaci funkcionálního a procedurálního programování s numerickými výpočty a zejména bude využita vizualizace získaných výpočtů. Dále bude potřeba využít prostředky pro přenos dat z datových zdrojů MS Excel. Konkrétní popis programovacích technik, použitých funkcí a výrazů bude obsahem kapitoly 6, kde je uveden programový kód.

# **5. Základní stochastický model trhu mobilních operátorů**

Nyní stanovíme základní Markovův model trhu mobilních operátorů na základě poznané problematiky, ze kterého budeme vycházet ve všech variantách. Základní je zde myšleno ve smyslu toho, že varianty výpočtu v různých situacích či při marketingových strategiích jsou od tohoto modelu odvozené, pouze mají stanoveny různé nové předpoklady. Tyto rozdílnosti v modelech vždy uvedeme v kapitole příslušné varianty.

## **5.1 Cíle modelu**

Cílem modelu je stanovit, jak se v čase budou vyvíjet tržní podíly jednotlivých mobilních operátorů na trhu. Uvažujeme tedy, že se trh v současnosti nachází v určitém stavu rozdělení tržních podílů. Postupnými kroky přes matici podmíněných pravděpodobností přechodů budeme procházet jednotlivými obdobími. Proces postupuje až do situace, kdy narážíme na stacionární rozdělení, neboli nalezneme takové období, ve kterém se tržní podíly ustálí. Ekonomická interpretace tohoto výsledku je tedy zjištění trvalého počtu zákazníků, kteří využívají služeb konkrétního mobilního operátora.

Cílem variant řešení je analyzovat změny rozložení trhu či účinnost rozhodování na úrovni marketingových strategií, tedy jakým způsobem působí tyto změny na stacionární rozdělení tržních podílů.

## **5.2 Definice modelu**

Podle teoretických poznatků nadefinujeme Markovův model trhu mobilních operátorů. V realitě se jedná o obchodní systém, ve kterém dochází k přechodu zákazníků mezi mobilními operátory či vstupu nových zákazníků, což se odráží v tržních podílech.

V základním modelu uvažujeme pouze tři popsané mobilní operátory, Telefónica O2 CZ, T-Mobile CZ a Vodafone CZ, z čehož vyplývá stavový prostor jako množina tří stavů:

$$\mathcal{R} = \{1, 2, 3\}, \quad (5.2.1)$$

kde jednotlivé stavy popíšeme následovně:

$s_1 = 1$  představuje stav, kdy zákazníci využívají služeb spol. Telefónica O2 CZ,

$s_2 = 2$  představuje stav, kdy zákazníci využívají služeb spol. T-Mobile CZ,

$s_3 = 3$  představuje stav, kdy zákazníci využívají služeb spol. Vodafone CZ.

$$(5.2.2)$$

Dále nadefinujeme vektor  $\mathbf{p}(0)$ , který vyjadřuje výskyt obchodního systému mobilních operátorů v počátku, konkrétně po složkách jako

$$(\mathbf{p}(0))^T = (p_1(0), p_2(0), p_3(0)), \quad (5.2.3)$$

kde jednotlivé složky vektoru (v desetinném vyjádření) značí:

$p_1(0)$  tržní podíl připadající Telefónica O2 CZ v počátečním období,

$p_2(0)$  tržní podíl připadající T-Mobile CZ v počátečním období,

$p_3(0)$  tržní podíl připadající Vodafone CZ v počátečním období. (5.2.4)

Zbývá nadefinovat konkrétní rozměr matice podmíněných pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}$  pro tento obchodní systém pracující se stavovým prostorem  $s_1, s_2$  a  $s_3$  jako

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.2.5)$$

kde jednotlivé prvky popisují:

$p_{ij}$ , kde  $i \neq j$ , vyjadřují pravděpodobnosti přechodů zákazníků mezi operátory navzájem a

$p_{ij}$ , kde  $i = j$ , pak vyjadřují pravděpodobnosti, že zákazníci setrvávají u daného mobilního operátora.

Pro úplnost můžeme uvést konkrétní podobu zdrojové matice  $\mathbf{T}$ , která po složkách uvádí napozorované počty zákazníků:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & p_{32} & n_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.2.6)$$

## 6. Popis implementace v sw Mathematica

Implementaci si popíšeme na definované základní variantě Markovova modelu. Pro přehlednost zde však bude uveden jen kód bez vyhodnocování varianty, které je obsahem samostatné kapitoly (7.1) s ostatními variantami výpočtu. Jak bylo zmíněno v úvodu do softwaru Mathematica, kód programu je rozdělen na definici vlastního balíků funkcí, na výpočtovou část variant a na výpočet trendové křivky. V ucelené formě je program uveden na konci diplomové práce v příloze A. Pro bližší specifikaci použitých symbolů a funkcí viz dokumentace softwaru Mathematica. (Wolfram, 2014)

### 6.1 Import vstupních dat z MS Excel a inicializace proměnných

Prvním krokem implementace před importem dat je použití funkce `Clear["Global`*"]` a to z důvodu vyprázdnění všech proměnných v prostředí softwaru Mathematica. Poté následuje import vstupních dat, která jsou předpřipravena v samostatném \*.xls souboru softwaru MS Excel. Software Mathematica patří mezi dynamicky typované jazyky, proto není nutno při prvním použití proměnné určit její datový typ a software ho určí sám až za běhu výrazu. Pro import tabulek z MS Excel použijeme sekci *Data Manipulation* a zabudovanou funkci `Import[]` takto:

```
dataImport = Import[FileNameJoin[{NotebookDirectory[], "data",  
"Dp1405_Rad1O_K12N0204P_data.xls"}]];
```

Funkce `Import[]` obecně jako parametr přijímá zdrojový soubor. Ten je v našem případě určen s využitím funkce `FileNameJoin[]`, která spojuje zadané parametry do relativní cesty ke zdrojovému souboru. Předpokládané uložení souboru je ve složce

*data*, která je ve stejné úrovni jako používaný notebook Mathematica (`NotebookDirectory[]`). Proměnná `dataImport` tedy odkazuje na celý \*.xls soubor. Obsahuje tak všechny listy vybraného tabulkového souboru, ve kterých jsou pro přehlednost odděleně uloženy jednotlivé varianty. Stejným způsobem pomocí funkce `Import[]` je do výpočtové části programu naimportován balík vlastních funkcí, což je nutné pro práci s funkcemi v tomto balíku:

```
package = Import[FileNameJoin[{NotebookDirectory[],
  "Dp1405_Rad1O_K12N0204P_package.m"}]];
```

V programu následuje část explicitní inicializace potřebných proměnných modelu, které budou později využity. Tato část volá z balíku `package` definovanou funkci `initVars[NumStates_, list_]`, která jako první parametr přijímá počet stavů daného modelu a jako druhý číslo listu, na kterém je uložena zvolená varianta (tj.  $A = 2$ ). Jako všechny dále definované funkce obsahuje funkce symbol `Block[{s=NumStates,var=list},...]`, který převádí získané parametry funkce do proměnných, s kterými se následně pracuje v těle funkce. Jak bylo zmíněno, funkce inicializuje potřebné proměnné, jejichž výčet je následující:

```
varTable = Table[Subscript[x,k,l],{k,3+s},{l,2+s}];
varTable // MatrixForm

 $\mathcal{T}$  = Table[Subscript[n,k,l],{k,s},{l,s}];

 $\mathcal{T}$  // MatrixForm

 $\mathcal{P}$  = Table[Subscript[p,k,l],{k,s},{l,s}];

 $\mathcal{P}$  // MatrixForm

p0 = {};

For[i=1,i<s+1,i++,p0 = Append[p0,Subscript[p,i]]];
```

První z proměnných `varTable` je explicitně inicializovaná tabulka o velikosti  $3+s$  řádků a  $2+s$  sloupců připravená pro hodnoty konkrétní varianty z odpovídajícího listu \*.xls souboru, kde  $s$  je lokální proměnná reprezentující právě počet stavů. Do této tabulky budou převedena data z proměnné `dataImport` pro snazší manipulaci a reprezentaci. Stejným způsobem jsou určeny potřebné matice  $\mathcal{T}$  a  $\mathcal{P}$ , které jsou rovněž explicitně inicializovány symboly dle zadání (5.2.5) a (5.2.6). Obě matice rozměry odpovídají danému počtu stavů, tedy v základní variantě uvažujeme tři stavy. Data lze zobrazit

v maticové formě pomocí `MatrixForm`. Poslední potřebná proměnná, která vytváří prostor pro vektor nepodmíněných pravděpodobností v počátku

a stejně jako tabulky je explicitně inicializován symbolicky. Funkce `Append[]` v cyklu `For` slouží k rozšiřování vektoru, aby počet složek odpovídal počtu stavů modelu.

## 6.2 Zpracování vstupních dat

Součástí funkce `initVars[NumStates_, list_]` je také procedura zajišťující získání dat pro odpovídající variantu a jejich formátování do tabulky. Viz následující kód.

```
For[i=1,i<s+4,i++,
  For[j=1,j<s+3,j++,varTable[[i,j]]= dataImport[[var,i+1,j]]];
Print["Data varianty"];
Grid[varTable, Alignment->Left,Frame->All]
```

Proces převodu dat z importu do tabulky zajišťují dva vnořené cykly, které postupně procházejí řádky a sloupce vybraného datového listu. Základní variantě A (`var=2`) odpovídá ve zdrojovém \*.xls souboru List číslo 2, což reprezentuje první pozice v proměnné `dataImport[[var,i+1,j]]`. Data jsou poté naformátována do jednoduché tabulky pomocí funkce `Grid[]`.

Pro ověření správnosti stavového prostoru (5.2.2) využijeme grafické zobrazení modelu. Jelikož již máme díky počáteční inicializaci funkcí `initVars[NumStates_, list_]` připravené odpovídají struktury matice podmíněných pravděpodobností přechodů a počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností, můžeme využít funkce softwaru Mathematica pro vizualizaci Markovova řetězce jako orientovaného grafu.

```
DMP=DiscreteMarkovProcess[p0,P];
graphMarkov=Graph[{"O2","T-M","V"}, DMP,
GraphLayout->"LayeredDrawing", PlotLabel->"Graf přechodů
v Markovou řetězci"]
```

Zabudovaná funkce `DiscreteMarkovProcess[]` přijímá jako parametry právě dvě zmíněné proměnné a slouží k reprezentaci těchto dvou vstupů jako diskrétního Markovova procesu, což vyžadujeme. Funkce `Graph[]` pak zobrazuje právě získaný Markovův řetězec jako orientovaný graf. Využité parametry funkce jsou `GraphLayout`,

který upravuje orientaci grafu a `PlotLabel` přidávající popisek. Konkrétní využití viz některá z variant, kde uvádíme získané vizualizace.

### 6.3 Procedury výpočtu variant

Samotná výpočtová i vizualizační část programu je rozdělena do dvou částí. Nejprve část výpočet a vizualizace počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů, dále pak druhá část zabývající se limitním rozdělením. Pro přehlednost tyto dvě části oddělíme i zde.

#### Výpočet počátečního vektoru $p_0$ a matice podmíněných pravděpodobností přechodů $P$

Pro snazší orientaci a manipulaci s kódem programu je nejprve z balíku volána vlastní definovaná funkce `calcInitVmatP[p0_]`, která jako parametr přebírá strukturu počátečního vektoru pro zjištění počtu stavů modelu. První část funkce převádí číselné hodnoty z proměnné `varTable` do připravené proměnné matice počtů přechodů pomocí dvou vnořených cyklů `For`, které využívají funkci `Count[]`, která vrací počet složek počátečního vektoru, následovně:

```
For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
  For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++, $\mathcal{T}[[h,m]]$ =varTable[[h+2,m+2]]]
```

Jak bylo již zmíněno, tato matice obsahuje počty napozorovaných přechodů tedy počty přechodů zákazníků mezi mobilními operátory během jednoho období. Nyní již můžeme přistoupit k naplnění potřebných proměnných hodnotami. Tento proces je opět zajištěn vnořenými cykly `For` o délce odpovídající počtu stavů:

```
For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
  k=2;
   $p_0[[h]]$ =varTable[[h+2,k]]/varTable[[Count[InitVec,_]+3,k]];
  For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++, $\mathcal{P}[[h,m]]$ = $\mathcal{T}[[h,m]]$ /varTable[[h+2,k]]]
```

Počáteční vektor nepodmíněných pravděpodobností je konstruován pomocí hodnot získaných ze statistik o současném rozdělení trhu a celkové kapacitě trhu. Pro fixování

určitého sloupce potřebného pro výpočet je využito pomocné proměnné  $k$ , jelikož v druhém sloupci listu jsou očekávány hodnoty za rok 2013. Podobným způsobem dle teoretických poznatků (1.4.1) a (1.4.3) jsou vypočteny hodnoty podmíněných pravděpodobností přechodů v matici. Poté jsou výpočty vizualizovány, což popisuje následující kapitola 6.4.

### Výpočet vektoru limitního rozdělení

Pro výpočet limitního chování modelu je opět zavedena vlastní funkce `calcLimitV[p0_, P_]`, která pracuje se zabudovanými funkcemi softwaru Mathematica. Tyto funkce se přímo zabývají Markovovými řetězci a stacionárním rozdělením procesů, viz tělo funkce:

```
MarkChain=DiscreteMarkovProcess[initVec, matP];
u={};
For[i=1,i<Count[InitVec,_]+1,i++,
  u=Append[u,
    Probability[x==i,x $\approx$ StationaryDistribution[MarkChain]]];
```

Opět je využita funkce `DiscreteMarkovProcess[]`. Poté je potřeba využít funkce `Probability[]`, která má velmi široké využití. Obecně vrací pravděpodobnost, že událost nabývá určité hodnoty za podmínky, že se proces řídí zadaným pravděpodobnostním rozdělením. V našem případě jako první parametr přijímá daný stav a jako druhý parametr předpokládané rozdělení hodnot. Ve výpočtech požadujeme, aby jednotlivé stavy byly stacionárně rozděleny. Proto předpokládáme stacionaritu našeho Markovova řetězce a použijeme zabudovanou funkci `StationaryDistribution[]`. Již použitou konstrukcí cyklem `For` a funkcí `Append[]` získáme vektor  $u$ , jehož složkami jsou pravděpodobnosti, že se systém nachází v daných stavech.



## 6.4 Prezentace výsledků a vizualizace

Vizualizace získaných hodnot je provedena pomocí funkcí `PieChart[]` a `BarChart3D[]`. Koláčové grafy jsou využity pro vizualizaci potřebných rozdělení trhu, které jsou reprezentovány vektory. Pravděpodobnosti jsou pro přehlednější výpisy zaokrouhleny funkcí `Round[]`.

```
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ",Round[p0, 0.0001]]

initVPic = PieChart[p0,PlotLabel->"Vizualizace p0",
ChartLabels->{"p0 (1) ", "p0 (2) ", "p0 (3) "}]

Print["Vektor limitního rozdělení u ", Round[u, 0.0001]]
limitPic = PieChart[u,PlotLabel->"Limitní rozdělení trhu mezi O2,
T-M,V",ChartLabels->{"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V"}]
```

Maticе podmíněných pravděpodobností je prezentována pomocí 3D grafu.

```
Print["Maticе podmíněných pravděpodobností přechodů P ",Round[P,
0.001]// MatrixForm]

matrixPic = BarChart3D[P,ChartLayout->"Grid", PlotLabel->"Maticе
podmíněných pravděpodobností přechodů (3x3)",
ChartLabels->{"s1", "s2", "s3"},Range[1,3]},
Ticks->{None, None, Automatic},BarSpacing->1,
ColorFunction->"Rainbow", ViewPoint->{5,-5,5}]
```

Vizualizace je v softwaru Mathematica velmi dobře propracována a grafické funkce nabízí širokou škálu možných nastavení. Jsou využity parametry pro titulek grafu, popis sloupců grafu, rozvržení grafu či obarvení grafu. U 3D grafů, který je v tomto případě využit pro matici podmíněných pravděpodobností přechodů, je dále zapotřebí stanovit pozorovací bod pro správné zobrazení při exportování grafů v \*.jpg formátu. Konkrétní grafy jsou zobrazeny ve výpočtech variant (kap. 7).

3D grafy jsou také dále využity pro vizualizaci dynamiky chování systému. Pomocí grafu je vykresleno, jak se mění rozdělení tržních podílů během jednotlivých kroků od počátečního rozdělení až po stacionární. K tomu je vytvořena vlastní funkce `vizualDynam[p0_, P_, u_, step_]`. Parametry funkce jsou počáteční vektor

nepodmíněných pravděpodobností, matice podmíněných pravděpodobností přechodů, vektor stacionárního rozdělení a počet kroků, které se mají vykreslit v grafu.

```
vizualDynam[p0_, P_, u_, step_] := Block[{InitVec=p0, matP=P,
lim =u, k = step},
p1=InitVec;
ArrayVec={p1};
Do[{p2=p1.matP; ArrayVec=Append[ArrayVec, p2]; p1=p2}, {k}];
```

Nejprve je vytvořen pomocný vektor  $p_1$  a pole vektorů `ArrayVec`, do kterého je uložen počáteční vektor a dále se do něj budou ukládat vektory v jednotlivých krocích výpočtu. Cyklus `Do` realizuje výpočet, který je znám z teorie (1.3.3.1) resp. (1.3.3.2). Cyklus končí podle zadaného parametru počtu kroků.

```
NullVec={};
For[i=1, i<Count[InitVec, _]+1, i++,
NullVec = Append[NullVec, 0]];
Do[ArrayVec=Append[ArrayVec, NullVec], {2}];
ArrayVec=Append[ArrayVec, lim];
```

Pro přehlednější vizualizaci jsou do pole vektorů přidány ještě dva nulové vektory `NullVec`, které naznačují další následné kroky, než se systém dostane do stacionárního rozdělení, jelikož uvažujeme dle (1.3.5.2) počet kroků  $n \rightarrow \infty$ . Na závěr je přidán limitní vektor  $u$ , zde reprezentován proměnnou `lim`.

Poté zbývá pouze vytisknutí hodnot na obrazovku a vizualizace grafu dynamiky modelu od počátečního rozdělení k stacionárnímu. Jedná se o vytisknutí hodnot jednotlivých vektorů pomocí cyklu `For`, který prochází pole vektorů a formátuje textový výstup.

```
Print["Řešení pro počáteční vektor p0 = ", InitVec, "\n Vizualizace
rozdělení v jednotlivých krocích pn, n = ", k - (k-1), " - ", k, "
kroků"];
For[m=1, m<=k+1, m++,
p = {};
For[i=1, i<Count[InitVec, _]+1, i++, p = Append[p,
ArrayVec[[m, i]]]];
Print ["krok ", (m-1), " .: p", (m-1), " = ", p];];
Print["krok n.: pn = u = ", u];
dynPic = BarChart3D[ArrayVec, ChartLayout->"Grid",
BarSpacing->1.5,
ChartLabels->{"n = 0", "n = 1", "n = 2", "n = 3",
"n = 4", "n = 5", "..."}, Range[1, 5]],
ColorFunction->"DarkRainbow",
PlotLabel->"Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých
krocích", Ticks->{None, None, Automatic}, ImageSize->{750, 600},
ViewPoint{5, -5, 4}];
```

## 6.5 Trendová křivka

V programu je pro porovnání dosažených výsledků proveden odhad trendové křivky na základě časových řad o počtech zákazníků na mobilním trhu. Při získávání dat z \*.xls souboru pracuje tato část programu jako předchozí (tj. NumStates=13, list=1), proto neuvádíme tento kód. Důležitou částí je samotné nalezení odpovídající trendové křivky, což je provedeno pomocí definované funkce balíku fitTrend[dataTable\_]. Jelikož uvažujeme logistický trend vývoje počtu zákazníků u jednotlivých operátorů, využijeme funkci NonlinearModelFit[]. Programový kód je uveden zde.

```
fit=NonlinearModelFit[data,  
γ/(1+α*β^t),{α,{β,0.1},{γ,Max[data[[All,2]]]}},t];  
fitPic = Show[ListPlot[data, PlotLabel→{Round [fit[100]]  
"zákazníků bude mít vybraný operátor po nasycení trhu"}],  
Plot[fit[t],{t,0,14}]]
```

Prvním parametrem funkce jsou zadaná data o počtech zákazníků v jednotlivých letech. Druhým parametrem je obecný předpis uvažovaného trendu, v našem případě ve tvaru logistické křivky. V dalším parametru funkce je zadán rozsah hledaných regresních koeficientů křivky. Poslední parametr specifikuje proměnnou křivky, což je u časové řady čas  $t$ . Následuje funkce Show[], která do grafu zobrazuje statistická data (ListPlot[]) a trendovou křivku (Plot[]). Použitým příkazem fit[100] získáme pomocí trendové křivky počet zákazníků daného mobilního operátora po 100 obdobích, což je dostatečně vzdálená hodnota pro nasycení a je tedy možné zjistit hodnotu, ke které mobilní operátor směřuje dle dostupných dat a zvoleného trendu.

## 6.6 Export výsledků

V softwaru Mathematica je využit export výsledků pro prezentaci zde v práci. K tomu je použita funkce Export["visualization.jpg", n], kde prvním parametrem je pojmenování a určení datového typu souboru a druhým je proměnná softwaru Mathematica, ve které je daný objekt uložen. Funkce je zabalena do vlastní funkce exportJPG[name\_]:=Block[{n=name},... společně s následně volanou funkcí SystemOpen["visualization.jpg"], která soubor otevře v tomto případě v prohlížeči obrázků, který je v operačním systému nastaven jako výchozí pro práci s obrázky.

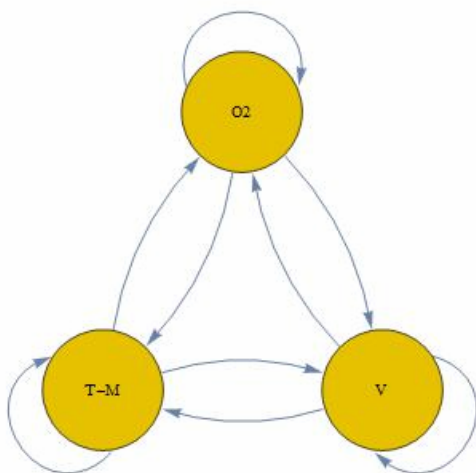
## 7. Výpočet a vizualizace variant řešení

Varianty řešení slouží k analýze vlivů změn a skutečností, které se mohou udát na trhu mobilních operátorů v České republice. Každé variantě náleží stručný popis uvažované situace, doplnění rozdílů v definicích od základního modelu a popis vstupních dat varianty. Poté je varianta vypočtena pomocí programu v softwaru Mathematica. Výsledky jsou stručně vyhodnoceny a uvedeny v grafech vyexportovaných též ze softwaru Mathematica.

### 7.1 Varianta A - základní

Základní varianta byla již popsána v kapitole 5.2. Z definice modelu je patrné, že uvažujeme uzavřený, nasycený systém. Varianta je tak čistě teoretická, jelikož abstrahujeme od výstupu zákazníků ze systému či vstupu dalších nových zákazníků, kteří v současnosti služby mobilních operátorů nevyužívají. Pro znázornění stavů a přechodů uvádíme orientovaný graf Markovova řetězce. Z důvodu přehlednosti hrany grafu neobsahují hodnoty pravděpodobností, které budou dále odvozeny.

**Graf 5: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. A**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Z dostupných dat z minulosti (viz tabulka 3) lze vyvodit schopnost mobilních operátorů si udržovat své zákazníky. Pouze v případě Telefónica O2 došlo k mírnému poklesu. Proto lze v této variantě předpokládat, že ustálené tržní pozice budou přibližně odpovídat počáteční situaci. Uvažujeme zdrojovou matici  $T$  počtů přechodů mezi mobilními operátory, jejíž hodnoty  $n_{ij}$  simulujeme jako vyvozené na základě marketingového průzkumu, viz tabulka 4.

**Tabulka 4: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. A (v tis.)**

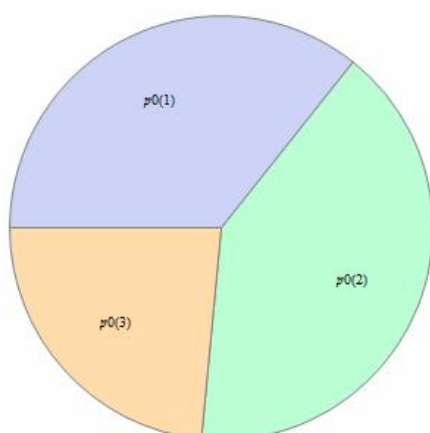
		Rok 2014		
	Rok 2013	Telefónica O2	T-Mobile	Vodafone
Telefónica O2	5 102	4250	449	403
T-Mobile	5 831	382	5100	349
Vodafone	3 358	292	306	2760
Celkem	14 291	4 924	5 855	3 512

*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

Vertikální součty dle jednotlivých operátorů reprezentují počty zákazníků, kteří dle simulovaného průzkumu budou využívat služby daného operátora v roce 2014. Horizontální součty, pak reprezentují, jak se počty zákazníků za rok 2013 rozdělí mezi mobilní operátory v roce 2014. Na základě těchto dat lze zkonstruovat počáteční vektor nepodmíněných pravděpodobností a matici podmíněných pravděpodobností přechodů. Výpočty vycházejí ze vzorců v kapitole 1.4.

Počáteční vektor  $p_0$  pro variantu A vychází  $p_0 = \{0.357, 0.408, 0.235\}$ .

**Graf 6: Současné rozdělení trhu - var. A**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

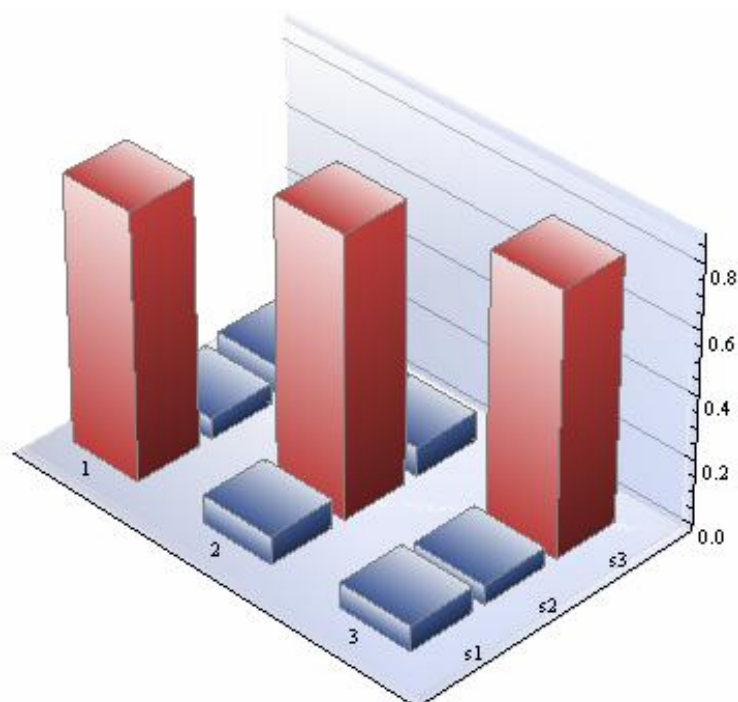
Interpretace vektoru je jednoznačná a odpovídá závěrům vyvozeným v kapitole 2.2, která se zabývá vývojem tržních podílů dle statistik. V současné době Telefónica O2 CZ disponuje tržním podílem 35,7 %. Nejlépe si dle statistických dat vede T-Mobile CZ, jelikož jeho tržní podíl činí přibližně 40,8 %. Vodafone CZ zaujímá dle statistik třetí místo na trhu s podílem přibližně 23,5 %.

Matrice podmíněných pravděpodobností se stanovuje na základě statistických dat a dat simulovaného marketingového průzkumu. Jak již bylo vícekrát zmíněno, jedná se konzervativní prostředí a je zde vysoká pravděpodobnost setrvání zákazníka u daného mobilního operátora během dvou po sobě následujících období. Z tohoto důvodu diagonální prvky matice obsahují vysoké pravděpodobnosti:

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} & \{0.833, 0.088, 0.079\}, \\ & \{0.065, 0.875, 0.06\}, \\ & \{0.087, 0.091, 0.822\}. \end{matrix}$$

Tato varianta předpokládá loajalitu zákazníků. Telefónica O2 CZ, T-Mobile CZ a Vodafone CZ jsou schopni si mezi dvěma obdobími udržet přibližně 83 %, 87 % a 82 % zákazníků a nepředpokládají se tak výrazné přechody mezi operátory. Pro snazší představu uvedme vizualizaci této matice pomocí softwaru Mathematica, viz graf 7.

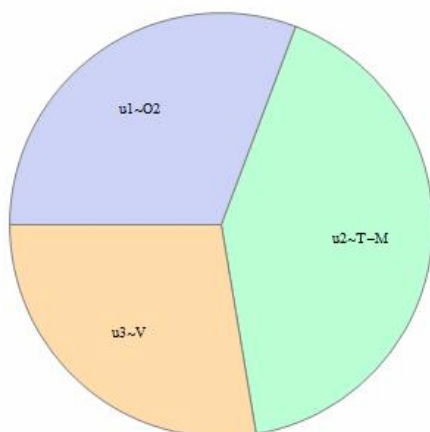
**Graf 7: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. A**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu limitního chování a vizualizaci dynamiky tržních podílů v čase. Dle propočtů v softwaru Mathematica lze získat vektor stacionárního rozdělení  $u = \{0.3072, 0.4165, 0.2763\}$ .

**Graf 8: Stacionární rozdělení trhu - var. A**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Oproti současnému rozdělení trhu došlo k mírným změnám v tržních podílech jednotlivých mobilních operátorů. Telefónica O2 CZ přišla o 5 % tržního podílu na úkor Vodafone CZ, který si svojí pozici upevnil na 27,6 %. Tržní podíl T-Mobile CZ se zvýšil zhruba o 0,85 % a v konečném rozdělení zaujímá 41,65 % trhu.

Dynamiku vývoje trhu nemůžeme v tomto případě očekávat nikterak markantní, jelikož nedošlo k velkým změnám. Změny lze proto snáze vypočítat z číselných hodnot než z grafického zobrazení, pro stručnost uvedeme pouze prvních 5 kroků.

Rozdělení v jednotlivých krocích  $p_n$ ,  $n = 1 - 5$  kroků

krok 0 ..  $p_0 = \{0.357008, 0.408019, 0.234973\}$

krok 1 ..  $p_1 = \{0.344553, 0.409698, 0.245749\}$

krok 2 ..  $p_2 = \{0.335224, 0.411053, 0.253723\}$

krok 3 ..  $p_3 = \{0.328236, 0.412144, 0.259621\}$

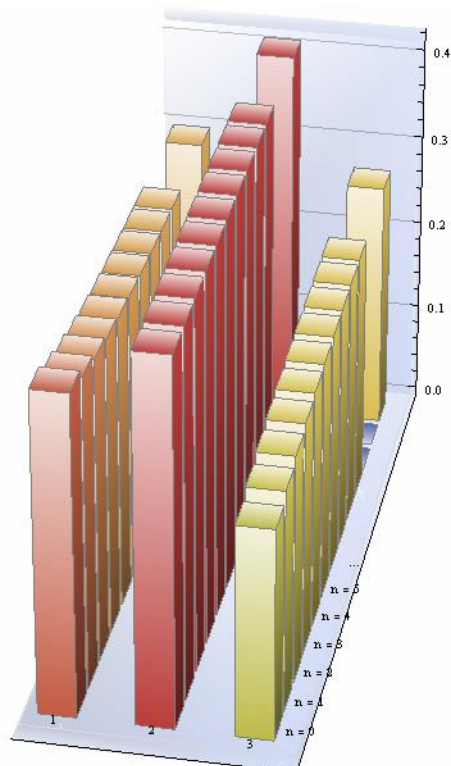
krok 4 ..  $p_4 = \{0.322999, 0.41302, 0.263982\}$

krok 5 ..  $p_5 = \{0.319073, 0.413723, 0.267205\}$

krok n.:  $p_n = u = \{0.307246, 0.416494, 0.276261\}$

Postupnými opakovanými průchody maticí podmíněných pravděpodobností přechodů dochází ke změnám v rozdělení trhu. Na základě dat tak lze pozorovat například v případě Vodafone CZ posilování jeho tržní pozice. Pro úplnost viz vizualizace tohoto chování na následujícím grafu.

**Graf 9: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. A**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Výsledky získané pomocí Markovova modelu potvrdily poznatky z analýzy vývoje trhu v kapitole 2.2 a schopnost mobilních operátorů udržet si své zákazníky a stabilizovat tak své tržní podíly, které se však markantně nemění.

## 7.2 Varianta B - marketingové strategie

Dle předpokládané schopnosti mobilních operátorů udržet si své zákazníky či získávat nové, jsme ve variantě A dospěli k závěrům přibližně totožným jako zjištěné rozdělení v současnosti odpovídající statistickým datům. Nyní však budeme uvažovat odlišnou situaci. V dalších obdobích se jednomu z mobilních operátorů podaří úspěšná marketingová strategie. Uvažujme tedy, že mobilní operátor Vodafone CZ spustí marketingovou akci zaměřenou například na rozvoj nové technologie LTE a dokáže si



tak upevnit tržní positioning mobilního internetu a prosadit se nejpříznivějšími cenami a podmínkami pro zákazníky. Důsledkem této úspěšné marketingové akce bude zvýšení loajality zákazníků, tržní pozice v segmentu mobilního internetu a získání významného počtu zákazníků od Telefónica O2 CZ a T-Mobile CZ.

Stavový prostor modelu se v tomto případě nemění a orientovaný graf tohoto modelu tak odpovídá grafu 5, který je uveden ve variantě A. Jak marketingová akce zapůsobí na přechody zákazníků, je znázorněno v následující tabulce počtu přechodů zákazníků.

**Tabulka 5: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. B (v tis.)**

		Rok 2014		
	Rok 2013	Telefónica O2	T-Mobile	Vodafone
Telefónica O2	5 102	<b>4100</b>	<b>418</b>	<b>584</b>
T-Mobile	5 831	<b>372</b>	<b>4980</b>	<b>479</b>
Vodafone	3 358	<b>351</b>	<b>307</b>	<b>2700</b>
Celkem	<b>14 291</b>	4 823	5 705	3 763

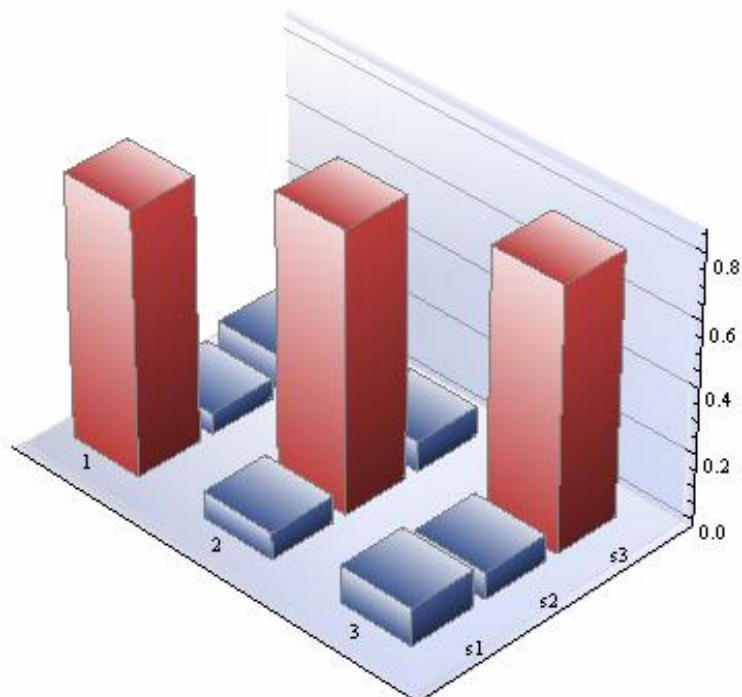
*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

Simulovaný marketingový průzkum předpokládá úspěšnou marketingovou strategii, proto lze předpokládat vyšší přechody zákazníků od Telefónica O2 CZ a T-Mobile CZ k Vodafone CZ, což se samozřejmě projeví v konečných součtech počtů zákazníků v následujícím roce 2014.

Počáteční vektor nepodmíněných pravděpodobností je v tomto případě totožný s variantou A, jelikož vycházíme ze stejných statistických dat o současném rozdělení trhu, viz graf 6. Ke změnám však dojde v hodnotách matice podmíněných pravděpodobností přechodů **P**.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc}
 s_1 & s_2 & s_3 \\
 s_1\{0.804, 0.082, 0.114\}, \\
 s_2\{0.064, 0.854, 0.082\}, \\
 s_3\{0.105, 0.091, 0.804\}.
 \end{array} \\
 P =
 \end{array}$$

**Graf 10: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. B**

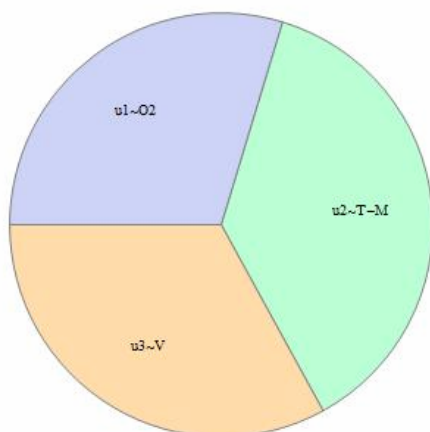


*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Přestože v udržení vlastních zákazníků Vodafone CZ nevyniká, dokonce oproti variantě A si udrží o 1,7 % zákazníků méně, vyvozujeme však zlepšení v počtech přechodů od ostatních mobilních operátorů.

Výpočet stacionárního rozdělení tržních podílů nabízí očekávané výsledky. Vektor limitního chování modelu  $u = \{0.2968, 0.3733, 0.3299\}$

**Graf 11: Stacionární rozdělení trhu - var. B**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Oproti variantě A došlo k výraznému nárůstu tržního podílu Vodafone CZ na úkor obou zbývajících mobilních operátorů. Vodafone CZ se dokázal marketingovou akcí dostat na druhou pozici na trhu. Roli hraje samozřejmě schopnost mobilního operátora udržet si stávající zákazníky, v tomto případě však zejména schopnost získat nové od konkurentů. Dynamiku tohoto vývoje znázorňuje opět graf vyvedený ze softwaru Mathematica. Průběh přechodů v jednotlivých letech je zde již více patrný, viz graf 12.

Rozdělení v jednotlivých krocích  $p_n$ ,  $n = 1 - 5$  kroků

krok 0  $:: p_0 = \{0.357008, 0.408019, 0.234973\}$

krok 1  $:: p_1 = \{0.337485, 0.399202, 0.263313\}$

krok 2  $:: p_2 = \{0.324196, 0.392664, 0.28314\}$

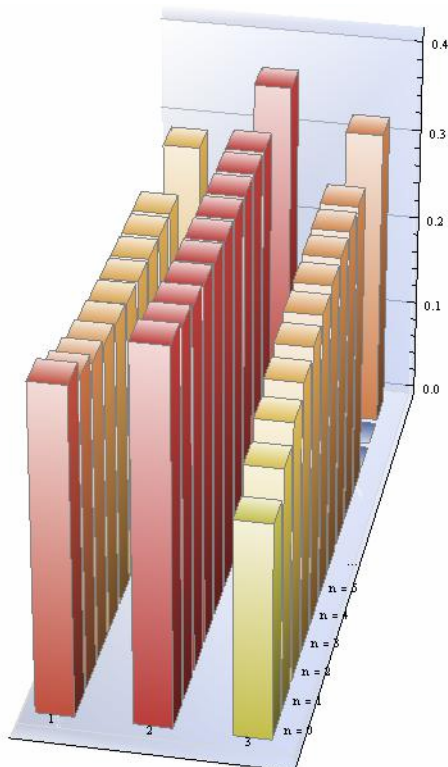
krok 3  $:: p_3 = \{0.315173, 0.387803, 0.297024\}$

krok 4  $:: p_4 = \{0.309062, 0.384182, 0.306755\}$

krok 5  $:: p_5 = \{0.304938, 0.381479, 0.313583\}$

krok  $n :: p_n = u = \{0.296833, 0.373282, 0.329885\}$

**Graf 12: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. B**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

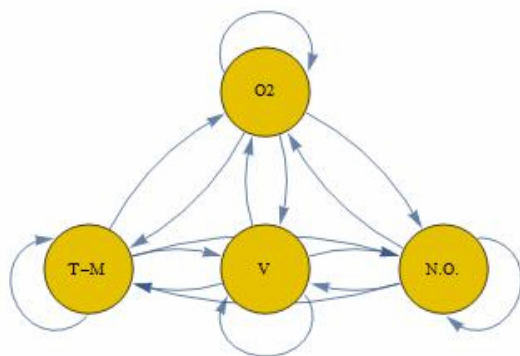
Tento příklad demonstruje významnou skutečnost, že budoucí rozdělení trhu nezávisí na počátečním rozdělení tržních podílů, nýbrž na marketingových strategiích mobilních operátorů či loajalitě zákazníků. Současné rozdělení tržních podílů pouze určuje rychlost změny v počátečních obdobích, což potrhuje důležitost rozhodování při marketingovém řízení, které tak může v dlouhém období zajistit výrazně lepší pozici na trhu.

### 7.3 Varianta C - s novým hráčem na trhu

Pro názornější demonstraci v předchozí variantě vyvozené skutečnosti týkající se počáteční situace na trhu zavedeme příklad, kdy budeme uvažovat vstup nového hráče na trh. Je zřejmé, že při vstupu na trh nový mobilní operátor nemá vybudovaný žádný tržní podíl. Jinak řečeno, složka počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností bude pro tohoto nového mobilního operátora nulová, tedy systém v současnosti nemá možnost se v tomto stavu nacházet.

V tomto případě musíme rozšířit stavový prostor o další stav vyjadřující situaci, kdy zákazníci využívají služeb nového operátora, tedy  $s_4 = 4$ . Tato skutečnost samozřejmě rozšiřuje dimenzi používané matice a počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností. Orientovaný graf tohoto modelu je znázorněn na grafu 13, stav N. O. značí nového operátora.

**Graf 13: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. C**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Se vstupem na vysoce konkurenční oligopolní trh je spojené velké riziko, že se nový hráč na trhu neudrží. Pro studii těchto situací budeme uvažovat tři scénáře této varianty. V základě může nastat situace, že se nový mobilní operátor na trhu neprosadí a nebude tak schopen konkurovat již zavedeným mobilním operátorům, což je pesimistický scénář. Opačným případem může být velmi optimistický scénář, že si nový mobilní operátor vybuduje velkou a stabilní zákaznickou základnu a dostane se tak do popředí trhu. Poslední konzervativní scénář uvažuje zařazení nového mobilního operátora na stabilní pozici mezi stávající.

V programu je speciálně pro variantu C definována vlastní funkce `newProviderScenario[p0_, percDiag_]`, která řeší zmiňované scénáře. Jako parametr přijímá pravděpodobnost, s jakou je nový operátor schopen udržet si získané zákazníky. Tato pravděpodobnost nám dovoluje rozlišit scénáře vývoje.

```
newProviderScenario[p0_, percDiag_] := Block[{InitVec = p0,
perc=percDiag},
For[h=1, h<Count[InitVec, _]+1, h++,
  For[m=1, m<Count[InitVec, _]+1, m++,  $\mathcal{T}[[h, m]] = \text{varTable}[[h+2, m+2]]]$ ]
For[h=1, h<5, h++,
  k= Count[InitVec, _]-2;
   $p0[[h]] = \text{varTable}[[h+2, k]] / \text{varTable}[[7, 2]]$ ;
  For[m=1, m<Count[InitVec, _]+1, m++,
    If[ $\text{varTable}[[h+2, k]] == 0$ ,  $\mathcal{P}[[h, m]] = (1 - \text{perc})/3$ ,
       $\mathcal{P}[[h, m]] = \mathcal{T}[[h, m]] / \text{varTable}[[h+2, k]]$ ]
    If[m == 4 && h == m,  $\mathcal{P}[[h, m]] = \text{perc}$ , 0]]]
```

Metoda ošetřuje naplnění matice počtů přechodů zákazníků a matice podmíněných pravděpodobností přechodů. Pomocí první podmínky `If` zajistíme zjednodušení a předpokládáme hodnoty přechodů od nového operátora k ostatním jako rovnocenné. Tyto hodnoty jsou však závislé na zmíněné schopnosti operátora udržet se na trhu, jelikož musí platit podmínka známá z teorie (1.3.2.4). Druhá podmínka `If` nastavuje diagonální prvek na zadanou hodnotu dle scénáře.

Nejprve si však uvedeme tabulku obsahující data o počtech přechodů zákazníků.

**Tabulka 6: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. C (v tis.)**

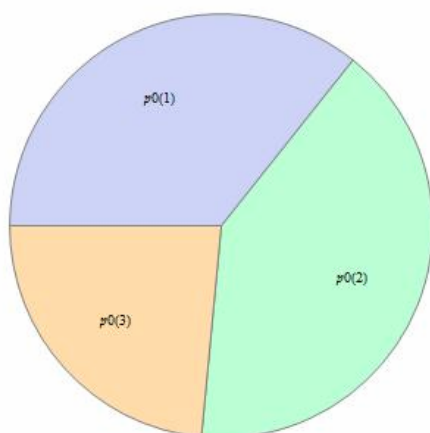
		Rok 2014			
	Rok 2013	Telefónica O2	T-Mobile	Vodafone	Nový operátor
Telefónica O2	5 102	4250	249	266	337
T-Mobile	5 831	230	5100	205	296
Vodafone	3 358	128	239	2720	271
Nový operátor	0	0	0	0	0
Celkem	14291	4 608	5 588	3 191	904

*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

V současné době v roce 2013 nemá nový operátor žádné zákazníky. Hodnoty přechodů od nového mobilního operátora jsou prakticky nezjistitelné marketingovým průzkumem. Dotazování, zdali by zákazník přešel od dosud nezavedeného operátora zpět ke stávajícímu, je zavádějící bez konkrétních podmínek, a proto jsou tyto hodnoty nulové. V matice podmíněných pravděpodobností budou tyto hodnoty nastaveny jako rovnocenné, jak je zmíněno výše, a scénáře jsou rozlišeny pouze schopností nového operátora udržovat si zákazníky.

Rozšířením stavového prostoru dojde k rozšíření vektoru nepodmíněných pravděpodobností  $p_0$  o další složku, která je však nulová ze zmíněných důvodů. Ostatní hodnoty vektoru zůstávají stejné jako v předchozích variantách a vychází tak ze současných statistických dat  $p_0 = \{0.357, 0.408, 0.235, 0.\}$ .

**Graf 14: Současné rozdělení trhu - var. C**

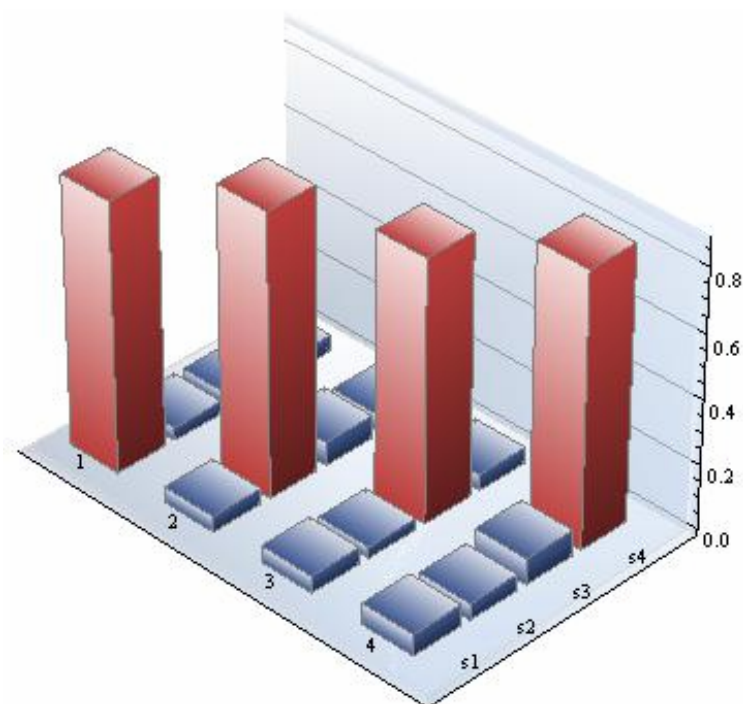


*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Nyní musíme rozlišit matice podmíněných pravděpodobností přechodů pro jednotlivé scénáře. Začneme optimistickým scénářem a budeme předpokládat, že se novému operátorovi podaří udržet si 85 % získaných zákazníků díky propracované marketingové kampani. Tento scénář vede na následující matici podmíněných pravděpodobností přechodů.

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & \{0.833, & 0.049, & 0.052, & 0.066\}, \\ s_2 & \{0.039, & 0.875, & 0.035, & 0.051\}, \\ s_3 & \{0.038, & 0.071, & 0.81, & 0.081\}, \\ s_4 & \{0.05, & 0.05, & 0.05, & 0.85\}. \end{matrix}$$

**Graf 15: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C1**

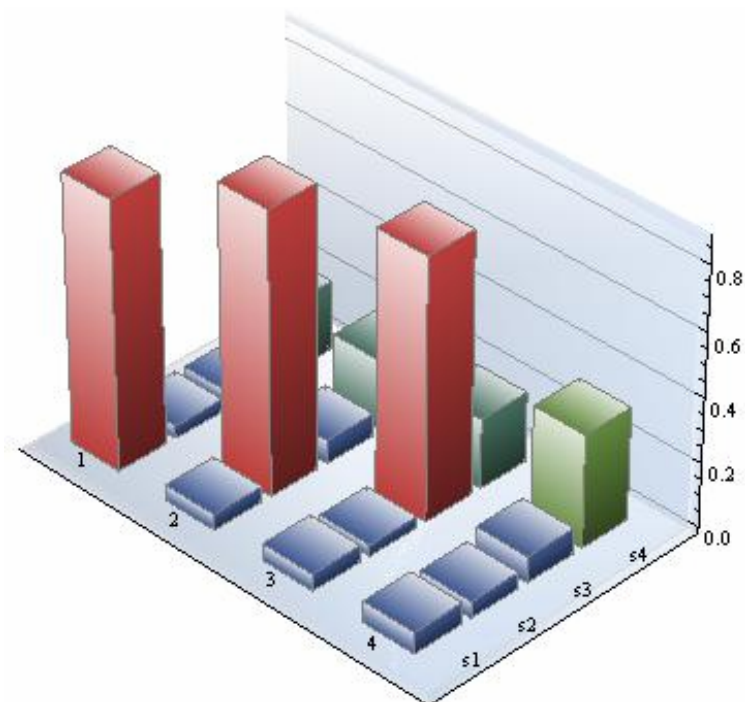


Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Pesimistický scénář předpokládá, že marketingová kampaň bude neúspěšná, nový operátor se nedokáže oproti konkurenci prosadit a nevybuduje si stabilní zákaznickou základnu. Předpokládejme tedy, že si udrží pouze 35 % získaných zákazníků. Matici podmíněných pravděpodobností přechodů lze pak simulovat následující.

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & \{0.833, & 0.0489, & 0.052, & 0.066\}, \\ s_2 & \{0.039, & 0.875, & 0.035, & 0.051\}, \\ s_3 & \{0.038, & 0.071, & 0.81, & 0.081\}, \\ s_4 & \{0.217, & 0.217, & 0.217, & 0.349\}. \end{matrix}$$

**Graf 16: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C2**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

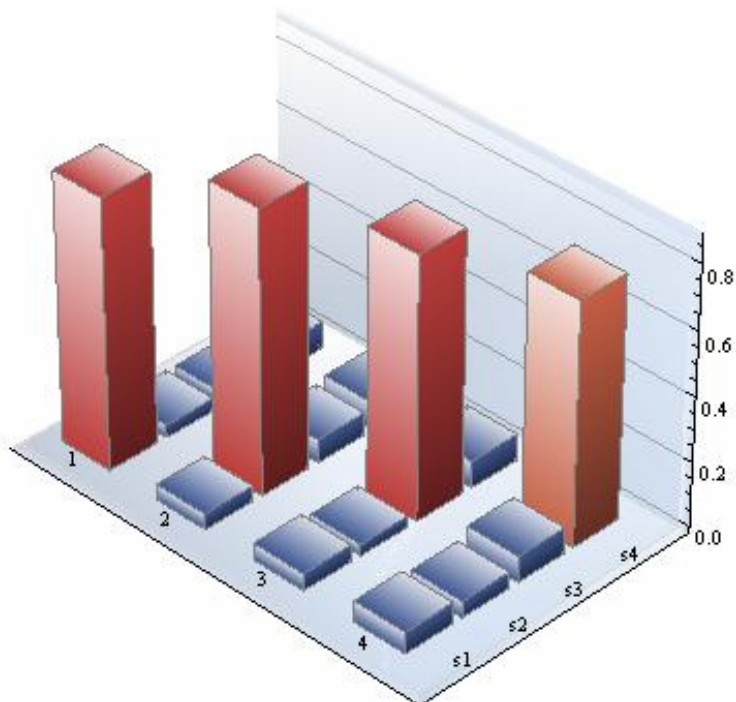
Z grafu 16 jsou patrné zvýšené pravděpodobnosti odchodů zákazníků od nového zákazníka zpět ke stávajícím a nízká pravděpodobnost, že si nový mobilní operátor udrží získané zákazníky.

Posledním scénářem je konzervativní, který předpokládá, že nový mobilní operátor je z velké části schopen si zákazníky udržet. Konzervativní je z důvodu, že při udržení zákazníků nový mobilní operátor nedosahuje tak vysoké pravděpodobnosti jako stávající mobilní operátoři a předpokládáme 75 % zákazníků.

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & \{0.833, & 0.0489, & 0.052, & 0.066\}, \\ s_2 & \{0.039, & 0.875, & 0.035, & 0.051\}, \\ s_3 & \{0.038, & 0.071, & 0.81, & 0.081\}, \\ s_4 & \{0.083, & 0.083, & 0.083, & 0.751\}. \end{matrix}$$



**Graf 17: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C3**

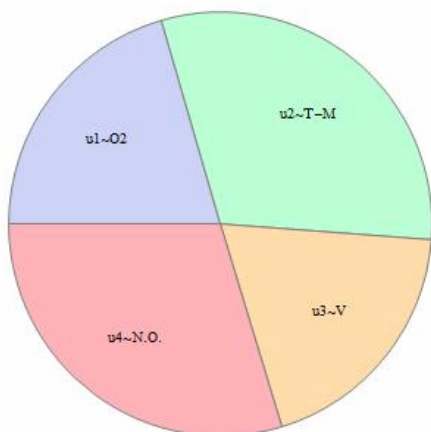


*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Můžeme provést srovnání scénářů na základě stacionárního rozdělení tržních podílů dle úspěšnosti nového operátora. Limitní vektory jednotlivých scénářů jsou

- optimistický scénář:  $u = \{0.205, 0.3068, 0.1912, 0.297\}$ ,

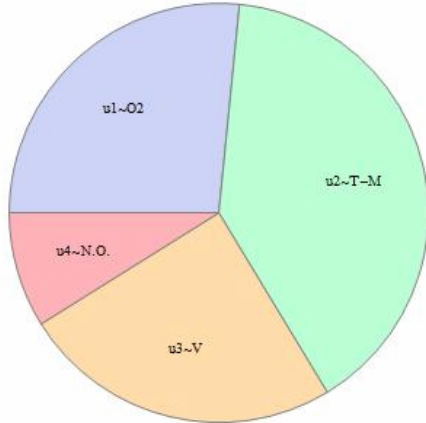
**Graf 18: Stacionární rozdělení trhu - var. C1**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

- pesimistický scénář:  $u = \{0.2657, 0.3977, 0.2478, 0.0888\}$ ,

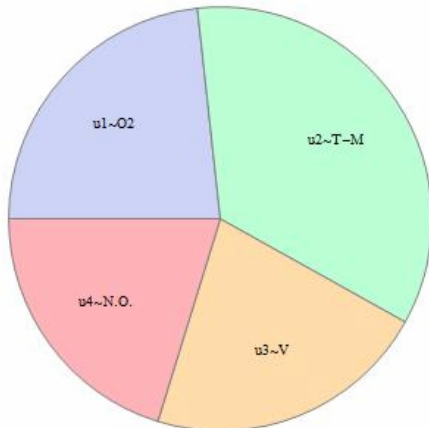
**Graf 19: Stacionární rozdělení trhu - var. C2**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

- konzervativní scénář:  $u = \{0.2327, 0.3481, 0.217, 0.2022\}$ .

**Graf 20: Stacionární rozdělení trhu - var. C3**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

V případě optimistického scénáře se novému mobilnímu operátorovi podařilo zaujmout až 29,7 % trhu na úkor všech současných mobilních operátorů a dostal se tak na druhou pozici na trhu. Pesimistický scénář vede k výsledku, kdy nový mobilní operátor nebyl schopen obsadit ani 10 % trhu, což se nedá považovat za úspěch marketingové

kampaně. Konzervativním scénářem lze vyvodit dobrou pozici na trhu s tržním podílem 20,2 %, což je vyrovnaný podíl s Telefónica O2 CZ a Vodafone CZ.

Z důvodu stručnosti uvedeme pouze graf týkající se dynamiky pro případ optimistického scénáře. V tomto scénáři je nejvíce patrná dynamika budování tržního podílu, jelikož nový mobilní operátor v současné době má nulový podíl na trhu a optimistický scénář předpokládá, že si vybuduje druhou pozici na trhu s podílem 29,7 %. Z tohoto důvodu je zde prudký růst tržního podílu v čase, viz graf 21.

Rozdělení v jednotlivých krocích  $p_n$ ,  $n = 1 - 5$  kroků

krok 0  $:: p_0 = \{0.357008, 0.408019, 0.234973, 0.\}$

krok 1  $:: p_1 = \{0.322441, 0.391015, 0.223287, 0.0632566\}$

krok 2  $:: p_2 = \{0.295693, 0.376787, 0.214585, 0.112935\}$

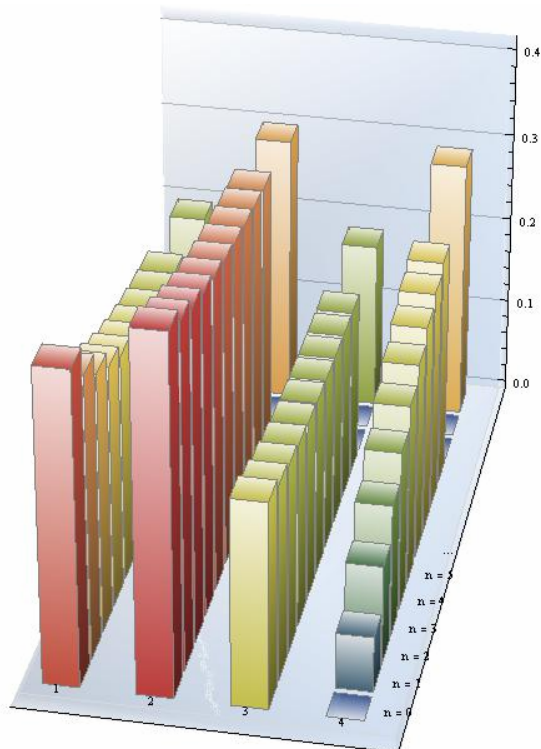
krok 3  $:: p_3 = \{0.275002, 0.364902, 0.208125, 0.151971\}$

krok 4  $:: p_4 = \{0.259004, 0.354989, 0.203347, 0.18266\}$

krok 5  $:: p_5 = \{0.246639, 0.346733, 0.199829, 0.2068\}$

krok  $n :: p_n = u = \{0.205028, 0.306807, 0.191188, 0.296977\}$

**Graf 21: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. C**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

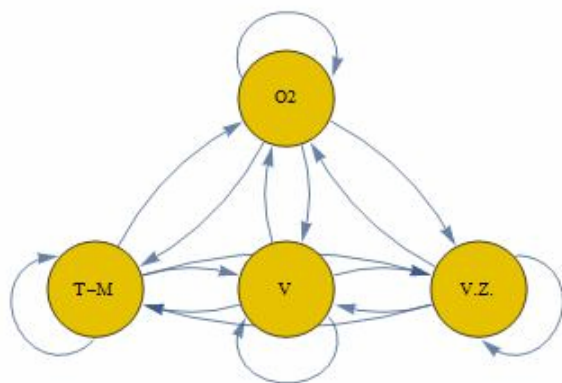
Varianta zabývající se vstupem nového mobilního operátora na trh opět potvrdila důležitost marketingových strategií při budování tržního podílu. Pokud je nový mobilní operátor schopný si získat a udržet zákazníky, má možnost si vybudovat stabilní tržní podíl a nezávisí tak na současném stavu trhu.

## 7.4 Varianta D - s potenciálními zákazníky

Dosud jsme neuvažovali odchod zákazníků z trhu či příchod nových zákazníků. Nabízí se analýza týkající se kapacity trhu, která, jak bylo zjištěno z dat ČSÚ, není zcela naplněna a existuje jistý prostor u osob důchodového věku a u osob se základním vzděláním (viz graf 4). Stále tedy existují potenciální zákazníci, kteří nevyužívají služeb mobilních operátorů. Uvažujme tedy více pravděpodobnou variantu, kdy umožníme odchod zákazníků mimo trh a příchod nových zákazníků. Předpokládejme, že všichni mobilní operátoři více či méně úspěšně aplikují tržní targeting na segment osob důchodového věku a podaří se jim získat další nové zákazníky.

Opět musíme rozšířit základní model o další stav. Tentokrát stav  $s_4 = 4$  představuje potenciální zákazníky, tedy osoby mimo trh mobilních operátorů. Orientovaný graf tohoto modelu je znázorněn na grafu 22, Stav V. Z. značí volné potenciální zákazníky.

**Graf 22: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. D**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Z dat za období 2003 - 2013 podle ČSÚ (viz příložený datový \*.xls soubor) lze vyvodit neustálý pokles volných potenciálních zákazníků. Mobilní sítě se stále rozšiřují, nicméně trh je téměř nasycený, proto vstupy nových zákazníků nejsou nikterak markantní. Matice počtů přechodů zákazníků mezi mobilními operátory a mimo trh je odhadována následovně.

**Tabulka 7: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. D (v tis.)**

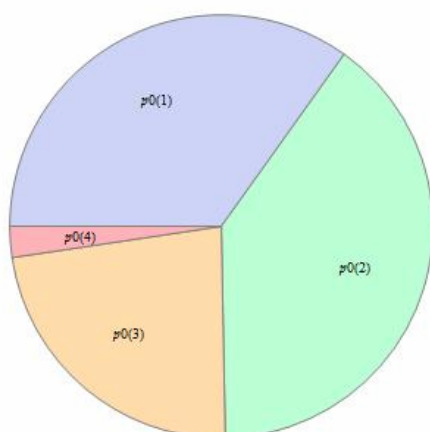
	Rok 2013	Rok 2014			
		Telefónica O2	T-Mobile	Vodafone	Volní zákazníci
Telefónica O2	5 102	4290	399	370	43
T-Mobile	5 831	382	5080	293	76
Vodafone	3 358	271	311	2720	56
Volní zákazníci	344	113	69	75	87
Celkem	14 635	5056	5859	3458	262

*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

Dle dat ČSÚ zbývá volných potenciálních zákazníků přibližně 344 tisíc. Oproti hodnotám v řádech miliónů zákazníků využívající služby mobilních operátorů je to zanedbatelná část, proto se tato změna příliš neprojeví v pravděpodobnostech počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností  $p_0$ . Volní potenciální zákazníci zaujímají pouze 2,35 % kapacity trhu:

$$p_0 = \{0.3486, 0.3984, 0.2295, 0.0235\}.$$

**Graf 23: Současné rozdělení trhu - var. D**

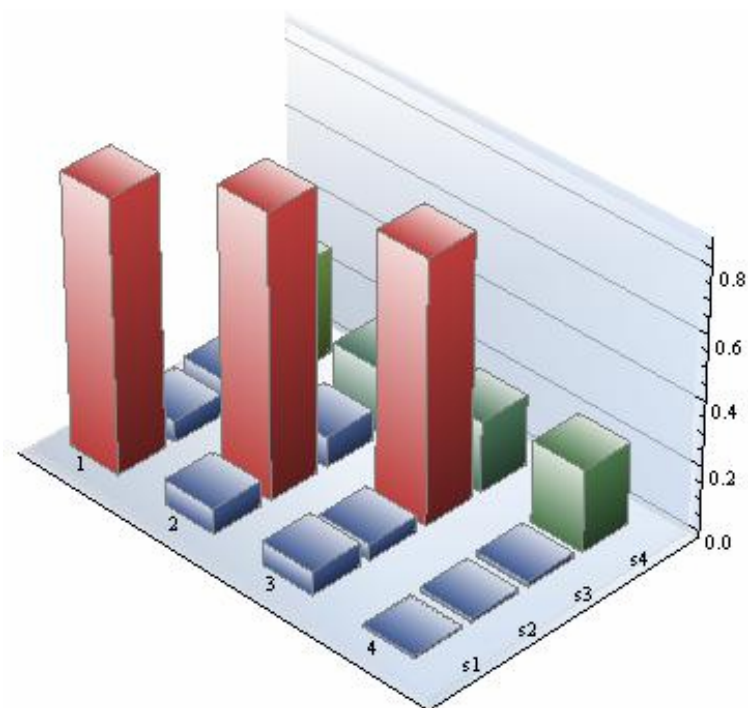


*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Simulovaným datům o počtech přechodů odpovídá následující matice podmíněných pravděpodobností přechodů. Také si lze všimnout, že v získávání nových volných zákazníků je jako nejlepší předpokládána Telefónica O2 CZ.

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & \{0.841, & 0.078, & 0.073, & 0.008\}, \\ s_2 & \{0.066, & 0.871, & 0.05, & 0.013\}, \\ s_3 & \{0.081, & 0.092, & 0.81, & 0.017\}, \\ s_4 & \{0.328, & 0.201, & 0.218, & 0.253\}. \end{matrix}$$

**Graf 24: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. D**

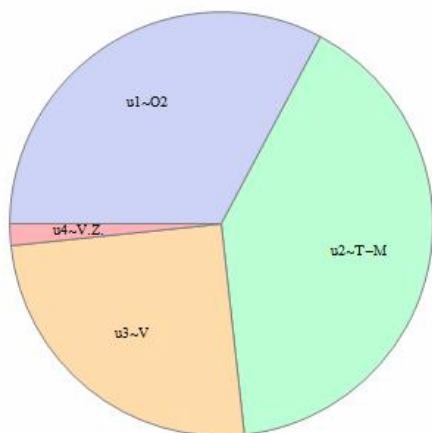


Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Zmíněný předpoklad nejlépe propracované marketingové strategie Telefónica O2 CZ týkající se získávání potenciálních zákazníků nemusí znamenat jednoznačný růst. Společnost přesto může dosáhnout v dlouhém období nižšího podílu než v současnosti, jelikož skutečně záleží na všech ostatních okolnostech přechodů zákazníků. Tato skutečnost se projevila ve stacionárním rozdělení trhu této varianty, jak ukazuje limitní vektor  $u$ . Telefónica O2 CZ ztratila část svého podílu.

$$u = \{0.3277, 0.4049, 0.251, 0.0164\}$$

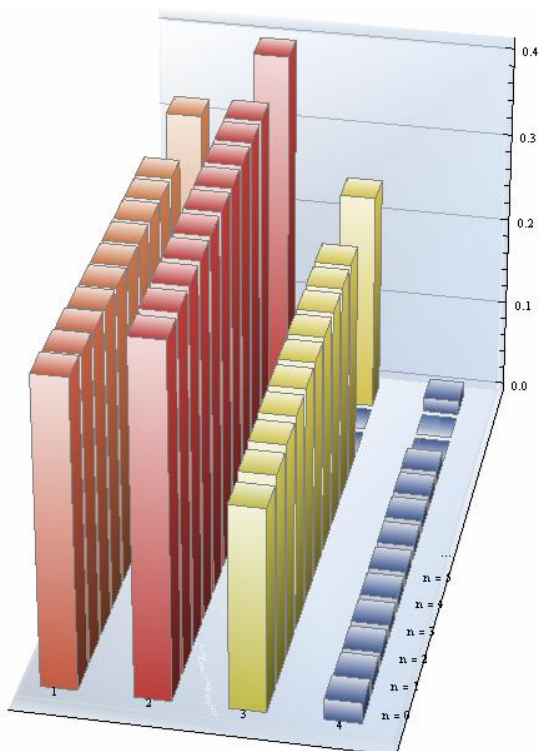
**Graf 25: Stacionární rozdělení trhu - var. D**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Vzhledem ke zmíněným skutečnostem o vysokém procentu zákazníků, kteří již mobilní služby využívají, nedošlo k významným změnám a dynamika je tak velmi vyrovnaná a uvedeme pouze grafické vyjádření, viz graf 26.

**Graf 26: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. D**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

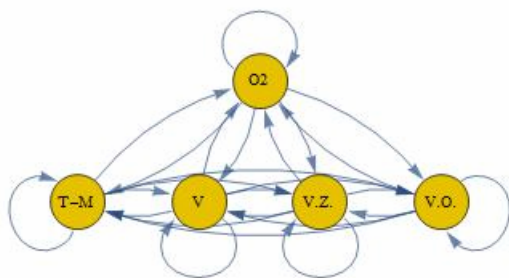
## 7.5 Varianta E - zahrnující virtuální operátory

Poslední varianta analýzy týkající se konkurenčních bojů na mobilním trhu se zabývá nejvíce pravděpodobnou situací odvozenou od aktuálního rozdělení mobilního trhu a od získaných poznatků. Varianta tedy samozřejmě předpokládá volné potenciální zákazníky, na které mohou mobilní operátoři cílit své marketingové strategie. Dále je zřejmé, že s rozšiřováním virtuálních operátorů je nutné uvažovat virtuální operátory, ačkoliv v souhrnu, jako rovnocenné hráče na trhu. Varianta abstrahuje od vstupu nového mobilního operátora na trh. Vzhledem k nedávným událostem týkajících se aukce kmitočtů pro mobilní sítě (viz kap. 2.3) se vstup nového operátora jeví jako velmi nepravděpodobný, a proto ho v této variantě neuvažujeme.

Budeme tedy uvažovat virtuální operátory v souhrnu jako další možnost, mezi kterými se zákazníci mohou rozhodovat. Doplnující data o virtuálních operátorech jsou čerpána z internetového článku o virtuálních operátorech v ČR uveřejněného na serveru mobil.idnes.cz (viz tabulka 2). Autoři nabízejí počty zákazníků, kteří používají jednotlivé virtuální operátory. V našem příkladě budeme pracovat s celkovým počtem zákazníků využívajících služeb virtuálních operátorů.

Stavový prostor pro tento případ musíme nadále rozšířit o pátý stav. První čtyři stavy odpovídají předchozí variantě a zavádíme stav  $s_5 = 5$ , který reprezentuje zákazníky, kteří využívají služeb virtuálních operátorů. Opět si uvedeme orientovaný graf tohoto modelu. Na grafu 27 stav V. O. značí virtuální operátory.

**Graf 27: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. E**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*



Za pouhý rok 2013 si virtuální operátoři na českém trhu dokázali získat téměř 700 tis. zákazníků. V současné době se jejich počet a nabídka neustále rozšiřují a lze tedy předpokládat růst jejich tržního podílu. Na základě dostupných zdrojů dat a simulovaného marketingového průzkumu vyvodíme následující matici (viz tabulka 8) počtů přechodů zákazníků na trhu.

**Tabulka 8: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. E (v tis.)**

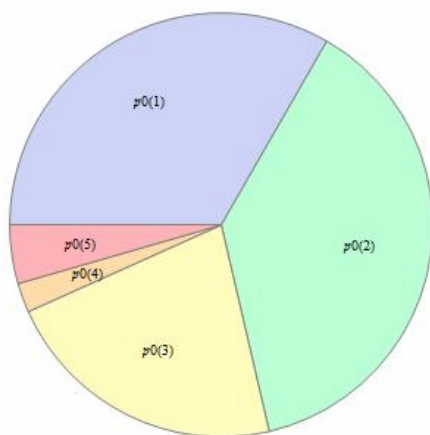
	Rok 2013	Rok 2014				
		Telefónica O2	T-Mobile	Vodafone	Volní zákazníci	Virtuální
<b>Telefónica O2</b>	5 102	<b>4250</b>	<b>319</b>	<b>288</b>	<b>43</b>	<b>202</b>
<b>T-Mobile</b>	5 831	<b>281</b>	<b>5080</b>	<b>237</b>	<b>76</b>	<b>157</b>
<b>Vodafone</b>	3 358	<b>247</b>	<b>241</b>	<b>2720</b>	<b>38</b>	<b>112</b>
<b>Volní zákazníci</b>	344	<b>83</b>	<b>49</b>	<b>70</b>	<b>67</b>	<b>75</b>
<b>Virtuální</b>	684	<b>47</b>	<b>67</b>	<b>81</b>	<b>25</b>	<b>464</b>
<b>Celkem</b>	<b>15319</b>	4 908	5 756	3 396	249	1 010

*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

Na základě dat opět vypočteme potřebný počáteční vektor a matici podmíněných pravděpodobností přechodů.

$$p_0 = \{0.3331, 0.3806, 0.2192, 0.0225, 0.0446\}$$

**Graf 28: Současné rozdělení trhu - var. E**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

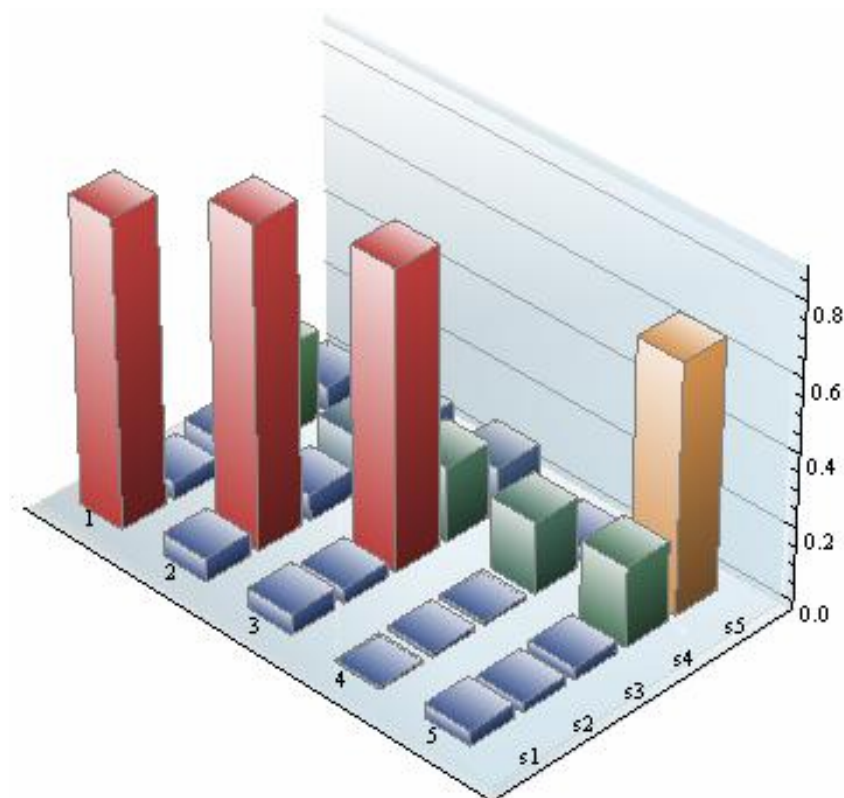
Dalším rozšířením stavového prostoru současné tržní podíly tří mobilních operátorů klesnou, jelikož určitá část trhu připadá právě virtuálním operátorům, kteří na českém mobilním trhu zastávají přibližně 4,5 %.

Matice podmíněných pravděpodobností přechodů je vypočtena:

$$\begin{array}{ccccc}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\
 P = & \{0.833, & 0.063, & 0.056, & 0.008, & 0.04 \}, \\
 & \{0.048, & 0.871, & 0.041, & 0.013, & 0.027\}, \\
 & \{0.074, & 0.072, & 0.81, & 0.011, & 0.033\}, \\
 & \{0.241, & 0.142, & 0.204, & 0.195, & 0.218\}, \\
 & \{0.069, & 0.098, & 0.118, & 0.037, & 0.678\}.
 \end{array}$$

Virtuální operátoři zpravidla nenabízejí postpaid SIM karty a není tak u těchto operátorů nutné uzavírat roční smlouvy a odchod je tak pro zákazníka snazší. Tato skutečnost se odráží ve schopnosti virtuálních operátorů udržet si zákazníky během jednoho období a je tak nižší než u MNO, přibližně 67,8 % zákazníků. Matice také zobrazuje vyšší pravděpodobnosti získávání volných potenciálních zákazníků všemi operátory (viz graf 29).

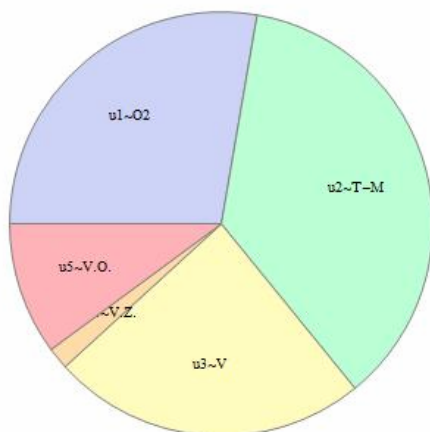
**Graf 29: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. E**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Nyní přistoupíme k formování trhu v dlouhém období výpočtem stacionárního rozdělení tržních podílů,  $u = \{0.277, 0.3642, 0.241, 0.0168, 0.101\}$ .

**Graf 30: Stacionární rozdělení trhu - var. E**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

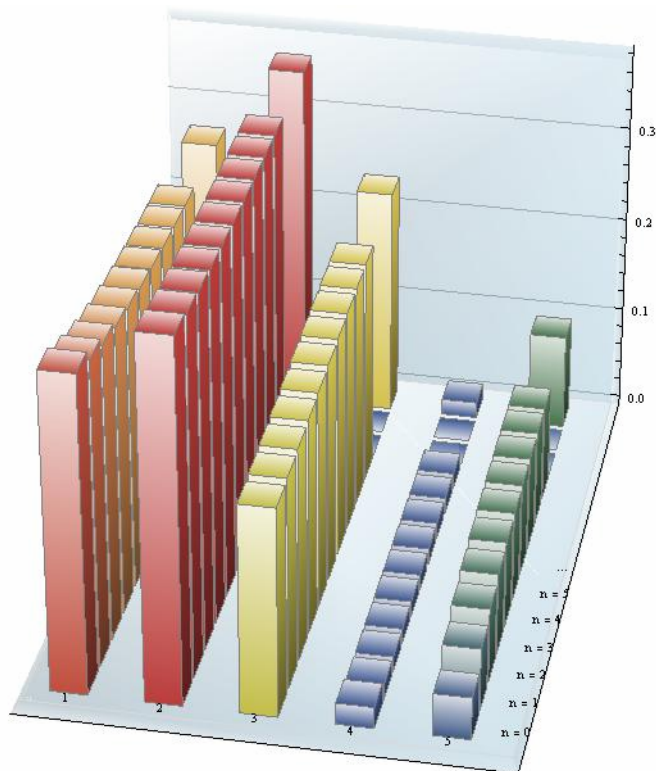
Nepatrný nárůst tržního podílu o 2,2 % lze pozorovat u mobilního operátora Vodafone CZ. Dochází k růstu tržního podílu virtuálních operátorů, kteří se dostávají na 10,1 % trhu. Tento nárůst je na úkor zbylých dvou mobilních operátorů Telefónica O2 CZ a T-Mobile CZ. Dále se projevuje pokles potenciálních zákazníků, kteří jsou mimo mobilní trh. Dle hodnot vektorů v jednotlivých krocích je patrné, že k největším změnám podílů dojde v prvních obdobích.

Rozdělení v jednotlivých krocích  $p_n$ ,  $n = 1 - 5$  kroků

krok 0 ..  $p_0 = \{0.33305, 0.380638, 0.219205, 0.0224558, 0.0446504\}$   
krok 1 ..  $p_1 = \{0.320386, 0.375743, 0.221685, 0.0162543, 0.0659312\}$   
krok 2 ..  $p_2 = \{0.30975, 0.372065, 0.224039, 0.0156818, 0.0784647\}$   
krok 3 ..  $p_3 = \{0.301608, 0.36951, 0.226563, 0.0159175, 0.0864005\}$   
krok 4 ..  $p_4 = \{0.295491, 0.367768, 0.229032, 0.0161801, 0.0915283\}$   
krok 5 ..  $p_5 = \{0.290909, 0.366585, 0.231277, 0.0163723, 0.0948573\}$   
krok n.:  $p_n = u = \{0.277041, 0.364154, 0.24109, 0.0167643, 0.100951\}$

Tyto procesy opět zachycuje graf 31 dynamiky rozdělení tržních podílů v jednotlivých obdobích.

**Graf 31: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. E**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Bylo prokázáno, že je možné počítat s dalším nárůstem tržního podílu virtuálních operátorů na úkor majoritních mobilních operátorů. Nicméně jak je známo, virtuální operátoři zůstávají závislí na sítích a službách MNO, a proto se jim pravděpodobně nepodaří širší rozšíření či dokonce obsazení větší části trhu než některý z trojice síťových mobilních operátorů.

## **7.6 Varianta F - rozdělení trhu dle typu SIM karty**

V této poslední variantě se zaměříme na segmentaci trhu z pohledu typu SIM karet. Jak je uvedeno v kapitole 2.2 o vývoji trhu, rozdělujeme karty na postpaid a prepaid. Z dostupných historických dat je patrný neustálý úbytek prepaid karet a nárůst postpaid, jelikož se mobilní operátoři snaží rozšiřovat tyto služby a získávat smluvní zákazníky. Celkovou kapacitu trhu samozřejmě opět doplníme potenciálními zákazníky.

Stavový prostor tak v tomto případě obsahuje tři stavy, které můžeme nadefinovat následovně:

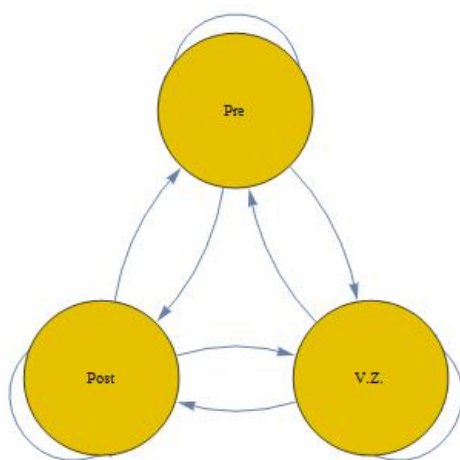
$s_1 = 1$  představuje stav, kdy zákazníci využívají prepaid SIM karty,

$s_2 = 2$  představuje stav, kdy zákazníci využívají postpaid SIM karty a

$s_3 = 3$  představuje stav, kdy zákazníci nevyužívají mobilních služeb.

Poté můžeme vyvodit tento třístavový prostor spolu s přechody mezi nimi jako graf 32.

**Graf 32: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. F**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

V této variantě by se opět dalo předpokládat více scénářů, jelikož virtuální operátoři působí v prospěch prepaid SIM karet. Nicméně nejvíce pravděpodobný se jeví pokračující úbytek těchto karet, jak předpokládají simulovaná data v tabulce 9.

**Tabulka 9: Počty přechodů zákazníků dle typu SIM karty - var. F (v tis.)**

		Rok 2013		
	Rok 2012	Prepaid	Postpaid	Volní zákazníci
Prepaid	6 548	5730	696	122
Postpaid	7 907	242	7510	155
Volní zákazníci	344	172	105	67
Celkem	14 455	6 144	8 311	344

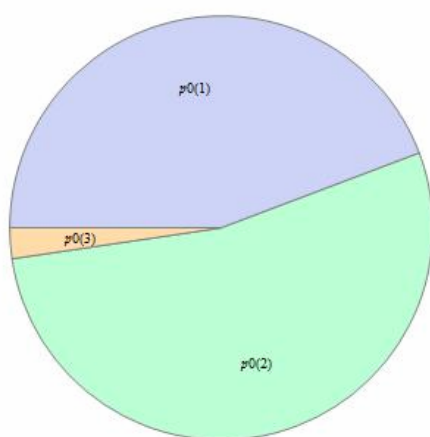
*Zdroj: vlastní zpracování, data ČSÚ, 2013*

Statistická data týkající se segmentace trhu dle typu SIM karty jsou dostupná pouze za rok 2012, proto je odhadován rok 2013. Předpokládáme tedy vyšší přesun potenciálních

zákazníků k prepaid SIM kartám díky nástupu virtuálních operátorů. Dále ale předpokládáme pokračující trend odchodu zákazníků z prepaid k postpaid SIM kartám. Celkové hodnoty volných zákazníků za rok 2012 a 2013 jsou totožné, což vyplývá ze statistiky ČSÚ.

Statistiky ČSÚ také využijeme pro výpočet současného rozdělení trhu dle této segmentace a odvodíme počáteční vektor nepodmíněných pravděpodobností a jeho grafické vyjádření,  $p_0 = \{0.4425, 0.5343, 0.0232\}$ .

**Graf 33: Současné rozdělení trhu - var. F**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

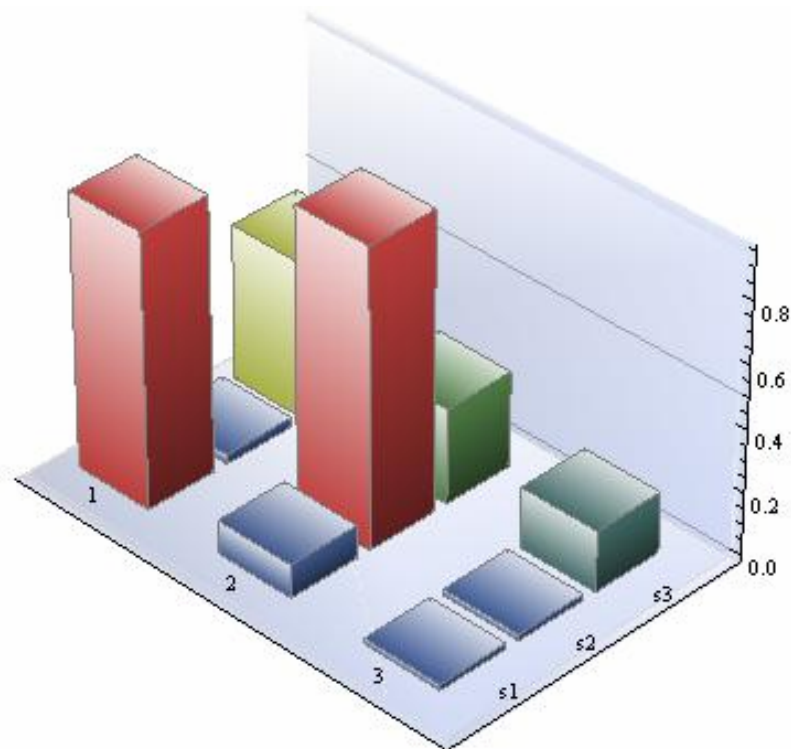
Z počátečního vektoru nepodmíněných pravděpodobností je patrné, že v současné době (rok 2012) prepaid SIM karty využívá přibližně 44,25 % ze všech zákazníků využívajících mobilní služby a zbylých 53,43 % zákazníků je smluvně vázáno s mobilními operátory.

Dále vypočteme pravděpodobnosti přechodů na základě uvedených dat:

$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} & \{0.8750, & 0.106, & 0.019\}, \\ & \{0.03, & 0.95, & 0.02\}, \\ & \{0.5, & 0.305, & 0.195\}. \end{matrix}$$

Vysoká pravděpodobnost téměř 95 % setrvání zákazníků u postpaid SIM karet značí vázanost zákazníků většinou ročními smlouvami. Vysoká hodnota 50 % značí získání potenciální zákazníků virtuálními operátory, kteří nabízejí levné a dostupné služby pro doposud nerozhodnuté osoby. Tyto skutečnosti vhodně zobrazuje graf 34.

**Graf 34: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. F**

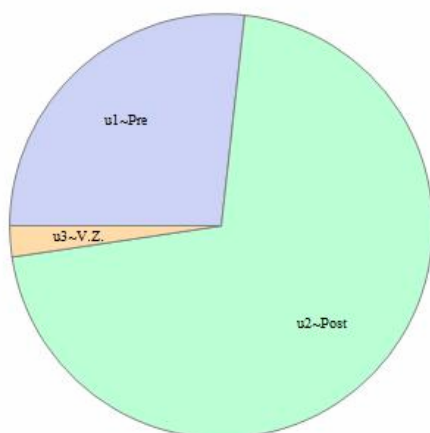


*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Výpočet aparátem Markovových řetězců nabízí stacionární rozdělení trhu, kde přibližně čtvrtina trhu (26,7 %) v dlouhém období připadá na prepaid SIM karty. Zbytek trhu zaujmou postpaid SIM karty (70,9 %), viz graf 35. V těchto výsledcích se příliš neprojevil úbytek potenciálních zákazníků, zejména ze zmíněného důvodu, kdy statistika ČSÚ mezi roky 2012 a 2013 nezaznamenává pokles.

$$u = \{0.2676, 0.709, 0.0234\}$$

**Graf 35: Stacionární rozdělení trhu - var. F**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014*

Dynamiku změn v průběhu času zobrazíme pouze z pohledu typu SIM karty (bez potenciálních zákazníků) a vidíme tak přibližně lineární trend (viz graf 36) stejně jako v datech o vývoji této segmentace (viz graf 3).

Rozdělení v jednotlivých krocích  $p_n$ ,  $n = 1 - 5$  kroků

krok 0 ..  $p_0 = \{0.452992, 0.547008, 0.023798\}$

krok 1 ..  $p_1 = \{0.425043, 0.574957, 0.023798\}$

krok 2 ..  $p_2 = \{0.401441, 0.598532, 0.0238251\}$

krok 3 ..  $p_3 = \{0.381523, 0.618422, 0.0238528\}$

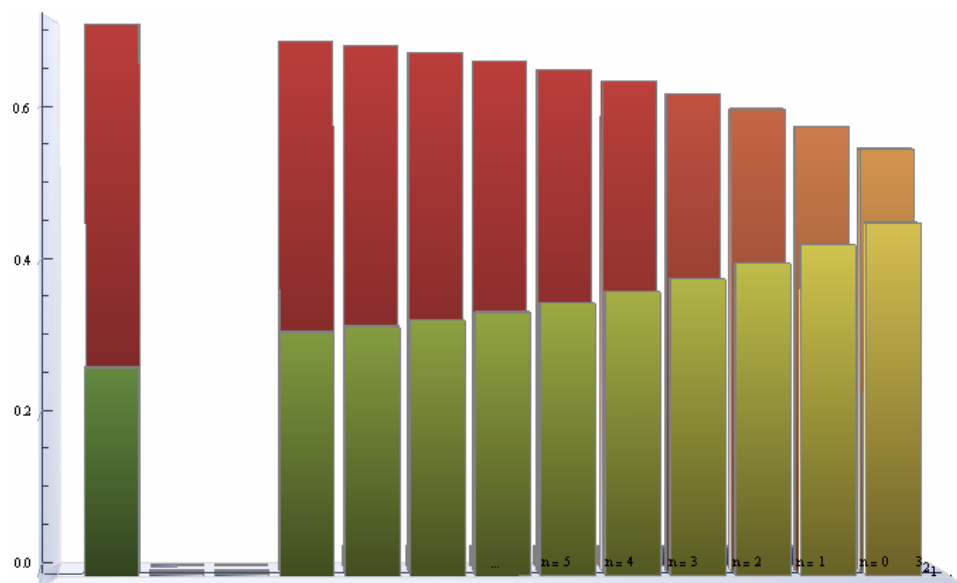
krok 4 ..  $p_4 = \{0.364715, 0.635206, 0.023877\}$

krok 5 ..  $p_5 = \{0.350533, 0.649367, 0.0238976\}$

krok n.:  $p_n = u = \{0.26756, 0.708989, 0.0234508\}$



**Graf 36: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. F**



Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, 2014

Aparátem Markovových řetězců lze odvodit totožný trend jako ze statistiky ČSÚ. Nicméně je obtížné odhadnout, jak na vývojový trend zapůsobí nástup virtuálních operátorů, kteří nabízejí ve velké většině prepaid SIM karty.

## 8. Shrnutí a porovnání dosažených výstupů

Na základě dostupných dat ze statistik ČSÚ a dat mobilních operátorů bylo dosaženo výsledků pro šest variant rozdělení tržních podílů na mobilním trhu. Výpočty poskytly očekávané výsledky. Pro porovnání výsledků využijeme trendovou křivku časové řady.

ČSÚ nabízí seskupená data mobilních operátorů o vývoji počtů jejich zákazníků za období 2000 - 2013 (viz tabulka 3, liché roky v období 2001 - 2009 jsou pro stanovení křivky dopočteny meziročními průměry). Jak bylo zmíněno v části implementace výpočtů v softwaru Mathematica (viz kap. 6.5), dle dostupných dat lze předpokládat logistický trend ve tvaru (R. Hindls, 2007, s. 276):

$$x = \frac{\gamma}{1 + \alpha\beta^t}. \quad (8.1)$$

Tento trend je zvolen zejména na základě vývoje dat (viz graf 2) a podle charakteru dat předpokládáme jisté nasycení, jelikož trh mobilních operátorů, jakožto každý trh, má omezenou kapacitu. Jednotlivé roky časové řady jsou pro výpočet znormovány, tj. rok 2000 je reprezentován jako  $t = 1$ .

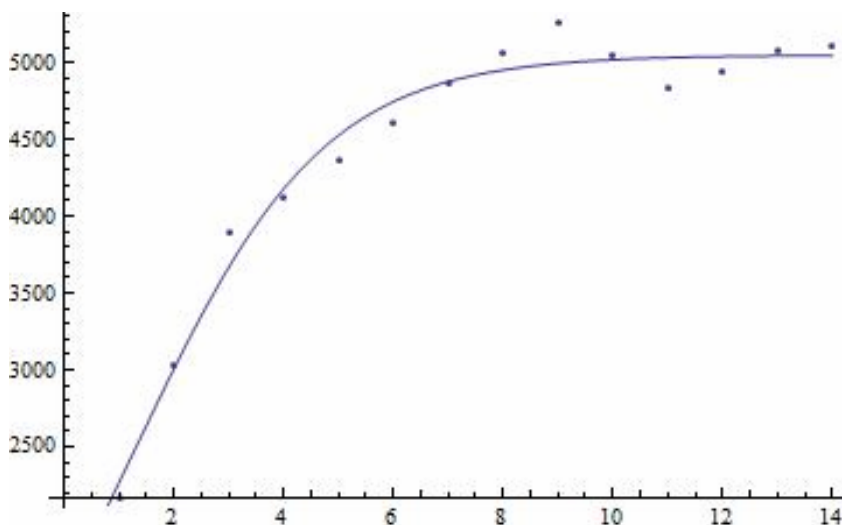
První varianta A - základní se zabývá rozdělením trhu pouze mezi tři současné mobilní operátory na českém trhu. Bylo odvozeno, že v současné době je trh téměř nasycen a mobilní operátoři mají dostatečnou schopnost si udržovat své zákazníky. Pokud budeme vycházet ze současné celkové kapacity trhu pro variantu A, která činí 14 291 tis. zákazníků, tak v dlouhém období dle této varianty dosáhne Telefónica O2 CZ 4 391 tis. zákazníků, T-Mobile CZ 5 952 tis. zákazníků a Vodafone CZ 3 948 tis. zákazníků.

Pokud variantu A porovnáme se trendovou křivkou, dostáváme částečně rozdílné výsledky. Dle navrhnutého předpisu trendu (8.1) a dostupné časové řady vychází trendová křivka (viz graf 37) pro společnost Telefónica O2 CZ ve tvaru

$$y = \frac{5049,15}{1 + 2,21882 * 0,553553^t}$$

Pokud pomocí této křivky provedeme předpověď na dlouhé období, získáme hodnotu 5 049 tis. zákazníků.

**Graf 37: Trendová křivka Telefónica O2 CZ**



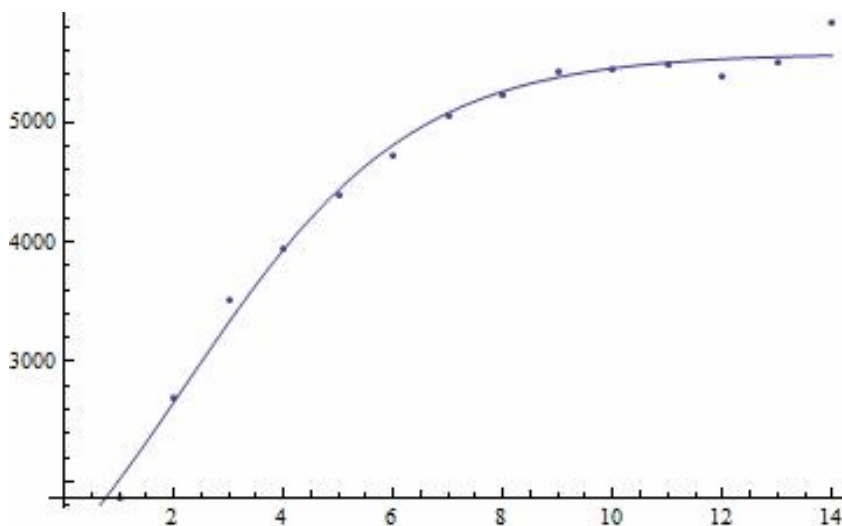
Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, data ČSÚ, 2014

Stejný postup zopakujeme pro odvození trendové křivky pro společnost T-Mobile CZ, která tak vychází ve tvaru

$$y = \frac{5578,77}{1 + 2,88274 * 0,616905^t}$$

Z grafu 38 je patrné, že v posledních letech podíl společnosti T-Mobile CZ narůstá nad trendovou křivku a v dlouhém období bude pravděpodobně vyšší než předpovídaných 5 579 tis. zákazníků.

**Graf 38: Trendová křivka T-Mobile CZ**



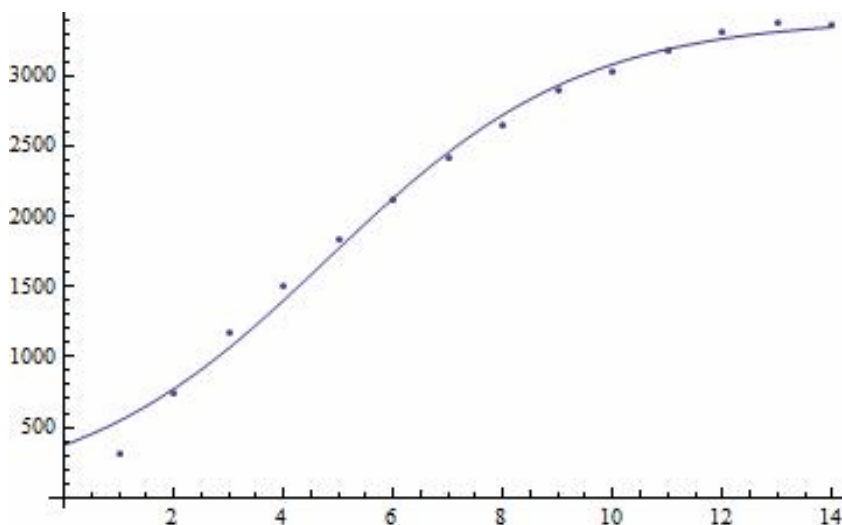
*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, data ČSÚ, 2014*

Pro společnost Vodafone CZ odpovídající logistická křivka dle zvoleného trendu vychází ve tvaru

$$y = \frac{3407,22}{1 + 8,14962 * 0,647274^t}$$

a dle grafu 39 křivka velmi dobře koresponduje s naměřenými daty. Předpovídaný počet zákazníků dle křivky je pak 3 407 tisíc zákazníků.

**Graf 39: Trendová křivka Vodafone CZ**



*Zdroj: vlastní zpracování v sw Mathematica, data ČSÚ, 2014*

Varianta B předpokládala úspěšnou marketingovou strategii společnosti Vodafone CZ. Jedná se tedy o simulaci situace, kdy Vodafone CZ jakožto mobilní operátor s nejnižším podílem na trhu získá v dlouhém období lepší postavení. Na úkor zbývajících dvou mobilních operátorů může při takovéto strategii získat 4 714 tis. zákazníků, Telefónica O2 CZ pak 4 242 tis. zákazníků a T-Mobile CZ 5 335 tis. zákazníků. Tato varianta se více vzdaluje od hodnot vyvozených z analýzy trendu časové řady (viz tabulka 10), jelikož není možné na základě zvoleného trendu uvažovat prudkou změnu ve vývoji Vodafone CZ díky úspěšné marketingové strategii.

Při vstupu nového hráče na trh (var. C) bylo hodnoceno, jak působí účinnost marketingové strategie na tvorbu stabilní pozice na trhu. Bylo vyvozeno, že záleží zejména na schopnosti nově vstupujícího operátora získávat si zákazníky od konkurence a posléze schopnost si je udržet. Varianta se odvíjela od tří spekulativních scénářů, proto není s trendovou křivkou porovnána.

Varianta D již zahrnuje volné potenciální zákazníky a rozšiřuje tak celkovou kapacitu trhu na 14 635 tis. zákazníků. Dle výpočtů pomocí vyvedeného Markovova modelu Telefónica O2 CZ v dlouhém období bude poskytovat služby 4 797 tis. zákazníkům. T-Mobile CZ získá 5 926 tis. zákazníků a Vodafone CZ bude využívat přibližně

3 673 tis. zákazníků. Zhruba 250 tis. zákazníků stále zůstane mimo trh. Tyto výsledky jsou trendové křivce velmi blízko (viz tabulka 10).

Jako nejpravděpodobnější varianta rozdělení tržních podílů v dlouhém období byla uvažována varianta E, která v sobě zahrnovala navíc virtuální operátory v souhrnu jako dalšího hráče na trhu. Tím se rozšířila kapacita trhu na 15 319 tis. všech zákazníků (i potenciálních). Dle vypočtených stacionárních tržních podílů Telefónica O2 CZ získá 4 244 tis. zákazníků, T-Mobile CZ pak 5 578 tis. zákazníků a Vodafone CZ 3 693 tis. zákazníků. Zbývajících 1 546 tis. zákazníků připadá na virtuální operátory a opět přibližně 250 tis. zůstává mimo trh. Varianta není příliš srovnatelná s výsledky předpovědi dle trendové křivky, jelikož časová řada ČSÚ zatím neobsahuje data o virtuálních operátorech, nicméně nárůst virtuálních operátorů se v našem případě projevil na úkor Telefónica O2 CZ.

Při porovnání výpočtů získaných pomocí Markovových řetězců a pomocí trendové křivky zjistíme rozdíly v celkových počtech zákazníků u jednotlivých mobilních operátorů, viz tabulka 10. Rozdílné výsledky jsou způsobené zejména tím, že například varianty A a B neuvažují potenciální volné zákazníky. Neuvažujeme změny v technologiích, které mohou vyvolat nárůst celkové kapacity trhu. Stejný efekt má nástup virtuálních operátorů, který ve statistice ČSÚ není zachycen. Rovněž má jistý vliv simulace dat marketingového průzkumu. Nicméně varianty, kromě B, která předpokládá úspěšnou marketingovou strategii Vodafone CZ, vyvozují stejné pořadí společností na trhu v dlouhém období.

**Tabulka 10: Porovnání výsledků s trendovou křivkou I (v tis.)**

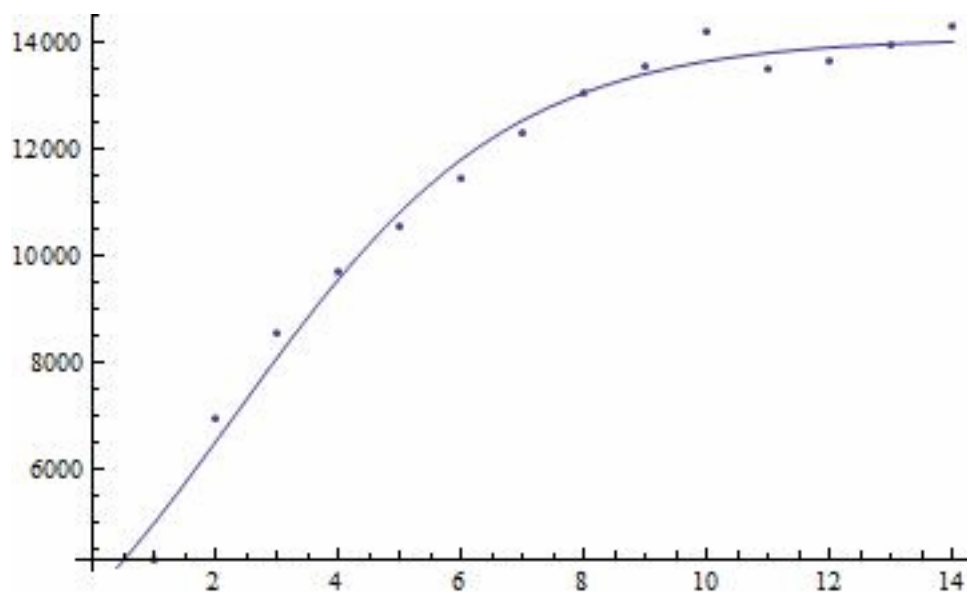
	<b>Trendová křivka</b>	<b>Varianta A</b>	<b>Varianta B</b>	<b>Varianta D</b>	<b>Varianta E</b>
<b>Telefónica O2 CZ</b>	<b>5 049</b>	4 391	4 242	4 797	4 244
<b>T-Mobile CZ</b>	<b>5 579</b>	5 952	5 335	5 926	5 578
<b>Vodafone CZ</b>	<b>3 407</b>	3 948	4 714	3 673	3 693
<b>Virtuální operátoři</b>	-	-	-	-	1 546
<b>Volní zákazníci</b>	-	-	-	239	258
<b>Celkem</b>	<b>14 035</b>	<b>14 291</b>	<b>14 291</b>	<b>14 635</b>	<b>15 319</b>

*Zdroj: vlastní zpracování, 2014*

Dále se nabízí rozpočtení dosažených tržních podílů na základě předpovědi celkového počtu zákazníků při nasycení trhu podle trendové křivky odvozené dle dat MNO (viz tabulka 3). Tato křivka má níže uvedený tvar a spolu s daty je vykreslena na grafu 40.

$$y = \frac{14088,1}{1 + 2,84374 * 0,63826^t}$$

**Graf 40: Trendová křivka celkové kapacity trhu**



*Zdroj: vlastní zpracování, data MNO, 2014*

Výsledné hodnoty, které jsou vypočteny roznásobením tržních podílů a celkového počtu zákazníků dle trendové křivky, uvádíme v tabulce 11. Tyto porovnání nabízejí přesnější výsledky, jelikož uvažují kapacitu trhu odpovídající nasycení 14 088 tis. zákazníků.

**Tabulka 11: Porovnání výsledků s trendovou křivkou II (v tis.)**

	Trendová křivka	Varianta A	Varianta B	Varianta D	Varianta E
<b>Telefónica O2 CZ</b>	<b>5 049</b>	4 327	4 181	4 617	3 902
<b>T-Mobile CZ</b>	<b>5 579</b>	5 868	5 259	5 704	5 130
<b>Vodafone CZ</b>	<b>3 407</b>	3 893	4 648	3 536	3 396
<b>Virtuální operátoři</b>	-	-	-	-	1 422
<b>Volní zákazníci</b>	-	-	-	231	238
<b>Celkem</b>	<b>14 088</b>	<b>14 088</b>	<b>14 088</b>	<b>14 088</b>	<b>14 088</b>

*Zdroj: vlastní zpracování, 2014*

V poslední analyzované variantě týkající se segmentace trhu dle typu SIM karet bylo pomocí Markovových řetězců dosaženo obdobného lineárního trendu jako v datech (viz graf 3). Výpočty s využitím trendové křivky o celkovém počtu zákazníků nabízejí rozdělení trhu v dlouhém období, přibližně 3 770 tis. zákazníků využívajících prepaid SIM karty, 9 988 tis. zákazníků využívajících postpaid SIM karty a 331 tis. osob mimo trh. Varianta je velmi těžko predikovatelná z důvodu nedávného nástupu virtuálních operátorů, kteří rozšiřují nabídku prepaid služeb.

## 9. Závěrečné zhodnocení cílů

Trh mobilních služeb v České republice je vysoce konkurenční prostředí a rozdělení tržních podílů mezi jednotlivé mobilní operátory lze označit za velmi stabilní. V současné době jsou mobilní služby zcela rozšířené a trh je prakticky nasycen, pouze v několika segmentech zbývá určitý počet potenciálních zákazníků pro cílení marketingových strategií. Na několika variantách budoucího vývoje mobilního trhu bylo posouzeno rozdělení tržních podílů v dlouhém období. Pravděpodobně nedojde ke změnám pozic jednotlivých mobilních operátorů ani při dalším rozvoji virtuálních operátorů, pouze dojde ke zmenšení podílů současných síťových operátorů. Situaci může ovlivnit vstup nového operátora, kterému se podaří marketingově zaujmout zákazníky, což je však dlouhodobější výhled, jelikož v nedávné aukci kmitočtů mobilní sítě ohledně nové technologie LTE se prosadili pouze současní mobilní operátoři.

V takto vysoce konkurenčním prostředí, kde je pro zákazníka přechod ke konkurenci v současné době prakticky bez nákladů, jsou klíčové kvalitní marketingové strategie. Úspěch těchto strategií může vylepšit pozici na trhu vybudováním loajálnějších zákazníků či získáním nových od konkurence. Použité modely tak pomocí simulace potvrzují důležitost marketingových strategií při formování tržních podílů v dlouhém období.

Marketingový průzkum pro potřeby Markovových řetězců je velice náročný. Je nutné rozlišit několik variant vývoje a odvodit tak různé pravděpodobnosti přechodů zákazníků například na základě dotazníků. Dotazníková šetření vyžadují zpravidla konkretizaci zamýšlených marketingových nabídek mobilních operátorů, které jsou součástí strategie, aby se zákazník dokázal rozhodnout, zda by uvažoval o přechodu k jinému mobilnímu operátorovi. Také počet respondentů musí být velmi vysoký, aby se poté ve statistickém zpracování projevily odpovídající pravděpodobnosti přechodů. Pokud mobilní operátor spustí marketingovou akci, musí při sledování přechodů zákazníků brát v potaz, že marketingové akce působí s určitým odstupem času a analýza se tak stává časově náročnější.



Analýza tržních podílů pomocí Markovových řetězců nabízí velmi uspokojivé posouzení formování tržních podílů, ovšem za cenu nákladných marketingových průzkumů. Tato analýza však může být využita jako podklad pro rozhodování o zahájení marketingových akcí a jedná se o vhodnější nástroj než pouze analýza trendu časové řady. Oproti trendové analýze umožňuje vyhodnocovat různé varianty, nikoliv jen predikovat vývoj na základě historických dat a zvolené trendové křivky, jejíž volba nemusí být vždy vhodná, přestože historickým datům odpovídá. Příkladem může být současný „boom“ virtuálních operátorů, který prozatím v datech není zachycen a bude jistě mít vliv na formování tržních podílů.

Software Mathematica ve verzi 9 nabízí jak grafickou, tak i výpočetní podporu Markovových procesů. Velmi tak usnadňuje práci s těmito stochastickými modely a není nutné implementovat výpočty zahrnující složité operace s maticemi a vektory. Konkrétně pro Markovovy řetězce prakticky stačí stanovit současné rozdělení trhu a podmíněné pravděpodobnosti přechodů, poté lze pomocí funkcí softwaru určit stacionární rozdělení trhu. Vyvinutý program nabízí balík obsahující vlastní definované funkce a je tak při změně dat okamžitě použitelný na další trhy.

Tím se nabízejí možnosti pro další analýzy a výzkum. Funkce naprogramovaného balíku společně s funkcemi softwaru Mathematica je možné využít pro analýzu dalších zejména oligopolních trhů, například konkrétně hobbymarkety v Plzni (Baumax, Obi, Hornbach, Bauhaus) či pro analýzu tržní pozice určitého produktu u bank, pojišťoven, apod. Nabízí se dále možnost ověřit simulované výsledky na reálném marketingovém průzkumu, který je však velmi nákladný a rozsáhlý. Pro ucelení teoretického základu Markovových řetězců kapitola 1.3.6 uvádí do Markovských rozhodovacích procesů. V případě dostupnosti dat o nákladech a výnosech z přechodů zákazníků by bylo možné v softwaru Mathematica implementovat výpočty pro stanovení středních hodnot celkových výnosů či nákladů z přechodů zákazníků za určité období. Software Mathematica ve verzi 9 nabízí plnou podporu pro všechny typy stochastických procesů a usnadňuje tak analýzy všech systémů založených na těchto procesech.

## 10. Seznam tabulek

Tabulka 1: Rozdělení stochastických procesů .....	16
Tabulka 2: Virtuální operátoři v ČR (v tis.) .....	34
Tabulka 3: Aktivní SIM karty podle operátorů k 31. 12. daného roku (v tis.) .....	35
Tabulka 4: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. A (v tis.) .....	49
Tabulka 5: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. B (v tis.) .....	53
Tabulka 6: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. C (v tis.) .....	58
Tabulka 7: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. D (v tis.) .....	65
Tabulka 8: Počty přechodů zákazníků mezi operátory - var. E (v tis.) .....	69
Tabulka 9: Počty přechodů zákazníků dle typu SIM karty - var. F (v tis.) .....	73
Tabulka 10: Porovnání výsledků s trendovou křivkou I (v tis.) .....	81
Tabulka 11: Porovnání výsledků s trendovou křivkou II (v tis.) .....	82

## 11. Seznam grafů

Graf 1: Aktivní SIM karty v ČR (v tis.) .....	29
Graf 2: Aktivní SIM karty podle operátorů k 31. 12. daného roku (v tis.) .....	30
Graf 3: Aktivní SIM karty podle typu (v tis.) .....	30
Graf 4: Jednotlivci používající mobilní telefon (16 a více let) .....	31
Graf 5: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. A .....	48
Graf 6: Současné rozdělení trhu - var. A .....	49
Graf 7: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. A .....	50
Graf 8: Stacionární rozdělení trhu - var. A .....	51
Graf 9: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. A .....	52
Graf 10: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. B .....	54
Graf 11: Stacionární rozdělení trhu - var. B .....	54
Graf 12: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. B .....	55
Graf 13: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. C .....	56
Graf 14: Současné rozdělení trhu - var. C .....	58
Graf 15: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C1 .....	59
Graf 16: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C2 .....	60
Graf 17: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. C3 .....	61
Graf 18: Stacionární rozdělení trhu - var. C1 .....	61
Graf 19: Stacionární rozdělení trhu - var. C2 .....	62
Graf 20: Stacionární rozdělení trhu - var. C3 .....	62
Graf 21: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. C .....	63
Graf 22: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. D .....	64
Graf 23: Současné rozdělení trhu - var. D .....	65
Graf 24: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. D .....	66
Graf 25: Stacionární rozdělení trhu - var. D .....	67
Graf 26: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. D .....	67
Graf 27: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. E .....	68
Graf 28: Současné rozdělení trhu - var. E .....	69
Graf 29: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. E .....	70

Graf 30: Stacionární rozdělení trhu - var. E .....	71
Graf 31: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. E .....	72
Graf 32: Graf přechodů v Markovově řetězci - var. F.....	73
Graf 33: Současné rozdělení trhu - var. F.....	74
Graf 34: Matice podmíněných pravděpodobností přechodů - var. F .....	75
Graf 35: Stacionární rozdělení trhu - var. F.....	76
Graf 36: Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích - var. F .....	77
Graf 37: Trendová křivka Telefonica O2 CZ .....	78
Graf 38: Trendová křivka T-Mobile CZ.....	79
Graf 39: Trendová křivka Vodafone CZ .....	80
Graf 40: Trendová křivka celkové kapacity trhu .....	82

## 12. Seznam obrázků

Obrázek 1: Dvoustavový Markovův řetězec .....	17
---	----

## 13. Seznam zdrojů

### 13.1 Literatura

BOLCH, Gunter. *Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications*. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2006, 878 s. ISBN 04-715-6525-3.

HINDLS, Richard, Stanislava HRONOVÁ a Jan SEGER. *Statistika pro ekonomy*. 8. vydání Praha: Professional Publishing, 2007, 415 s. ISBN 978-80-86946-43-6.

KOŘENÁŘ, Václav. *Stochastické procesy*. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1998, 119 s. ISBN 80-7079-813-0.

KOTLER, Philip. *Moderní marketing: 4. evropské vydání*. Praha: Grada, 2007, 1041 s. ISBN 978-80-247-1545-2.

KOZEL, Roman. *Moderní marketingový výzkum: nové trendy, kvantitativní a kvalitativní metody a techniky, průběh a organizace, aplikace v praxi, přínosy a možnosti*. 1. vyd. Grada, 2006, 277 s. ISBN 80-247-0966-X.

LUKÁŠ, Ladislav. *Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy*. Praha: ČMT, 2009, 135 s. Lanna. ISBN 978-80-200-1704-8.

ROSS, Sheldon M. *Introduction to probability models*. 10th ed. Boston: Academic Press, c2010, xv, 784 s. ISBN 01-237-5686-3.

## 13.2 Elektronické zdroje

AMUE GONEWA JOHN, UMOH GODWIN IKPE a NGAAGE K.T. Dynamic Behavior in Customers' Switching and Market Share Analysis: The Markov Model Perspectives. *Global Journal of Management and Business* [online]. US: Global Journals Inc., 2012 [cit. 2014-02-23]. roč. 12, č. 17. ISSN: 2249 - 4588. Dostupné na www: <<http://journalofbusiness.org/index.php/GJMBR/article/view/808/735>>

ANDERSON, T. W. a Leo A. GOODMAN. Statistical Inference about Markov Chains. *The Annals of Mathematical Statistics* [online]. 1956 [cit. 2014-02-22]. roč. 28, č. 1, s. 89-110. ISSN 0003-4851. DOI: 10.1214/aoms/1177707039. Dostupné na www: <<http://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177707039>>

CRAIG, Bruce A. a Peter P SENDI. Estimating the Transition Matrix of A homogeneous Markov Chain. In: [online]. 1998 [cit. 2014-02-24]. Dostupné na www: <[http://www.stat.purdue.edu/research/technical\\_reports/pdfs/1998/tr98-12.pdf](http://www.stat.purdue.edu/research/technical_reports/pdfs/1998/tr98-12.pdf)>

Český telekomunikační úřad otevře svá data. *Český telekomunikační úřad* [online]. [cit. 2014-02-21]. 2013c Dostupné na www: <<http://www.ctu.cz/aktuality/tiskove-zpravy.html?action=detail&ArticleId=10859>>

MATURA, Jan a Pavel P. NOVOTNÝ. Někteří virtuálové slaví, další jsou na zavření. Trh je rozdělený. *Mobil.idnes.cz* [online]. 2014 [cit. 2014-02-22]. Dostupné na www: <[http://mobil.idnes.cz/trh-virtualni-operatori-08v-/mobilni-operatori.aspx?c=A140212\\_123812\\_mobilni-operatori\\_jm](http://mobil.idnes.cz/trh-virtualni-operatori-08v-/mobilni-operatori.aspx?c=A140212_123812_mobilni-operatori_jm)>

Měsíční monitorovací zpráva: prosinec 2013. *Český telekomunikační úřad*. [online]. 2013b [cit. 2014-02-20]. Dostupné na www: <[http://www.ctu.cz/cs/download/monitorovaci\\_zpravy/monitorovaci\\_zprava\\_12-2013\\_prosinec.pdf](http://www.ctu.cz/cs/download/monitorovaci_zpravy/monitorovaci_zprava_12-2013_prosinec.pdf)>

O společnosti. *Vodafone CZ a.s.* [online]. 2014 [cit. 2014-02-20]. Dostupné na www: <<http://www.vodafone.cz/o-vodafone/>>

Pololetní zpráva spol. Telefónica CZ a.s. 2013. *Telefónica O2 CZ a.s.* [online]. 2013 [cit. 2014-02-19]. Dostupné na [www: <http://www.telefonica.cz/file\\_conver/321637/Pololetni\\_zprava\\_CZ.pdf>](http://www.telefonica.cz/file_conver/321637/Pololetni_zprava_CZ.pdf)

POSPÍŠIL, Aleš. Není virtuál jako virtuál. V čem je rozdíl?. *Mobilmania.cz* [online]. 2013 [cit. 2014-02-20]. Dostupné na [www: <http://www.mobilmania.cz/clanky/neni-virtual-jako-virtual-v-cem-je-rozdil/sc-3-a-1323682/default.aspx>](http://www.mobilmania.cz/clanky/neni-virtual-jako-virtual-v-cem-je-rozdil/sc-3-a-1323682/default.aspx)

Rok 2013 byl rokem růstu mobilního internetu. In: *Tiskové centrum Telefónica O2 CZ a.s.* [online]. 2014 [cit. 2014-02-26]. Dostupné na [www: <http://www.telefonica.cz/tiskove-zpravy/340515-Rok\\_2013\\_byl\\_rokem\\_rustu\\_mobilniho\\_internetu.html>](http://www.telefonica.cz/tiskove-zpravy/340515-Rok_2013_byl_rokem_rustu_mobilniho_internetu.html)

SHIFRIN, Leonid. *Mathematica programming: an advanced introduction* [online]. 2008 [cit. 2014-02-18]. 408 s. Dostupné na [www: <http://www.mathprogramming-intro.org/download/MathProgrammingIntro.pdf>](http://www.mathprogramming-intro.org/download/MathProgrammingIntro.pdf)

Telekomunikační a informační infrastruktura: Mobilní telefonní síť. *Český statistický úřad.* [online]. 2014 [cit. 2014-02-19]. Dostupné na [www: <http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mobilni\\_telefonni\\_sit\\_telekomunikacni\\_a\\_internetova\\_infrastruktura/\\$File/2013\\_mobil\\_rev2.pdf>](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mobilni_telefonni_sit_telekomunikacni_a_internetova_infrastruktura/$File/2013_mobil_rev2.pdf)

T-Mobile: 2013 - Rok plný změn. *Tiskové zprávy T-Mobile CZ* [online]. 2014 [cit. 2014-03-06]. Dostupné na [www: <http://t-press.cz/cs/tiskove-materialy/tiskove-zpravy-t-mobile/t-mobile-2013-rok-plny-zmen.html>](http://t-press.cz/cs/tiskove-materialy/tiskove-zpravy-t-mobile/t-mobile-2013-rok-plny-zmen.html)

USLU, AYPAR a TUNCAY CAM. Analysis of Brand Loyalty with Markov Chains. [online]. 2014 [cit. 2014-02-17]. Dostupné na [www: <http://joanes.opf.slu.cz/vvr/akce/turecko/pdf/Uslu.pdf>](http://joanes.opf.slu.cz/vvr/akce/turecko/pdf/Uslu.pdf)

Zpráva o vývoji trhu elektronických komunikací se zaměřením na rok 2012. *Český telekomunikační úřad.* [online]. 2013a [cit. 2014-02-18]. Dostupné na [www: <http://www.ctu.cz/cs/download/statisticke\\_udaje/rok\\_2013/zprava\\_vyvoj\\_trhu\\_ek\\_2012.pdf>](http://www.ctu.cz/cs/download/statisticke_udaje/rok_2013/zprava_vyvoj_trhu_ek_2012.pdf)

Výroční zpráva spol. T-Mobile CZ a.s. za rok 2012. *T-Mobile CZ a.s.* [online]. 2013 [cit. 2014-02-19]. Dostupné na [www: <https://www.t-mobile.cz/dcpublic/Annual\\_report\\_2012\\_CZ.pdf>](https://www.t-mobile.cz/dcpublic/Annual_report_2012_CZ.pdf)

Výroční zpráva spol. Vodafone CZ a.s. za rok 2012. *Vodafone CZ a.s.* [online]. 2013 [cit. 2014-02-19]. Dostupné na [www: <http://www.vodafone.cz/\\_sys\\_/FileStorage/download/1/603/vyrocni-zprava-3132013.pdf>](http://www.vodafone.cz/_sys_/FileStorage/download/1/603/vyrocni-zprava-3132013.pdf)

Wolfram Mathematica Documentation Center. *Wolfram* [online]. 2014 [cit. 2014-03-19]. Dostupné na [www: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>](http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html)

## 14. Seznam příloh

Příloha A: Programový kód implementace v sw Mathematica

Příloha B: CD disk obsahující

datový soubor Dp1405\_RadlO\_K12N0204P\_data.xls

notebook soubor Dp1405\_RadlO\_K12N0204P\_math.nb

package soubor Dp1405\_RadlO\_K12N0204P\_package.m



## Příloha A : Programový kód implementace v sw Mathematica

```
(*Vyprázdnění všech proměnných v sw *)
Clear["Global`*"];
(* Import dat z *.xls souboru MS Excel *)
dataImport = Import[FileNameJoin[{NotebookDirectory[], "data",
  "Dp1405_RadlO_K12N0204P_data.xls"}]];
package = Import[FileNameJoin[{NotebookDirectory[],
  "Dp1405_RadlO_K12N0204P_package.m"}]];
```

### **Varianta A – základní**

```
(* Získání dat varianty *)
initVars[3, 2]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"O2", "T-M", "V"}, DMP,
  GraphLayout -> "LayeredDrawing", PlotLabel -> "Graf přechodů v Markovově řetězci"]

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
  pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů *)
calcInitVmatP[p0];
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic =
  PieChart[p0, PlotLabel -> "Vizualizace p0", ChartLabels -> {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout -> "Grid",
  PlotLabel -> "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (3x3)",
  ChartLabels -> {"s1", "s2", "s3"}, Range[1, 3]},
  Ticks -> {None, None, Automatic}, BarSpacing -> 1,
  ColorFunction -> "DarkRainbow",
  ViewPoint -> {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic = PieChart[u, PlotLabel -> "Limitní rozdělení trhu mezi O2, T-M a V",
  ChartLabels -> {"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V"}]

(*Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic]
```

### **Varianta B – marketingová strategie Vodafone**

```
(* Získání dat varianty *)
initVars[3, 3]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"O2", "T-M", "V"}, DMP,
  GraphLayout -> "LayeredDrawing", PlotLabel -> "Graf přechodů v Markovově řetězci"]
```

```

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
   pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů*)
calcInitVmatP[p0];
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic =
  PieChart[p0, PlotLabel → "Vizualizace p0", ChartLabels → {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout → "Grid",
  PlotLabel → "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (3x3)",
  ChartLabels → {"s1", "s2", "s3"}, Range[1, 3], Ticks → {None, None, Automatic},
  BarSpacing → 1,
  ColorFunction → "DarkRainbow",
  ViewPoint → {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic = PieChart[u, PlotLabel → "Limitní rozdělení trhu mezi O2, T-M a V",
  ChartLabels → {"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V"}]

(*Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic] (* graphMarkov, initVPic, matrixPic, limitPic, dynamic *)

```

## Varianta C – nový operátor

```

(* Získání dat varianty *)
initVars[4, 4]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"O2", "T-M", "V", "N.O."}, DMP,
  GraphLayout → "LayeredDrawing", PlotLabel → "Graf přechodů v Markovově řetězci"]

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
   pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů*)
(* newProviderScenario[0.85]; optimistický scénář *)
(* newProviderScenario[0.75]; konzervativní scénář *)
newProviderScenario[p0, 0.35]; (* pesimistický scénář *)

Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic = PieChart[p0, PlotLabel → "Vizualizace p0",
  ChartLabels → {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)", "p0(4)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout → "Grid",
  PlotLabel → "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (4x4)",
  ChartLabels → {"s1", "s2", "s3", "s4"}, Range[1, 4],
  Ticks → {None, None, Automatic},
  BarSpacing → 1,
  ColorFunction → "DarkRainbow",
  ViewPoint → {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic = PieChart[u, PlotLabel → "Limitní rozdělení trhu mezi O2, T-M, V a N.O.",
  ChartLabels → {"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V", "u4~N.O."}]

```

```
(*Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic] (* graphMarkov, initVPic, matrixPic, limitPic,dynamic *)
```

## Varianta D – volní zákazníci

```
(* Získání dat varianty *)
initVars[4, 5]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"O2", "T-M", "V", "V.Z."}, DMP,
  GraphLayout -> "LayeredDrawing", PlotLabel -> "Graf přechodů v Markovově řetězci"]

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
  pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů*)
calcInitVmatP[p0];
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic = PieChart[p0, PlotLabel -> "Vizualizace p0",
  ChartLabels -> {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)", "p0(4)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout -> "Grid",
  PlotLabel -> "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (4x4)",
  ChartLabels -> {"s1", "s2", "s3", "s4"}, Range[1, 4]},
  Ticks -> {None, None, Automatic},
  BarSpacing -> 1,
  ColorFunction -> "DarkRainbow",
  ViewPoint -> {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic = PieChart[u, PlotLabel -> "Limitní rozdělení trhu mezi O2, T-M, V a V.Z.",
  ChartLabels -> {"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V", "u4~V.Z."}]

(* Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic] (* graphMarkov, initVPic, matrixPic, limitPic,dynamic *)
```

## Varianta E – virtuální operátoři

```
(* Získání dat varianty *)
initVars[5, 6]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"O2", "T-M", "V", "V.Z.", "V.O."}, DMP,
  GraphLayout -> "LayeredDrawing", PlotLabel -> "Graf přechodů v Markovově řetězci"]
```

```

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
   pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů*)
calcInitVmatP[p0];
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic = PieChart[p0, PlotLabel -> "Vizualizace p0",
  ChartLabels -> {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)", "p0(4)", "p0(5)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout -> "Grid",
  PlotLabel -> "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (5x5)",
  ChartLabels -> {"s1", "s2", "s3", "s4", "s5"}, Range[1, 5]},
  Ticks -> {None, None, Automatic},
  BarSpacing -> 1,
  ColorFunction -> "DarkRainbow",
  ViewPoint -> {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic =
  PieChart[u, PlotLabel -> "Limitní rozdělení trhu mezi O2, T-M, V, V.Z. a V.O.",
  ChartLabels -> {"u1~O2", "u2~T-M", "u3~V", "u4~V.Z.", "u5~V.O."}]

(* Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic] (* graphMarkov, initVPic, matrixPic, limitPic, dynamic *)

```

## Varianta F – typy SIM karet

```

(* Získání dat varianty *)
initVars[3, 7]

(* Graf Markovova řetězce *)
DMP = DiscreteMarkovProcess[p0, P];
graphMarkov = Graph[{"Pre", "Post", "V.Z."}, DMP,
  GraphLayout -> "LayeredDrawing", PlotLabel -> "Graf přechodů v Markovově řetězci"]

(* Výpočet a vizualizace počátečních nepodmíněných
   pravděpodobností a matice podmíněných pravděpodobností přechodů*)
calcInitVmatP[p0];
Print["Vektor počátečního rozdělení p0 ", Round[p0, 0.0001]]
initVPic =
  PieChart[p0, PlotLabel -> "Vizualizace p0", ChartLabels -> {"p0(1)", "p0(2)", "p0(3)"}]

Print["Matice podmíněných pravděpodobností přechodů P ",
  Round[P, 0.001] // MatrixForm]
matrixPic = BarChart3D[P, ChartLayout -> "Grid",
  PlotLabel -> "Matice podmíněných pravděpodobností přechodů (3x3)",
  ChartLabels -> {"s1", "s2", "s3"}, Range[1, 3]}, Ticks -> {None, None, Automatic},
  BarSpacing -> 1,
  ColorFunction -> "DarkRainbow",
  ViewPoint -> {5, -5, 5}]

(* Výpočet a vizualizace limitního chování modelu *)
calcLimitV[p0, P];
limitPic =
  PieChart[u, PlotLabel -> "Limitní rozdělení trhu mezi Prepaid, Postpaid a V.Z.",
  ChartLabels -> {"u1~Pre", "u2~Post", "u3~V.Z."}]

```

```
(* Vizualizace dynamiky chování *)
dynamic = vizualDynam[p0, P, u, 9]
exportJPG[dynamic] (* graphMarkov, initVPic, matrixPic, limitPic,dynamic *)
```

## **Trendová křivka**

```
initVars[13, 1]
data = Table[Subscript[n, k, 1], {k, 14}, {1, 2}];

(*data celkem (dle MNO) *)
For[h = 1, h < 15, h++,
  For[m = 1, m < 3, m++,
    If[m == 1, data[[h, m]] = h, data[[h, m]] = varTable[[5, h + 1]]]]]

(*data Telefónica O2 *)
For[h = 1, h < 15, h++,
  For[m = 1, m < 3, m++,
    If[m == 1, data[[h, m]] = h, data[[h, m]] = varTable[[2, h + 1]]]]]

(*data T-Mobile *)
For[h = 1, h < 15, h++,
  For[m = 1, m < 3, m++,
    If[m == 1, data[[h, m]] = h, data[[h, m]] = varTable[[3, h + 1]]]]]

(*data Vodafone *)
For[h = 1, h < 15, h++,
  For[m = 1, m < 3, m++,
    If[m == 1, data[[h, m]] = h, data[[h, m]] = varTable[[4, h + 1]]]]]

(* data // MatrixForm *)
fitPic = fitTrend[data]
exportJPG[fitPic]
```

```

(* Funkce inicializující proměnné a vypisuje datovou tabulku,
NumStates = počet stavů modelu, list = číslo listu,
kde je varianta uložena v *.xls A = 2, B = 3, ..., data ČSÚ a MNO = 1*)
initVars[NumStates_, list_] := Block[{s=NumStates, var=list},
  varTable = Table[Subscript[x,k,l],{k,3+s},{l,2+s}];
  (* varTable // MatrixForm *)
  T = Table[Subscript[n,k,l],{k,s},{l,s}];
  (* T // MatrixForm *)
  P = Table[Subscript[p,k,l],{k,s},{l,s}];
  (* P // MatrixForm *)
  p0 = {};
  For[i=1,i<s+1,i++,p0 = Append[p0,Subscript[p,i]]];

  For[i=1,i<s+4,i++,
    For[j=1,j<s+3,j++,varTable[[i,j]]=dataImport[[var,i+1,j]]];
  Print["Data varianty"];
  Grid[varTable, Alignment->Left,Frame->All]
];

(* Funkce pro výpočet počátečních nepodmíněných pravděpodobností
a matice podmíněných pravděpodobností přechodů, p0 = počáteční vektor *)
calcInitVmatP[p0_] := Block[{InitVec=p0},
  For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
    For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++,T[[h,m]]=varTable[[h+2,m+2]]];

  For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
    k=2;
    p0[[h]] = varTable[[h+2,k]]/varTable[[Count[InitVec,_]+3,k]];
    For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++,P[[h,m]]=T[[h,m]]/varTable[[h+2,k]]];
];

(* Funkce počítá stacionární rozdělení trhu pomocí funkcí sw Mathematica,
p0 = počáteční vektor, P = matice ppstí*)
calcLimitV[p0_,P_] := Block[{InitVec=p0, matP=P},
  MarkChain=DiscreteMarkovProcess[InitVec,matP];
  u = {};
  For[i=1,i<Count[InitVec,_]+1,i++,u = Append[u,
    Probability[x==i,x<StationaryDistribution[MarkChain]]];
  Print["Vektor limitního rozdělení u ",Round[u,0.0001]]
];

(* Funkce pro vizualizaci dynamiky průchodů mezi jednotlivými operátory,
p0 = počáteční vektor, P = matice ppstí, u = vektor limitního rozdělení,
step = počet kroků, které se zobrazí *)
vizualDynam[p0_,P_, u_, step_] := Block[{InitVec=p0, matP=P,lim =u, k = step},
  p1=InitVec;
  ArrayVec={p1};
  Do[(p2=p1.matP; ArrayVec=Append[ArrayVec,p2]; p1=p2),{k}];

  NullVec={};
  For[i=1,i<Count[InitVec,_]+1,i++, NullVec = Append[NullVec,0]];
  Do[ArrayVec=Append[ArrayVec,NullVec], {2}];
  ArrayVec=Append[ArrayVec,lim];

  Print["Řešení pro počáteční vektor p0 = ",InitVec,"\n
Vizualizace rozdělení v jednotlivých krocích pn, n = ",k - (k-1), " - ",k, " kroků"]
  For[m=1,m<=k+1,m++,

```

```

    p = {};
    For[i=1,i<Count[InitVec,_]+1,i++, p = Append[p ,ArrayVec[[m,i]]]];
    Print ["krok ",(m-1)," .:   p", (m-1)," = ", p];]

Print["krok  n.:   pn = u = ",lim];

dynPic = BarChart3D[ArrayVec,ChartLayout->"Grid",
    BarSpacing->1.5,
    ChartLabels->{"n = 0","n = 1","n = 2","n = 3","n = 4","n = 5", "...'}
    Range[1,5]},ColorFunction->"DarkRainbow",
    PlotLabel->"Dynamika rozdělení tržních podílů v jednotlivých krocích"
    Ticks->{None,None,Automatic},ImageSize->{750,600},
    ViewPoint->{2,-5,3}]
];

(* Funkce pro výpočet scénářů varianty C - nový operátor,
p0 = počáteční vektor, parametr percDiag = ppst, že si operátor udrží zákazníky *)
newProviderScenario[p0_, percDiag_]:=Block[{InitVec = p0, perc=percDiag},
    For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
        For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++, $\mathcal{P}[[h,m]]$ =varTable[[h+2,m+2]]]]

    For[h=1,h<Count[InitVec,_]+1,h++,
        k=Count[InitVec,_]-2;
        p0[[h]]=varTable[[h+2,k]]/varTable[[7,2]];
        For[m=1,m<Count[InitVec,_]+1,m++,
            If[varTable[[h+2,k]] ==0, $\mathcal{P}[[h,m]]$  = (1 - perc)/3,
                 $\mathcal{P}[[h,m]]$ = $\mathcal{T}[[h,m]]$ /varTable[[h+2,k]]]
            If[m ==4 && h ==m,  $\mathcal{P}[[h,m]]$  =perc,0 ]]]
];

(* Funkce nalezne a vykreslí trendovou křivku dle zadaných dat,
dataTable = datová tabulka časové řady *)
fitTrend[dataTable_]:=Block[{data=dataTable},
    fit=NonlinearModelFit[data, $\gamma/(1+\alpha * \beta ^t)$ ,{ $\alpha$  ,{ $\beta$ ,0.1},{ $\gamma$ ,Max[data[[All,2]]]}},t];
    fitPic = Show[ListPlot[data, PlotLabel->{Round [fit[100]] "tis. zákazníků
        bude mít vybraný operátor po nasycení trhu"}],Plot[fit[t],{t,0,14}]]
];

(* Funkce exportuje zadaný vstup do *.jpg a otevře v programu pro prohlížení obrázků,
name = název proměnné kde je uložena požadovaná vizualizace*)
exportJPG[name_]:=Block[{n=name},
    Export["visualization.jpg", n];
    SystemOpen["visualization.jpg"];
];

```

## Abstrakt

RÁDL, O. *Analýza tržních podílů mobilních operátorů v ČR s využitím sw Mathematica*. Diplomová práce. Plzeň: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni, 92 str., 2014

**Klíčová slova:** tržní podíly, mobilní operátoři v ČR, stochastické procesy, Markovovy řetězce, marketing, Wolfram Mathematica

Prezentovaná diplomová práce se zabývá problematikou tržních podílů mobilních operátorů v České republice s využitím softwaru Mathematica. Trh je modelován pomocí Markovových řetězců. V teoretické části jsou úvodem rozebrány stochastické procesy s důraznějším zaměřením na Markovovy řetězce. Dále je nastíněna metoda převodu dostupných dat do formy vyžadované pro Markovův model. Další kapitola teoretické části je také nastínění problematiky tržní segmentace a přehled současných majoritních mobilních operátorů v ČR. Součástí je samozřejmě stručné představení softwaru Mathematica. V praktické části jsou využita dostupná data Českého statistického úřadu a data, které uveřejňují mobilní operátoři. Z těchto dat jsou vyvedeny varianty s ohledem na různě pravděpodobné změny na trhu a následně je proveden jejich propočet spolu s vizualizací v softwaru Mathematica. Cílem práce je pomocí dat o současném stavu trhu vyvodit možné varianty budoucího rozložení tržních pozic mobilních operátorů v ČR a posouzení využitelnosti aparátu Markovových řetězců v problematice loajality a získávání zákazníků. Závěr práce obsahuje porovnání a vyhodnocení výsledků spolu s doporučením pro další výzkum.



## **Abstract**

RÁDL, O. *Market shares analysis of mobile services providers in the Czech Republic using sw Mathematica*. Diploma thesis. Pilsen: Faculty of Economics, University of West Bohemia, 92 pages, 2014

**Key words:** market shares, mobile services providers in Czech Republic, stochastic processes, Markov chains, marketing, Wolfram Mathematica

Presented diploma thesis deals with the issue of market shares of mobile services providers in the Czech Republic using software Mathematica. The market is modeled using Markov chains. In the theoretical part there are introduced stochastic processes with a focus on Markov chains. Furthermore, it outlines the conversion method of available data into a form required for the Markov model. Another theoretical chapter also outlines the issue of market segmentation and overview of the current majority of mobile services providers in Czech Republic. Also there is included a brief introduction of the software Mathematica. The practical part uses available data from ČSÚ and data published by mobile services providers. These data are brought to variations with respect to different probable changes in the market. Variations are calculated along with visualization in software Mathematica. The goal is to use data of the current state on the market in order to deduce various future distribution of market positions of mobile services providers in the Czech Republic and additional goal is assessment of usability of Markov chains in study of brand loyalty and attracting customers. Finally, the thesis contains a comparison and evaluation of the results along with recommendations for further research.